Annales scientifiques de l'É.N.S.

X. Stouff

Sur les rapports entre la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre et la théorie des surfaces

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 13 (1896), p. 9-40

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1896_3_13__9_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR LES RAPPORTS

ENTRE LA

THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU SECOND ORDRE

ET LA

THÉORIE DES SURFACES,

PAR M. X. STOUFF,

MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.

I.

Ce travail a pour objet l'application du développement de Taylor à la solution du problème de Plateau, généralisé pour une équation aux dérivées partielles quelconque du second ordre.

M. Schwartz s'est occupé, dans plusieurs Mémoires, des surfaces infiniment voisines d'une surface minima [1]. Cet auteur considère précisément la même figure que celle qui est étudiée ici, c'est-à-dire une bande superficielle limitée par deux courbes infiniment voisines, de telle sorte que la région qui les relie soit doublement connexe.

---

(1) *Voir* les Mémoires insérés dans les *Œuvres complètes de M. Schwartz*, Vol. I, p. 128, 168, 224.

Mais, pour lui, l'objet principal est l'étude de la variation du second ordre quand on compare la partie de surface minima aux surfaces voisines, soit en laissant invariable la limite de cette partie, soit en modifiant cette limite arbitrairement. Les recherches exposées ici sont beaucoup plus voisines de la théorie des caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre telle qu'elle est donnée par M. Darboux dans sa théorie des surfaces, et ont avec cette théorie de nombreux points de contact (1).

Les premiers paragraphes concernent les séries obtenues dont les premiers termes surtout offrent de l'intérêt et des interprétations géométriques.

Une idée qui tenait de bien près à la première était l'étude de la génération de ces surfaces par des courbes dépendant d'un ou de plusieurs paramètres. J'ai particulièrement cherché un critérium (2) permettant de décider si une équation aux dérivées partielles admet des surfaces pouvant être engendrées par des courbes satisfaisant à deux équations différentielles ordinaires données et combien d'infinités de pareilles surfaces.

Je donne enfin une formule d'élimination qui permet de résoudre le problème posé primitivement, en partant des formules obtenues par l'intégration de l'équation aux dérivées partielles, lorsque cette intégration est possible. Tel est le cas pour les équations aux dérivées partielles des surfaces développables et des surfaces minima.

II.

Soient x, y, z les trois coordonnées des points d'une surface S et $z_{p,q}$ la dérivée de z prise p fois par rapport à x et q fois par rapport à y; soient aussi une courbe dépendant d'un paramètre λ et définie par les équations

$$x = f(z, \lambda), \qquad y = g(z, \lambda), \tag{1}$$

---

(1) DARBOUX, *Cours de Géométrie de la Faculté des Sciences*. Troisième Partie, Livre VII, Chapitre V.

(2) Ce critérium se rattache d'ailleurs aux travaux bien connus de M. Bäcklund sur les équations aux dérivées partielles. *Voir* surtout *Mathematische Annalen*.

et une équation aux dérivées partielles du second ordre,

$$F(x, y, z, z_{10}, z_{01}, z_{20}, z_{11}, z_{02}) = 0. \tag{2}$$

On considère deux positions C, C′ de la courbe correspondant aux valeurs λ et $\lambda + \Delta\lambda$ du paramètre, un point M sur la courbe C. Je cherche à développer en séries, procédant suivant les puissances croissantes de $\Delta\lambda$, les valeurs des dérivées partielles de z par rapport à x et à y pour le point M, de façon que S contienne C et C′. En désignant par Δz, $\Delta\lambda$, Δx, Δy les variations correspondantes de z, λ, x, y, en développant Δz par rapport aux puissances de Δx, Δy et à leurs produits et en y substituant les valeurs de Δx et de Δy développées par rapport aux puissances de Δz et de $\Delta\lambda$, on obtient pour la courbe C et pour la courbe C′ respectivement les deux équations

$$= \sum_{p,q=0}^{p,q=\infty} \frac{1}{p!\,q!}\left(z_{pq} + \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{d^h z_{pq}}{d\lambda^h}\frac{\Delta\lambda^h}{h!}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^m x}{\partial z^m}\frac{\Delta z^m}{m!}\right)^p \left(\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\partial^n y}{\partial z^n}\frac{\Delta z^n}{n!}\right)^q,$$

$$= \sum_{p,q=0}^{p,q=\infty} \frac{1}{p!\,q!}\left(z_{pq} + \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{dz_{pq}}{d\lambda^h}\frac{\Delta\lambda^h}{h!}\right)\left(\sum_{m,r=1}^{m,r=\infty} \frac{\partial^{m+r} x}{\partial z^m\,\partial\lambda^r}\frac{\Delta z^m\,\Delta\lambda^r}{m!\,r!}\right)^p \left(\sum_{n,s=1}^{n,s=\infty} \frac{\partial^{n+s} y}{\partial z^n\,\partial\lambda^s}\frac{\Delta z^n\,\Delta\lambda^s}{n!\,s!}\right)^q \text{ (1)},$$

qui doivent être vérifiées pour des valeurs arbitraires attribuées à Δz et à $\Delta\lambda$.

On en déduit les équations

$$\left\{\begin{aligned} & z_{10}\frac{\partial x}{\partial z} + z_{01}\frac{\partial y}{\partial z} = 1, \\ & z_{10}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + z_{01}\frac{\partial y}{\partial\lambda} = 0, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} & z_{20}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 2z_{11}\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial z} + z_{02}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + z_{10}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + z_{01}\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0, \\ & z_{20}\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + z_{11}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial\lambda} + \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial z}\right) + z_{02}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial\lambda} + z_{10}\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial\lambda} + z_{01}\frac{\partial^2 y}{\partial z\,\partial\lambda} = 0, \\ & z_{20}\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2 + 2z_{11}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\lambda} + z_{02}\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2 + z_{10}\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2} + z_{01}\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda^2} + 2\frac{dz_{10}}{d\lambda}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + 2\frac{\partial z_{01}}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\lambda} = 0, \\ & \qquad\qquad \frac{dz_{10}}{d\lambda}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{dz_{01}}{d\lambda}\frac{\partial y}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right.$$

---

(1) Dans ces deux équations le couple $p = q = 0$ doit être exclu.

et généralement, en égalant à zéro le multiplicateur de $\Delta z^i \Delta\lambda^j$, on a pour l'équation (3)

$$(7)\quad \sum \frac{\dfrac{d^j z_{pq}}{d\lambda^h}\left(\dfrac{\partial^{m_1}x}{\partial z^{m_1}}\right)^{\alpha_1}\left(\dfrac{\partial^{m_2}x}{\partial z^{m_2}}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\dfrac{\partial^{m_k}x}{\partial z^{m_k}}\right)^{\alpha_k}\left(\dfrac{\partial^{n_1}y}{\partial z^{n_1}}\right)^{\beta_1}\left(\dfrac{\partial^{n_2}y}{\partial z^{n_2}}\right)^{\beta_2}\cdots\left(\dfrac{\partial^{n_l}y}{\partial z^{n_l}}\right)^{\beta_l}}{j!\,\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_k!\,\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_l!\,(m_1!)^{\alpha_1}(m_2!)^{\alpha_2}\ldots(m_k!)^{\alpha_k}(n_1!)^{\beta_1}(n_2!)^{\beta_2}\ldots(n_l!)^{\beta_l}} = 0,$$

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots + m_k\alpha_k + n_1\beta_1 + n_2\beta_2 + \ldots + n_l\beta_l = i,$$

$$p = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k,$$
$$q = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_l,$$

et pour l'équation (4)

$$(8)\quad \sum \frac{\dfrac{d^h z_{p.q}}{d\lambda^h}\left(\dfrac{\partial^{m_1+r_1}x}{\partial z^{m_1}\partial\lambda^{r_1}}\right)^{\alpha_1}\left(\dfrac{\partial^{m_2+r_2}x}{\partial z^{m_2}\partial\lambda^{r_2}}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\dfrac{\partial^{m_k+r_k}x}{\partial z^{m_k}\partial\lambda^{r_k}}\right)^{\alpha_k}\left(\dfrac{\partial^{n_1+s_1}y}{\partial z^{n_1}\partial\lambda^{s_1}}\right)^{\beta_1}\left(\dfrac{\partial^{n_2+s_2}y}{\partial z^{n_2}\partial\lambda^{s_2}}\right)^{\beta_2}\cdots\left(\dfrac{\partial^{n_l+s_l}y}{\partial z^{n_l}\partial\lambda^{s_l}}\right)^{\beta_l}}{\left\{\begin{array}{c} h!\,\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_k!\,\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_l!\,(m_1!)^{\alpha_1}(m_2!)^{\alpha_2}\ldots(m_k!)^{\alpha_k}(r_1!)^{\alpha_1}(r_2!)^{\alpha_2}\ldots(r_k!)^{\alpha_k} \\ \times(n_1!)^{\beta_1}(n_2!)^{\beta_2}\ldots(n_l!)^{\beta_l}(s_1!)^{\beta_1}(s_2!)^{\beta_2}\ldots(s_l!)^{\beta_l}\end{array}\right\}} = 0,$$

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots + m_k\alpha_k + n_1\beta_1 + n_2\beta_2 + \ldots + n_l\beta_l = i,$$
$$h + r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_k\alpha_k + s_1\beta_1 + s_2\beta_2 + \ldots + s_l\beta_l = j,$$

$$p = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k,$$
$$q = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_l.$$

On devra admettre la valeur o pour l'indice h, en convenant que la dérivée d'ordre o est la fonction elle-même.

On pourra grouper dans une même classe celles de ces équations qui proviennent de termes d'un même degré total par rapport à Δz et à $\Delta\lambda$. Le nombre des équations (7) et (8) de la $m^{\text{ième}}$ classe est $2m$, parce que l'équation (7), obtenue en égalant à zéro le multiplicateur de Δz^m, est la même que l'équation (8), obtenue en égalant à zéro dans (4) le multiplicateur du même terme, et parce qu'il n'y a pas d'équation (7) provenant de $\Delta\lambda^m$. Je vais faire voir que l'on peut trouver assez de conditions pour déterminer les quantités

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \qquad z_{m0},\quad z_{m-1,1},\quad \ldots,\quad z_{1,m-1},\quad z_{0m}, \\ \dfrac{dz_{m-1,0}}{d\lambda},\quad \dfrac{dz_{m-2,1}}{d\lambda},\quad \ldots,\quad \dfrac{dz_{0,m-1}}{d\lambda},\quad \ldots,\quad \dfrac{d^{m-1}z_{10}}{d\lambda^{m-1}},\quad \dfrac{d^{m-1}z_{01}}{d\lambda^{m-1}},\end{array}\right.$$

dont le nombre est $\dfrac{m(m+3)}{2}$.

