J. LE ROUX

Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 12 (1895), p. 227-316

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1895_3_12__227_0>

SUR LES

INTÉGRALES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES,

PAR M. J. LE ROUX,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE DE BREST.

INTRODUCTION.

Les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre se rencontrent fréquemment en Géométrie et en Physique mathématique. Aussi dès le siècle dernier elles se sont présentées à l'étude des mathématiciens.

Les premiers résultats importants sur ce sujet sont dus à Euler. Laplace, en 1773, donna une méthode générale, permettant d'intégrer toutes les équations linéaires de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} + Rz + S = 0,$$

qui admettent une demi-solution explicite s'exprimant à l'aide d'une fonction arbitraire d'une variable et de ses dérivées en nombre limité.

Toutefois la méthode de Laplace présentait le grave inconvénient de conduire à un nombre illimité d'essais dans le cas des équations non intégrables sans offrir aucun caractère permettant de reconnaître *a priori* si elle devait, ou non, réussir. Pour résoudre cette difficulté, M. Moutard, prenant le problème inverse, montra comment on peut construire l'équation linéaire la plus générale susceptible d'être intégrée entièrement sous forme finie avec deux fonctions arbitraires et leurs dérivées en nombres déterminés m et n. Cet important Mémoire, présenté à l'Académie des Sciences en 1870 (*Comptes rendus* du 18 avril), disparut dans les incendies de la Commune, et nous n'en connaissons que l'Introduction et la troisième Partie relative aux équations de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \lambda z$$

(*Journal de l'École Polytechnique*, XLV^e^ et LVI^e^ Cahier).

Depuis M. Darboux a repris l'étude de la méthode de Laplace (*Cours de* 1883 et *Leçons sur la théorie des surfaces*). Il l'a notamment perfectionnée en introduisant la notion des invariants, et il a entièrement résolu le problème de M. Moutard en donnant explicitement la forme générale des équations pour lesquelles la méthode de Laplace fournit une intégrale débarrassée de tout signe de quadrature. En outre, partant d'une idée de Riemann, M. Darboux a montré que toute équation linéaire et homogène de la forme de Laplace peut être complètement intégrée par deux quadratures quand on en connaît une intégrale particulière dépendant de deux paramètres et satisfaisant à des conditions déterminées.

Le LVI^e^ Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* contient deux Mémoires au sujet des équations linéaires : l'un de M. R. Liouville, *Sur les formes intégrables,* l'autre de M. Lucien Lévy, *Sur une transformation analogue à celle de Laplace.*

M. Picard [1] s'est également occupé des équations linéaires à deux variables indépendantes, en se plaçant surtout au point de vue des variables réelles et de la détermination des intégrales par leurs valeurs sur un contour fermé.

Le présent travail a pour objet l'étude de quelques propriétés des fonctions définies par une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles du second ordre, de la forme de Laplace. Il est divisé en trois Parties :

Dans la première, j'ai démontré l'existence d'une infinité d'inté-

---

(1) E. Picard, *Acta mathematica,* t. XII; *Journal de Math. pures et appliquées* (1890); *Journal de l'École Polytechnique,* LX^e^ Cahier.

grales particulières dont on peut déduire des solutions plus générales par des quadratures à limites variables portant sur une fonction arbitraire. Je les ai appelées *intégrales principales*. J'ai étudié les développements en séries de ces fonctions et de quelques-unes des intégrales qui s'en déduisent.

La deuxième Partie est consacrée à l'étude des lieux de points singuliers accidentels. J'appelle ainsi ceux qui dérivent des données initiales définissant les intégrales et non de la forme particulière des coefficients de l'équation. J'ai défini les *intégrales normales* et démontré qu'elles ne peuvent admettre d'autres courbes singulières accidentelles que des *caractéristiques*. Après avoir étudié la forme des intégrales dans le voisinage des points critiques, j'ai montré comment on peut intégrer l'équation en partant des solutions particulières qui admettent des caractéristiques singulières mobiles.

Dans la troisième Partie, j'ai fait l'application des théories précédentes à quelques équations simples.

Je me suis attaché, autant que possible, à déduire tous les résultats d'une méthode générale et uniforme.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Je commence par rappeler quelques propriétés bien connues des équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. La forme générale de ces équations est la suivante

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + 2E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = 0, \tag{1}$$

A, B, C, D, E, F étant des fonctions continues de x et de y.

Je supposerai, en général, ces fonctions holomorphes dans le domaine où varient x et y, sauf sur certaines courbes analytiques qui seront des *courbes singulières* des coefficients. Cependant, plusieurs des résultats obtenus sont indépendants de cette hypothèse.

Effectuons le changement de variables indépendantes

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \varphi(\xi, \eta), \\ y = \psi(\xi, \eta), \end{cases}$$

les fonctions ξ et η définies par ces équations étant holomorphes en x et y, et telles que, dans le domaine considéré, le déterminant fonctionnel

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Cette dernière condition suppose que les courbes $\xi =$ const. et $\eta =$ const. n'ont pas de points multiples dans le domaine et même dans le cas des variables réelles, que ces courbes ne sont pas fermées si le domaine considéré est à contour simple. Ce changement de variables conserve la forme de l'équation (1) qui devient

$$A_1\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2} + 2B_1\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} + C_1\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} + 2D_1\frac{\partial z}{\partial\xi} + 2E_1\frac{\partial z}{\partial\eta} + F_1 = 0.$$

On a

$$(3) \qquad \begin{cases} A_1 = A\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right) + C\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2, \\ B_1 = A\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right) + B\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right) + C\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\dfrac{\partial\eta}{\partial y}, \\ C_1 = A\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2. \end{cases}$$

Ces trois coefficients ne sont pas nuls à la fois, à moins que A, B, C ne s'annulent pour les mêmes valeurs des variables; car le déterminant des coefficients de A, B, C dans les équations (3) est égal à

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^3 = J^3;$$

il est donc constamment différent de zéro.

Supposons $A_1 \neq 0$ sur la courbe analytique $\xi = \xi_0$; nous pourrons alors, d'après le théorème général de Cauchy, déterminer une solution holomorphe de l'équation (1) par les valeurs que prennent sur la courbe $\xi = \xi_0$ la fonction z et sa dérivée $\frac{\partial z}{\partial \xi}$. Mais, pour que ce théorème soit applicable dans toute l'étendue du domaine, il faut, non seulement que A_1 soit, en général, différent de zéro sur la courbe considérée, mais qu'il ne s'annule même pas en des points particuliers de la courbe. Le théorème fondamental est en défaut sur la courbe $\xi = \xi_0$, quand A_1 s'annule en tous ses points. Ce résultat met en évidence le rôle important que jouent, dans la théorie, les fonctions satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{4}$$

Les courbes analytiques $\varphi =$ const. définies par cette équation ont reçu le nom de *Caractéristiques* de l'équation (1). Aux points où la courbe $\xi = \xi_0$ considérée plus haut touche une caractéristique, le coefficient A_1 s'annule. Pour qu'il soit nul sur toute la courbe, il faut et il suffit que cette courbe soit elle-même une caractéristique. Dans tous les autres cas, nous aurons $A_1 \neq 0$, sauf aux points où l'on a simultanément $A = B = C = 0$.

L'équation (4) étant du second degré, en général, par tout point analytique, il passe deux caractéristiques. Elles sont distinctes dans tout domaine où le discriminant

$$AC - B^2$$

est différent de zéro.

Supposons cette condition vérifiée dans tout le domaine; prenons pour nouvelles variables (ξ, η) deux intégrales distinctes de l'équation (4). L'équation aux dérivées partielles (1) prend alors la forme réduite

$$2B_1\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\, \partial \eta} + 2D_1\frac{\partial z}{\partial \xi} + 2E_1\frac{\partial z}{\partial \eta} + F_1 z = 0$$

ou bien, en divisant par $2B_1$ qui est différent de zéro, et en écrivant

x et y au lieu de ξ et η,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + c z = 0. \tag{5}$$

Cette équation rentre dans le type considéré par Laplace.

Si l'on a constamment $AC - B^2 = 0$, les caractéristiques ne sont pas distinctes; en prenant pour variable (ξ) une intégrale de l'équation (4) et pour variable η une fonction arbitraire distincte de la précédente, on met l'équation (1) sous la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + a \frac{\partial z}{\partial \xi} + b \frac{\partial z}{\partial \eta} + c z = 0. \tag{6}$$

Nous ne nous occuperons dans ce travail que des équations du type (5).

2. Bien que les caractéristiques soient suffisamment définies par ce qui précède, j'ai cru qu'il serait intéressant de déduire leur définition de la propriété d'indétermination qui les caractérise. Cette méthode aura en outre l'avantage de montrer le genre de l'indétermination et de mettre sur la voie de certaines propriétés générales.

Supposons que l'on se donne sur une courbe L les valeurs de z et de l'une de ses dérivées ou, ce qui revient au même, la valeur de z en un point et celles de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ sur la courbe. Cherchons à calculer les dérivées secondes en un point de L. Les d désignant des différentielles relatives à un déplacement sur cette courbe, nous aurons, en partant de l'équation (1),

$$\left\{\begin{aligned} d\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} dy, \\ d\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy, \\ 0 &= A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z}{\partial x} + 2E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Les valeurs des dérivées sont complètement définies par ces trois équations si le déterminant suivant n'est pas nul

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \\ A & 2B & C \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Les dérivées des ordres supérieurs seront déterminées dans les mêmes conditions; on pourrait, en effet, les calculer par groupes de trois en résolvant des équations linéaires dont le déterminant est toujours le même. Si donc on veut développer z en série par la formule de Taylor, les coefficients du développement se calculeront sans indétermination.

La discussion du système (7) est très importante et il en serait évidemment de même dans le cas des systèmes d'équations linéaires d'un ordre quelconque. Dans la démonstration du théorème fondamental de Cauchy, on suppose les équations résolues par rapport à certaines dérivées. C'est évidemment la méthode la plus simple quand on a seulement en vue l'existence même de l'intégrale; mais il n'en est plus ainsi lorsqu'il s'agit d'en étudier les propriétés.

3. Supposons maintenant que l'on ait $\Delta = 0$, c'est-à-dire

$$A\, dy^2 - 2B\, dx\, dy + C\, dx^2 = 0. \tag{9}$$

C'est le résultat de l'élimination de $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ entre les deux équations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy = 0,$$

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

L'équation (9) est donc vérifiée aux points où la courbe L touche une caractéristique. Elle a lieu en tout point si la courbe est elle-même une caractéristique. Dans ce cas, le système des équations (7), linéaires par rapport aux dérivées secondes, est incompatible ou indéterminé. Si l'on suppose dx différent de zéro, la condition de compatibilité est la suivante :

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & -d\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & dx & -d\dfrac{\partial z}{\partial y} \\ A & 2B & 2D\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2E\dfrac{\partial z}{\partial y} + Fz \end{vmatrix} = 0.$$

Les dérivées premières $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ ne sont donc plus complètement arbitraires sur la courbe L. Du reste, la condition que nous venons d'obtenir peut facilement se transformer en tenant compte de l'équation (9). Elle se réduit à l'équation aux dérivées partielles proposées après qu'on a divisé tous les termes par dx^2. En particulier, dans le cas de l'équation réduite (5), la condition (10) devient

$$(10)' \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial z}{\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0.$$

Quand on se donne sur la caractéristique $y = y_0$ les valeurs de z, celles de $\frac{\partial z}{\partial x}$ se trouvent déterminées par cela même, et la seconde dérivée $\frac{\partial z}{\partial y}$ doit vérifier l'équation linéaire (10)', où l'on fera $y = y_0$, x étant alors la seule variable indépendante.

Donc $\frac{\partial z}{\partial y}$ se trouvera aussi complètement définie quand on connaîtra sa valeur pour une valeur particulière x_0 de x. Le même fait se présente pour toutes les dérivées prises par rapport à la seule variable y. On voit que l'on est conduit, par la seule discussion des équations linéaires (7), à l'important théorème de M. Darboux.

Toute solution holomorphe d'une équation de la forme (5) *est définie par ses valeurs sur deux caractéristiques* $x = x_0$, $y = y_0$.

Nous avons montré seulement la possibilité de calculer les coefficients du développement. M. Darboux démontre la convergence de la série obtenue par la méthode ordinaire, en prenant comme fonction majorante l'intégrale d'une équation d'Euler.

4. En se placant au point de vue des variables réelles, M. Picard a démontré le même théorème sans supposer les coefficients a, b, c holomorphes, non plus que les valeurs initiales de l'intégrale sur les deux caractéristiques. Cette démonstration est, d'ailleurs, applicable sans modification aux fonctions de variables complexes. La méthode est la suivante.

Soit l'équation

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz.$$

Pour déterminer une solution z prenant des valeurs données sur les caractéristiques $x = x_0$ et $y = y_0$, on résout d'abord le problème par l'équation plus simple

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Soit u_0 une fonction satisfaisant à cette équation et aux conditions initiales données. Désignons par u_1 une nouvelle fonction s'annulant pour $x = x_0$ et pour $y = y_0$, et vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + cu_0.$$

De u_1 nous déduirons u_2 par un calcul identique, et ainsi de suite.

La série

$$z = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

est uniformément convergente et représente une intégrale de l'équation (A) satisfaisant aux conditions proposées. Si l'on désigne par $f(x)$ et $\varphi(y)$ les valeurs des dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ sur les caractéristiques respectives $y = y_0$ et $x = x_0$, le premier terme u_0 est donné par la formule

$$u_0 = z(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} \varphi(y)\,dy;$$

je suppose les intégrales rectilignes.

Les autres termes sont donnés par la formule de récurrence

$$u_n = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\left(a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + cu_{n-1}\right)dx\,dy.$$

Supposons

$$|x - x_0| < \alpha, \qquad |y - y_0| < \beta.$$

Si, dans le domaine ainsi défini, on a

$$\operatorname{mod}\left| a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + cu_{n-1}\right| < \mathrm{M},$$

nous aurons aussi

$$|u_n| < \mathrm{M}\alpha\beta,$$

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| < \mathrm{M}\beta,$$

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right| < \mathrm{M}\alpha,$$

$$\left| a\frac{\partial u_n}{\partial x} + b\frac{\partial u_n}{\partial y} + \mathrm{C}u_n\right| < |\mathrm{A}\beta + \mathrm{B}\alpha + \mathrm{C}\alpha\beta|\,\mathrm{M}\alpha\beta,$$

en désignant par A, B, C les limites supérieures des modules de a, b, c dans le domaine considéré. Donc la convergence est assurée si l'on a

$$\mathrm{A}\beta + \mathrm{B}\alpha + \mathrm{C}\alpha\beta < 1.$$

L'intégrale ainsi calculée est holomorphe en même temps que les coefficients a, b, c et les valeurs initiales de z.

5. Une autre remarque essentielle pour ce qui va suivre est encore la suivante : supposons que l'on regarde x_0 et y_0 comme des variables dont dépendent les valeurs initiales des dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=y_0} = f(x, x_0, y_0), \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=x_0} = \varphi(y, x_0, y_0).$$

Supposons, en outre, que ces fonctions soient holomorphes dans le domaine du système de valeurs

$$x = x_1, \qquad x_0 = x_1; \qquad y = y_1, \qquad y_0 = y_1,$$

et que la même condition soit vérifiée par les coefficients de l'équation (5). Dans ce cas, l'intégrale déterminée par la méthode de M. Picard est holomorphe dans le même domaine par rapport aux quatre variables

$$x, \quad x_0; \quad y, \quad y_0,$$

les points x et x_0 étant supposés intérieurs à un cercle de centre x_1 et de rayon $\frac{\alpha}{2}$, les points y et y_0 à un cercle de centre y_1 et de rayon $\frac{\beta}{2}$. Elle sera même développable suivant les puissances de $x_0 - x$ et de $y_0 - y$, les coefficients du développement étant des fonctions holomorphes de x et de y; les rayons de convergence de cette série sont au moins égaux respectivement

$$\frac{\alpha}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{4},$$

pourvu que l'on ait aussi

$$|x - x_1| < \frac{\alpha}{4}, \qquad |y - y_1| < \frac{\beta}{4}.$$

6. Les équations différentielles linéaires et homogènes à un nombre quelconque de variables indépendantes jouissent d'une propriété commune et qui leur est spéciale. C'est qu'une combinaison linéaire et homogène d'un nombre quelconque de solutions particulières est une nouvelle solution. Par exemple, si l'on connaît une suite limitée ou illimitée d'intégrales

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n,$$

on en déduira une nouvelle solution dépendant d'un nombre limité ou illimité de constantes arbitraires

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n.$$

Considérons en particulier, dans le cas de deux variables indépendantes, une solution

$$z(x, y, \alpha)$$

dépendant d'un paramètre arbitraire α. L'intégrale

$$\int f(\alpha) z(x, y, \alpha)\, d\alpha,$$

prise entre des limites fixes ou le long d'un chemin d'intégration indépendant des variables satisfera aussi à l'équation proposée, pourvu que l'on puisse différentier sous le signe d'intégration par rapport à x et à y.