Soit, en effet,

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(z, \lambda)},$$

nous aurons d'abord

$$(10) \qquad D z_{10} = \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \qquad D z_{01} = -\frac{\partial x}{\partial \lambda}.$$

Considérons la surface Σ, engendrée par la courbe mobile (1), et désignons par c_{pq} la dérivée partielle d'ordre p par rapport à x, et d'ordre q par rapport à y du z d'un point de cette surface. Soit

$$(11) \qquad \mathcal{E} = \frac{dz_{10}}{d\lambda}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{dz_{01}}{d\lambda}\frac{\partial y}{\partial \lambda},$$

on tire des équations (6)

$$(12) \quad z_{20} = c_{20} - \frac{2\mathcal{E}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}{D^2}, \qquad z_{11} = c_{11} + \frac{2\mathcal{E}\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial z}}{D^2}, \qquad z_{02} = c_{02} - \frac{2\mathcal{E}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}{D^2}.$$

L'équation (2) devient alors

$$F\left[x, y, z, c_{10}, c_{01}, c_{20} - \frac{2\mathcal{E}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}{D^2}, c_{11} + \frac{2\mathcal{E}\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial z}}{D^2}, c_{02} - \frac{2\mathcal{E}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}{D^2}\right] = 0;$$

on tirera de cette équation une ou plusieurs valeurs pour l'inconnue $\mathcal{E}$, et finalement on aura

$$(13) \qquad \frac{dz_{10}}{d\lambda} = \frac{-\mathcal{E}\frac{\partial y}{\partial z}}{D}, \qquad \frac{dz_{01}}{d\lambda} = \frac{\mathcal{E}\frac{\partial x}{\partial z}}{D}.$$

Supposons $m > 2$; si nous envisageons le faisceau de surfaces déterminées par la courbe fixe C et la courbe mobile C′, pour chacune de ces surfaces z est une fonction de x et de y, et par conséquent, pour le faisceau, z doit être considérée comme une fonction de x, de y et de λ. Formons, à ce point de vue, les dérivées partielles d'ordre $m-2$ du premier membre de l'équation (2) par rapport à x, y et λ. En les égalant à zéro, nous obtiendrons $\frac{m(m-1)}{2}$ équations qui, jointes aux équations (7) et (8) de la $m^{\text{ième}}$ classe, font en tout $\frac{m(m+3)}{2}$, c'est-à-dire précisément le nombre nécessaire pour déterminer les quantités (9). Il s'agit maintenant d'étudier de plus près les équations qui fournissent ces quantités. Le déterminant de leurs coefficients a une forme générale facile à saisir. Qu'il nous suffise, afin d'éviter des longueurs, d'écrire ce déterminant pour $m = 3$. Nous posons

$$\frac{\partial x}{\partial z} = a, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = b, \qquad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \beta,$$

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{20}} = \mathrm{A}, \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{11}} = \mathrm{B}, \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{02}} = \mathrm{C},$$

$$\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2b & 3ab^2 & b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^2\alpha & 2ab\alpha + a^2\beta & 2ab\beta + b^2\alpha & b^2\beta & a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 0 \\ a\alpha^2 & b^2\alpha + 2a\alpha\beta & a\beta^2 + 2b\alpha\beta & b\beta^2 & a\alpha & a\beta + b\alpha & b\beta & a & b \\ \alpha^3 & 3\alpha^2\beta & 3\alpha\beta^2 & \beta^3 & \alpha^2 & 2\alpha\beta & \beta^2 & \alpha & \beta \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}.$$

En combinant les lignes, on décompose facilement ce déterminant dans le produit suivant :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ a\alpha & a\beta + b\alpha & b\beta \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a^3 & 3a^2b & 3ab^2 & b^3 \\ a^2\alpha & 2ab\alpha + a^2\beta & b^2\alpha + 2ab\beta & b^2\beta \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & 0 \\ 0 & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{vmatrix}.$$

En multipliant les deux derniers déterminants par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ -b & -a \end{vmatrix},$$

on reconnaît que ce produit peut être remplacé par

$$\mathrm{D}^3 \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 & 0 \\ 0 & a^2 & 2ab & b^2 \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & 0 \\ 0 & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{vmatrix}. \tag{14}$$

En ajoutant les colonnes du second déterminant, multipliées respectivement par b^3, $-ab^2$, a^2b, $-a^3$, on reconnaît qu'il est divisible par $\mathrm{A}b^2 - \mathrm{B}ab + \mathrm{B}a^2$; en appliquant un procédé analogue à ses dérivées partielles par rapport à a et b, on reconnaît qu'elles jouissent de la même propriété. Ce produit est, par suite, égal à

$$\mathrm{D}^3(\mathrm{A}b^2 - \mathrm{B}ab + \mathrm{B}a^2)^3;$$

d'une manière générale, le déterminant des coefficients des quantités (9) est

$$\mathrm{D}^{n-1}\left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{20}}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{11}}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{02}}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}. \tag{15}$$

Les mineurs de ce déterminant pourraient se développer facilement d'une manière analogue; on voit donc que, si le produit

$$\mathrm{D}\left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{20}}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{11}}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{02}}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right] \gtrless 0,$$

on aura, pour tous les coefficients des séries, des quantités finies et déterminées. Ainsi

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
z_{30} = {} & \frac{(c_{30}a^2 + 2c_{21}ab + c_{12}b^2)[\mathrm{C}^2a^2 - \mathrm{BC}ab + (\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC})b^2] - (c_{21}a^2 + 2c_{12}ab + c_{03}b^2)(2\mathrm{C}^2ab - \mathrm{BC}b^2)}{(\mathrm{A}b^2 - \mathrm{B}ab + \mathrm{C}a^2)^2} \\
& - \frac{2\mathcal{E}\left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)[3\mathrm{C}b(\mathrm{A}b^2 - \mathrm{B}ab + \mathrm{C}a^2) + (\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC})b^3]}{\mathrm{D}(\mathrm{A}b^2 - \mathrm{B}ab + \mathrm{C}a^2)^2} \\
& - \frac{\left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}z_{10} + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{10}}z_{20} + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{01}}z_{11}\right)(\mathrm{A}b^4 - \mathrm{B}ab^3 + 3\mathrm{C}a^2b^2) + \left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}z_{01} + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{10}}z_{11} + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{01}}z_{02}\right)(\mathrm{B}b^4 - 2\mathrm{C}ab^3)}{(\mathrm{A}b^2 - \mathrm{B}ab + \mathrm{C}a^2)^2}, \\
z_{21} = {} & \frac{(c_{30}a^2 + 2c_{21}ab + c_{12}b^2)(2\mathrm{AC}ab - \mathrm{AB}b^2) + (c_{21}a^2 + 2c_{12}ab + c_{03}b^2)(\mathrm{C}^2a^2 - \mathrm{AC}b^2)}{(\mathrm{A}b^2 - \mathrm{B}ab + \mathrm{C}a^2)^2} \\
& + \frac{2\mathcal{E}\left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)[(2\mathrm{B}b + \mathrm{C}a)(\mathrm{A}b^2 - \mathrm{B}ab + \mathrm{C}a^2) + (\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC})b^2a]}{\mathrm{D}(\mathrm{A}b^2 - \mathrm{B}ab + \mathrm{C}a^2)^2} \\
& - \frac{\left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}z_{10} + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{10}}z_{20} + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{01}}z_{11}\right)(\mathrm{A}b^4 + \mathrm{C}a^2b^2) + \left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}z_{01} + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{10}}z_{11} + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{01}}z_{02}\right)(\mathrm{B}a^2b^2 - 2\mathrm{C}a^3b)}{(\mathrm{A}b^2 - \mathrm{B}ab + \mathrm{C}a^2)^2},
\end{aligned}\right.$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
z_{12} = {} & \frac{(c_{30}a^2 + 2c_{21}ab + c_{12}b^2)(-ACa^2 + A^2b^2) + (c_{21}a^2 + 2c_{12}ab + c_{03}b^2)(-BCa^2 + 2ACab)}{(Ab^2 - Bab + Ca^2)^2} \\
& - \frac{2\mathcal{E}\left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)[(2Ba + Ab)(Ab^2 - Bab + Ca^2) + (B^2 - 4AC)a^2 b]}{D(Ab^2 - Bab + Ca^2)^2} \\
& - \frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}z_{10} + \dfrac{\partial F}{\partial z_{10}}z_{20} + \dfrac{\partial F}{\partial z_{01}}z_{11}\right)(Ab^3a - Ba^2b^2) + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}z_{01} + \dfrac{\partial F}{\partial z_{10}}z_{11} + \dfrac{\partial F}{\partial z_{01}}z_{02}\right)(Ca^4 + Aa^2b^2)}{(Ab^2 - Bab + Ca^2)^2}, \\
z_{03} = {} & \frac{(c_{30}a^2 + 2c_{21}ab + c_{12}b^2)(ABa^2 - 2A^2ab) + (c_{21}a^2 + 2c_{12}ab + c_{03}b^2)[(B^2 - AC)a^2 - ABab + A^2b^2]}{(Ab^2 - Bab + Ca^2)^2} \\
& + \frac{2\mathcal{E}\left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)[3Aa(Ab^2 - Bab + Ca^2) + (B^2 - 4AC)a^3]}{D(Ab^2 - Bab + Ca^2)^2} \\
& - \frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}z_{10} + \dfrac{\partial F}{\partial z_{10}}z_{20} + \dfrac{\partial F}{\partial z_{01}}z_{11}\right)(2Aa^3b - Ba^4) + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}z_{01} + \dfrac{\partial F}{\partial z_{10}}z_{11} + \dfrac{\partial F}{\partial z_{01}}z_{02}\right)(3A^2b^2 - 2Ba^3b + Ca^4)}{(Ab^2 - Bab + Ca^2)^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour obtenir les équations (16), il suffit de combiner celles qui correspondent aux multiplicateurs de Δz^3 et de $\Delta z^2 \Delta\lambda$ dans (3) avec les dérivées de (2) par rapport à x et à y. On considérera ensuite celle qui résulte du multiplicateur de $\Delta z \Delta\lambda^2$ dans (3) avec les deux suivantes

$$
(17) \qquad \left\{
\begin{aligned}
& a^2 \frac{dz_{20}}{d\lambda} + 2ab\frac{dz_{11}}{d\lambda} + b^2\frac{dz_{02}}{d\lambda} + \frac{dz_{10}}{d\lambda}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + \frac{dz_{01}}{d\lambda}\frac{d^2 y}{dz^2} = 0, \\
& A\frac{dz_{20}}{d\lambda} + B\frac{dz_{11}}{d\lambda} + C\frac{dz_{02}}{d\lambda} + \frac{dF}{dx_{10}}\frac{dz_{10}}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial z_{01}}\frac{dz_{01}}{d\lambda} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

qui déterminent $\frac{dz_{20}}{d\lambda}$, $\frac{dz_{11}}{d\lambda}$, $\frac{dz_{02}}{d\lambda}$. Pour avoir $\frac{d^2 z_{10}}{d\lambda^2}$, $\frac{d^2 z_{01}}{d\lambda^2}$, il suffira d'associer à celle qui correspond au multiplicateur de $\Delta\lambda^3$ dans (3) avec

$$
a\frac{d^2 z_{10}}{d\lambda^2} + b\frac{d^2 z_{01}}{d\lambda^2} = 0.
$$

Il est facile de reconnaître que, pour toutes les équations aux dérivées partielles du second ordre, *linéaires* au sens de M. Darboux, la quantité $\mathcal{E}$ est déterminée par une équation du premier degré [1].

---

[1] Les équations aux dérivées partielles des surfaces développables et des surfaces minima doivent être considérées comme linéaires.