Une combinaison d'éléments analogues à cette intégrale donnera l'intégrale générale de l'équation s'il est possible de déterminer les fonctions arbitraires qui y figurent, de manière à satisfaire aux conditions aux limites les plus générales. Ce sont là des propriétés bien connues et dont on a fait depuis Poisson et Cauchy de nombreuses applications.

Mais proposons-nous de passer des intégrales à limites fixes aux intégrales à limites variables. La première question qui se présente est celle-ci :

Existe-t-il des solutions particulières dépendant d'une constante arbitraire α, $z(x, y, \alpha)$, *telles que l'intégrale*

$$\int f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha$$

soit encore une solution de l'équation proposée lorsque les limites sont des fonctions convenablement choisies de x *et de* y, *la fonction* $f(\alpha)$ *étant arbitraire?*

Je vais examiner ce problème dans le cas des équations de la forme (5).

7. Je supposerai que la limite supérieure seule est fonction des variables ; le cas où les deux limites en dépendraient se ramène évidemment à celui-là et peut d'ailleurs se traiter directement de la même manière.

Considérons l'intégrale

$$Z = \int_{\alpha_0}^{\theta} f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha. \tag{11}$$

Nous devons avoir

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 Z}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial Z}{\partial x} + b\frac{\partial Z}{\partial y} + cZ \\ &= \int_{\alpha_0}^{\theta} f(\alpha)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz\right) d\alpha \\ &\quad + f(\theta)\, z(x, y, \theta)\left\{a\frac{\partial \theta}{\partial x} + b\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y}\right\} \\ &\quad + f(\theta)\left\{\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right\} \\ &\quad + f'(\theta)\, z(x, y, \theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

L'intégrale s'annule identiquement, puisque $z(x,y,\alpha)$ est une solution de l'équation (5); la partie intégrée doit donc être nulle quelle que soit la fonction $f(\alpha)$; nous aurons donc

$$z(x,y,\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}=0.$$

On peut satisfaire à cette condition de deux manières :

1° En supposant $z(x,y,\theta)=0$ et $\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}\neq 0$;

2° En faisant $\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}=0$.

Examinons le premier cas; si l'on a $z(x,y,\theta)=0$, l'équation (12) nous donne

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial\theta}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{13}$$

D'autre part, la condition $z(x,y,\theta)=0$ entraîne les deux relations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=0,\\&\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}=0.\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Des équations (13) et (14) on déduit

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0,\qquad\frac{\partial z}{\partial y}=0,\qquad\frac{\partial z}{\partial\theta}=0.$$

Donc l'intégrale $z(x,y,\alpha)$ s'annule sur la courbe analytique $\theta=\alpha$, en même temps que ses dérivées premières. Or cette courbe n'est pas une caractéristique d'après notre hypothèse. Par suite, l'intégrale est complètement déterminée par ses valeurs et celles de l'une de ses dérivées; ces valeurs étant nulles, il en est de même de $z(x,y,\alpha)$. La formule (11) nous donnerait donc la solution unique $Z=0$.

8. Considérons maintenant le second cas

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}=0;$$

nous pouvons écarter l'hypothèse où θ serait une constante; les deux dérivées partielles ne sont donc pas nulles à la fois; supposons $\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial\theta}{\partial x} \neq 0$; θ est fonction de x seul. L'équation (12) nous donne alors

$$a z(x, y, \theta) + \frac{\partial}{\partial y} z(x, y, \theta) = 0. \tag{15}$$

On arrive donc à cette conclusion que, sur les caractéristiques définies par l'équation $\theta(x) = \alpha$, la solution $z(x, y, \alpha)$ doit vérifier l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial y} + a z = 0. \tag{16}$$

Réciproquement, si cette condition est vérifiée, l'intégrale (11) sera une solution de l'équation proposée. Il suffit, pour le démontrer, de remarquer que l'équation (12) est identiquement satisfaite par cette expression.

Les résultats sont évidemment analogues si l'on suppose que θ dépend de y seul. On trouverait que, sur les caractéristiques définies par l'équation $\theta(y) = \alpha$, l'intégrale considérée doit se réduire à une solution de l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} + b z = 0.$$

Les intégrales particulières dépendant d'un paramètre arbitraire et telles qu'on en puisse déduire, par la formule (11), une intégrale plus générale de l'équation proposée, se partagent donc en deux séries. Je donne à ces solutions le nom d'*intégrales principales* de l'équation (5). Je dirai que l'intégrale $z(x, y, \alpha)$ est principale par rapport à x ou par rapport à y, suivant que la limite θ correspondante est fonction de x ou de y. On peut, sans changer la forme des résultats, remplacer α par une fonction de α; nous supposerons, par conséquent, dans la suite, que, par une substitution convenable, on ait amené la limite supérieure θ de l'intégrale (11) à être égale à x ou à y. La caractéristique $x = \alpha$ ou $y = \alpha$ sera dite *paramétrique* pour l'intégrale principale.

9. L'équation (16) est liée, d'une manière remarquable, à la proposée. Posons

$$D(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz.$$

On peut regarder le second membre de cette identité comme un polynome entier en $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$, la dérivée $\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$ étant considérée comme produit $\frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial y}$. Désignons par D'_x et D'_y les dérivées du polynome D par rapport à $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$. Les expressions D'_x et D'_y sont de nouveaux symboles différentiels

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} D'_x(u) &= \frac{\partial u}{\partial x} + au, \\ D'_y(u) &= \frac{\partial u}{\partial y} + bu. \end{aligned} \right.$$

L'équation (16) peut donc s'écrire

$$D'_x(z) = 0.$$

Cette notation symbolique s'étend, sans difficulté, à une équation linéaire d'ordre quelconque. Elle a l'avantage de simplifier différentes expressions, et de préciser la loi uniforme qui sert à les déduire de l'équation considérée.

Étant donnée une équation linéaire d'ordre quelconque, à deux variables indépendantes,

$$D(z) = 0,$$

on considère le symbole différentiel $D(z)$ comme une fonction entière des symboles $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$, les dérivées de la forme $\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta}$ étant regardées comme des produits symboliques de la forme $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta$. Représentons par $D^{p+q}_{x^p y^q}$ la dérivée de D, prise p fois par rapport à $\frac{\partial}{\partial x}$ et q fois par rapport à $\frac{\partial}{\partial y}$. Ces définitions conduisent au développement suivant, analogue à la formule de Taylor, et que l'on peut regarder comme une extension de la formule de Leibnitz :

$$\begin{aligned}
D(uv) = uD(v) &+ \frac{\partial u}{\partial x} \partial'_x(v) + \frac{\partial u}{\partial y} D'_y(v) \\
&+ \frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} D''_x(v) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} D''_{xy}(v) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} D''_{y^2}(v)\right] \\
&+ \frac{1}{1.2.3}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} D'''_{x^3}(v) + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} D'''_{x^2y}(v) + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} D'''_{xy^2}(v) + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} D'''_{y^3}(v)\right] + \dots
\end{aligned}$$

Dans le cas de l'équation du second ordre (5), on a simplement

$$D(uv) = vD(u) + \frac{\partial v}{\partial x} D'_x(u) + \frac{\partial v}{\partial y} D'_y(u) + u\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}.$$

Nous appellerons *équations dérivées* les équations $D'_x(z) = 0$ et $D'_y(z) = 0$. D'après cela, les intégrales principales sont assujetties à la condition de se réduire sur une caractéristique paramétrique à une solution de l'une ou l'autre des équations dérivées.

10. L'existence des intégrales principales est une conséquence immédiate du théorème de M. Darboux que nous avons déjà cité. En effet, l'équation dérivée

$$\frac{\partial z}{\partial y} + az = 0$$

admet pour $x = x_0$ une intégrale holomorphe par rapport à y et x_0

$$e^{-\int_{y_0}^{y} a\,dy};$$

on peut d'ailleurs multiplier cette solution par une fonction holomorphe quelconque de x_0, $f(x_0)$. Cela posé, nous savons qu'il existe une infinité d'intégrales de l'équation (5), holomorphes par rapport à x_0 et qui prennent sur la caractéristique $x = x_0$ les mêmes valeurs que la fonction

$$f(x_0)\,e^{-\int_{y_0}^{y} a\,dy}.$$

Ce sont des solutions principales par rapport à x. Ces solutions dépendent encore d'une fonction arbitraire que l'on peut définir par la valeur de l'intégrale sur la caractéristique $y=y_0$. On en déduit qu'il existe des intégrales principales à la fois par rapport aux deux variables x et y et dépendant de deux paramètres x_0 et y_0. Telle est la fonction u, solution de l'équation adjointe, considérée par M. Darboux dans l'exposition de la méthode de Riemann; en effet, on sait que la fonction $u(x, y, x_0, y_0)$, quand on y regarde x_0, y_0 comme les variables, x et y comme les paramètres, vérifie l'équation proposée, et annule aussi les dérivées D'_x et D'_y sur les caractéristiques paramétriques correspondantes.

Nous venons de démontrer l'existence d'intégrales principales holomorphes en supposant les coefficients de l'équation également holomorphes. Mais il existe aussi une infinité d'intégrales principales simplement continues; l'expression

$$\int_{x_0}^{x} f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha$$

aura néanmoins un sens bien défini quand le chemin d'intégration sera bien déterminé ainsi que la valeur initiale de z.

11. Étudions maintenant les solutions plus générales que l'on peut déduire d'une intégrale principale par la formule (11). Supposons $\theta = x$ et considérons l'intégrale

$$Z = \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha.$$

Voyons s'il est possible de déterminer $f(\alpha)$ de manière que Z prenne des valeurs données en fonction x, pour $y=y_0$.

Ce problème ne diffère pas du suivant que je vais traiter d'une manière générale :

Étant donnée l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} f(\alpha)\, \varphi(x, \alpha)\, d\alpha,$$

où $f(\alpha)$ est une fonction indéterminée, disposer de cette fonction de telle *façon que l'intégrale soit égale à une fonction donnée $\psi(x)$ s'annulant pour $x = x_0$.*

Pour résoudre le problème, je ferai usage de la méthode d'approximations successives dont M. Picard a tiré un si grand parti dans son beau Mémoire sur les équations du second ordre. Je suppose que $\psi(x)$ admette une dérivée bien déterminée et continue et que l'on puisse différentier sous le signe d'intégration. Soit

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\,\varphi(x, \alpha)\,d\alpha. \tag{18}$$

Je déduis de là

$$\psi'(x) = f(x)\,\varphi(x, x) + \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,d\alpha. \tag{19}$$

Supposons que, dans tout le domaine considéré, la fonction $\varphi(x, x)$ soit continue et différente de zéro, et que la dérivée $\varphi'_x(x, \alpha)$ soit aussi continue.

Posons

$$u_0(x) = \frac{\psi'(x)}{\varphi(x, x)},$$

$$u_1(x) = \frac{\psi'(x)}{\varphi(x, x)} - \frac{1}{\varphi(x, x)}\int_{x_0}^{x} u_0(\alpha)\,\varphi'_x(x, \alpha)\,d\alpha,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$u_n(x) = \frac{\psi'(x)}{\varphi(x, x)} - \frac{1}{\varphi(x, x)}\int_{x_0}^{x} u_{n-1}(\alpha)\,\varphi'_x(x, \alpha)\,d\alpha.$$

Chacune des fonctions u ainsi définie est continue et bien déterminée, en supposant que le chemin d'intégration se réduise à la droite $\overline{x_0 x}$. Je dis en outre que, si le module de la différence $x - x_0$ est suffisamment petit, u_n a une limite lorsque n croît indéfiniment.

Nous avons, en effet,

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{1}{\varphi(x, x)}\int_{x_0}^{x} [u_n(\alpha) - u_{n-1}(\alpha)]\,\varphi'_x(x, \alpha)\,d\alpha,$$

la fonction $\dfrac{\varphi'_x(x, \alpha)}{\varphi(x, x)}$ est finie et continue dans tout le domaine considéré lorsque x et α varient indépendamment l'un de l'autre;

elle admet donc un module maximum A. Désignons aussi par $\mathfrak{M}[u_n(x)-u_{n-1}(x)]$ le module maximum de la différence $u_n(x)-u_{n-1}(x)$ dans le même domaine. On a

$$\mathfrak{M}(u_{n+1}-u_n) < \mathrm{A}\,|x-x_0|\,\mathfrak{M}(u_n-u_{n-1}),$$
$$\mathfrak{M}(u_{n+2}-u_{n+1}) < \mathrm{A}^2|x-x_0|^2\,\mathfrak{M}(u_n-u_{n-1}),$$

et ainsi de suite. Par conséquent, si l'on a

$$\mathrm{A}\,|x-x_0| < 1,$$

la série

$$u_0+(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\ldots+(u_n-u_{n-1}) \tag{20}$$

sera plus convergente qu'une progression géométrique décroissante, et par suite u_n tend vers une limite bien déterminée $f(x)$.

Il reste à démontrer que l'on a bien

$$\int_{x_0}^{x}\psi'(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\,\varphi(x,\alpha)\,d\alpha.$$

Considérons l'intégrale

$$\mathrm{I}_n(x) = \int_{x_0}^{x} u_n(\alpha)\,\varphi(x,\alpha)\,d\alpha.$$

Nous avons

$$\int_{x_0}^{x} f(\alpha)\,\varphi(x,\alpha)\,d\alpha = \mathrm{I}_n(x) + \int_{x_0}^{x}[f(\alpha)-u_n(\alpha)]\,\varphi(x,\alpha)\,d\alpha;$$

or la série (20) converge uniformément; on peut donc supposer n assez grand pour que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x}[f(\alpha)-u_n(\alpha)]\,\varphi(x,\alpha)\,d\alpha$$

ait un module plus petit que toute quantité donnée ε, quel que soit x. Donc

$$\lim \mathrm{I}_n(x) = \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\,\varphi(x,\alpha)\,d\alpha = \mathrm{I}(x).$$

Prenons la dérivée de $I_n(x)$

$$\frac{dI_n}{dx} = u_n(x)\varphi(x, x) + \int_{x_0}^{x} u_n(\alpha)\varphi'_x(x, \alpha)\,d\alpha,$$

ou, en tenant compte de la valeur de u_n

$$\frac{dI_n}{dx} = \psi'(x) + \int_{x_0}^{x} [u_n(\alpha) - u_{n-1}(\alpha)]\varphi'_x(x, \alpha)\,d\alpha,$$

l'intégrale du second membre tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment. Nous avons donc, en passant aux limites,

$$\lim \frac{dI_n}{dx} = \frac{dI}{dx} = \psi'(x),$$

et enfin

$$\int_{x_0}^{x} \psi'(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\varphi(x, \alpha)\,d\alpha.$$

12. Il résulte de cette démonstration que, si l'intégrale principale $z(x, y, \alpha)$ ne s'annule pas pour $x = \alpha$ et que ses dérivées soient finies et continues, on pourra disposer, en général, de la fonction arbitraire $f(\alpha)$ de manière que la solution

$$Z = \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\,z(x, y, \alpha)\,d\alpha$$

soit, pour $y = y_0$, une fonction déterminée de x, s'annulant pour $x = x_0$ et admettant une dérivée finie et continue pour les valeurs de x considérées.

Le calcul de cette fonction sera très simple, si l'expression $z(x, y_0, \alpha)$ satisfait à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont indépendants de α. Je vais considérer seulement le cas où cette équation est du premier ordre et de la forme

$$\frac{\partial z}{\partial x} + P(x)z = 0.$$

Nous aurons alors, pour $y = y_0$,

$$\frac{\partial Z}{\partial x} + P(x)Z = f(x)\,z(x, y_0, x).$$

Par conséquent, pour vérifier la relation $Z(x, y_0) = \psi(x)$, il faudra prendre

$$f(\alpha) = \frac{\psi'(\alpha) + P(\alpha)\psi(\alpha)}{z(\alpha, y_0, \alpha)}.$$

Il reste à vérifier l'égalité

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f'(\alpha) + P(\alpha)\psi(\alpha)}{z(\alpha, y_0, \alpha)} z(x, y_0, \alpha)\, d\alpha.$$

Le second membre devient, en intégrant par parties,

$$\psi(x) = \psi(x_0)\frac{z(x, y_0, x_0)}{z(x_0, y_0, x_0)} + \int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\left[P(\alpha)\frac{z(x, y_0, \alpha)}{z(\alpha, y_0, \alpha)} - \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{z(x, y_0, \alpha)}{z(\alpha, y_0, \alpha)}\right] d\alpha.$$

L'intégrale restante est nulle, car nous avons

$$\frac{z(x, y_0, \alpha)}{z(\alpha, y_0, \alpha)} = e^{-\int_{\alpha}^{x} P(\xi)\, d\xi}.$$

On a donc, en supposant $\psi(x_0) = 0$,

$$Z(x, y_0) = \psi(x).$$

Dans le cas où $f(x_0)$ n'est pas nulle, l'intégrale déduite de la solution principale considérée, et qui est égale à $\psi(x)$ pour $y = y_0$, est représentée par la formule suivante

$$Z = \psi(x_0)\frac{z(x, y, x_0)}{z(x_0, y_0, x_0)} + \int_{x_0}^{x} \frac{\psi'(\alpha) + P(\alpha)\psi(\alpha)}{z(\alpha, y_0, \alpha)} z(x, y, \alpha)\, d\alpha.$$

Étudions, en particulier, l'intégrale doublement principale de M. Darboux

$$z(x, y, \alpha, \beta).$$

Elle satisfait aux conditions suivantes : quand on y fait $x = \alpha$, elle est égale à $e^{-\int_{\beta}^{y} a\, dy}$ et pour $y = \beta$ elle devient $e^{-\int_{\alpha}^{x} b\, dx}$; on peut donc lui appliquer le calcul précédent; par suite, la solution Z de l'équation proposée, qui est définie par les conditions aux limites

$$Z(x, y_0) = f(x),$$
$$Z(x_0, y) = \varphi(y),$$

est donnée par la formule suivante :

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} Z = Z(x_0, y_0) z(x, y, x_0, y_0) &+ \int_{x_0}^{x} [f'(\alpha) + b(\alpha, y_0) f(\alpha)] z(x, y, \alpha, y_0)\, d\alpha \\ &+ \int_{y_0}^{y} [\varphi'(\beta) + a(x_0, \beta)\varphi(\beta)] z(x, y, x_0, \beta)\, d\beta. \end{aligned} \right.$$

C'est, sous une forme un peu différente, l'expression générale de l'intégrale donnée par M. Darboux.