Applications aux surfaces développables. — L'équation

$$z_{20}z_{02} - z_{11}^2 = 0$$

donne

$$\mathcal{E} = \frac{D^2(c_{20}c_{02} - c_{11}^2)}{2\left[c_{20}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 2c_{11}\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial z} + c_{02}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2\right]},$$

et, en désignant par ρ_1, ρ_2 les deux rayons de courbure principaux de la surface Σ, décrite par la courbe mobile, R le rayon de courbure de la section normale tangente à cette courbe, θ l'angle de la surface développable avec cette surface, p la distance des deux courbes correspondant aux valeurs λ et $\lambda + d\lambda$, on a

$$\theta = \frac{Rp}{2\rho_1\rho_2}.$$

En désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la génératrice de la surface développable, ces quantités doivent satisfaire aux deux équations

$$z_{20}\alpha + z_{11}\beta = 0, \qquad z_{11}\alpha + z_{02}\beta = 0$$

ou

$$D^2(c_{20}\alpha + c_{11}\beta) - 2\mathcal{E}\frac{\partial y}{\partial z}\left(\alpha\frac{\partial y}{\partial z} - \beta\frac{\partial x}{\partial z}\right) = 0,$$

$$D^2(c_{11}\alpha + c_{02}\beta) + 2\mathcal{E}\frac{\partial x}{\partial z}\left(\alpha\frac{\partial y}{\partial z} - \beta\frac{\partial x}{\partial z}\right) = 0,$$

d'où, par l'élimination de $\mathcal{E}$,

$$(c_{20}\alpha + c_{11}\beta)\frac{\partial x}{\partial z} + (c_{11}\alpha + c_{02}\beta)\frac{\partial y}{\partial z} = 0,$$

c'est-à-dire que la direction de la génératrice est conjuguée de la direction de la tangente à la courbe mobile par rapport à la surface Σ. Le rayon de courbure de la surface développable est nécessairement le rayon de courbure de la section normale perpendiculaire à cette génératrice.

Le point de l'arête de rebroussement qui est sur cette génératrice s'obtient par l'équation

$$z_{30}(X - x) + z_{21}(Y - y) - \left(c_{20}\frac{\partial x}{\partial z} + c_{11}\frac{\partial y}{\partial z}\right) = 0.$$

Application aux surfaces minima. — L'équation correspondante est

$$(1+z_{01}^2)z_{02}-2z_{10}z_{01}z_{11}+(1+z_{10}^2)z_{20}=0,$$

$$\theta=\frac{p(\rho_1+\rho_2)}{2\rho_1\rho_2},$$

en adoptant les mêmes notations que tout à l'heure : des formules équivalentes à cette dernière formule sont d'ailleurs bien connues.

En désignant par ω l'angle que fait la courbe mobile avec l'une des lignes de courbure de Σ et par α l'angle que fait une ligne asymptotique de S avec la même ligne de courbure, on a

$$\tan 2\alpha=\frac{\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}+\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)\cos 2\omega}{\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)\sin 2\omega}.$$

Si la surface Σ est une sphère, on a

$$2\alpha=(2k+1)\frac{\pi}{2}-2\omega.$$

Dans le cas où

$$\frac{\partial F}{\partial z_{20}}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2-\frac{\partial F}{\partial z_{11}}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial z_{02}}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2=0 \quad [1], \tag{18}$$

les dérivées secondes se calculent comme en général, mais il n'en est pas de même des dérivées troisièmes. Ce cas se présente en particulier lorsque l'équation aux dérivées partielles donnée est celle des surfaces développables, quand la courbe mobile devient tangente à l'une des asymptotiques de Σ et quand l'équation aux dérivées partielles est celle des surfaces minima lorsque la courbe mobile présente un élément de longueur nulle. Nous appellerons de pareils éléments *éléments caractéristiques*.

---

[1] Le premier membre de cette équation a la même valeur pour la surface Σ et pour la surface cherchée.

II.

Quand une pareille circonstance se présente, la surface passant par les deux courbes infiniment voisines présente, en général, des singularités. Lorsque les éléments caractéristiques sont isolés, la surface ne cesse pas de subsister, mais elle est mal définie dans le voisinage des éléments caractéristiques. Il peut aussi arriver que la courbe mobile se déplace de manière que tous les éléments soient caractéristiques; tel est, pour le problème des surfaces minima, le cas où la surface Σ est engendrée par un système de ses lignes de longueur nulle et pour le problème des surfaces développables le cas où Σ est engendrée par ses lignes asymptotiques.

Reportons-nous à l'équation

$$F\left[x, y, z, c_{10}, c_{01}, c_{20} - \frac{2\mathcal{E}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}{D^2}, c_{11} + \frac{2\mathcal{E}\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial z}}{D^2}, c_{02} - \frac{2\mathcal{E}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}{D^2}\right] = 0.$$

Si l'équation (18) a lieu, on voit qu'elle présente une racine double par rapport à $\mathcal{E}$, pour le cas du moins où l'équation aux dérivées partielles n'est pas linéaire. Les éléments caractéristiques isolés jouent, par suite, le rôle suivant. Il existe plusieurs surfaces passant par les deux courbes infiniment voisines, et c'est au passage à l'élément caractéristique que ces surfaces se raccordent entre elles, à peu près comme les feuilles d'une surface de Riemann.

Si l'équation aux dérivées partielles est linéaire, $\mathcal{E}$ devient infini, pourvu toutefois que la surface Σ elle-même ne satisfasse pas à l'équation aux dérivées partielles à l'élément caractéristique considéré : alors $\mathcal{E}$ se présente sous une forme indéterminée. Comme toute courbe analytique présente, en général, des éléments caractéristiques, il y aura évidemment un grand intérêt à étudier les déplacements d'une courbe tels que, pour tous les éléments caractéristiques, la surface Σ satisfasse à l'équation aux dérivées partielles.

Considérons, par exemple, le cas des surfaces minima. Une courbe algébrique quelconque, dont le plan se déplace parallèlement à lui-même, peut satisfaire à cette condition. Mais je renvoie à un Mémoire ultérieur l'étude approfondie de ces questions.

III.

Nous avons considéré une courbe mobile dépendant d'un seul paramètre λ; il est évident que les calculs analogues peuvent s'appliquer à une courbe mobile dépendant d'un nombre quelconque de paramètres. Mais il y a intérêt à envisager le problème à un autre point de vue. La manière la plus naturelle de représenter une famille de courbes consiste à donner les équations différentielles dépouillées de paramètres qui admettent pour intégrales les courbes de cette famille. On peut donc prendre pour objet d'étudier de nouveau le problème primitif en supposant qu'il ait été posé de cette façon. Mais on voit aisément que des recherches nouvelles présenteraient peu d'intérêt et seraient presque identiques aux précédentes. Au contraire, une question dont la réponse est immédiate lorsque les équations de la courbe mobile sont données sous la forme (1) devient assez ardue quand on se trouve vis-à-vis d'équations différentielles. Quand la courbe mobile engendre-t-elle une surface satisfaisant à la relation (2)?

Considérons dans une courbe x et y comme fonctions de z; désignons par $x^{(n)}$ et $y^{(n)}$ les dérivées d'ordre n de x et de y par rapport à z. Afin d'abréger le langage, je supposerai que l'on envisage avec l'équation (2) la famille quadruplement infinie de courbes C représentée par les deux équations

$$(19)\qquad \begin{cases} x'' = f(x, y, z, x', y'), \\ y'' = g(x, y, z, x', y'). \end{cases}$$

Les raisonnements s'appliqueraient d'ailleurs à des courbes satisfaisant à deux équations différentielles quelconques. Pour exprimer que la surface est engendrée par ces courbes, j'observe d'abord qu'il en passe par un point donné d'une surface quelconque un nombre déterminé, dépendant de la forme des équations (19) et ayant avec la surface un contact du second ordre. En effet, je développe pour la courbe Δx et Δy en séries procédant suivant les puissances ascendantes de z, et pour la surface Δz en séries procédant suivant les puissances croissantes de Δx et de Δy; je substitue à la place de Δx, Δy leurs valeurs, et j'exprime que, dans l'équation obtenue, les coefficients de Δz et de Δz^2 sont nuls.

Voici l'indication des calculs :

$$\begin{aligned}\Delta x &= x'\,\Delta z + \tfrac{1}{2} f(x, y, z, x', y')\,\Delta z^2 \\ &\qquad + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial x'} + g\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\Delta z^3 + \ldots, \\ \Delta y &= y'\,\Delta z + \tfrac{1}{2} g(x, y, z, x', y')\,\Delta z^2 \\ &\qquad + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial g}{\partial x} x' + \frac{\partial g}{\partial y} y' + \frac{\partial g}{\partial z} + f\frac{\partial g}{\partial x'} + g\frac{\partial g}{\partial y'}\right)\Delta z^3 + \ldots, \\ \Delta z &= z_{10}\,\Delta x + z_{01}\,\Delta y + \ldots,\end{aligned}$$

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &z_{10} x' + z_{01} y' - 1 = 0, \\ &z_{10} f(x, y, z, x', y') + z_{01}\, g(x, y, z, x', y') \\ &\qquad + z_{20} x'^2 + 2 z_{11} x' y' + z_{02} y'^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

Les équations (20) déterminent x' et y', avec ambiguïté il est vrai, en général lorsque l'on donne la surface et un point M sur cette surface.

Supposons maintenant que la surface soit telle que les équations (20) et l'équation suivante, obtenue en égalant à zéro le coefficient de Δz^3, soient compatibles pour tout point M de la surface

$$(21)\qquad \begin{aligned} &z_{10}\left(\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial x'} + g\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \\ &+ z_{01}\left(\frac{\partial g}{\partial x} x' + \frac{\partial g}{\partial y} y' + \frac{\partial g}{\partial z} + f\frac{\partial g}{\partial x'} + g\frac{\partial g}{\partial y'}\right) \\ &+ 3 z_{20} x' f(x, y, z, x', y') \\ &+ 3 z_{11}[x' g(x, y, z, x', y') + y' f(x, y, z, x', y')] \\ &+ 3 z_{02} y' g(x, y, z, x', y') + z_{30} x'^3 + 3 z_{21} x'^2 y' + 3 z_{12} x' y'^2 + z_{03} y'^3 = 0.\end{aligned}$$

Une des courbes C qui ont avec la surface au point M un contact du second ordre aura un contact du troisième ordre. Il en résulte que la surface admet une génération par les courbes C. En effet, prenons sur la courbe dont le contact est du troisième ordre un point M′ à une distance infiniment petite du premier ordre du point M. Le point M′, en négligeant les infiniment petits du quatrième ordre, peut être considéré comme appartenant à la surface. La courbe C présente encore au point M′, avec la surface, un contact du second ordre. Elle coïncide donc avec l'une des courbes qui présente avec la surface un contact du second ordre en M′ et, par raison de continuité, avec celle dont le contact est du troisième ordre. Le même raisonnement pouvant s'appliquer de proche en proche, on voit que la courbe est tout entière sur la surface.

En éliminant x' et y' entre les équations (20) et (21), on obtiendra donc une équation aux dérivées partielles du troisième ordre

$$G(x, y, z, z_{10}, z_{01}, z_{20}, z_{11}, z_{02}, z_{30}, z_{21}, z_{12}, z_{03}) = 0, \tag{22}$$

qui est celle des surfaces engendrées par les courbes C.

S'il existe une surface satisfaisant à la fois à l'équation (2) et à l'équation (22), les dérivées partielles de z par rapport à x et à y doivent vérifier ces équations et celles qu'on en déduit par la différentiation. Nous partagerons ces équations en groupes, d'après leur ordre. Le premier groupe se composera donc de (2); le second des dérivées de (2) et de l'équation (22); le troisième des trois dérivées secondes de (2) et des deux dérivées premières de (22); etc.; le $n^{\text{ième}}$ des n dérivées partielles d'ordre $n-1$ de (2), et des $n-1$ dérivées partielles d'ordre $n-2$ de (22). L'ensemble des équations des n premiers groupes, dont le nombre est n^2, contient donc $\frac{(n+1)(n+2)}{2}+2$ quantités, à savoir x, y, z et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $n+1$. Il est clair que le nombre des équations croît plus rapidement que celui des quantités qu'elles contiennent. Mais, pour que le problème proposé soit possible, il faut évidemment que x et y restent arbitraires. Donc, dès que n^2 surpasse $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, c'est-à-dire atteint la valeur *quatre*, certaines des équations de l'ensemble des n premiers groupes doivent être des conséquences des autres [1].

---

[1] Comparer une Note de Bianchi (*Rendiconti dei Lincei*, 1886); un article de Pianichetti dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*.

1° L'ensemble des quatre premiers groupes contient seize équations et dix-sept quantités. On exprimera que la seizième est une conséquence des quinze premières. Il y aura alors une surface et une seule satisfaisant aux équations (2) et (22) à la fois. En effet, si l'on passe aux groupes suivants, on trouve que le nombre des équations indépendantes croît précisément de la même façon que le nombre des dérivées partielles de z; car le cinquième groupe a neuf équations dont il faut retrancher 2, comme dérivées partielles d'une équation identique; et il y a aussi sept nouvelles dérivées partielles de z, et ainsi de suite.

2° On exprime que la quinzième et la seizième équations sont des conséquences identiques des quatorze autres. On voit alors, comme dans le cas précédent, que les deux équations aux dérivées partielles ont en commun une famille de surfaces dépendant d'un paramètre.

3° Si les trois dernières sont des conséquences des autres, la famille des surfaces communes dépend de deux paramètres, et ainsi de suite.

Nous appliquerons ces considérations à des surfaces très connues. Le réciproquant, appelé *schwarzien* par M. Sylvester, est

$$\frac{\dfrac{d^3 z}{du^3}}{\dfrac{dz}{du}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{d^2 z}{du^2}}{\dfrac{dz}{du}}\right)^2;$$

il se transforme lorsque l'on y remplace u par $x+iy$ et z par $x-iy$ dans le premier membre de l'équation différentielle des cercles

$$y'''(1+y'^2) - 3y'y''^2 = 0.$$

En appliquant la méthode exposée plus haut, on trouve, pour l'équation aux dérivées partielles des surfaces engendrées par un cercle dont le plan reste parallèle au plan des xz,

$$z_{30}(1+z_{10}^2) - 3z_{20}^2 z_{10} = 0. \tag{23}$$

Considérons, avec cette équation, l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima.

On formera les groupes suivants :

$$\text{(I)}\qquad z_{20}(1+z_{01}^2) - 2z_{11}z_{10}z_{01} + z_{02}(1+z_{10}^2) = 0,$$

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} z_{30}(1+z_{01}^2) - 2z_{21}z_{10}z_{01} + z_{12}(1+z_{10}^2) + 2z_{10}(z_{20}z_{02} - z_{11}^2) = 0, \\ z_{21}(1+z_{01}^2) - 2z_{12}z_{10}z_{01} + z_{03}(1+z_{10}^2) + 2z_{01}(z_{20}z_{02} - z_{11}^2) = 0, \\ z_{30}(1+z_{10}^2) - 3z_{20}^2z_{10} = 0; \end{cases}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} z_{40}(1+z_{01}^2) - 2z_{31}z_{10}z_{01} + z_{22}(1+z_{10}^2) + 2z_{30}(z_{11}z_{01} + z_{02}z_{10}) \\ \qquad - z_{21}(2z_{20}z_{01} + 6z_{11}z_{10}) + 4z_{12}z_{20}z_{10} + 2z_{20}(z_{20}z_{02} - z_{11}^2) = 0, \\ z_{31}(1+z_{01}^2) - 2z_{22}z_{10}z_{01} + z_{13}(1+z_{10}^2) + 2z_{30}z_{02}z_{01} - 2z_{21}z_{11}z_{01} \\ \qquad - 2z_{12}z_{11}z_{10} + 2z_{03}z_{20}z_{10} + 2z_{11}(z_{20}z_{02} - z_{11}^2) = 0, \\ z_{22}(1+z_{01}^2) - 2z_{13}z_{10}z_{01} + z_{04}(1+z_{10}^2) + 4z_{21}z_{02}z_{01} \\ \qquad - z_{12}(2z_{10}z_{02} + 6z_{11}z_{01}) + 2z_{03}(z_{11}z_{10} + z_{20}z_{01}) \\ \qquad\qquad + 2z_{02}(z_{20}z_{02} - z_{11}^2) = 0, \\ z_{40}(1+z_{10}^2) - 4z_{30}z_{20}z_{10} - 3z_{20}^3 = 0, \\ z_{31}(1+z_{10}^2) + 2z_{30}z_{11}z_{10} - 6z_{21}z_{20}z_{10} - 3z_{20}^2z_{11} = 0; \end{cases}$$

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} z_{50}(1+z_{01}^2) - 2z_{41}z_{10}z_{01} + z_{32}(1+z_{10}^2) + z_{40}(4z_{11}z_{01} + 2z_{02}z_{10}) \\ \qquad - z_{31}(4z_{20}z_{01} + 8z_{11}z_{10}) + 6z_{22}z_{20}z_{10} - 6(z_{21})^2z_{10} \\ \qquad\qquad + 6z_{30}z_{20}z_{02} - 12z_{21}z_{11}z_{20} + 6z_{12}z_{20}^2 = 0, \\ z_{50}(1+z_{10}^2) - 2z_{40}z_{20}z_{10} - 4(z_{30})^2z_{10} - 13z_{30}(z_{20})^2 = 0, \\ z_{41}(1+z_{10}^2) + 2z_{40}z_{11}z_{10} - 4z_{31}z_{20}z_{10} \\ \qquad - 4z_{30}z_{21}z_{10} - 4z_{30}z_{20}z_{11} - 9z_{21}z_{20}^2 = 0, \\ z_{32}(1+z_{10}^2) + 4z_{31}z_{11}z_{10} - 6z_{22}z_{20}z_{10} + 2z_{30}z_{12}z_{10} - 6(z_{21})^2z_{10} \\ \qquad + 3z_{30}(z_{11})^2 - 12z_{21}z_{20}z_{11} - 3(z_{20})^2z_{12} = 0. \end{cases}$$

En multipliant les quatre équations (IV), respectivement par $-(1+z_{10}^2)$, $1+z_{01}^2$, $2z_{10}z_{01}$, $(1+z_{10}^2)$, j'élimine les dérivées cinquièmes, et j'obtiens l'équation

$$\begin{aligned} (24)\qquad & -8z_{40}z_{11}z_{10}^2z_{01} - 4z_{11}z_{01}z_{40}(1+z_{10}^2) \\ & + 4z_{31}[(z_{20}z_{01} + 3z_{11}x_{10})(1+z_{10}^2) + 2z_{20}z_{01}^2z_{01}] \\ & - 12z_{22}z_{20}z_{10}(1+z_{10}^2) + 2z_{30}(z_{20}z_{02} - z_{11}^2)(3z_{10}^2 - 1) \\ & \qquad + 18z_{20}^2z_{10}(z_{20}z_{02} - z_{11}^2) = 0. \end{aligned}$$

J'élimine z_{22} entre l'équation (24) et la première des équations (III).

J'obtiens ainsi

$$
\begin{aligned}
(25)\quad & -8z_{40}z_{10}^2 z_{01}z_{11} + 4z_{40}[3z_{20}z_{10}(1+z_{01}^2) - z_{11}z_{01}(1+z_{10}^2)] \\
& + 4z_{31}[(z_{20}z_{01} + 3z_{11}z_{10})(1+z_{10}^2) - 4z_{20}z_{10}^2 z_{01}] \\
& + 2z_{30}[(z_{20}z_{02} - z_{11}^2)(3z_{10}^2 - 1) + 12z_{20}z_{10}(z_{11}z_{01} + z_{02}z_{10})] \\
& - 24z_{21}z_{20}z_{10}(z_{20}z_{01} + 3z_{11}z_{10}) \\
& \qquad\qquad + 48z_{12}z_{20}^2 z_{10}^2 + 42z_{20}^2 z_{10}(z_{20}z_{02} - z_{11}^2) = 0.
\end{aligned}
$$

La seconde et la troisième des équations (III) sont inutiles, de même que dans le quatrième groupe trois équations qui n'ont pas été écrites. Je porte dans l'équation (25) les valeurs de z_{40} et de z_{31}, tirées des deux dernières équations (III), et celle de z_{30}, tirée de (II), et, après de nombreuses réductions, j'obtiens une équation identique.

x, y et les dérivées partielles q, contenues dans les quatre groupes d'équations, font en tout vingt-deux quantités; ces quatre groupes présentent en tout seize équations, dont une est la conséquence des autres. Donc les deux équations aux dérivées partielles ont en commun une famille de surfaces dépendant de cinq paramètres, excès du nombre vingt-deux, sur le nombre seize des équations, diminué d'une unité, à cause de la seule relation identique, et augmenté d'une unité parce qu'une surface est une multiplicité doublement infinie. Et, en effet, les surfaces cerclées de Riemann, dont les plans de sections circulaires sont parallèles au plan des zx, dépendent de cinq paramètres.

IV.

Si l'on sait intégrer l'équation (2), on en tirera une valeur de z contenant deux fonctions arbitraires. Pour déterminer ces deux fonctions, de telle sorte que la surface passe par deux courbes données, on est conduit à la recherche du problème suivant :

Étant données deux équations avec deux ou trois variables, et représentées en égalant à zéro des séries dont on admet la convergence

$$(26)\quad 0 = a_{100}x + a_{010}y + a_{001}z + a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2 + a_{011}yz + a_{101}xz + a_{110}xy + \ldots,$$

$$(27)\quad 0 = b_{100}x + b_{010}y + b_{001}z + b_{200}x^2 + b_{020}y^2 + b_{002}z^2 + b_{011}yz + b_{101}xz + b_{110}xy + \ldots,$$

trouver la condition pour qu'elles représentent la même relation entre x, y, z.

En considérant x, y, z comme des quantités infiniment petites du premier ordre, il faut évidemment que les coefficients de x, de y et de z soient proportionnels.

D'après cette remarque, après avoir retranché de la seconde équation la première, multipliée par un facteur convenable, on pourra la réduire à commencer par des termes du second degré. Bornons-nous, pour le moment, à deux variables. Nous aurons donc les deux équations

$$(28) \qquad o = a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + \ldots,$$

$$(29) \qquad o = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + \ldots.$$

Le nombre des conditions cherchées est infini; elles peuvent évidemment s'obtenir en exprimant que la seconde série, ordonnée par rapport aux puissances croissantes de x et de y, est divisible par la première. On voit ainsi que ces conditions sont toutes linéaires par rapport aux b; mais on les obtient ainsi sous des formes non symétriques et beaucoup trop compliquées.