13. Supposons maintenant que l'on connaisse deux intégrales

$$z(x, y, \alpha), \quad z_1(x, y, \beta),$$

la première principale par rapport à x, la seconde par rapport à y. Nous en déduisons la solution plus générale

$$Z = \int_{x_0}^{x} f(\alpha) z(x, y, \alpha)\, d\alpha + \int_{y_0}^{y} \varphi(\beta) z_1(x, y, \beta)\, d\beta,$$

$f(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ désignant encore deux fonctions arbitraires.

Si l'on a $z(\alpha, y_0, \alpha) \neq 0$ et $z_1(x_0, \beta, \beta) \neq 0$, et que les dérivées soient continues, on pourra disposer de ces fonctions, de manière que Z prenne sur les caractéristiques $x = x_0$ et $y = y_0$ des valeurs données à l'avance, mais s'annulant au point x_0, y_0. Ce n'est donc pas encore la solution la plus générale de l'équation proposée, mais il est facile de la compléter. Soit, en effet, $z_2(x, y)$ une troisième intégrale quelconque, par exemple celle que l'on obtient en particularisant la constante α ou β dans l'une des intégrales principales. La formule

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} Z(x, y) = Z(x_0, y_0) \frac{z_2(x, y)}{z_2(x_0, y_0)} &+ \int_{x_0}^{x} f(\alpha) z(x, y, \alpha)\, d\alpha \\ &+ \int_{y_0}^{y} \varphi(\beta) z_1(x, y, \beta)\, d\beta \end{aligned} \right.$$

définit une solution qui n'est plus assujettie à aucune restriction. Elle peut prendre des valeurs données à l'avance sur les deux caractéristiques $x = x_0$ et $y = y_0$. C'est donc l'*intégrale générale* de l'équation (5).

La formule (22) comprend, comme cas particulier, celle que nous avons donnée au numéro précédent, car il n'est pas nécessaire de supposer que les deux intégrales principales $z(x, y, \alpha)$ et $z_1(x, y, \beta)$ soient distinctes, une même solution pouvant être à la fois principale par rapport aux deux variables. Les paramètres α et β peuvent aussi n'être pas distincts l'un de l'autre; par exemple, le point analytique α, β peut être assujetti à décrire une courbe donnée, telle qu'une ligne de points singuliers des coefficients de l'équation. Dans ce cas, la formule (21) n'est plus applicable, mais l'équation (22) subsiste.

Le résultat précédent est important; il montre que l'intégrale générale d'une équation linéaire du second ordre à deux variables indépendantes peut toujours être obtenue au moyen de deux quadratures quand on connaît deux intégrales principales $z(x, y, \alpha)$ et $z_1(x, y, \beta)$, satisfaisant aux conditions indiquées. Ces solutions jouent ici un rôle comparable à celui des intégrales complètes des équations du premier ordre. Au point de vue des applications, la formule (22) pourrait être d'un usage peu commode pour déterminer les intégrales par des conditions initiales données, sauf dans les cas simples que nous avons signalés. Cependant, dans l'étude des propriétés analytiques des fonctions, elle peut être utile, et ces propriétés elles-mêmes ne sont pas toujours indifférentes dans les applications.

14. Quand l'intégrale principale s'annule sur la caractéristique paramétrique, les conclusions précédentes sont en défaut. Cependant on peut résoudre la difficulté dans un cas très étendu de la manière suivante. Supposons, par exemple, que $z(x, y, \alpha)$ s'annule pour $x = \alpha$, quel que soit y, les dérivées prises par rapport à α étant aussi nulles dans les mêmes conditions, jusqu'à l'ordre $n - 1$ inclusivement, la dérivée $n^{\text{ième}}$ étant différente de zéro et continue.

Les dérivées $\frac{\partial z}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial \alpha^n}$ sont des solutions particulières, et il en est de même de la somme

$$C_0 z + C_1 \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \ldots + C_n \frac{\partial^n z}{\partial \alpha^n}.$$

Cela posé, considérons l'intégrale

$$I = \int_{x_0}^{x} f^n(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha;$$

elle devient, en intégrant par parties,

$$I = f_{(x_0)}^{n-1} z(x, y, x_0) - f_{(x_0)}^{n-2} \frac{\partial z(x, y, x_0)}{\partial x_0} + \ldots + (-1)^n \int_{x_0}^{x} f(\alpha) \frac{\partial^n z}{\partial \alpha^n}\, d\alpha.$$

I est une solution de l'équation proposée, et la partie intégrée du second membre est aussi une intégrale particulière; donc il en est de même du dernier terme

$$\int_{x_0}^{x} f(\alpha) \frac{\partial^n z}{\partial \alpha^n}\, d\alpha;$$

et comme cette condition est vérifiée, quelle que soit la fonction arbitraire $f(\alpha)$, j'en déduis que $\frac{\partial^n z}{\partial \alpha^n}$ est une intégrale principale. Par hypothèse, elle est différente de zéro pour $\alpha = x$. On peut donc lui appliquer tous les raisonnements du n° 11, pourvu que la dérivée $\frac{\partial^{n+1} z}{\partial \alpha^n\, \partial x}$ soit finie et continue dans le domaine considéré. Cette remarque est d'autant plus importante que toute intégrale qui s'annule sur une caractéristique $x = \alpha$, α désignant toujours un paramètre, est une intégrale principale. On voit par ce qui précède que, si elle est holomorphe en α, la première de ses dérivées prise par rapport au paramètre et qui ne s'annule pas pour $\alpha = x$ est aussi une intégrale principale. Les deux intégrales de la formule (22), quand on y regarde x_0 et y_0 comme des paramètres, jouissent de la propriété précédente.

Les limites inférieures x_0 et y_0 sont arbitraires, on peut donc les négliger dans la représentation analytique des solutions. En mettant en évidence la seule limite supérieure, les deux derniers termes de la formule (22) deviennent

$$\int^{x} f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha, \qquad \int^{y} \varphi(\beta)\, z_1(x, y, \beta)\, d\beta.$$

On peut les regarder comme des intégrales en quelque sorte indéfinies, et représentant non plus une intégration unique à partir d'une limite inférieure déterminée, mais la somme d'un nombre limité ou illimité d'intégrations prises à partir de limites inférieures quelconques, la limite supérieure étant toujours la même. Dans ces conditions l'intégrale générale est représentée par la somme des deux intégrales indéfinies

$$\int^x f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha + \int^y \varphi(\beta)\, z_1(x, y, \beta)\, d\beta.$$

15. Occupons-nous maintenant des intégrales principales holomorphes. Nous en avons déjà démontré l'existence; d'après la remarque du nº 5, la solution $z(x, y, \alpha)$, regardée comme fonction de la variable α, sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $\alpha - x$. La possibilité de ce développement étant démontrée, nous allons en chercher les coefficients, qui sont des fonctions de x et de y. Posons

$$(23)\qquad z(x, y, \alpha) = u_0 + u_1 \frac{\alpha - x}{1} + u_2 \frac{(\alpha - x)^2}{1.2} + \ldots + u_n \frac{(\alpha - x)^n}{n!} + \ldots.$$

En écrivant que z est une solution principale vérifiant l'équation proposée quel que soit le paramètre α, nous avons les relations suivantes

$$(24)\qquad \begin{cases} D'_x(u_0) = 0, \\ D'_x(u_1) = D(u_0), \\ D'_x(u_2) = D(u_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ D'_x(u_n) = D(u_{n-1}). \end{cases}$$

On voit que chaque coefficient se déduira du précédent par la formule de récurrence

$$u_n = D'^{-1}_x D(u_{n-1}),$$

en désignant par D'^{-1}_x l'opération inverse de D'_x. Donc

$$u_n = e^{-\int a\, dy} \int D(u_{n-1})\, e^{\int a\, dy}\, dy.$$

On peut encore donner une autre forme à ce résultat. Nous avons, en effet, quelle que soit la fonction u, les deux identités

$$D'_y D'_x(u) = D(u) + hu,$$
$$D'_x D'_y(u) = D(u) + ku,$$

h et k désignant les deux invariants de M. Darboux

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c,$$

$$k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c.$$

De ces relations on déduit : $D'^{-1}_x D(u) = D'_y(u) - D'^{-1}_x(ku)$,

$$D'^{-1}_x D(u) = \frac{\partial u}{\partial x} + bu - e^{-\int a\,dy} \int ku e^{\int a\,dy}\,dy,$$

les intégrales étant indéfinies et comportant l'addition de fonctions arbitraires de x.

Désignons par I l'opération fonctionnelle $D'^{-1}_x D$,

$$I(u) = D'^{-1}_x D(u),$$

et par $\varphi(x, y)$ la fonction $e^{-\int a\,dy}$.

Les relations (24) nous donnent

$$u_0 = \varphi,$$
$$u_1 = I(\varphi),$$
$$u_2 = II(\varphi) = I^2(\varphi),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$u_n = I^n(\varphi).$$

L'intégrale principale se développe donc en série par la formule

$$(25) \qquad z(x, y, \alpha) = \varphi + \frac{\alpha - x}{1} I(\varphi) + \frac{(\alpha - x)^2}{1.2} I^2(\varphi) + \ldots + \frac{(\alpha - x)^n}{n!} I^n(\varphi).$$

Cette formule représente une infinité de fonctions. En effet, la fonction φ n'est pas complètement définie; on peut la multiplier par une fonction holomorphe quelconque de x. En outre, chacune des opérations I est indéfinie, assujettie seulement à rendre convergente la série (25); il est évident, en effet, qu'il existe pour ces opérations une infinité de déterminations qui rendent la série divergente.

16. Étudions, en particulier, l'intégrale principale que l'on obtient en prenant pour $\mathrm{I}(u)$ la signification définie

$$\mathrm{I}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} + bu - \varphi \int_{y_0}^{y} \frac{ku}{\varphi}\, dy. \tag{26}$$

Pour $y = y_0$ les différents coefficients de la série (25) deviennent alors

$$u_1 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + bu_0 = e^{-\int_{x_0}^{x} b\,dx} \frac{\partial}{\partial x}\left(u_0 e^{\int_{x_0}^{x} b\,dx}\right),$$

$$u_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + bu_1 = e^{-\int_{x_0}^{x} b\,dx} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u_0 e^{\int_{x_0}^{x} b\,dx}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u_n = \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + bu_{n-1} = e^{-\int_{x_0}^{x} b\,dx} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(u_0 e^{\int_{x_0}^{x} b\,dx}\right);$$

le développement de la formule (25) devient donc

$$z(x, y_0, \alpha) = e^{-\int_{x_0}^{x} b\,dx}\left[v + \frac{\alpha - x}{1}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{(\alpha - x)^2}{1.2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \ldots\right],$$

v désignant dans cette expression la fonction $\varphi e^{\int b\,dx}$.

La fonction v est développable en série suivant la formule de Taylor; on a, par conséquent,

$$v(\alpha, y_0) = v(x, y_0) + \frac{\alpha - x}{1}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{(\alpha - x)^2}{1.2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \ldots,$$

et nous pouvons écrire

$$z(x, y_0, \alpha) = e^{-\int_{x_0}^{x} b\,dx}\, v(\alpha, y_0) = \varphi(\alpha, y_0)\, e^{-\int_{\alpha}^{x} b(x, y_0)\,dx}. \tag{27}$$

Cette expression est une solution quelconque de l'équation dérivée

$$\mathrm{D}'_y(z) = 0.$$

Si donc on regarde y_0 comme un paramètre variable, la série (25) définira une intégrale doublement principale qui ne diffère de l'intégrale u de Riemann et de M. Darboux que par un facteur fonction de α et de y_0. Cependant, pour que cette conclusion soit rigoureuse, il faut démontrer que la série qui admet un domaine de convergence pour $y = y_0$ est encore convergente pour y suffisamment voisin de y_0. La convergence résulte immédiatement des considérations suivantes, et sans qu'il soit nécessaire d'effectuer un calcul direct : 1° l'intégrale doublement principale est développable suivant les puissances de $\alpha - x$ et admet un rayon de convergence minimum différent de zéro [1], lorsque y varie dans un domaine suffisamment petit autour du point y_0, pourvu que les coefficients a, b, c de l'équation (5) soient holomorphes; 2° le développement est univoque; d'une manière générale les coefficients u_0, u_1, ... sont complètement définis quand on connaît les valeurs de l'intégrale principale sur une seconde caractéristique $y = y_0$.

17. Cherchons maintenant l'expression générale du coefficient u_n, quand on laisse les opérations I indéfinies. Désignons par u_0, u_1, ... les valeurs particulières que l'on obtient en attribuant d'abord à cette opération une signification définie quelconque, par exemple celle qui est déterminée par l'équation (26). Soient U_0, U_1, ..., U_n, les valeurs les plus générales des coefficients. U_n est donné par la formule de récurrence

$$D'_x(U_n) = D(U_{n-1}).$$

La valeur la plus générale de U_n, quand U_{n-1} est connu, est donc de la forme

$$U_n = \lambda_n(x)\,u_0 + u_0 \int \frac{D(U_{n-1})}{u_0}\,dy,$$

$\lambda_n(x)$ désignant une fonction arbitraire de x et l'intégrale étant prise à partir d'une limite inférieure quelconque. Il en résulte que, U_{n-1} étant donné, les diverses valeurs de U_n ne diffèrent que par le terme $\lambda_n(x)u_0$. En s'appuyant sur ce résultat, on voit facilement que l'ex-

---

(1) *Voir* n° 5.

pression générale de U_n est de la forme suivante

$$(28) \qquad U_n = \mu_0(x)u_0 + \mu_1(x)u_1 + \ldots + \mu_n(x)u_n,$$

les fonctions $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ étant arbitraires et assujetties seulement à rendre la série convergente. La forme (28) du coefficient ne montre pas suffisamment la relation qui existe entre U_n et les coefficients qui le précèdent. Cette relation peut s'obtenir très facilement de la manière suivante. Le coefficient U_{n+1} sera de la forme (28); posons donc

$$(29) \qquad U_{n+1} = \nu_0(x)u_0 + \nu_1(x)u_1 + \ldots + \nu_{n+1}(x)u_{n+1}.$$

La loi de récurrence donne

$$\begin{aligned} D'_x(U_{n+1}) = D(U_n) = \mu_0(x)D(u_0) + \mu_1(x)D(u_1) + \ldots + \mu_n(x)D(u_n) \\ + \mu'_0(x)D'_x(u_0) + \mu'_1(x)D'_x(u_1) + \ldots + \mu'_n(x)D'_x(u_n). \end{aligned}$$

En tenant compte des relations $D'_x(u_0) = 0, \ldots, D'_x(u_p) = D(u_{p-1})$, nous pouvons mettre ce résultat sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &D'_x(U_{n+1}) \\ &= (\mu_0 + \mu'_1)D(u_0) + (\mu_1 + \mu'_2)D(u_1) + \ldots + (\mu_{n-1} + \mu'_n)D(u_{n-1}) + \mu_n D(u_n). \end{aligned}$$

En comparant le développement précédent à celui qui se déduirait de la formule (29), nous trouvons

$$(30) \qquad \nu_1 = \mu_0 + \mu'_1, \quad \nu_2 = \mu_1 + \mu'_2, \quad \ldots, \quad \nu_{n-1} = \mu_{n-1} + \mu'_n, \quad \nu_{n+1} = \mu_n.$$

Le coefficient ν_0 est arbitraire. Les valeurs des coefficients ν déterminées par ces équations sont les seules admissibles lorsque $u_0, u_1, \ldots, u_n$, regardées comme fonctions de y, sont linéairement indépendantes. Dans le cas contraire, ces valeurs sont encore acceptables, mais la forme obtenue n'est pas la seule possible. Quand on passe d'un coefficient U_n au suivant, on introduit à chaque fois une nouvelle fonction arbitraire ν_0. Pour l'uniformité des notations, nous représenterons par

$$\lambda_n + \frac{n}{1}\frac{d\lambda_{n-1}}{dx} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2\lambda_{n-2}}{dx^2} + \ldots + \frac{d^n\lambda_0}{dx^n}$$

le coefficient de u_0 dans le développement de U_n suivant les fonctions u; les λ désignent des fonctions de x seul.