Les premiers membres de ces équations sont des fonctions linéaires et homogènes des b, et aussi des fonctions homogènes des a, mais non linéaires. Convenons d'appeler *poids d'un monome* par rapport aux premiers ou aux seconds indices, la somme des premiers ou des seconds indices dont sont affectées les lettres qu'il renferme, multipliées respectivement par les exposants de ces lettres. Le poids des monomes qui constituent le premier membre d'une de ces équations est constant, soit par rapport aux premiers, soit par rapport aux seconds indices. Une de ces équations peut, par suite, se mettre sous la forme

$$(30) \qquad \sum_{k j_1 j_2 \ldots j_p} \lambda_{h i_1 i_2 \ldots i_p} b_{hk} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_p j_p} = o.$$

Le nombre des facteurs a est fixe et égal à n, et l'on a

$$h + \Sigma i = n, \qquad k + \Sigma j = n.$$

Le nombre n prend les valeurs 2, 3, 4, ... On peut employer plusieurs procédés pour calculer les coefficients :

1° *Méthode des coefficients indéterminés.* — L'équation (30) doit être vérifiée lorsque la série (29) est égale au produit de la série (28) par $x^r y^s$. Alors $b_{hk} = a_{h-r,k-s}$. En écrivant que (30) devient alors une identité, on obtient un certain nombre de relations entre les λ qui permettent de former l'équation.

2° Si le second membre de (29) est divisible par le second membre de (28), on a, en désignant par

$$c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + \ldots, \tag{31}$$

le quotient de (29) par (28), et en désignant par $A_n(x, y)$, $B_n(x, y)$, $C_n(x, y)$ respectivement l'ensemble des termes de degré n dans (28), (29) et (31), l'identité

$$\begin{aligned} B_n(x,y) &- A_1(x,y)\,C_{n-1}(x,y) \\ &- A_2(x,y)\,C_{n-2}(x,y) - \ldots - A_{n-1}(x,y)\,C_1(x,y) = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Les conditions cherchées résultent de l'élimination des coefficients c. Nous considérerons les valeurs que prennent les polynomes A_n, B_n, C_n et leurs dérivées partielles, quand on y remplace respectivement x et y par a_{01} et par $-a_{10}$, et nous aurons pour ces valeurs spéciales

$$B_n - A_2C_{n-2} - A_3C_{n-3} - \ldots - A_{n-1}C_1 = 0. \tag{33}$$

En différentiant (32) par rapport à x et à y, il vient, en changeant n en $n-1$,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial B_{n-1}}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial x}C_{n-2} - A_1\frac{\partial C_{n-2}}{\partial x} - \frac{\partial A_2}{\partial x}C_{n-3} - A_2\frac{\partial C_{n-3}}{\partial x} - \ldots = 0, \\ &\frac{\partial B_n}{\partial y} - \frac{\partial A_1}{\partial y}C_{n-2} - A_1\frac{\partial C_{n-2}}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial y}C_{n-3} - A_2\frac{\partial C_{n-3}}{\partial y} - \ldots = 0. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

En remplaçant x et y par les valeurs spéciales, A_1 s'annule; on a d'ailleurs l'identité

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial y}\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial A_2}{\partial y}\right),$$

et l'on obtient ainsi, pour les valeurs spéciales, l'équation

$$(35)\qquad B_n + \frac{1}{2}\frac{\partial A_2}{\partial y}\frac{\partial B_{n-1}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial A_2}{\partial x}\frac{\partial B_{n-1}}{\partial y} - A_3 C_{n-3} - A_2\frac{\partial A_2}{\partial y}\frac{\partial C_{n-3}}{\partial x} + A_2\frac{\partial A_2}{\partial x}\frac{\partial C_{n-3}}{\partial y} + \ldots = 0,$$

où les polynomes C_{n-1}, C_{n-2} sont éliminés; on aura de même

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial B_{n-2}}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial x}C_{n-3} - A_1\frac{\partial C_{n-3}}{\partial x} - \ldots = 0,\\
&\frac{\partial B_{n-2}}{\partial y} - \frac{\partial A_1}{\partial y}C_{n-3} - A_1\frac{\partial C_{n-3}}{\partial y} - \ldots = 0,\\
&\frac{\partial^2 B_{n-2}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial C_{n-3}}{\partial x} - A_1\frac{\partial^2 C_{n-3}}{\partial x^2} - \ldots = 0,\\
&\frac{\partial^2 B_{n-2}}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial C_{n-3}}{\partial y} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\frac{\partial C_{n-3}}{\partial x} - A_1\frac{\partial^2 C_{n-3}}{\partial x\,\partial y} - \ldots = 0,\\
&\frac{\partial^2 B_{n-2}}{\partial y^2} - 2\frac{\partial A_1}{\partial y}\frac{\partial C_{n-3}}{\partial y} - A_1\frac{\partial^2 C_{n-3}}{\partial y^2} - \ldots = 0.
\end{aligned}\right.$$

En donnant à x et y les valeurs spéciales, et en utilisant les identités

$$A_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial A_1}{\partial y}\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial A_3}{\partial y}\right),$$

$$A_2\frac{\partial A_2}{\partial y} = \frac{1}{3}\left\{\left(A_2\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial A_2}{\partial x}\frac{\partial A_2}{\partial y}\right)\frac{\partial A_1}{\partial y} - \left[A_2\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial A_1}{\partial x}\right\},$$

$$A_2\frac{\partial A_2}{\partial x} = \frac{1}{3}\left\{\left[A_2\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial A_1}{\partial y} - \left(A_2\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial A_2}{\partial x}\frac{\partial A_2}{\partial y}\right)\frac{\partial A_1}{\partial x}\right\},$$

il vient

$$\begin{aligned}(37)\qquad B_n &+ \frac{1}{2}\frac{\partial A_2}{\partial y}\frac{\partial B_{n-1}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial A_2}{\partial x}\frac{\partial B_{n-1}}{\partial y} + \frac{1}{3}\frac{\partial B_{n-2}}{\partial x}\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{1}{3}\frac{\partial B_{n-2}}{\partial y}\frac{\partial A_3}{\partial x}\\
&+ \frac{1}{6}\left\{\left[A_2\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 B_{n-2}}{\partial x^2}\right.\\
&\qquad - 2\left(A_2\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial A_2}{\partial x}\frac{\partial A_2}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 B_{n-2}}{\partial x\,\partial y}\\
&\qquad\qquad \left. + \left[A_2\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 B_{n-2}}{\partial y^2}\right\} - \ldots = 0.\end{aligned}$$

Les équations (33), (35) et (37) donnent pour $n = 2, 3, 4$ les trois premières conditions

$$(38) \quad a_{10}^2 b_{02} - a_{10} a_{01} b_{11} + a_{01}^2 b_{20} = 0,$$

$$\begin{aligned}(39) \quad & a_{10}^3 b_{03} - a_{10}^2 a_{01} b_{12} + a_{10} a_{01}^2 b_{21} - a_{01}^3 b_{30} \\ & + b_{20}(2 a_{10} a_{01} a_{02} - a_{10}^2 a_{11}) \\ & + b_{11}(a_{01}^2 a_{20} - a_{10}^2 a_{02}) + b_{02}(a_{10}^2 a_{11} - 2 a_{10} a_{01} a_{20}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(40) \quad & a_{10}^4 b_{04} - a_{10}^3 a_{01} b_{13} + a_{10}^2 a_{01}^2 b_{22} - a_{10} a_{01}^3 b_{31} + a_{01}^4 b_{40} \\ & + \tfrac{3}{2} a_{10}^3 a_{11} b_{03} - 3 a_{10}^2 a_{01} a_{20} b_{03} - \tfrac{1}{2} a_{10}^2 a_{01} a_{11} b_{12} \\ & - a_{10}^3 a_{02} b_{12} + 2 a_{10} a_{01}^2 a_{20} b_{12} - \tfrac{1}{2} a_{10} a_{01}^2 a_{11} b_{21} \\ & - a_{10}^3 a_{20} b_{21} + 2 a_{10}^2 a_{01} a_{02} b_{21} + \tfrac{3}{2} a_{01}^3 a_{11} b_{30} \\ & - 3 a_{10} a_{01}^2 a_{02} b_{30} + \tfrac{1}{2} a_{10}^2 a_{11}^2 b_{02} + a_{10}^3 a_{12} b_{02} \\ & - a_{10}^2 a_{01} a_{21} b_{02} - a_{10} a_{01} a_{20} a_{11} b_{02} + a_{10}^2 a_{02} a_{20} b_{02} \\ & + 2 a_{10} a_{01}^2 a_{30} b_{02} + a_{10}^2 a_{20}^2 b_{02} - \tfrac{1}{2} a_{10}^2 a_{02} a_{11} b_{11} \\ & - a_{10}^3 a_{03} b_{11} - \tfrac{1}{2} a_{01}^2 a_{20} a_{11} b_{11} - a_{01}^3 a_{30} b_{11} + \tfrac{1}{2} a_{01}^2 a_{11}^2 b_{20} \\ & + a_{01}^3 a_{21} b_{20} - a_{10} a_{01}^2 a_{12} b_{20} - a_{10} a_{01} a_{11} a_{02} b_{20} \\ & \qquad + a_{01}^2 a_{20} a_{02} b_{20} + 2 a_{10}^2 a_{01} a_{03} b_{20} + a_{10}^2 a_{02}^2 b_{20} = 0 \quad (^1).\end{aligned}$$

3° La série de Lagrange, de laquelle on déduit immédiatement la série de Burman, permettant de développer une fonction suivant les puissances d'une autre fonction, a été généralisée par Laplace aux fonctions de deux variables [2]. Cette dernière série permet de trouver les conditions pour qu'une équation

$$(41) \qquad F(x, y) = 0$$

entraîne une autre équation

$$(42) \qquad G(x, y) = 0.$$

Si l'on pose, en effet,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda\, \varphi(x, y), \\ y &= y_0 + \mu\, \psi(x, y), \end{aligned}$$

---

[1] Ces équations ont été calculées par l'une et par l'autre des deux méthodes précédentes.

[2] *Voir* le *Calcul différentiel* de Bertrand, p. 399.

la série de Laplace donne le moyen de développer une fonction donnée de x et de y suivant les puissances croissantes de λ et de μ et leurs produits. Pour développer cette fonction par rapport aux puissances de deux autres fonctions $\pi(x,y)$ et $\chi(x,y)$, il suffit de prendre

$$\varphi(x,y)=\frac{x-x_0}{\pi(x,y)}, \qquad \psi(x,y)=\frac{y-y_0}{\chi(x,y)}.$$

Pour notre objet, il suffira de prendre pour la fonction π la variable x elle-même, pour la fonction χ la fonction $F(x,y)$, et pour la fonction donnée de x et de y la fonction G. G doit être nul quand F l'est aussi; par suite, les coefficients des puissances de x dans le développement devront tous être nuls. On obtient ainsi les conditions cherchées.

Revenons maintenant au cas de trois variables. On pourra, en procédant comme tout à l'heure, faire disparaître les termes du premier degré de l'équation (27).

On peut alors raisonner de la manière suivante. Les équations (26) et (27) représentent chacune une surface en regardant x, y, z comme les coordonnées d'un point. Il faut que ces deux surfaces aient une multiplicité doublement infinie commune. Donc, si on les coupe par un plan

$$z=px+qy,$$

il faut que les deux courbes d'intersection obtenues aient une courbe commune.