Nous aurons alors, d'après les équations (30),

$$\begin{aligned}
&U_0 = \lambda_0 u_0,\\
&U_1 = \left(\lambda_1 + \frac{d\lambda_0}{dx}\right) u_0 + \lambda_0 u_1,\\
&U_2 = \left(\lambda_2 + 2\,\frac{d\lambda_1}{dx} + \frac{d^2\lambda_0}{dx^2}\right) u_2 + \left(\lambda_1 + 2\,\frac{d\lambda_0}{dx}\right) u_1 + \lambda_0 u_2,
\end{aligned}$$

et, en général,

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned}
U_n = &\left(\lambda_n + C_n^1 \frac{d\lambda_{n-1}}{dx} + C_n^2 \frac{d^2\lambda_{n-2}}{dx^2} + \ldots\right) u_0\\
&+\left(\lambda_{n-1} + C_n^1 \frac{d\lambda_{n-2}}{dx} + C_n^2 \frac{d^2\lambda_{n-3}}{dx} + \ldots\right) u_1\\
&+\left(\lambda_1 + n\,\frac{d\lambda_0}{dx}\right) u_{n-1} + \lambda_0 u_n.
\end{aligned}\right.$$

Le symbole C_n^p désigne dans cette expression le nombre des combinaisons de n quantités p à p.

18. Le développement obtenu pour le coefficient U_n va nous permettre d'établir la forme générale des intégrales principales holomorphes. Mais nous allons commencer par étudier certaines intégrales particulières que l'on obtient en choisissant convenablement les diverses fonctions λ. Posons

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{p-1} = 0, \qquad \lambda_p = 1,$$

et supposons que tous les λ dont l'indice est supérieur à p soient nuls. L'intégrale correspondante est représentée par le développement suivant :

$$z_p = \frac{u_0}{p!}(\alpha - x)^p + u_1 \frac{(\alpha - x)^{p+1}}{(p+1)!} + \ldots + u_n \frac{(\alpha - x)^{n+p}}{(n+p)!} + \ldots;$$

cette série est convergente en même temps que l'intégrale (23); le coefficient u_0 étant supposé différent de zéro, la solution principale z_p s'annule pour $\alpha = x$ ainsi que ses dérivées par rapport à α jusqu'à l'ordre $p-1$ inclusivement, et l'on a de plus

$$\frac{\partial^p z_p}{\partial \alpha^p} = z(x, y, \alpha),$$

le symbole $z(x, y, \alpha)$ désignant toujours l'intégrale principale représentée par la formule (23).

Reportons-nous maintenant à l'expression (31) du coefficient U_n. Les termes qui dépendent de λ_p dans ce coefficient sont

$$\lambda_p u_{n-p} + \frac{n}{1}\frac{d\lambda_p}{dx}u_{n-p-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2\lambda_p}{dx^2}u_{n-p-2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(p+1)}{(n-p)!}\frac{d^{n-p}\lambda_p}{dx^p}u_0.$$

C'est le coefficient de

$$\frac{(\alpha - x)^n}{n!}$$

dans le développement du produit $\lambda_p(\alpha)z_p$ suivant les puissances de $\alpha - x$.

Donc l'expression la plus générale des intégrales principales holomorphes est la suivante

$$Z(x, y, \alpha) = \lambda_0(\alpha)z(x, y, \alpha) + \lambda_1(\alpha)z_1 + \lambda_2(\alpha)z_2 + \ldots + \lambda_p(\alpha)z_p + \ldots.$$

Cette suite est limitée ou illimitée, assujettie seulement à être absolument convergente dans un domaine fini. Les fonctions $\lambda(\alpha)$ sont nécessairement supposées holomorphes.

19. Le calcul précédent montre que toute intégrale principale par rapport à x est développable en série de fonctions $z, z_1, z_2, \ldots, z_p$, les coefficients du développement étant des fonctions de α seul. Les fonctions z_p qui se déduisent d'une même intégrale principale pour laquelle le coefficient u_0 est différent de zéro ne sont complètement déterminées que lorsque cette intégrale l'est elle-même; or nous savons que l'expression la plus générale de l'intégrale $z(x, y, \alpha)$ dépend d'une fonction arbitraire de x. Les solutions z_p peuvent varier de forme avec $z(x, y, \alpha)$; mais, quelle que soit la fonction initiale, elles peuvent servir à représenter par un développement en série les intégrales principales les plus générales. On peut encore modifier la forme de ces développements d'une infinité de manières; mais je n'y insiste pas davantage, les résultats précédemment établis étant les seuls dont nous aurons à faire usage.

20. Un cas particulier intéressant est celui où la série (23) se réduit

à un polynome entier en $\alpha - x$, c'est-à-dire le cas où le développement de l'intégrale considérée est limité. Quelle que soit l'équation, il existe toujours une infinité d'intégrales principales pour lesquelles le développement est illimité, puisque le calcul de chaque coefficient introduit une fonction arbitraire. Proposons-nous donc d'abord la question suivante : Étant donnée une intégrale principale développée suivant les puissances croissantes de $\alpha - x$, le coefficient u_0 étant supposé différent de zéro, et le développement se poursuivant au delà du terme de degré n, reconnaître s'il existe une intégrale de la même forme pour laquelle le développement se limite au terme de degré n.

Soit l'intégrale proposée

$$z = u_0 + \frac{\alpha - x}{1} u_1 + \frac{(\alpha - x)^2}{1.2} u_2 + \ldots + \frac{(\alpha - x)^n}{n!} u_n + \ldots,$$

toute solution principale holomorphe sera de la forme suivante

$$Z = U_0 + U_1 \frac{\alpha - x}{1} + U_2 \frac{(\alpha - x)_2}{1.2} + \ldots,$$

le coefficient U_{n+1} a pour valeur

$$U_{n+1} = \mu_0(x) u_0 + \mu_1(x) u_1 + \ldots + \mu_n(x) u_n + \mu_{n+1}(x) u_{n+1},$$

les fonctions $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$ pouvant être choisies arbitrairement, ce qui détermine tous les coefficients précédents. Si la seconde intégrale se limite au terme de degré n, on aura $U_{n+1} = 0$, c'est-à-dire

$$(32) \qquad \mu_0 u_0 + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_n u_n + \mu_{n+1} u_{n+1} = 0.$$

Cette relation montre que les fonctions $u_0, u_1, \ldots, u_{n+1}$, considérées comme fonctions de y seulement, sont liées par une relation linéaire; elles vérifient donc une même équation différentielle linéaire d'ordre $n + 1$ de la forme

$$p_0 \frac{d^{n+1} u}{dy^{n+1}} + p_1 \frac{d^n u}{dy^n} + \ldots + p_{n+1} u = 0,$$

les coefficients $p_0, p_1, \ldots, p_{n+1}$ désignant des fonctions de x et de y.

Réciproquement, si cette condition est vérifiée, il sera possible de prendre $U_{n+1} = 0$ sans que tous les coefficients qui le précèdent soient nuls. Le coefficient U_{n+2} est défini par l'équation

$$D'_x(U_{n+2}) = D(U_{n+1});$$

par suite, quand on a $U_{n+1} = 0$, on peut aussi prendre $U_{n+2} = 0$ et de même pour tous les coefficients suivants. Donc l'intégrale Z correspondante sera bien limitée au terme de degré n.

Quand $u_0, u_1, \ldots, u_n$ regardées comme des fonctions de y sont linéairement indépendantes, il n'existe pas d'intégrales principales holomorphes dont le développement se limite à un terme d'ordre inférieur à n. Les résultats que nous venons d'établir se résument dans la propriété suivante :

Pour qu'il existe une intégrale principale holomorphe à développement limité au terme d'ordre n, il faut et il suffit que toute autre intégrale principale holomorphe regardée comme fonction de la seule variable y vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre $n+1$ dont les coefficients sont indépendants du paramètre α.

21. Il est facile de former cette équation différentielle ou, plus généralement, l'équation linéaire à laquelle satisfait l'expression générale du coefficient U_n quand on y regarde y comme la seule variable, quelle que soit, d'ailleurs, l'équation proposée.

Pour y arriver, rappelons d'abord que toute intégrale holomorphe par rapport à α qui s'annule pour $\alpha = x$ est une intégrale principale, et que ses coefficients vérifient les lois de récurrence (24). Si l'on a, par exemple,

$$z_p(x, y, \alpha) = \frac{(\alpha - x)^p}{p!} v_0 + \frac{(\alpha - x)^{(p+1)}}{(p+1)!} v_1 + \ldots;$$

les coefficients $v_0, v_1, \ldots$ sont donnés par les équations suivantes

$$D'_x(v_0) = 0, \qquad D'_x(v_1) = D(v_0).$$

Cela posé, considérons l'intégrale principale

$$z(x, y, \alpha) = u_0 + \frac{\alpha - x}{1} u_1 + \frac{(\alpha - x)^2}{1.2} u_2 + \ldots,$$

et effectuons sur elle l'opération D'_x. On a

$$D'_x(z) = \frac{\alpha - x}{1} D'_x(u_1) + \frac{(\alpha - x)^2}{1.2} D'_x(u_2) + \ldots.$$

Or l'expression

$$z_1 = D'_x(z) = \frac{\partial z}{\partial y} + az$$

est une solution de l'équation $D_1(z) = 0$ qu'on déduit de la proposée par la première substitution de Laplace. Elle s'annule pour $\alpha = x$; c'est donc une intégrale principale de la nouvelle équation, et le premier coefficient est une solution de l'équation dérivée $D'_{1,x}(u) = 0$. On a donc

$$D'_{1,x} D'_x(u_1) = 0.$$

Effectuons maintenant sur z_1 l'opération $D'_{1,x}$

$$D'_{1,x}(z_1) = \frac{(\alpha - x)^2}{1.2} D'_{1,x} D'_x(u_2) + \ldots;$$

la nouvelle expression $z_2 = D'_{1,x}(z_1)$ est une solution de l'équation $D_2(z) = 0$, obtenue en effectuant de nouveau la substitution de Laplace. On a, par conséquent,

$$D'_{2,x} D'_{1,x} D'_x(u_2) = 0.$$

C'est l'équation différentielle du troisième ordre à laquelle satisfait u_2. Le raisonnement précédent est général. En continuant l'application de la méthode, on arrive donc à l'équation différentielle suivante qui définit u_n

$$(33) \qquad D'_{n,x} D'_{n-1,x} \ldots D'_{1,x} D'_x(u_n) = 0.$$

Le premier membre de cette équation est le produit de $n+1$ facteurs différentiels symboliques du premier ordre. Nous allons lui donner une autre forme en introduisant les invariants $h, h_1, \ldots, h_n$.

Le coefficient a_i de l'équation $D_i(z) = 0$, obtenue par l'application régulière de la méthode de Laplace, a pour valeur

$$a_i = a - \frac{\partial \log(hh_1 \ldots h_{i-1})}{\partial y}.$$

D'autre part, nous avons

$$D'_{i,x}(u) = e^{-\int a_i dy} \frac{\partial}{\partial y}\left(u e^{\int a_i dy}\right),$$

c'est-à-dire

$$D'_{i,x}(u) = hh_1\ldots h_{i-1}e^{-\int a\,dy}\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{1}{hh_1\ldots h_{i-1}}e^{\int a\,dy}\right).$$

L'équation (33) devient donc, identiquement,

$$(34)\qquad hh_1\ldots h_{n-1}e^{-\int a\,dy}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{h_{n-1}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{h_{n-2}}\cdots\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial y}u_n e^{\int a\,dy} = 0.$$

Sous cette forme, elle s'intègre immédiatement et donne

$$u_n = e^{-\int a\,dy}\int h\,dy\int h_1\,dy\ldots\int h_{n-1}\,dy.$$

Les intégrales étant indéfinies, chacune d'elles entraîne une fonction arbitraire de X. Si nous mettons les limites en évidence, le résultat sera de la forme suivante, où les X désignent ces fonctions arbitraires,

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} u_n = {} & X_0 e^{-\int_{y_0}^{y} a\,dy}\int_{y_0}^{y} h\,dy\int_{y_0}^{y} h_1\,dy\ldots\int_{y_0}^{y} h_{n-1}\,dy \\ & + X_1 e^{-\int_{y_0}^{y} a\,dy}\int_{y_0}^{y} h\,dy\int_{y_0}^{y} h_1\,dy\ldots\int_{y_0}^{y} h_{n-2}\,dy + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + X_{n-1} e^{-\int_{y_0}^{y} a\,dy}\int_{y_0}^{y} h\,dy \\ & + X_n e^{-\int_{y_0}^{y} a\,dy}. \end{aligned}\right.$$

La fonction X_0, qui figure comme coefficient dans le premier terme de cette expression, figure de la même manière dans le premier terme de tous les coefficients d'indices moindres. On a, en particulier,

$$u_0 = X_0 e^{-\int_{y_0}^{y} a\,dy}(-1)^n.$$

Il est facile de vérifier directement cette propriété; elle résulte, d'ailleurs, du calcul que nous allons effectuer. Nous avons donné au n° 17 une première expression générale du coefficient U_n, connaissant les coefficients d'un développement particulier. Or il résulte immédiatement de la forme obtenue que les coefficients d'indice inférieur à n sont complètement déterminés quand U_n est connu.

Je me propose de les calculer. Pour cela, considérons l'intégrale principale

$$z = u_0 + \frac{\alpha - x}{1} u_1 + \frac{(\alpha - x)^2}{1.2} u_2 + \ldots + \frac{(\alpha - x)^n}{n!} u_n + \ldots.$$

Par l'application de la substitution de Laplace, on en déduit les fonctions

$$z^1 = D'_x(z), \qquad z^2 = D'_{1,x} D'_x(z), \qquad \ldots, \qquad z^{(n)} = D'_{n-1,x} D'_{n-2,x} \ldots D'_x(z).$$

Cette dernière fonction est de la forme

$$z^n = v_n \frac{(\alpha - x)^n}{n!} + v_{n+1} \frac{(\alpha - x)^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots,$$

le premier coefficient v_n étant égal à

$$D'_{n-1,x} D'_{n-2,x} \ldots D'_x(u_n).$$

Cela posé, la seconde substitution de Laplace permet de calculer

$$z^{n-1}, \quad z^{n-2}, \quad \ldots, \quad z', \quad z,$$

connaissant z^n. On a

$$z^{n-1} = \frac{1}{h_{n-1}} D'_y z^n = \frac{1}{h_{n-1}} \left(\frac{\partial z^n}{\partial x} + b z^n \right),$$

c'est-à-dire

$$z^{n-1} = - \frac{1}{h_{n-1}} v_n \frac{(\alpha - x)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{h_{n-1}} \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} + b v_n - v_{n+1} \right) \frac{(\alpha - x)^n}{(n+1)!} + \ldots;$$

le premier coefficient de ce nouveau développement est égal à

$$- \frac{1}{h_{n-1}} D'_{n-1,x} D'_{n-2,x} \ldots D'_x(u_n),$$

le second contient v_{n+1}; il semblerait tout d'abord qu'il devrait dépendre de u_{n+1}, mais il n'en est rien; nous avons, en effet,

$$z^{n-1} = \frac{(\alpha - x)^{n-1}}{(n-1)!} D'_{n-2,x} D'_{n-3,x} \ldots D'_x(u_{n-1}) + \frac{(\alpha - x)^n}{n!} D'_{n-2,x} \ldots D'_x(u_n) + \ldots;$$

d'où il résulte que le coefficient de $\frac{(\alpha - x)^n}{n!}$ s'exprime directement en fonction de u_n.

En continuant ainsi, on voit que les n premiers coefficients de z pourront s'obtenir au moyen de u_n par une suite de différentiations. L'expression de z au moyen de z^n est la suivante ([1])

$$z = \frac{1}{h} D'_y \frac{1}{h_1} D'_y \cdots \frac{1}{h_{n-1}} D'_y(z^n) = e^{-\int b\,dx} \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_{n-1}} \frac{\partial}{\partial x}(z^n e^{\int b\,dx}).$$

L'application de cette formule donnera tous les coefficients d'indice inférieur à n. Nous aurons, en particulier,

$$u_0 = (-1)^n \frac{v_n}{h h_1 \ldots h_{n-1}}.$$

Or le coefficient v_n, d'après l'équation (33), a pour valeur

$$v_n = X_0 e^{-\int a\,dy} h h_1 \ldots h_{n-1}.$$

Donc

$$u_0 = (-1)^n X_0 e^{-\int a\,dy}.$$

22. Quand l'invariant h_{n-1} est différent de zéro, il est impossible de supposer u_n nul sans que tous les coefficients précédents le soient. En effet, les $n+1$ termes qui figurent dans l'expression (35) sont linéairement indépendants; leur somme ne peut donc s'annuler que si chacun d'eux est nul séparément, ce qui donne $X_0 = 0$, $X_1 = 0$, ..., $X_n = 0$.

Dans ce cas, les coefficients u_0, u_1, ..., u_{n-1} sont évidemment nuls. La même conclusion résulte aussi du calcul précédent, qui est applicable, pourvu que les invariants considérés soient différents de zéro.

Donc, si le développement d'une intégrale principale se termine au terme en $(\alpha - x)^n$, l'invariant h_n devra être nul. Réciproquement, quand cette circonstance se présente, il existe des intégrales à développement limité; on le voit immédiatement par les résultats connus de la méthode de Laplace; on le déduit aussi avec facilité des principes que nous avons démontrés dans ce travail; en effet, supposons $h_n = 0$. Les

([1]) DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. II, p. 31.

intégrales principales par rapport à x de l'équation $D_n(z) = 0$ vérifient alors l'équation dérivée $D'_{n,x}(z) = 0$. Donc tous les coefficients de z^n sont des solutions particulières de cette dernière équation et, par conséquent, u_{n+1} vérifie aussi l'équation différentielle (33), qui admet déjà, comme solutions particulières, les coefficients $u_0, u_1, \ldots, u_n$. D'où résulte la propriété énoncée.

23. L'étude du développement en série des intégrales principales va nous conduire à un mode de représentation des solutions qui s'en déduisent.

Soit $z(x, y, \alpha)$ une intégrale principale holomorphe ne s'annulant pas sur la caractéristique paramétrique. Nous en avons déduit une demi-solution de l'équation proposée par la formule

$$Z = \int^x f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha. \tag{36}$$

L'intégrale principale considérée étant développable en série suivant les puissances de $\alpha - x$, intégrons terme à terme l'expression de Z; les intégrales à calculer sont toutes de la forme

$$\int^x \frac{(\alpha - x)^n}{n!} u_n f(\alpha)\, d\alpha;$$

u_n est indépendant du paramètre; par conséquent, si nous désignons par $S_n f(x)$ l'intégrale $n^{\text{ième}}$ indéfinie de la fonction $f(x)$, nous aurons

$$u_n \int^x \frac{(\alpha - x)^n}{n!} f(\alpha)\, d\alpha = (-1)^n u_n S_{n+1} f(x).$$

Par suite, l'intégrale (36) équivaut au développement suivant

$$Z = u_0 S f(x) - u_1 S_2 f(x) + \ldots + (-1)^n u_n S_{n+1} f(x) + \ldots,$$

ou bien, en remplaçant $S f(x)$ par X,

$$Z = u_0 X - u_1 S X + u_2 S_2 X + \ldots + (-1)^n u_n S_n X + \ldots. \tag{37}$$

Cette série n'est pas nécessairement convergente, quelles que soient les intégrales indéfinies; mais elle admettra toujours un domaine de convergence uniforme quand on considérera des intégrales définies prises à partir d'une même limite x_0 et que la fonction $f(\alpha)$ sur laquelle porte le signe d'intégration dans la formule (36) sera finie et continue.

Supposons maintenant que le développement de l'intégrale principale soit limité; si nous remplaçons dans la formule (37) l'intégrale $n^{\text{ième}}$, $S_n X$ par le symbole X, nous avons le développement suivant

$$Z = u_0 \frac{d^n X}{dx^n} - u_1 \frac{d^{n-1} X}{dx^{n-1}} + \ldots + (-1)^n u_n X. \tag{38}$$

C'est la forme bien connue de l'intégrale considérée pour la première fois par Euler; elle s'exprime au moyen d'une fonction arbitraire X et d'un nombre limité de ses dérivées. Elle appartient, comme on le sait, aux demi-solutions des équations intégrables par la méthode de Laplace.

24. Nous avons déjà remarqué que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)$$

est une nouvelle solution principale de l'équation proposée, dépendant du paramètre x_0 et s'annulant pour $x = x_0$. Il est facile d'en déduire l'expression la plus générale des intégrales principales par rapport à x : c'est la suivante

$$Z(x, y, x_0) = \varphi(x_0)\, z(x, y, x_0) + \int_{x_0}^{x} f(\alpha, x_0)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha, \tag{39}$$

$z(x, y, \alpha)$ désignant une intégrale principale donnée quelconque, par exemple l'une des intégrales holomorphes que nous avons étudiées. La fonction $Z(x, y, x_0)$ se réduit pour $x = x_0$ à une solution de l'équation dérivée $D'_x(z) = 0$ et elle peut prendre sur une seconde caractéristique $y = y_0$ des valeurs quelconques données en fonction de x et de x_0. Si l'on détermine la fonction $f(\alpha, x_0)$ qui figure dans la formule (39) de manière que l'intégrale Z soit, pour $y = y_0$ égale à une solution de l'équation dérivée

$$D'_y(z) = 0,$$

l'expression obtenue sera une seconde intégrale, principale par rapport aux deux variables x et y, et dont on pourra déduire par deux quadratures l'intégrale générale de l'équation proposée. Cette détermination est possible ainsi que nous l'avons démontré ; mais il n'est pas certain que le calcul de la fonction $f(\alpha, x_0)$ soit, en général, pratiquement plus simple que la détermination directe de l'intégrale doublement principale de M. Darboux. Je ne veux donc pas présenter la remarque précédente comme une méthode d'intégration. C'est seulement une simplification dans les cas où la fonction $f(\alpha)$ peut être facilement déterminée par les conditions énoncées. Toutefois, il n'est pas sans intérêt de remarquer que le nouveau problème auquel on est ainsi ramené comporte seulement la détermination d'une fonction *d'une seule variable*, car x_0 doit être traité comme une constante.

25. Étudions en particulier les intégrales principales des équations intégrables par la méthode de Laplace. La formule (38) représentera une intégrale principale par rapport à x, si l'on prend pour X une fonction de x et d'un paramètre x_0 s'annulant pour $x = x_0$, ainsi que ses $n - 1$ premières dérivées, la $n^{\text{ième}}$ étant continue. On posera, par exemple,

$$X = (x - x_0)^n \varphi(x, x_0),$$

la fonction φ étant continue pour $x = x_0$.

La nouvelle intégrale principale sera aussi à développement limité si le facteur $\varphi(x, x_0)$ est indépendant de x_0.

La détermination de la solution doublement principale se ramène au problème suivant :

Trouver une fonction X *vérifiant l'équation différentielle suivante, où l'on suppose* $y = y_0$,

$$u_0 X^{(n)} - u_1 X^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n u_n X = e^{-\int_{x_0}^{x} b\,dx},$$

et qui s'annule ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$ *inclusivement pour* $x = x_0$.

Le premier membre de cette équation linéaire d'ordre n peut être décomposé en un produit symbolique de facteurs différentiels du premier ordre en faisant usage de la substitution de Laplace.

26. Revenons à la formule (37), qui donne le développement d'une demi-solution en fonction des intégrales d'une fonction arbitraire. Si l'on pose $X = \frac{(\alpha - x)^p}{p!}$, nous retrouvons les solutions désignées par le symbole z_p

$$z_p = u_0 \frac{(\alpha - x)^p}{p!} + u_1 \frac{(\alpha - x)^{p+1}}{(p+1)!} + \dots.$$

On voit que z_p peut être représentée par l'intégrale définie suivante

$$z_p = \int_\alpha^x \frac{-(\alpha - t)^{p-1}}{(p-1)!} z(x, y, t)\, dt.$$

La considération de ces intégrales particulières va nous conduire à un développement en série très remarquable pour les intégrales holomorphes. Désignons par $\varphi_n(x, y)$ une intégrale définie par les conditions aux limites suivantes

$$\varphi_n(x, y_0) = \frac{(x - x_0)^n}{n!},$$
$$\varphi_n(x_0, y) = 0.$$

Soit de même $\psi_n(x, y)$ l'intégrale qui satisfait aux conditions analogues

$$\psi_n(x_0, y) = \frac{(y - y_0)^n}{n!},$$
$$\psi_n(x, y_0) = 0.$$

Les fonctions φ_n sont des cas particuliers des intégrales z_n.

Il est facile de les représenter par des intégrales définies en se servant de la formule (21).

On a

$$\varphi_n = \int_{x_0}^x \left[\frac{(\alpha - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + b(\alpha, y_0) \frac{(\alpha - x_0)^n}{n!}\right] z(x, y, \alpha, y_0)\, d\alpha$$

et de même

$$\psi_n = \int_{y_0}^y \left[\frac{(\beta - y_0)^{n-1}}{(n-1)!} + a(x_0, \beta) \frac{(\beta - y_0)^n}{n!}\right] z(x, y, x_0, \beta)\, d\beta,$$

en désignant par

$$z(x, y, \alpha, \beta)$$

l'intégrale doublement principale de Riemann et de M. Darboux.

Soit aussi $\varphi_0 = \psi_0$ l'intégrale qui se réduit à l'unité sur les deux caractéristiques. Nous avons

$$\begin{aligned}\varphi_0 = \psi_0 = z(x, y, x_0, y_0) &+ \int_{x_0}^{x} b(\alpha, y_0)\, z(x, y, \alpha, y_0)\, d\alpha \\ &+ \int_{y_0}^{y} a(x_0, \beta)\, z(x, y, x_0, \beta)\, d\beta.\end{aligned}$$

Toute intégrale holomorphe de l'équation proposée sera développable en une double série de fonctions φ et ψ.

En effet, cherchons à déterminer une solution z qui soit égale à des fonctions holomorphes, données pour $x = x_0$ et pour $y = y_0$,

$$z(x, y_0) = z(x_0, y_0) + \frac{x - x_0}{1}\frac{\partial z_0}{\partial x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{1.2}\frac{\partial^2 z_0}{\partial x_0^2} + \ldots,$$

$$z(x_0, y) = z(x_0, y_0) + \frac{y - y_0}{1}\frac{\partial z_0}{\partial y_0} + \frac{(y - y_0)^2}{1.2}\frac{\partial^2 z_0}{\partial y_0^2} + \ldots.$$

Cette intégrale sera représentée par l'expression

$$\begin{aligned}z = z(x_0, y_0)\, &z(x, y, x_0, y_0) \\ &+ \int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial z(\alpha, y_0)}{\partial\alpha} + b(\alpha, y_0)\, z(\alpha, y_0)\right] z(x, y, \alpha, y_0)\, d\alpha \\ &+ \int_{y_0}^{y}\left[\frac{\partial z(x_0, \beta)}{\partial\beta} + a(x_0, \beta)\, z(x_0, \beta)\right] z(x, y, x_0, \beta)\, d\beta,\end{aligned}$$

ou bien, en intégrant terme à terme,

$$\begin{aligned}z = z_0\varphi_0 &+ \frac{\partial z_0}{\partial x_0}\varphi_1 + \frac{\partial^2 z_0}{\partial x_0^2}\varphi_2 + \ldots \\ &+ \frac{\partial z_0}{\partial y_0}\psi_1 + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y_0^2}\psi_2 + \ldots.\end{aligned}$$

En général, à tout développement en série absolument convergente des valeurs initiales, on peut faire correspondre un développement analogue de l'intégrale.

DEUXIÈME PARTIE.

ETUDE DES LIGNES CRITIQUES DES INTÉGRALES.

27. Les intégrales de l'équation linéaire

$$D(z) = 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz$$

peuvent présenter deux sortes de lignes singulières :

1° Celles qui sont complètement définies quand on connaît les coefficients a, b, c;

2° Celles qui dépendent seulement des conditions initiales.

Nous appellerons les premières lignes critiques *propres* de l'équation ou lignes critiques fixes; les secondes seront dites *accidentelles;* nous qualifierons celles-ci de *mobiles* quand elles dépendront d'un paramètre arbitraire.

Je ne m'occuperai d'une manière spéciale que des courbes singulières accidentelles. Il y a lieu d'en déterminer d'abord la nature et de chercher ensuite la forme analytique de l'intégrale dans le voisinage des différents points de ces courbes.

Dans l'étude de cette question, je ne prends pas pour base la formule (22) qui représente l'intégrale générale. Elle peut se trouver en défaut dans le voisinage d'un point critique. Je me propose de déduire directement de l'équation même les principaux éléments de la solution. La méthode dont nous allons faire usage pourrait s'appliquer, pour ainsi dire, sans modification à une équation linéaire d'ordre quelconque.

28. Il faut d'abord définir le genre de singularités considérées et les propriétés sur lesquelles nous aurons à nous appuyer. Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables admettant la ligne singulière $x = a$. Faisons décrire à la variable x dans son plan un chemin de longueur

finie aboutissant en a, sans tourner une infinité de fois autour de ce point, ni passer par aucun autre point singulier. Dans ces conditions, je suppose que la fonction varie d'une manière continue et tend vers une limite $f(a, y)$ holomorphe en y, à moins qu'elle ne devienne infinie. Le symbole $f(a, y)$ désigne, comme on voit, non pas précisément la valeur de la fonction pour $x = a$, mais une limite relative à un chemin déterminé décrit par la variable x.

La fonction $\varphi(x, y) = f(x, y) - f(a, y)$ tendra vers zéro quand x tendra vers a par le chemin considéré; nous pourrons donc nous borner à étudier les fonctions qui deviennent nulles ou infinies sur la droite analytique $x = a$, et qui sont caractérisées par la propriété commune que la partie réelle de leur logarithme devient infinie. La dérivée logarithmique $\frac{\varphi'_x}{\varphi}$ ne peut pas avoir une limite finie dans cette hypothèse; nous supposerons donc qu'elle croît indéfiniment. Il en est de même du rapport des dérivées $\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$. Si ce rapport était égal à une fonction $A(x, y)$, continue et finie lorsque x tend vers a sur un chemin déterminé, la fonction $\varphi(x, y)$ ne pourrait être ni nulle ni infinie pour $x = a$, quelle que soit la variable y, à moins d'être nulle ou infinie pour toutes les valeurs de x et de y; aux hypothèses déjà faites nous sommes donc amenés à joindre la suivante, que le rapport des dérivées $\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$ croît aussi indéfiniment lorsque x tend vers a.

Nous appellerons *fonctions normales* dans le domaine de la droite singulière celles qui jouiront de toutes les propriétés que nous venons de considérer, et qui se réduisent en résumé aux suivantes :

1° Quand x tend vers a suivant un chemin déterminé, la fonction devient infinie ou tend vers une limite holomorphe en y.

2° Si la fonction $\varphi(x, y)$ devient infinie ou nulle, les deux rapports $\frac{\varphi'_x}{\varphi}$ et $\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$ croissent indéfiniment.

(L'expression *croître indéfiniment* s'applique, bien entendu, aux modules des quantités considérées.)

Les hypothèses que nous faisons sur les fonctions pourraient en définitive se réduire à une seule : c'est que, sur un chemin aboutissant au point critique et ayant une longueur finie, elles sont bien déterminées et n'admettent d'autre discontinuité que l'infini, et que la même propriété a lieu pour les dérivées et leurs rapports.

Les fonctions analogues aux intégrales régulières des équations différentielles linéaires à une variable indépendante présentent tous les caractères précédents; elles sont égales à des sommes d'éléments de la forme

$$u = (x-a)^\rho\,[\mathrm{L}(x-a)]^n\,\varphi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$ désignant une fonction holomorphe en x et y, non nulle pour $x=a$; ρ pourrait être une fonction holomorphe de y; n est un nombre entier positif. Il est facile de vérifier que l'élément fonctionnel u est une fonction normale, et que la même propriété a lieu pour la somme d'un nombre limité d'éléments analogues.

Le principal caractère dont nous aurons à faire usage dans nos raisonnements est celui qui est relatif aux rapports $\frac{\varphi'_x}{\varphi}$, $\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$. Nous dirons que la dérivée par rapport à x est infinie relativement à φ et à φ'_y. Cette considération nous permettra d'introduire dans nos calculs certains résultats de la théorie des infiniment petits, en regardant, suivant l'usage, les quantités infiniment grandes comme des infiniment petits d'ordre négatif. On peut avoir à comparer des dérivées d'un ordre supérieur au premier. Supposons que les dérivées d'une fonction normale φ soient aussi normales aux environs du point critique $x=a$.

Si la dérivée $\frac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial x^{n-1}}$ est nulle ou infinie, ainsi que toutes les dérivées d'ordre moindre pour cette valeur de x, la dérivée $n^{\text{ième}}$, $\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^n}$, sera infinie par rapport à toutes les autres dérivées du même ordre, ou d'ordre inférieur, prises par rapport aux deux variables x et y.