Pour exprimer cela, après avoir substitué z dans (26) et (27), nous appliquerons les conditions trouvées pour deux variables, qui devront avoir lieu quels que soient p et q; l'équation (38) donne ainsi trois équations distinctes

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned} &a_{100}^2 b_{020}-a_{100}a_{010}b_{110}+a_{010}^2 b_{200}=0,\\ &a_{010}^2 b_{002}-a_{010}a_{001}b_{011}+a_{001}^2 b_{020}=0,\\ &a_{001}^2 b_{200}-a_{001}a_{100}b_{101}+a_{100}^2 b_{002}=0;\end{aligned}\right.$$

à l'équation (39) correspondent, pour le cas de trois variables, quatre équations distinctes; à l'équation (40), cinq équations distinctes, et ainsi de suite.

V.

Proposons, comme première application de ces formules, de trouver la surface minima qui passe par les deux positions voisines de la courbe (1), en partant des formules usuelles

$$(44)\qquad \begin{cases} x = \xi + \frac{1}{2}\int(1-u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du + \frac{1}{2}\int(1-u_1^2)\,\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1, \\ y = \eta + \frac{i}{2}\int(1+u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du - \frac{i}{2}\int(1+u_1^2)\,\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1, \\ z = \zeta + \int u\,\mathcal{F}(u)\,du + \int u_1\,\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1. \end{cases}$$

Les fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ devront être considérées comme dépendant de $\Delta\lambda$. D'après la théorie des surfaces minima, les quantités u et u_1 définissent la direction de la normale à la surface. Nous devrons supposer que les intégrales sont prises à partir de certaines valeurs fixes de u et de u_1. Le point correspondant de la surface minima ne sera, pour une valeur quelconque de $\Delta\lambda$, en général, ni sur l'une ni sur l'autre des deux positions de la courbe. Les quantités ξ, η, ζ sont des fonctions de λ seulement. Si l'on désigne par $u+\Delta u$, $u_1+\Delta u_1$ les valeurs des deux paramètres u et u_1 qui correspondent à un point de la surface minima, les équations (41) permettront de développer x, y, z par rapport aux puissances croissantes de Δu, Δu_1, $\Delta\lambda$ et leurs produits.

Considérons la courbe C; on développera, d'après les équations (1), Δx et Δy par rapport aux puissances de Δz en laissant λ fixe, et l'on y substituera les valeurs de Δx, Δy, Δz déduites des séries précédentes. On obtiendrait ainsi deux équations à trois variables Δu, Δu_1, $\Delta\lambda$, et l'on devra exprimer que l'une d'elles est une conséquence de l'autre.

Venons à la courbe C' : on devra donner dans les équations (1), au paramètre λ, la valeur $\lambda+\Delta\lambda$ et développer Δx et Δy, par rapport à Δz et $\Delta\lambda$, et enfin substituer les valeurs de Δx, Δy, Δz tirées de (41). Les deux équations finalement obtenues devront exprimer la même relation entre Δu, Δu_1 et $\Delta\lambda$.

Il est clair que les deux équations relatives à la courbe C peuvent se déduire des deux équations relatives à C' en supprimant dans ces dernières les termes provenant de ce qu'une variation a été attribuée à λ dans (1).

Je me borne donc à écrire une des équations relatives à la courbe C', celle qui est fournie par la première des équations (1); l'équation analogue fournie par la seconde de ces deux équations s'en déduit aisément

$$
\begin{aligned}
(45) \quad 0 = {} & \left[\frac{\dot{\mathcal{F}}(1-u^2)}{2} - u\dot{\mathcal{F}}\frac{\partial x}{\partial z}\right]\Delta u + \left[\frac{\dot{\mathcal{F}}_1(1-u_1^2)}{2} - u_1\dot{\mathcal{F}}_1\frac{\partial x}{\partial z}\right]\Delta u_1 \\
& + \left(\frac{d\xi}{d\lambda} - \frac{\partial x}{\partial z}\frac{d\zeta}{d\lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)\Delta\lambda \\
& + \left[\frac{\dot{\mathcal{F}}'(1-u^2) - 2u\dot{\mathcal{F}}}{4} - \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\frac{u^2\dot{\mathcal{F}}^2}{2} - \frac{\partial x}{\partial z}\frac{u\dot{\mathcal{F}}' + \dot{\mathcal{F}}}{2}\right]\Delta u^2 \\
& + \left[\frac{\dot{\mathcal{F}}'_1(1-u_1^2) - 2u_1\dot{\mathcal{F}}_1}{4} - \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\frac{u_1^2\dot{\mathcal{F}}_1^2}{2} - \frac{\partial x}{\partial z}\frac{u_1\dot{\mathcal{F}}'_1 + \dot{\mathcal{F}}_1}{2}\right]\Delta u_1^2 \\
& - \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}uu_1\dot{\mathcal{F}}\dot{\mathcal{F}}_1\,\Delta u\,\Delta u_1 \\
& + \left(\frac{1-u^2}{2}\frac{\partial\dot{\mathcal{F}}}{\partial\lambda} - u\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial\dot{\mathcal{F}}}{\partial\lambda} - u\dot{\mathcal{F}}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\frac{d\zeta}{d\lambda} - u\dot{\mathcal{F}}\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial\lambda}\right)\Delta u\,\Delta\lambda \\
& + \left(\frac{1-u_1^2}{2}\frac{\partial\dot{\mathcal{F}}_1}{\partial\lambda} - u_1\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial\dot{\mathcal{F}}_1}{\partial\lambda} - u_1\dot{\mathcal{F}}_1\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\frac{d\zeta}{d\lambda} - u_1\dot{\mathcal{F}}_1\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial\lambda}\right)\Delta u_1\,\Delta\lambda \\
& + \left[\frac{1}{2}\frac{d^2\xi}{d\lambda^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial x}{\partial z}\frac{d^2\zeta}{d\lambda^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\left(\frac{d\zeta}{d\lambda}\right)^2 - \frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial\lambda}\frac{d\zeta}{d\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}\right]\Delta\lambda^2 \\
& + \left[\frac{\dot{\mathcal{F}}''(1-u^2) - 4u\dot{\mathcal{F}}' - 2\dot{\mathcal{F}}}{12} - \frac{\partial x}{\partial z}\frac{u\dot{\mathcal{F}}'' + 2\dot{\mathcal{F}}'}{6}\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}u\dot{\mathcal{F}}\frac{u\dot{\mathcal{F}}' + \dot{\mathcal{F}}}{2} - \frac{\partial^3 x}{\partial z^3}\frac{u^3\dot{\mathcal{F}}^3}{6}\right]\Delta u^3 \\
& + \left(-\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}u_1\dot{\mathcal{F}}_1\frac{u\dot{\mathcal{F}}' + \dot{\mathcal{F}}}{2} - \frac{\partial^3 x}{\partial z^3}\frac{u^2u_1\dot{\mathcal{F}}^2\dot{\mathcal{F}}_1}{2}\right)\Delta u^2\,\Delta u_1 \\
& + \left(-\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}u\dot{\mathcal{F}}\frac{u_1\dot{\mathcal{F}}'_1 + \dot{\mathcal{F}}_1}{2} - \frac{\partial^3 x}{\partial z^3}\frac{uu_1^2\dot{\mathcal{F}}_1^2\dot{\mathcal{F}}}{2}\right)\Delta u\,\Delta u_1^2 \\
& + \left[\frac{\dot{\mathcal{F}}''_1(1-u_1^2) - 4u_1\dot{\mathcal{F}}'_1 - 2\dot{\mathcal{F}}_1}{12} - \frac{\partial x}{\partial z}\frac{u_1\dot{\mathcal{F}}''_1 + 2\dot{\mathcal{F}}'_1}{6}\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}u_1\dot{\mathcal{F}}_1\frac{u_1\dot{\mathcal{F}}'_1 + \dot{\mathcal{F}}_1}{2} - \frac{\partial^3 x}{\partial z^3}\frac{u_1^3\dot{\mathcal{F}}_1^3}{6}\right]\Delta u_1^3
\end{aligned}
$$

(45) [suite]

$$
\begin{aligned}
&+\left[\frac{(1-u^2)\dfrac{d\mathcal{F}'}{d\lambda}-2u\dfrac{d\mathcal{F}}{dt}}{4}-\frac{1}{2}\frac{\partial x}{\partial z}\left(u\frac{\partial\mathcal{F}'}{\partial\lambda}+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda}\right)\right.\\
&\qquad-\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\left(u^2\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda}+\frac{u\mathcal{F}'+\mathcal{F}}{2}\frac{d\zeta}{d\lambda}\right)\\
&\qquad\left.-\frac{\partial^3 x}{\partial z^2}\frac{u^2\mathcal{F}^2}{2}\frac{d\zeta}{d\lambda}-\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial\lambda}\frac{u\mathcal{F}'+\mathcal{F}}{2}-\frac{\partial^3 x}{\partial z^2\,\partial\lambda}\frac{u^2\mathcal{F}^2}{2}\right]\Delta u^2\,\Delta\lambda\\
&+\left[\frac{(1-u_1^2)\dfrac{\partial\mathcal{F}'_1}{\partial\lambda}-2u_1\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda}}{4}-\frac{1}{2}\frac{\partial x}{\partial z}\left(u_1\frac{\partial\mathcal{F}'_1}{\partial\lambda}+\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\lambda}\right)\right.\\
&\qquad-\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\left(u_1^2\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\lambda}+\frac{u_1\mathcal{F}'_1+\mathcal{F}_1}{2}\frac{d\zeta}{d\lambda}\right)\\
&\qquad\left.-\frac{\partial^3 x}{\partial z^3}\frac{u_1^2\mathcal{F}_1^2}{2}\frac{d\zeta}{d\lambda}-\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial\lambda}\frac{u_1\mathcal{F}'_1+\mathcal{F}_1}{2}-\frac{\partial^3 x}{\partial z^2\,\partial\lambda}\frac{u_1^2\mathcal{F}_1^2}{2}\right]\Delta u_1^2\,\Delta\lambda\\
&+\left[-\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}uu_1\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\lambda}-\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}uu_1\mathcal{F}_1\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\partial^3 x}{\partial z^3}uu_1\mathcal{F}\mathcal{F}_1\frac{d\zeta}{d\lambda}-\frac{\partial^3 x}{\partial z^2\,\partial\lambda}uu_1\mathcal{F}\mathcal{F}_1\right]\Delta u\,\Delta u_1\,\Delta\lambda\\
&+\left[\frac{1-u^2}{4}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\lambda^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial x}{\partial z}u\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\lambda^2}\right.\\
&\qquad-\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\left(\frac{u\mathcal{F}}{2}\frac{d^2\zeta}{d\lambda^2}+u\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda}\frac{d\zeta}{d\lambda}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 x}{\partial z^3}u\mathcal{F}\left(\frac{d\zeta}{d\lambda}\right)^2\\
&\qquad\left.-u\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial\lambda}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda}-\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial\lambda}u\mathcal{F}\frac{d\zeta}{d\lambda}-\frac{\partial^3 x}{\partial z\,\partial\lambda^2}\frac{u\mathcal{F}}{2}\right]\Delta u\,\Delta\lambda^2\\
&+\left[\frac{1-u_1^2}{4}\frac{\partial^2\mathcal{F}_1}{\partial\lambda^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial x}{\partial z}u_1\frac{\partial^2\mathcal{F}_1}{\partial\lambda^2}\right.\\
&\qquad-\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\left(\frac{u_1\mathcal{F}_1}{2}\frac{d^2\zeta}{d\lambda^2}+u_1\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\lambda}\frac{d\zeta}{d\lambda}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 x}{\partial z^3}u_1\mathcal{F}_1\left(\frac{d\zeta}{d\lambda}\right)^2\\
&\qquad\left.-u_1\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial\lambda}\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\lambda}-\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial\lambda}u_1\mathcal{F}_1\frac{d\zeta}{d\lambda}-\frac{\partial^3 x}{\partial z\,\partial\lambda^2}\frac{u_1\mathcal{F}_1}{2}\right]\Delta u_1\,\Delta\lambda^2\\
&+\left[\frac{1}{6}\frac{d^3\xi}{d\lambda^3}-\frac{1}{6}\frac{\partial x}{\partial z}\frac{d^3\zeta}{d\lambda^3}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\frac{d\zeta}{d\lambda}\frac{d^2\zeta}{d\lambda^2}\right.\\
&\qquad-\frac{1}{6}\frac{\partial^3 x}{\partial z^3}\left(\frac{d\zeta}{d\lambda}\right)^3-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial\lambda}\frac{d^2\zeta}{d\lambda^2}\\
&\qquad\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 x}{\partial z\,\partial\lambda^2}\frac{d\zeta}{d\lambda}-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 x}{\partial z^2\,\partial\lambda}\left(\frac{d\zeta}{d\lambda}\right)^2-\frac{1}{6}\frac{\partial^3 x}{\partial\lambda^3}\right]\Delta\lambda^3+\ldots
\end{aligned}
$$