29. Reprenons maintenant l'étude des lignes critiques accidentelles des intégrales de l'équation linéaire $\mathrm{D}(z)=0$. Je supposerai que le point analytique (xy) varie à l'intérieur d'un domaine limité E, où les coefficients de l'équation sont holomorphes. Soit $\xi(x,y)$ une fonction holomorphe dont tous les zéros situés à l'intérieur du domaine E sont des points critiques d'une intégrale z. La courbe analytique L,

représentée par l'équation $\xi(x, y) = 0$, est une courbe singulière ou critique de la solution considérée. La fonction $\xi(x, y)$ est l'une quelconque des fonctions holomorphes qui s'annulent sur la courbe L; nous admettrons que ses dérivées $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ ne s'annulent pas simultanément à l'intérieur du domaine. Effectuons un changement de variable analogue à celui que nous avons déjà considéré et prenons pour nouvelles variables la fonction ξ et une autre fonction holomorphe η, assujettie à la condition que le déterminant fonctionnel $\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}$ ne soit pas nul. L'équation transformée devient, en mettant en évidence le terme en $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + D_1(z) = 0. \tag{40}$$

L'intégrale z que nous étudions se transforme en une fonction $z(\xi, \eta)$, que je suppose normale sur la courbe singulière ainsi que sa dérivée $\frac{\partial z}{\partial \xi}$.

Si cette dérivée n'est pas infinie pour $\xi = 0$, z ne l'est pas non plus, et par suite les deux fonctions z et $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ tendent vers des limites holomorphes en η ou égales à zéro. Examinons d'abord le cas où chacune de ces fonctions est nulle ou infinie; la dérivée $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$ sera infinie par rapport aux fonctions

$$z, \quad \frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \, \partial \eta}.$$

L'équation (40) ne pourra donc être vérifiée, lorsque la variable ξ tend vers zéro, que si l'on a en même temps $\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$.

Donc la courbe singulière doit être une caractéristique.

Le cas où z et $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ ne seraient ni nulles ni infinies se ramène immédiatement à celui-là. En effet, supposons que L ne soit pas une caractéristique et que, la variable ξ tendant vers zéro, les fonctions z et $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ tendent vers des limites holomorphes en η. On pourra alors déterminer une intégrale holomorphe z_1 prenant pour $\xi = 0$ des valeurs égales à ces limites. La différence $z - z_1$ sera une nouvelle solution à laquelle nous pourrons appliquer tous les raisonnements précédents. On devrait donc encore conclure que la courbe L est une caractéristique, ou que la différence $z - z_1$ est identiquement nulle; dans ce dernier cas, les points de la courbe $\xi = 0$ ne seraient pas, à proprement parler, des points critiques de l'intégrale z, puisque celle-ci pourrait être étendue analytiquement d'une seule manière dans le domaine d'un point quelconque de la courbe et y serait égale à une fonction holomorphe.

30. Des considérations que nous venons d'exposer résulte ce théorème :

Les intégrales normales d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de la forme (5) *ne peuvent admettre d'autres courbes critiques accidentelles que des caractéristiques.*

On peut remarquer que notre raisonnement est encore applicable lorsque la courbe analytique $\xi = 0$ est pour l'intégrale un lieu de zéros ordinaires d'un ordre supérieur à l'unité, et non un lieu de points critiques proprement dits.

Ce résultat permet de préciser la portée du théorème fondamental de Cauchy relatif à l'existence des intégrales. Toute solution normale définie par la condition que ses dérivées premières soient des fonctions holomorphes sur une courbe donnée autre qu'une caractéristique est elle-même holomorphe dans le voisinage de cette courbe.

Toute intégrale normale qui s'annule ainsi que ses dérivées du premier ordre sur une courbe, autre qu'une caractéristique, est identiquement nulle.

D'après la méthode dont nous avons fait usage, nos résultats ne sont applicables qu'aux lieux de points critiques représentés par une équation analytique $\xi(x, y) = 0$.

Les caractéristiques singulières ne sont pas nécessairement isolées. Elles peuvent former une suite continue ou discontinue, comme les points singuliers d'une fonction d'une seule variable.

31. Supposons maintenant qu'une intégrale z admette une carac-

téristique singulière $x = \alpha$. Proposons-nous de trouver la forme de la fonction dans le voisinage de cette valeur de x. Nous pourrions pour cela nous servir de la formule (22), qui représente l'intégrale générale; les résultats établis précédemment, en ce qui concerne la nature des courbes singulières, rendent cette méthode légitime. Cependant je ferai encore usage d'une méthode directe; je reviendrai à la formule (22) pour compléter les résultats ainsi obtenus. Nous pourrons supposer que l'intégrale normale considérée z tend vers zéro ou vers l'infini quand x tend vers α; dans le cas contraire, elle aurait une limite holomorphe et il existerait une infinité d'intégrales holomorphes prenant sur la caractéristique les mêmes valeurs que z. Cela posé, considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0.$$

Quand x tend vers α, la dérivée $\frac{\partial z}{\partial x}$ est infinie par rapport à z et à $\frac{\partial z}{\partial y}$; les coefficients a, b, c conservent des valeurs finies; d'autre part le nombre des termes du moindre ordre infinitésimal de l'équation est au moins égal à deux; donc, si a est différent de zéro, les deux dérivées $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ sont du même ordre et leur rapport a pour limite $-a(\alpha, y)$. Si l'on a $a(\alpha, y) = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ne peut pas être d'un ordre infinitésimal supérieur à celui de z ou de $\frac{\partial z}{\partial y}$; cette dérivée sera donc infiniment petite par rapport à $\frac{\partial z}{\partial x}$; de sorte que le rapport

$$\frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}$$

aura pour limite zéro. Nous pourrons par suite écrire, quel que soit a,

$$\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = -(a + \varepsilon),$$

ε désignant une fonction infiniment petite. Cette équation peut être intégrée; on en déduit

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X' e^{-\int_{y_0}^{y} (a+\varepsilon)\,dy} \tag{41}$$

en représentant par X′ la dérivée d'une fonction X de x seul.

L'expression obtenue est de la forme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X' u(x, y); \tag{42}$$

la fonction $u = e^{-\int_{y_0}^{y} (a+\varepsilon)\,dy}$ est continue par rapport à x sur le chemin considéré et tend vers la limite

$$u(\alpha, y) = e^{-\int a(\alpha, y)\,dy}.$$

Elle est, par conséquent, différente de zéro pour les valeurs de x voisines de α. De l'équation (42) nous tirons

$$z = \int X' u(x, y)\,dx. \tag{43}$$

La limite inférieure de l'intégrale sera prise égale à α si Z doit s'annuler. Si la solution considérée devient infinie, il faut que X′ soit infinie pour la même valeur de x; nous prendrons alors pour limite inférieure un nombre x, très voisin de la valeur singulière. Le chemin d'intégration peut être défini par la succession des valeurs que doit prendre x en se rapprochant indéfiniment de α. On doit supposer que sur ce chemin, dans le voisinage du point α, il n'y a pas d'autres points critiques de la fonction X′.

Il est remarquable que la forme (43), obtenue pour l'intégrale par un calcul direct, est justement celle qui serait donnée par l'application immédiate de la formule (22).

On peut, en général, modifier cette expression de la manière suivante. Considérons le rapport

$$\frac{z}{X} = \frac{\int X' u(x, y)\,dx}{\int X'\,dx};$$

le numérateur et le dénominateur sont nuls ou infinis pour $x = \alpha$;

l'expression se présente donc sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Le rapport des dérivées est une fonction bien déterminée de x et de y qui n'est nulle, ni infinie; elle a pour limite $u(\alpha, y) = e^{-\int a(\alpha, y)dy}$. La vraie valeur du rapport $\frac{z}{X}$, si elle existe, sera égale à cette limite. La règle de L'Hospital sera toujours applicable à ce rapport si la fonction X′ est continue sur le chemin d'intégration, sauf à l'extrémité α, et si sur ce chemin, dans le voisinage immédiat du point critique, la variation de l'argument de l'élément $X'\,dx$ est inférieure à un angle v qui soit lui-même inférieur à deux droits. Dans ces conditions nous pourrons écrire

$$z = X\,\varphi(x, y),$$

la fonction φ étant continue et tendant vers la limite $e^{-\int a(\alpha, y)dy}$. Il est, d'ailleurs, facile de trouver directement cette limite. Nous avons, en effet,

$$D(z) = X\,D(\varphi) + X'\,D'_x(\varphi) = 0$$

ou bien

$$\frac{X}{X'}D(\varphi) + D'_x(\varphi) = 0.$$

Quand x tend vers α, $\frac{X}{X'}$ tend vers zéro, et, par hypothèse, $D(\varphi)$ conserve une valeur finie. Donc l'expression $D'_x(\varphi)$ a pour limite zéro. On en déduit immédiatement la valeur de $\varphi(\alpha, y)$.

Il y a une certaine analogie entre la méthode précédente et celle qui donne les asymptotes d'une courbe algébrique en Géométrie analytique. Cette analogie peut encore être poussée plus loin, et la méthode donnerait lieu, dans un cas très étendu, au développement d'une solution Z suivant les intégrales d'une fonction arbitraire de x. Considérons, par exemple, l'équation qui donne φ,

$$D'_x(\varphi) + \frac{X}{X'}D(\varphi) = 0.$$

Posons

$$\varphi = e^{-\int a\,dy} + v = u_0 + v.$$

La fonction v tend vers zéro quand x tend vers α; c'est, en général, d'après l'équation précédente, un infiniment petit du même ordre que $\frac{X}{X'}$.

Or, pour une classe très étendue de fonctions, les seules que nous considérerons pour le moment, les deux infiniment petits $\frac{X}{X'}$ et $\frac{SX}{X}$ sont de même ordre, SX désignant l'intégrale de X prise à partir d'une limite inférieure convenable. On peut donc poser

$$v = -\varphi_1 \frac{SX}{X}.$$

Portant cette valeur dans l'équation, et égalant à zéro l'ensemble des termes du moindre ordre infinitésimal, on en déduit, pour la partie principale de v, l'expression

$$-u_1 \frac{SX}{X},$$

u_1 désignant le coefficient de SX dans la formule (37). Nous retrouvons ainsi un résultat déjà obtenu par une autre méthode plus rigoureuse et plus générale.

Remarque. — Nous avons, en général, qualifié de singulière la caractéristique $x = \alpha$; cependant nos résultats sont encore exacts lorsque cette caractéristique est un lieu de zéros ordinaires.

32. Après avoir déterminé la nature des lignes critiques et la forme des intégrales dans le voisinage de ces courbes, il reste à traiter le problème inverse :

Trouver une intégrale de forme donnée dans le domaine d'une caractéristique déterminée.

Nous étudierons encore seulement le cas où la solution considérée est nulle ou infinie sur la caractéristique. La solution se déduit immédiatement de la formule (22). Soit $f(x)$ une fonction arbitraire admettant le point singulier $x = \alpha$ où elle est nulle ou infinie; désignons par $z_0(x, y, t)$ une intégrale principale ne s'annulant pas sur la caractéristique paramétrique; l'intégrale

$$z = \int^{x} f'(t)\, z_0(x, y, t)$$

satisfait, en général, à la condition que le rapport $\frac{z}{f(x)}$ soit une fonction continue dont la limite n'est ni nulle ni infinie, quand x tend vers φ. Pour que cette conclusion soit exacte, il suffit que l'on puisse appliquer au rapport considéré la règle de L'Hospital.

Nous pourrons alors écrire

$$\int^{x} f'(t)\, z_0(x, y, t)\, dt = f(x)\, u(x, y)\,;$$

la fonction u est continue par rapport à x. Elle est, de plus, holomorphe par rapport à y en même temps que l'intégrale principale $z_0(x, y, t)$.

En effet, soit

$$z_0 = \varphi_0 + \frac{y - y_0}{1}\varphi_1 + \frac{(y - y_0)^2}{1.2}\varphi_2 + \ldots;$$

ce développement sera uniformément convergent par rapport à t, pourvu que $y - y_0$ soit suffisamment petit; par suite, l'intégrale z sera la somme de la série

$$\sum \frac{(y - y_0)^p}{p!} \int^{x} f'(t)\, \varphi_p(x, t)\, dt.$$

Or, on a, d'après nos hypothèses, en désignant par $\psi_p(x, \alpha)$ une fonction continue qui tend vers la limite $\varphi_p(\alpha, \alpha)$ quand x tend vers α,

$$\int^{x} f'(t)\, \varphi_p\, dt = f(x)\, \psi_p(x, \alpha).$$

Donc

$$Z = f(x)\left[\psi_0 + \frac{y - y_0}{1}\psi_1 + \frac{(y - y_0)^2}{1.2}\psi_2 + \ldots\right],$$

et la série qui figure dans cette formule est uniformément convergente dans un domaine suffisamment petit.

Nous avons ainsi obtenu une solution dont le rapport à une fonction donnée $f(x)$ est une fonction continue non nulle pour $x = \alpha$. Ce n'est évidemment pas la seule satisfaisant à la condition énoncée. Il en serait encore de même de l'expression

$$\int^{x} F(t) f'(t)\, z_0(x, y, t)\, dt,$$

où $F(t)$ désigne une fonction continue et bien déterminée sur le chemin décrit par la variable x, ne s'annulant pas pour $x = \alpha$.

Les conclusions auxquelles nous sommes arrivé peuvent se résumer ainsi :

1° Si l'on considère une intégrale normale de l'équation $D(z) = 0$ qui admet la caractéristique singulière accidentelle $x = \alpha$, il existe en général des fonctions X de x seul telles que le rapport $\frac{z}{X}$ soit une fonction continue différente de zéro pour $x = \alpha$;

2° Réciproquement, étant donnée une fonction X de x seul, nulle ou infinie pour $x = \alpha$, il existe une infinité d'intégrales telles que le rapport $\frac{z}{X}$ soit une fonction continue différente de zéro pour cette valeur de x.

33. Nous allons étudier quelques intégrales régulières simples. Remarquons d'abord que dans le voisinage d'une caractéristique singulière accidentelle $x = \alpha$, il n'y a pas d'intégrales de la forme

$$(x - \alpha)^{\varphi(y)} u(x, y),$$

la fonction u étant continue et différente de zéro pour $x = \alpha$; au contraire, si l'on désigne par μ une constante, il y a lieu de chercher les intégrales de la forme

$$z_\mu = (x - \alpha)^\mu u(x, y).$$

D'après les résultats précédents, il en existe une infinité que l'on peut représenter par l'expression

$$\int^x f(t) z_0(x, y, t) (t - \alpha)^{\mu - 1} dt.$$

Étudions, en particulier, le cas où l'intégrale $z_0(x, y, t)$ est holomorphe et développable suivant les puissances de $(t - x)$,

$$z_0(x, y, t) = u_0 + \frac{t - x}{1} u_1 + \frac{(t - x)^2}{1.2} u_2 + \ldots.$$

Nous en déduisons immédiatement le développement de z_μ, en posant

$$z_\mu = \int^x \mu(t - \alpha)^{\mu - 1} z_0(x, y, t) dt.$$

Nous avons, en effet,

$$(44)\qquad z_\mu = (x-\alpha)^\mu \left[u_0 + (\alpha - x)\frac{u_1}{\mu+1} + \frac{(\alpha-x)^2}{(\mu+1)(\mu+2)} u_2 + \ldots \right].$$

Cette série est uniformément convergente en même temps que l'intégrale principale dont elle est déduite, pourvu que μ ne soit pas un entier négatif.

La formule (44) s'obtient par une détermination particulière de l'intégrale de forme indéfinie $\int^x$. En supposant la partie réelle de μ positive, nous avons

$$z_\mu = \int_\alpha^x \mu(t-\alpha)^{\mu+1} z_0(x, y, t)\, dt.$$

Quand la partie réelle de μ est négative, on peut encore représenter z_μ par une intégrale définie prise le long d'un lacet partant du point x et dont le cercle a pour centre le point α :

$$(45)\qquad z_\mu = \frac{-1}{2i\sin\pi\mu} \int_{(x,\,\alpha)} \mu(\alpha - t)^{\mu-1} z_0(x, y, t)\, dt.$$

Cette formule est en défaut quand μ est un entier négatif.

34. La méthode directe qui nous a donné l'intégrale principale nous donnerait aussi z_μ. Écrivons que l'expression

$$A_0(\alpha - x)^\mu + A_1(\alpha - x)^{\mu+1} + A_2(\alpha - x)^{\mu+2} + \ldots,$$

où A_0, A_1, ... sont des fonctions de x et de y, vérifie l'équation proposée, quand on y regarde α comme un paramètre. Nous trouvons, pour déterminer les coefficients, les relations de récurrence

$$D'_x(A_0) = 0, \qquad (\mu+1) D'_x(A_1) = D(A_0), \qquad \ldots,$$

d'où l'on déduit immédiatement la formule (44), en désignant par u_0, u_1, ... les coefficients du développement d'une intégrale principale.

Quand on connaît une intégrale z_μ, où l'on regarde α comme un paramètre, on peut en déduire par différentiation une infinité d'autres; nous avons, en général,

$$\frac{\partial^p z_\mu}{\partial \alpha^p} = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-p+1)z_{\mu-p}.$$

Cette propriété permet de passer des exposants à partie réelle positive à ceux dont la partie réelle est négative.

35. L'intégrale z_μ que nous venons de définir dépend du paramètre μ, et comme elle vérifie l'équation proposée quel que soit ce paramètre, les dérivées par rapport à μ sont aussi des solutions.

Prenons, par exemple, la dérivée première $\frac{\partial z_\mu}{\partial \mu}$ et faisons ensuite $\mu = 0$, nous obtenons une nouvelle intégrale que nous appellerons z_{-0}

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} z_{-0} = {} & u_0 \mathrm{L}(\alpha-x) + u_1(\alpha-x)[\mathrm{L}(\alpha-x)-1] \\ & + \frac{u_2}{1.2}(\alpha-x)^2\left[\mathrm{L}(\alpha-x)-1-\frac{1}{2}\right]+\ldots \\ & + \frac{u_n}{n!}(\alpha-x)^n\left[\mathrm{L}(\alpha-x)-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n}\right]+\ldots. \end{aligned}\right.$$

En général, les expressions que l'on trouve en prenant les dérivées par rapport à μ sont des intégrales régulières représentées par la formule suivante

$$\frac{\partial^p z_\mu}{\partial \mu^p} = \int^x \left[\mu(t-\alpha)^{\mu-1}\,\mathrm{L}\overline{(t-\alpha)}^p + p(t-\alpha)^{\mu-1}\mathrm{L}\overline{(t-\alpha)}^{p-1}\right] z_0(x,y,t)\,dt.$$

36. Nous avons exclu jusqu'ici le cas où μ est un entier négatif. La formule (44) n'est plus alors applicable. Posons $\mu = -n$; l'intégrale

$$z_{-n} = \int^x \frac{n\, z_0(x,y,t)}{(\alpha-t)^{n+1}}\,dt$$

devient

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} z_{-n} = {} & u_0(\alpha-x)^{-n} + \frac{u_1}{1-n}(\alpha-x)^{1-n} + \frac{u_2}{(1-n)(2-n)}(\alpha-x)^{2-n}+\ldots \\ & + \frac{u_{n-1}}{(1-n)(2-n)\ldots(n-1-n)}(\alpha-x)^{-1} \\ & + \frac{(-1)^n}{n!}\left\{u_n\mathrm{L}(\alpha-x) + \frac{u_{n+1}}{1}(\alpha-x)[\mathrm{L}(\alpha-x)-1]+\ldots\right\}. \end{aligned}\right.$$

On voit immédiatement que les intégrales à indice entier négatif diffèrent des autres par une propriété importante. L'intégrale z_μ représentée par la formule (44) est de la forme $(\alpha - x)^\mu u(x, y, \alpha)$, la fonction u étant développable suivant les puissances de $\alpha - x$. L'intégrale z_{-n}, définie par l'équation (47), est bien aussi de la forme

$$(\alpha - x)^{-n} u(x, y, \alpha)$$

la fonction u étant continue lorsque la variable x tend vers α sur un chemin de longueur finie et sans tourner une infinité de fois autour du point critique; mais elle n'est plus uniforme en général dans la région de ce point.

Cependant il existe un cas où le logarithme disparaît pour une valeur suffisamment grande de n; c'est celui où l'intégrale principale est un polynôme entier en $t-x$. Nous savons que, dans ce cas, la première suite de Laplace est limitée, et que l'une des fonctions arbitraires qui figurent dans l'intégrale générale peut être débarrassée de tout signe de quadrature. Ce résultat pouvait être prévu. En effet, supposons qu'il existe une intégrale de la forme suivante

$$z = \frac{u(x, y, \alpha)}{(\alpha - x)^n},$$

α désignant un paramètre variable et $u(x, y, \alpha)$ une fonction uniforme de α qui n'est ni nulle ni infinie dans le domaine du point x. Nous en déduirons une demi-solution de l'équation proposée par la formule

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\alpha)\, u(x, y, \alpha)}{(\alpha - x)^n}\, d\alpha,$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour fermé entourant le point x. Si la fonction $f(\alpha)$ est holomorphe à l'intérieur du contour, l'expression de Z se met immédiatement sous la forme suivante :

$$A_0 f(x) + A_1 f'(x) + \ldots + A_{n-1} f^{n-1}(x).$$

Les coefficients A sont, en général, des fonctions des variables x et y.

Il résulte de là que l'équation proposée est intégrable par la méthode de Laplace. Réciproquement il est évident que toute équation pour laquelle la première substitution de Laplace donne une suite limitée se terminant au bout de $n - 1$ opérations, admet une infinité de solutions de la forme considérée $\frac{u(x, y, \alpha)}{(\alpha - x)^n}$ ou, plus généralement, $\frac{u(x, y, \alpha)}{(\alpha - x)^{n+p}}$.

Si la solution z regardée comme fonction de x admet le pôle α, nous donnerons à la caractéristique $x = \alpha$ le nom de *caractéristique polaire*.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Les équations intégrables par la méthode de Laplace sont les seules dont les intégrales puissent admettre des caractéristiques polaires accidentelles.

37. En introduisant les dérivées à indices quelconques ([1]), on peut donner une forme remarquable aux intégrales que nous avons désignées par z_μ. Appelons dérivée d'ordre n de la fonction $f(x)$ prise à partir de la limite x_0, l'intégrale

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i} \int \frac{f(z)\, dz}{(z - x)^{n+1}}$$

prise le long d'un lacet à bords rectilignes partant du point x_0 et entourant le point x; nous représenterons cette dérivée par le symbole $\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)_{x_0}^{x}$. L'expression précédente de la dérivée est illusoire quand n est un entier négatif. On la remplacera alors par

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{x_0}^{x} \frac{f(z)\, dz}{(x - z)^{n+1}},$$

qui est équivalente à la première lorsque n n'est pas entier.

L'intégrale z_μ est définie par la formule suivante, en supposant la partie réelle de μ positive :

$$z_\mu = \mu \int_{\alpha}^{x} (t - \alpha)^{\mu - 1} z_0(x, y, t)\, dt.$$

([1]) *Voir* Laurent, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 487.

D'après la définition de la dérivée, on peut donc la représenter par

$$e^{\pi i \mu}\mu\Gamma_{(\mu)}\left|\frac{\partial^{-\mu} z_0(x, y, t)}{\partial t^{-\mu}}\right|_{\alpha}^{x} = e^{\pi i \mu}\Gamma_{(\mu+1)}\left|\frac{\partial^{-\mu} z_0(x, y, t)}{\partial t^{-\mu}}\right|_{\alpha}^{x},$$

ou bien, en changeant les limites

$$e^{\pi i(\mu-1)}\Gamma_{(\mu+1)}\left|\frac{\partial^{-\mu} z_0(x, y, t)}{\partial t^{-\mu}}\right|_{x}^{\alpha}.$$

Quand la partie réelle de μ est négative, en général, l'intégrale est encore représentée par le même symbole; mais il n'en est plus de même quand μ est un entier négatif. Dans ce cas, l'intégrale ne peut plus être regardée, à un facteur près, comme une dérivée de la fonction z_0. Les formules que nous venons d'établir contiennent un facteur qui devient alors infini. La dérivée $\frac{\partial^n z_0}{\partial t^n}$ est bien une solution, mais ce n'est pas celle que nous avons appelée z_{-n}. Les intégrales à indice entier négatif se déduisent par différentiation de l'intégrale z_{-0} définie par la formule (46).

On a

$$z_{-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\partial^n z_{-0}(x, y, \alpha)}{\partial \alpha^n}.$$

38. Les intégrales que nous venons d'étudier sont des fonctions holomorphes de y en même temps que l'intégrale principale $z_0(x, y, t)$. En général, toutes les intégrales représentées par l'expression

$$\int^{x} f(t) z_0(x, y, t)\, dt$$

jouissent de la même propriété; nous savons d'ailleurs que z_0 peut être supposée holomorphe dans le cas où x et y varient dans un domaine suffisamment petit, où il n'existe aucun point critique des coefficients de l'équation; le paramètre t varie dans la même aire que la variable x.

Cela posé, considérons une intégrale Z qui possède deux caractéristiques singulières $x = \alpha_1$ et $y = \beta_1$. Il existe une infinité de solutions de cette nature que l'on peut déduire de la formule (22); il suffit pour cela de prendre pour $f(\alpha)$ une fonction qui possède le point critique $\alpha = \alpha_1$, et de même pour $\varphi(\beta)$.

On voit que Z est la somme de deux termes Z_1 et Z_2; la première de ces fonctions admet le point critique α_1; elle est, en général, holomorphe par rapport à y et développable suivant les puissances entières et positives de $y - \beta_1$. La seconde jouit de propriétés analogues.

Donc, en général, toute intégrale possédant deux caractéristiques singulières d'espèces différentes est la somme de deux intégrales particulières dont chacune admet une seule de ces caractéristiques singulières.

Notre raisonnement et, par suite, la conclusion précédente seraient en défaut si le point (α_1, β_1) était un point singulier des coefficients de l'équation. L'intégrale principale, considérée comme une fonction de y, ne serait plus nécessairement holomorphe dans le domaine du point β_1, quand x et α varient dans une aire si petite qu'elle soit, comprenant le point α_1. Supposons, par exemple, que l'intégrale $z(x, y, \alpha)$ possède un lieu de points critiques propres $G(x, y) = 0$. La caractéristique paramétrique rencontre cette courbe en un certain nombre de points définis par l'équation

$$G(\alpha, y) = 0.$$

Soit β l'ordonnée d'un des points d'intersection. Dans le domaine de la caractéristique $y = \beta$, l'intégrale principale ne sera pas, en général, holomorphe.

Bien que l'étude des courbes singulières propres n'entre pas dans ce travail, je vais considérer le cas d'une équation simple qui mettra en évidence des propriétés remarquables.

Soit l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + \frac{n}{G} \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{m}{G} \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

G désignant une fonction entière irréductible, m et n étant des constantes. Nous allons chercher la forme des intégrales normales dans le voisinage de la courbe singulière $G(x, y) = 0$. Prenons sur cette courbe un point ordinaire (x_0, y_0) où la tangente ne soit pas une caractéristique, et dans le domaine duquel il n'y ait pas de caractéristiques singulières accidentelles de l'intégrale étudiée. Il existe une intégrale holomorphe dans le domaine du point considéré, pourvu que la somme $m+n$ ne soit ni nulle, ni égale à un entier négatif. En effet, écrivons l'équation sous la forme

$$\text{(A)} \qquad G\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+n\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+m\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

En y faisant $G=0$, nous trouvons la relation suivante, qui doit être vérifiée sur la courbe

$$\text{(B)} \qquad n\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+m\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Il suffira de connaître les valeurs de l'une des dérivées pour que l'autre se trouve complètement déterminée. L'intégrale dépendra donc seulement d'une fonction arbitraire. Supposons que l'on donne sur la courbe les valeurs de z en fonction holomorphe de x; les dérivées d'un ordre quelconque prises par rapport à cette variable seront déterminées au point (x_0, y_0). Pour développer l'intégrale en série de puissances, il faut calculer les autres dérivées. On les obtiendra en différentiant l'équation (A) par rapport à x et à y et en faisant, dans chacune des dérivées obtenues, $G=0$. La série calculée admet un domaine de convergence, comme il est facile de le démontrer. Elle représente donc une fonction holomorphe satisfaisant à l'équation (A); elle vérifie aussi la condition (B) en tous les points de la courbe $G=0$, bien qu'on n'ait pas tenu directement compte de cette relation dans le calcul des coefficients. L'existence de l'intégrale holomorphe étant mise en évidence, proposons-nous de trouver les intégrales normales plus générales. D'après ce qui précède, on pourra les supposer nulles ou infinies sur la courbe. Lorsque le point variable (x,y) tend vers le point (x_0,y_0) en décrivant un chemin non situé sur G, les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ sont du même ordre; leur rapport est une fonction continue différente de zéro, pourvu qu'aucune des caractéristiques du point (x_0,y_0) ne soit un lieu de zéros ou de points singuliers. La dérivée, prise parallèlement à la tangente à la courbe, sera infiniment petite par rapport aux autres; d'où l'on déduit que le rapport $\frac{\partial z}{\partial x}:\frac{\partial z}{\partial y}$ a pour limite la valeur de $\frac{\partial G}{\partial x} : \frac{\partial G}{\partial y}$ au point (x_0, y_0). Posons donc

$$\frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial G}{\partial x} : \frac{\partial G}{\partial y} + \varepsilon\right),$$

ε désignant une fonction infiniment petite, dont nous supposerons que, dans le domaine considéré, l'ordre infinitésimal reste supérieur à un nombre positif suffisamment petit quand on prend G comme infiniment petit principal. Portons les valeurs obtenues dans l'équation; nous en déduirons

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} : \frac{\partial z}{\partial x} = -(m+n+\varepsilon)\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial y};$$

ce qui nous conduit à poser

$$\frac{\partial z}{\partial x} = G^{-m-n}\frac{\partial G}{\partial x}u,$$

u désignant une fonction qui conserve une valeur finie; par suite, z sera, en général, de la forme

$$G^{1-m-n}u_1.$$

On aurait trouvé directement ce résultat en supposant d'abord les intégrales régulières dans le domaine de la courbe [1]. Si l'on pose $z = G^r u$, on trouve pour définir r l'équation déterminante

$$r(r-1+m+n) = 0.$$

La racine nulle correspond à l'intégrale holomorphe; la seconde, à celle que nous venons de définir. Le multiplicateur u_1 peut se calculer comme la première intégrale en fonction de données initiales.

Des résultats que nous venons d'établir, je conclus que toute intégrale normale sur la courbe sera de la forme suivante, où u et v désignent des fonctions continues ne s'annulant pas sur la courbe dans le domaine du point (x_0, y_0), à moins d'être identiquement nulles dans ce domaine

$$z = u + G^{1-m-n}v.$$

---

[1] *Voir* V. Horn, *Acta mathematica*, t. XII.

Cette forme ne convient plus quand l'une des caractéristiques du point (x_0, y_0) est lieu de zéros ou de points critiques. Examinons maintenant ce qui se passe pour l'intégrale principale $z(x, y, \alpha)$, holomorphe sur la caractéristique paramétrique, sauf aux points où elle rencontre la courbe G. Pour $x = \alpha$, nous avons à un facteur près

$$z(\alpha, y, \alpha) = G_{(\alpha, y)}^{-n}.$$

Or, il est en général impossible d'avoir dans le domaine du point $y = \beta$

$$u(\alpha, y) + G_{(\alpha, y)}^{1-m-n} v(\alpha, y) = G_{(\alpha, y)}^{-n},$$

si les fonctions u et v satisfont aux conditions énoncées. Donc, l'une des caractéristiques du point (α, β) sera un lieu de points singuliers ou de zéros de l'intégrale principale; ce sera la caractéristique $y = \beta$.

Cette discussion sommaire met en évidence les propriétés curieuses et intéressantes des caractéristiques singulières accidentelles qui se coupent sur un lieu de points critiques propres de l'équation. En général, il n'est plus possible, quand une intégrale possède deux caractéristiques de cette nature, de la décomposer en une somme de deux autres, dont chacune soit holomorphe dans le domaine de l'une des caractéristiques considérées.

39. Une intégrale peut s'annuler sur deux caractéristiques sans être identiquement nulle dans le voisinage de ces deux courbes si elles se coupent sur un lieu de points singuliers propres de l'équation.

Supposons que l'on ait $z = 0$ pour $x = \alpha$ quel que soit y, et pour $y = \beta$ quel que soit x. L'intégrale étant supposée normale dans le voisinage de ces caractéristiques, nous pouvons écrire

$$z = Xu,$$

X s'annulant pour $x = \alpha$ et u étant une fonction continue de x ayant pour limite $e^{-\int a\,dy}$ quand x tend vers α. Cette limite devra s'annuler, par hypothèse, pour $y = \beta$; donc le point (α, β) appartient à une courbe singulière du coefficient a. Il appartient aussi à une courbe singulière du coefficient b.

Quand deux caractéristiques peuvent être des lieux de zéros accidentels, les intégrales ne sont plus déterminées par leurs valeurs sur ces droites.

40. Les intégrales qui possèdent des caractéristiques singulières mobiles sont liées étroitement aux intégrales principales. Elles peuvent aussi être utilisées pour l'intégration de l'équation proposée, ou du moins pour en calculer des solutions plus générales dépendant de fonctions arbitraires. C'est ce problème que nous allons maintenant étudier.

Considérons une solution $z(x, y, \alpha)$ qui possède une caractéristique singulière $x = \alpha$ dépendant d'un paramètre variable; l'intégrale

$$Z = \int f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha,$$

prise le long d'un contour fermé simple à l'intérieur duquel est compris le point critique $\alpha = x$, vérifie encore l'équation proposée et dépend en général d'une fonction arbitraire de x. On peut d'ailleurs supposer que le contour d'intégration se déforme et varie avec x; ce sera par exemple un lacet issu d'un point fixe x_0 et dont le cercle aurait pour centre le point variable x. Dans d'autres cas, au contraire, il y aura lieu de considérer des lacets partant de x et entourant des points critiques de la fonction $f(\alpha)$, ou des chemins d'intégration non fermés à limites variables ou fixes. S'il existe une seconde caractéristique singulière mobile $y = \beta$ nous déduirons encore de l'intégrale proposée une seconde série de demi-solutions dépendant d'une fonction arbitraire de y. L'ensemble des solutions ainsi obtenues représentera l'intégrale générale s'il est possible de disposer des fonctions arbitraires qui y figurent de manière à satisfaire aux conditions les plus générales qui définissent les intégrales.