Nous avons déjà vu que, dans les deux équations relatives à la courbe C′ et dans les deux équations relatives à la courbe C respectivement, les termes du premier degré doivent être proportionnels. On en déduit les équations

$$(46)\qquad \frac{1-u^2-2u\dfrac{\partial x}{\partial z}}{i(1+u^2)-2u\dfrac{\partial y}{\partial z}}=\frac{1-u_1^2-2u_1\dfrac{\partial x}{\partial z}}{-i(1+u_1^2)-2u_1\dfrac{\partial y}{\partial z}}=\frac{\dfrac{d\xi}{d\lambda}-\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{d\zeta}{d\lambda}}{\dfrac{d\eta}{d\lambda}-\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{d\zeta}{d\lambda}}=\frac{\dfrac{\partial x}{\partial\lambda}}{\dfrac{\partial y}{\partial\lambda}}.$$

En combinant ces rapports, on obtient les équations

$$(47)\qquad 1-uu_1-\frac{\partial x}{\partial z}(u+u_1)+i\frac{\partial y}{\partial\lambda}(u-u_1)=0,$$

$$(48)\qquad (u+u_1)\frac{\partial x}{\partial\lambda}-i\frac{\partial y}{\partial\lambda}(u-u_1)=0,$$

$$(49)\qquad (1-uu_1)\frac{d\zeta}{d\lambda}-\frac{d\xi}{d\lambda}(u+u_1)+i\frac{d\eta}{d\lambda}(u-u_1)=0.$$

Les deux premières expriment que, pour $\Delta\lambda=0$, le plan tangent à la surface minima et le plan tangent à la surface Σ sont les mêmes; la troisième, que la tangente à la courbe décrite par le point (ξ, η, ζ) lorsque $\Delta\lambda$ varie, est située dans ce plan tangent.

D'après la règle générale, il faut maintenant, entre l'équation (45) et l'équation analogue relative à l'axe des y, éliminer les termes du premier degré; nous avons ainsi

$$
\begin{aligned}
(50)\qquad 0= &\left\{\frac{u(1-uu_1)\mathcal{F}'}{2}-uu_1\mathcal{F}-\left[\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(u+u_1)-i\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}(u-u_1)\right]\frac{u^2\mathcal{F}^2}{2}\right.\\
&\qquad\left.-\left[\frac{\partial x}{\partial z}(u+u_1)-i\frac{\partial y}{\partial z}(u-u_1)\right]\frac{u\mathcal{F}'+\mathcal{F}}{2}\right\}\Delta u^2\\
&+\left\{\frac{u_1(1-uu_1)\mathcal{F}'_1}{2}-uu_1\mathcal{F}_1-\left[\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(u+u_1)-i\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}(u-u_1)\right]\frac{u_1^2\mathcal{F}_1^2}{2}\right.\\
&\qquad\left.-\left[\frac{\partial x}{\partial z}(u+u_1)-i\frac{\partial y}{\partial z}(u-u_1)\right]\frac{u_1\mathcal{F}'_1+\mathcal{F}_1}{2}\right\}\Delta u_1^2\\
&-\left[\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(u+u_1)-i\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}(u-u_1)\right]uu_1\mathcal{F}\mathcal{F}_1\,\Delta u\,\Delta u_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\Bigg\{ u(1-uu_1)\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\lambda} - \left[\frac{\partial x}{\partial z}(u+u_1) - i\,\frac{\partial y}{\partial z}(u-u_1)\right] u\,\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\lambda} \\
&\qquad - \left[\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(u+u_1) - i\,\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}(u-u_1)\right] u\mathfrak{F}\,\frac{d\zeta}{d\lambda} \\
&\qquad - \left[\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial\lambda}(u+u_1) - i\,\frac{\partial^2 y}{\partial z\,\partial\lambda}(u-u_1)\right] u\mathfrak{F} \Bigg\}\,\Delta u\,\Delta\lambda \\
&+\Bigg\{ u_1(1-uu_1)\frac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial\lambda} - \left[\frac{\partial x}{\partial z}(u+u_1) - i\,\frac{\partial y}{\partial z}(u-u_1)\right] u_1\,\frac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial\lambda} \\
&\qquad - \left[\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(u+u_1) - i\,\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}(u-u_1)\right] u_1\mathfrak{F}_1\,\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda} \\
&\qquad - \left[\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial\lambda}(u+u_1) - i\,\frac{\partial^2 y}{\partial z\,\partial\lambda}(u-u_1)\right] u_1\mathfrak{F}_1 \Bigg\}\,\Delta u_1\,\Delta\lambda \\
&+\Bigg\{ \frac{1}{2}\left[\frac{d^2\xi}{d\lambda^2}(u+u_1) - i\,\frac{d^2\eta}{d\lambda^2}(u-u_1)\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial x}{\partial z}(u+u_1) - i\,\frac{\partial y}{\partial z}(u-u_1)\right]\frac{d^2\zeta}{d\lambda^2} \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(u+u_1) - i\,\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}(u-u_1)\right]\left(\frac{d\zeta}{d\lambda}\right)^2 \\
&\quad - \left[\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial\lambda}(u+u_1) - i\,\frac{\partial^2 y}{\partial z\,\partial\lambda}(u-u_1)\right]\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda} \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}(u+u_1) - i\,\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda^2}(u-u_1)\right] \Bigg\}\,\Delta\lambda^2 + \dots.
\end{aligned}
$$

On peut simplifier à l'aide de l'équation (47), et l'on a

$$
\begin{aligned}
0 = &-\frac{1+uu_1}{2}(\mathfrak{F}\,\Delta u^2 + \mathfrak{F}_1\,\Delta u_1^2) \\
&-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(u+u_1) - i\,\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}(u-u_1)\right]\left(u\mathfrak{F}\,\Delta u + u_1\mathfrak{F}_1\,\Delta u_1 + \frac{d\zeta}{d\lambda}\,\Delta\lambda\right)^2 \\
&-\left[\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial\lambda}(u+u_1) - i\,\frac{\partial^2 y}{\partial z\,\partial\lambda}(u-u_1)\right]\left(u\mathfrak{F}\,\Delta u + u_1\mathfrak{F}_1\,\Delta u_1 + \frac{d\zeta}{d\lambda}\,\Delta\lambda\right)\Delta\lambda \\
&+\Bigg\{ \frac{1}{2}\left[\frac{d^2\xi}{d\lambda^2}(u+u_1) - i\,\frac{d^2\eta}{d\lambda^2}(u-u_1) - (1-uu_1)\frac{d^2\zeta}{d\lambda^2}\right] \\
&\qquad - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}(u+u_1) - i\,\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda^2}(u-u_1)\right]\Bigg\}\,\Delta\lambda^2 + \dots.
\end{aligned}
$$

Introduisons les abréviations suivantes :

$$\frac{1-u^2}{2} - u\frac{\partial x}{\partial z} = \mu, \qquad \frac{1-u_1^2}{2} - u_1\frac{\partial x}{\partial z} = \mu_1,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(u+u_1) - i\,\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\,(u-u_1) = \mathrm{H},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial\lambda}(u+u_1) - i\,\frac{\partial^2 y}{\partial z\,\partial\lambda}(u-u_1) = \mathrm{K},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}(u+u_1) - i\,\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda^2}\,(u-u_1) = \mathrm{L},$$

$$\frac{d^2\xi}{d\lambda^2}(u+u_1) - i\,\frac{d^2\eta}{d\lambda^2} - (1-uu_1)\frac{d\zeta}{d\lambda} = \mathrm{Z}.$$

H, K, L sont les coefficients de l'équation des lignes asymptotiques de la surface Σ. Appliquons à la courbe C les équations (43). L'une de ces équations revient à remplacer, dans les termes du second degré de (51), Δu, Δu_1, $\Delta\lambda$ par les quantités proportionnelles suivantes

$$\Delta u : \Delta u_1 : \Delta\lambda = \mu_1 : -\mu : 0,$$

ce qui donne

$$\mu^2\mathcal{F} + \mu_1^2\mathcal{F}_1 + \frac{\mathrm{H}(u-u_1)^2(1+uu_1)\mathcal{F}\mathcal{F}_1}{4} = 0. \tag{52}$$

Les deux autres équations s'obtiennent en remplaçant Δu, Δu_1, $\Delta\lambda$ par les quantités proportionnelles

$$\Delta u : \Delta u_1 : \Delta\lambda = \frac{d\xi}{d\lambda} - \frac{\partial x}{\partial z}\frac{d\zeta}{d\lambda} : 0 : -\mu\mathcal{F},$$

$$\Delta u : \Delta u_1 : \Delta\lambda = 0 : \frac{d\xi}{d\lambda} - \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda} : -\mu_1\mathcal{F}_1,$$

et, après avoir éliminé Z et utilisé l'équation (49), on a

$$\frac{\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{d\eta}{d\lambda} - \dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{d\xi}{d\lambda}}{\dfrac{d\zeta}{d\lambda}} = \frac{\mathrm{H}\mu\mu_1(1-uu_1)\mathcal{F}\mathcal{F}_1}{i\left[\mu_1^2\mathcal{F}_1 - \mu^2\mathcal{F} + \dfrac{\mathrm{H}}{2}(\mu u_1 - \mu_1 u)(u-u_1)\mathcal{F}\mathcal{F}_1\right]}. \tag{53}$$

On reconnaît que l'une des équations, provenant de la considération de la courbe C', rentre dans celles que nous venons de trouver. Les deux autres correspondent aux deux dernières, relatives à la courbe C, en retranchant les équations correspondantes, membre à membre, on élimine Z, et l'on a

$$(54)\quad (uu_1-1)\left\{(1+uu_1)\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\mathcal{F}\left[\mathrm{H}u^2\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+2\mathrm{K}u\mu\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\mathrm{L}\mu^2\right]\right\}$$
$$+2i(u-u_1)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}-\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial\lambda}\right)\left[(1+uu_1)\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\mathcal{F}\left(\mathrm{H}u^2\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\mathrm{K}\mu u\right)\right]$$
$$+2\mu\frac{d\zeta}{d\lambda}\mathcal{F}(uu_1-1)\left(\mathrm{H}u\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\mathrm{K}\mu\right)=0,$$

et une équation analogue, obtenue en changeant u en u_1, $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}_1$, μ en μ_1. Je forme une combinaison de ces équations homogènes par rapport à $\frac{d\xi}{d\lambda}$ et $\frac{\partial x}{\partial z}\frac{d\eta}{d\lambda}-\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda}$, et j'élimine $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ entre l'équation formée ainsi et les équations (52) et (53). Après un calcul, qui n'offre pas d'autres difficultés que sa longueur, on obtient, en introduisant les coefficients E, F, G de l'élément linéaire de la surface Σ, et en posant

$$\sigma=\frac{\frac{\partial x}{\partial\lambda}(uu_1-1)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial\lambda}\right)}{(u-u_1)\frac{d\zeta}{d\lambda}},$$

$$(55)\quad 2i\sigma^2\mathrm{H}(\mathrm{KE}-\mathrm{FH})$$
$$+2\sigma[\mathrm{K}(\mathrm{KE}-\mathrm{FH})+\mathrm{H}(\mathrm{LE}-\mathrm{HG})]-i\mathrm{K}(\mathrm{LE}-\mathrm{HG})=0.$$

Cette équation se décompose en deux autres

$$2i\sigma(\mathrm{KE}-\mathrm{FH})+\mathrm{LE}-\mathrm{HG}=0,$$
$$\sigma\mathrm{H}-i\mathrm{K}=0.$$

La première de ces équations offre une relation évidente avec les lignes de courbure de la surface Σ, et la seconde avec les lignes asymptotiques.

La considération d'exemples particuliers, tels que celui d'un cercle dont le plan reste perpendiculaire à une droite fixe, et dont le centre décrit cette droite, fait voir que la seconde équation est la véritable solution. Interprétée géométriquement, elle montre que le point (ξ, η, ζ), où la normale a une direction déterminée, se déplace lorsque $\Delta\lambda$ varie suivant une direction conjuguée de la tangente à la courbe C.

VI.

Les formules d'élimination du § IV peuvent aussi être appliquées à un problème du même genre que le précédent [1].

Par un point donné P passent deux courbes C et C'. On propose de déterminer une surface satisfaisant à une équation aux dérivées partielles, également donnée, passant par ces deux courbes. Nous ne traiterons que le cas où l'équation aux dérivées partielles donnée est celle des surfaces minima; nous supposerons que les deux courbes C et C' se coupent à angle droit et sont contenues respectivement dans les plans menés par les tangentes à ces courbes, perpendiculairement au plan déterminé par ces deux tangentes.

La courbe C peut être représentée par deux équations

$$y = 0, \qquad z = f(x).$$

Nous désignerons par $z^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de $f(x)$, de sorte que l'on a

$$(56) \qquad y = 0, \qquad z = \frac{z''}{2}x^2 + \frac{z'''}{6}x^3 + \ldots + \frac{z^{(n)}}{n!}x^n + \ldots.$$

La courbe C' peut être représentée par les équations

$$x = 0, \qquad z = g(y).$$

Soit $\zeta^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de $g(y)$,

$$(57) \qquad x = 0, \qquad z = \frac{\zeta''}{2}y^2 + \frac{\zeta'''}{6}y^3 + \ldots + \frac{\zeta^{(n)}}{n!}y^n + \ldots$$

D'après les formules de M. Weierstrass pour les surfaces minima,

---

[1] Comparer Bianchi, *Il Metodo di Riemann esteso alla integrazione...* (*Rendiconti della Accademia dei Lincei*, 1895); un Mémoire de M. Picard, *Sur les approximations successives* (*Journal de Resal*, 1890), et surtout une Note du même auteur dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1894. Le présent Mémoire a été déposé à la rédaction des *Annales de l'École Normale* en juin 1894.

en partant des valeurs initiales zéro attribuées à u et à u_1, on a

$$\begin{aligned}
x = {} & \frac{1}{2}\sum \frac{u^n}{n!}\left[\mathfrak{F}^{(n-1)} + (n-2)(n-1)\mathfrak{F}^{(n-3)}\right] \\
& + \frac{1}{2}\sum \frac{u_1^n}{n!}\left[\mathfrak{F}_1^{(n-1)} - (n-2)(n-1)\mathfrak{F}_1^{(n-3)}\right], \\
y = {} & \frac{i}{2}\sum \frac{u^n}{n!}\left[\mathfrak{F}^{(n-1)} + (n-2)(n-1)\mathfrak{F}^{(n-3)}\right] \\
& - \frac{i}{2}\sum \frac{u_1^n}{n!}\left[\mathfrak{F}_1^{(n-1)} + (n-2)(n-1)\mathfrak{F}_1^{(n-3)}\right], \\
z = {} & \sum \frac{u^n \mathfrak{F}^{(n-2)}}{(n-2)!\,n} + \sum \frac{u_2^n \mathfrak{F}_1^{(n-2)}}{(n-2)!\,n}.
\end{aligned}$$

On porte, dans les équations (56), les valeurs de x, de y et de z. On obtient ainsi deux équations en u et en u_1, dont l'une devra être une conséquence de l'autre. La seconde des équations (56) devient

$$\begin{aligned}
0 = {} & u^2\left(\frac{\mathfrak{F}}{2} - \frac{z''}{8}\mathfrak{F}^2\right) - \frac{z''}{8}uu_1\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1 + u_1^2\left(\frac{\mathfrak{F}_1}{2} - \frac{z''}{8}\mathfrak{F}_1^2\right) + u^3\left(\frac{\mathfrak{F}'}{3} - \frac{z'''}{48}\mathfrak{F}^3 - \frac{z''}{8}\mathfrak{F}\mathfrak{F}'\right) \\
& - u^2u_1\left(\frac{z'''}{16}\mathfrak{F}^2\mathfrak{F}_1 + \frac{z''}{8}\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}'\right) - uu_1^2\left(\frac{z'''}{16}\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1^2 + \frac{z''}{8}\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1'^2\right) \\
& + u_1^3\left(\frac{\mathfrak{F}_1'}{3} - \frac{z'''}{48}\mathfrak{F}_1^3 - \frac{z''}{8}\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_1'\right) \\
& + u^4\left[\frac{\mathfrak{F}''}{8} - \frac{z^{(4)}}{384}\mathfrak{F}^{(4)} - \frac{z'''}{32}\mathfrak{F}^2\mathfrak{F}' - \frac{z''}{24}\mathfrak{F}(\mathfrak{F}'' - 2\mathfrak{F}) - \frac{z''}{32}\mathfrak{F}^2\right] \\
& - u^3u_1\left[\frac{z^{(4)}}{96}\mathfrak{F}^3\mathfrak{F}_1 + \frac{z'''}{16}\mathfrak{F}\mathfrak{F}'\mathfrak{F}_1 + \frac{z''}{24}(\mathfrak{F}'' - 2\mathfrak{F})\mathfrak{F}_1\right] \\
& - u^2u_1^2\left(\frac{z^{(4)}}{64}\mathfrak{F}^2\mathfrak{F}_1^2 + \frac{z'''}{32}\mathfrak{F}'\mathfrak{F}_1^2 + \frac{z'''}{32}\mathfrak{F}^2\mathfrak{F}_1' + \frac{z''}{16}\mathfrak{F}'\mathfrak{F}_1'\right) \\
& - uu_1^3\left[\frac{z^{(4)}}{96}\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1^3 + \frac{z'''}{16}\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_1' + \frac{z''}{24}(\mathfrak{F}_1'' - 2\mathfrak{F}_1)\mathfrak{F}\right] \\
& + u_1^4\left[\frac{\mathfrak{F}_1''}{8} - \frac{z^{(4)}}{384}\mathfrak{F}_1^4 - \frac{z'''}{32}\mathfrak{F}_1^2\mathfrak{F}_1' - \frac{z''}{24}\mathfrak{F}_1(\mathfrak{F}_1'' - 2\mathfrak{F}_1) - \frac{z''}{32}\mathfrak{F}_1'^2\right] + \dots.
\end{aligned}$$

En appliquant aux équations (56) les formules (38), (39), (40), on obtient, après un calcul facile et qui d'ailleurs présente de grandes simplifications,

$$\frac{1}{\mathfrak{F}} + \frac{1}{\mathfrak{F}_1} = z'', \qquad \frac{\mathfrak{F}'}{\mathfrak{F}^3} + \frac{\mathfrak{F}'_1}{\mathfrak{F}_1^3} = -z''',$$

$$\frac{\mathfrak{F}''}{\mathfrak{F}^4} + \frac{\mathfrak{F}''_1}{\mathfrak{F}_1^4} - 3\frac{\mathfrak{F}'^2}{\mathfrak{F}^5} - 3\frac{\mathfrak{F}'^2_1}{\mathfrak{F}_1^5} - 8\left(\frac{1}{\mathfrak{F}^2\mathfrak{F}_1} + \frac{1}{\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1^2}\right) = -z^{(4)}.$$

Le système des équations (57) donne également

$$\frac{1}{\mathfrak{F}} + \frac{1}{\mathfrak{F}_1} = -\zeta'', \qquad \frac{\mathfrak{F}'}{\mathfrak{F}^3} - \frac{\mathfrak{F}'_1}{\mathfrak{F}_1^3} = i\zeta''',$$

$$-\frac{\mathfrak{F}''}{\mathfrak{F}^4} - \frac{\mathfrak{F}''_1}{\mathfrak{F}_1^4} + \frac{3\mathfrak{F}'^2}{\mathfrak{F}^5} + 3\frac{\mathfrak{F}'^2_1}{\mathfrak{F}_1^5} - 8\left(\frac{1}{\mathfrak{F}^2\mathfrak{F}_1} + \frac{1}{\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1^2}\right) = -\zeta^{(4)}.$$

On voit que, pour que le problème soit possible, il faut que $z'' = -\zeta''$. $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}_1$ ne sont alors complètement déterminés que par les dérivées quatrièmes. On a

$$\frac{1}{\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1} = \frac{z^{(4)} + \zeta^{(4)}}{16 z''}.$$

La grande élégance des formules précédentes montre qu'il n'était pas sans intérêt de chercher les dérivées les plus simples de $\mathfrak{F}$ et de $\mathfrak{F}_1$, quoique la loi générale en soit assez difficile à découvrir.

On parvient aussi à des formules curieuses, en cherchant la surface minima qui passe par deux cercles, tangents au plan des xy; symétriques par rapport au plan des xz, dont les tangentes font avec l'axe des x l'angle θ, et les axes avec l'axe des z l'angle φ. Nous supposerons leur rayon égal à l'unité. A cause de la symétrie, la fonction $\mathfrak{F}(u)$ devient une fonction réelle de u; et l'on trouve

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 = -\frac{2\cos 2\theta}{\sin\varphi}, \qquad \mathfrak{F}' = \mathfrak{F}'_1 = -\frac{6\cos 2\theta \sin 4\theta \cos\varphi}{\cos 3\theta \sin^2\varphi}.$$

Les points de vue, exposés dans ce Mémoire, peuvent probablement contribuer à la résolution d'un grand nombre de problèmes connus, mais ils peuvent aussi être l'origine de questions nouvelles, et permettre d'introduire de nouvelles définitions géométriques, sur lesquelles je me propose de revenir dans un travail plus développé.