Il n'est pas nécessaire que les deux paramètres α et β soient distincts : l'un peut être fonction de l'autre; c'est ce qui aura lieu, par exemple, quand le point analytique (α, β) décrira une courbe critique propre de l'équation proposée. Dans ce cas, l'intégrale regardée comme fonction de α a deux séries de points critiques, les uns dépendant de x, les autres de y, parmi lesquels on considérera un de chaque famille. A chacun de ces points critiques, on peut faire correspondre par l'intégration une fonction arbitraire, ce qui donnera une intégrale de la forme suivante :

$$Z = \int_x f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha + \int_y \varphi(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha;$$

la première intégration est relative au point critique x, la seconde au point critique dont l'affixe est fonction de y. Toute intégrale relative à un contour enfermant à la fois les deux points est en général décomposable en une somme d'intégrales simples analogues aux précédentes. Quant à l'étendue et à la généralité de la solution trouvée, on ne peut la définir avec précision qu'après avoir étudié la forme de la fonction $z(x, y, \alpha)$, autour de ses points critiques.

41. Nous allons montrer cependant la possibilité de calculer des intégrales principales ne s'annulant pas sur la caractéristique paramétrique. Considérons une solution $z(x, y, \alpha)$, possédant la caractéristique singulière mobile $x = \alpha$, sur laquelle elle est nulle ou infinie. Il existe des fonctions $f(x, \alpha)$ telles que le rapport $z : f(x, \alpha)$ soit une fonction continue quand x tend vers α.

Posons

$$Z(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_x \frac{z(x, y, \alpha)}{f(x_0, \alpha)(\alpha - x_0)}\, d\alpha. \tag{48}$$

L'intégration est relative à un contour fermé dont l'origine se trouve en un point x_1 infiniment voisin de x_0 et dont l'aire renferme les deux seuls points critiques x et x_0. La fonction $f(x, \alpha)$ n'étant pas en général uniforme, nous désignerons par $f(x_0, \alpha)$ la valeur que prend cette fonction quand le point x tend vers x_0 par un chemin de longueur finie intérieur au contour d'intégration. Cela posé, faisons $x = x_0$, l'intégrale devient

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0} \frac{z(x_0, y, \alpha)}{f(x_0, \alpha)(\alpha - x_0)}\, d\alpha,$$

ou bien, en posant $z(x, y, \alpha) = f(x, \alpha)\, u(x, y, \alpha)$,

$$Z(x_0, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x_0} \frac{u(x_0, y, \alpha)}{(\alpha - x_0)}\, d\alpha.$$

Nous pouvons, sans changer la valeur de l'intégrale, remplacer le contour d'intégration primitif par tout autre chemin fermé ayant la même origine et renfermant le point x_0. Comme le point x_1 est infiniment voisin de x_0, il est aussi permis de supposer le contour d'intégration infiniment petit; ce sera par exemple un cercle de centre x_0, décrit dans le sens positif. Les valeurs que prend α sur ce contour sont infiniment voisines de x_0; par conséquent, si la fonction u est continue par rapport au paramètre, la valeur limite de l'intégrale quand la distance $\overline{x_0 x_1}$ tend vers zéro est égale à

$$u(x_0, y, x_0);$$

c'est une solution de l'équation dérivée

$$D'_x(u) = 0.$$

Donc, dans la même hypothèse, la valeur limite de $Z(x, y)$ est une intégrale principale ne s'annulant pas sur la caractéristique paramétrique $x = x_0$.

Pour que notre raisonnement soit applicable, il faut évidemment que la caractéristique singulière soit située à une distance finie de toute autre de même nature, que l'intégrale (48) ait un sens bien défini et tende vers sa limite d'une manière continue lorsque le paramètre x_0 varie.

Quand la fonction $z(x, y, \alpha)$ n'est ni nulle, ni infinie pour $x = \alpha$, on peut, dans un cas très général, en déduire une autre intégrale qui s'annule sur la caractéristique singulière. Faisons décrire à la variable x un contour fermé aussi petit que l'on voudra autour du point α; en général, la fonction ne reprendra pas sa valeur primitive, mais se transformera en une autre intégrale z_1 telle que la différence $z - z_1$ tende vers zéro quand x tend vers α; à cette différence, notre raisonnement est applicable.

L'intégrale principale Z, définie par l'équation (48), n'est pas la seule qu'on puisse déduire de la solution considérée $z(x_0, y_0, \alpha)$ par la méthode que nous venons d'indiquer. Il en existe une infinité d'autres dépendant d'une fonction arbitraire et représentées par l'expression

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int F(\alpha)\,\frac{z(x, y, \alpha)}{z(x_0, y_0, \alpha)}\,\frac{d\alpha}{\alpha - x_0}.$$

Le contour d'intégration est toujours celui que nous avons défini plus haut ou tout autre chemin équivalent; la détermination du dénominateur $z(x_0, y_0, \alpha)$ sera choisi de telle façon que x tendant vers x_0 le rapport $\frac{z(x, y, \alpha)}{z(x_0, y_0, \alpha)}$ conserve une valeur finie. La fonction $F(\alpha)$ n'est pas nécessairement indépendante de x_0 ni holomorphe en ce point.

De ces généralités, quoiqu'elles soient nécessairement fort vagues, résulte pourtant la possibilité d'intégrer complètement une équation linéaire de la forme (5) quand on en connaît une intégrale qui possède deux caractéristiques singulières mobiles de familles différentes.

Considérons, par exemple, l'intégrale z_μ dont nous avons donné le développement en série; en appliquant la méthode précédente, on en déduit une intégrale principale par la formule

$$Z = \frac{1}{2\pi i}\int_{x} \frac{z_\mu(x, y, \alpha)}{(\alpha - x_0)^{\mu+1}}\, d\alpha.$$

On retrouve identiquement le développement de l'intégrale

$$z = u_0 + \frac{x_0 - x}{1} u_1 + \ldots.$$

D'ailleurs, la connaissance du développement en série d'une intégrale z_μ donne immédiatement le développement correspondant d'une intégrale principale qui ne s'annule pas sur la caractéristique paramétrique.

Soit

$$z_\mu = (\alpha - x)^\mu A_0 + A_1(\alpha - x) + A_2(\alpha - x)^2 + \ldots;$$

nous en tirons pour les coefficients $u_0, u_1, \ldots$ les valeurs suivantes :

$$u_0 = A_0, \qquad u_1 = (\mu + 1)A_1, \qquad \ldots, \qquad u_n = (\mu + 1)(\mu + 2)\ldots(\mu + n)A_n.$$

42. Les fonctions de trois variables

$$z(x, y, \alpha)$$

qui vérifient une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de la forme (5) à coefficients indépendants de α sont des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants.

Considérons l'équation

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Nous savons que toute équation linéaire du second ordre à caractéristiques distinctes peut être mise sous cette forme quand on en connaît une solution particulière quelconque. Pour que la fonction $z(x, y, \alpha)$ vérifie cette équation, quelle que soit la troisième variable α, on doit avoir

$$\text{(B)} \qquad \begin{vmatrix} s & p & q \\ \frac{\partial s}{\partial \alpha} & \frac{\partial p}{\partial \alpha} & \frac{\partial q}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial^2 s}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 q}{\partial \alpha^2} \end{vmatrix} = 0,$$

en posant, suivant l'usage,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = s, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

Réciproquement, toute solution de l'équation (B) vérifie une équation linéaire aux dérivées partielles de la forme (A).

Cherchons les solutions de l'équation B, qui sont égales au produit d'une fonction de x et de α par une autre fonction de y et de α.

Soit

$$z = XY;$$

nous poserons

$$\frac{dX}{dx} = X', \qquad \frac{dY}{dy} = Y'.$$

On a

$$p = X'Y, \qquad q = Y'X, \qquad s = X'Y';$$

en portant ces valeurs dans l'équation (B), on en déduit

$$\text{(C)} \qquad \frac{Y'\frac{d^2Y}{d\alpha^2} - Y\frac{d^2Y'}{d\alpha^2}}{Y'\frac{dY}{d\alpha} - Y\frac{dY'}{d\alpha}} - \frac{2}{Y'}\frac{dY'}{d\alpha} = \frac{X'\frac{d^2X}{d\alpha^2} - X\frac{d^2X'}{d\alpha^2}}{X'\frac{dX}{d\alpha} - X\frac{dX'}{d\alpha}} - \frac{2}{X'}\frac{dX'}{d\alpha}.$$

Le premier membre de cette équation ne dépend pas de x, le second ne dépend pas de y. Chacun d'eux est donc une fonction de α que je représente par $\frac{\varphi''(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$.

On a donc, en intégrant par rapport à α,

$$\frac{X' \frac{dX}{d\alpha} - X \frac{dX'}{d\alpha}}{X'^2} = \varphi'(\alpha)\psi(x)$$

et, par suite,

$$\frac{X}{X'} = \varphi(\alpha)\psi(x) + \theta(x).$$

De même,

$$\frac{Y}{Y'} = \varphi(\alpha)\psi_1(y) + \theta_1(y),$$

$\psi(x)$, $\theta(x)$, $\psi_1(y)$, $\theta_1(y)$ désignant des fonctions arbitraires.

L'équation aux dérivées partielles qui correspond à ces valeurs sera

$$\text{(D)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\psi(x)}{\psi(x)\theta_1(y) - \theta(x)\psi_1(y)} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\psi_1(y)}{\psi(x)\theta_1(y) - \theta(x)\psi_1(y)}.$$

En prenant comme nouvelles variables

$$\xi = \frac{\theta(x)}{\psi(x)}, \qquad \eta = \frac{\theta_1(y)}{\psi_1(y)},$$

on la ramène à la forme simple

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{F(\eta)}{\xi - \eta} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{F_1(\xi)}{\xi - \eta} = 0.$$

La substitution considérée peut être en défaut quand l'un des rapports ξ ou η est une constante.

Nous intégrerons dans la troisième Partie toutes les équations de la forme E.

TROISIÈME PARTIE.

43. L'équation d'Euler et de Poisson

$$E(\beta, \beta')\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - \frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\beta}{x-y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

a été, de la part de M. Darboux, l'objet d'une étude approfondie. Je me propose d'appliquer à cette équation remarquable les résultats généraux démontrés dans les deux premières Parties.

L'équation considérée admet l'intégrale particulière suivante

$$(49)\qquad z(x, y, \alpha) = (\alpha - x)^{-\beta}(\alpha - y)^{-\beta'}.$$

On reconnaît immédiatement qu'elle présente tous les caractères que nous avons établis. Elle possède deux caractéristiques singulières mobiles $x = \alpha$, $y = \alpha$, se coupant sur la droite $x - y = 0$ qui est lieu de points singuliers propres de l'équation. Quand x tend vers α, il existe une fonction de x seul, $(\alpha - x)^{-\beta}$, telle que le rapport

$$\frac{z}{(\alpha - x)^{-\beta}}$$

soit, dans le voisinage de la caractéristique considérée, une fonction continue, holomorphe en y et différente de zéro dans toute région du plan des y qui ne comprend pas le point singulier $y = \alpha$. De plus, ce rapport est une solution de l'équation dérivée

$$D'_x(u) = 0 = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\beta' u}{x - y},$$

où l'on fait $x = \alpha$.

De l'intégrale particulière (49) nous allons déduire la solution complète de l'équation d'Euler et de Poisson. Comme la nature des chemins d'intégration dépend des valeurs particulières des nombres β et β', je supposerai d'abord qu'aucun de ces nombres n'est entier.

44. La formule suivante nous donne alors une intégrale dépendant de deux fonctions arbitraires

$$(50)\quad Z=\int_x f(\alpha)(\alpha-x)^{-\beta}(\alpha-y)^{-\beta'}d\alpha+\int_y \varphi(\alpha)(\alpha-x)^{-\beta}(\alpha-y)^{-\beta'}d\alpha.$$

La première intégration doit être effectuée le long d'un contour fermé simple dont l'aire renferme le point x; la seconde est relative à un contour analogue renfermant le point y, mais non le point x.

Pour définir la généralité de la formule (50), je vais considérer successivement les deux termes et chercher si l'on peut disposer des fonctions arbitraires et des chemins d'intégration de manière à satisfaire aux conditions aux limites les plus générales.

Posons

$$Z_1=\int_x f(\alpha)(\alpha-x)^{-\beta}(\alpha-y)^{-\beta'}d\alpha.$$

Je dis que, étant donnée une fonction holomorphe $\varphi(x)$, il sera, en général, possible de déterminer la fonction arbitraire $f(\alpha)$ de la formule précédente de manière que Z_1 soit pour $y=y_0$ égale à $\varphi(x)$.

Il s'agit de satisfaire à l'identité

$$(51)\quad \int_x f(\alpha)(\alpha-x)^{-\beta}(\alpha-y_0)^{-\beta'}d\alpha=\varphi(x).$$

Je prendrai pour chemin d'intégration, C, un lacet ayant son entrée au point x_0 et entourant le point x ou bien tout autre contour équivalent. Je supposerai, en outre, que le point y_0 est extérieur au contour d'intégration et que $f(\alpha)$ est holomorphe.

Le produit $f(\alpha)(\alpha-y_0)^{-\beta'}$ sera lui-même, dans cette hypothèse, une fonction holomorphe, et nous poserons

$$f(\alpha)(\alpha-y_0)^{-\beta'}=\frac{\Gamma(\beta)}{2\pi i}\psi(\alpha).$$

L'équation (51) peut alors s'écrire

$$(52)\quad \frac{\Gamma(\beta)}{2\pi i}\int_C\frac{\psi(\alpha)}{(\alpha-x)^{\beta}}=\varphi(x).$$

En adoptant la notation des dérivées à indices quelconques, cette relation devient

$$\left[\frac{d^{\beta-1}\psi(x)}{dx^{\beta-1}}\right]_{x_0}^{x} = \varphi(x).$$

Nous sommes donc conduit à poser

$$\psi(\alpha) = \left[\frac{d^{1-\beta}\varphi(\alpha)}{d\alpha^{1-\beta}}\right]_{x_0}^{\alpha}$$

ou bien

$$\psi(\alpha) = \frac{\Gamma(2-\beta)}{2\pi i}\int \varphi(t)(t-\alpha)^{\beta-2}\,dt; \tag{53}$$

la nouvelle intégrale est relative à un lacet partant de x_0 et entourant le point α. Il y a lieu de vérifier si la fonction $\psi(\alpha)$, définie par la formule précédente, satisfait bien à la relation (52).

Nous devrons remplacer la fonction par sa valeur; mais, comme dans l'équation (53) le contour d'intégration varie avec α, nous le remplacerons par un contour fixe équivalent qui soit le même pour toutes les valeurs que doit prendre le paramètre dans la formule (52).

On obtiendra un pareil contour C_1 en décrivant une courbe fermée simple partant de x_0 et entourant le lacet $x_0 x$ ou le contour équivalent C.

L'intégrale de l'équation (52) devient

$$I = \frac{\Gamma(\beta)}{2\pi i}\,\frac{\Gamma(2-\beta)}{2\pi i}\int_C (\alpha - x)^{-\beta}\,d\alpha \int_{C_1} \varphi(t)(t-\alpha)^{\beta-2}\,dt. \tag{54}$$

Les deux chemins C et C_1 ayant des longueurs finies, nous pouvons intervertir l'ordre des intégrations.

Intégrons d'abord par rapport à α.

L'intégrale à calculer est la suivante

$$\int_C \left(\frac{t-\alpha}{\alpha - x}\right)^{\beta} \frac{d\alpha}{(t-\alpha)^2}.$$

Le point t est extérieur et le point x intérieur au contour fermé C qui part de x_0 et y revient après avoir entouré une seule fois le point critique x. Nous le supposons décrit dans le sens positif.

La valeur de l'intégrale est donc

$$\frac{1}{t-x}\,\frac{(x_0-x)^{1-\beta}}{(t-x_0)^{1-\beta}}\,\frac{e^{-2\pi i\beta}-1}{1-\beta}=\frac{2i\sin\pi\beta}{1-\beta}\left(\frac{x-x_0}{t-x_0}\right)^{1-\beta}\frac{1}{t-x}.$$

En portant cette valeur dans l'équation (54), nous avons

$$I=\frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(2-\beta)}{2\pi i.2\pi i}\,\frac{2i\sin\pi\beta}{1-\beta}\int_{C_1}\varphi(t)\left(\frac{x-x_0}{t-x_0}\right)^{1-\beta}\frac{dt}{t-x}$$

ou enfin

$$(55)\qquad I=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\varphi(t)\left(\frac{x-x_0}{t-x_0}\right)^{1-\beta}\frac{dt}{t-x}.$$

Le point $t=x_0$ est situé sur le contour d'intégration; par conséquent l'intégrale I n'a de sens que si la partie réelle de β est positive, à moins que le point x_0 ne soit, pour la fonction $\varphi(t)$, un zéro d'un ordre suffisant de multiplicité. Mais si l'intégrale a un sens, elle est égale à $\varphi(x)$, puisque le point x est intérieur au contour d'intégration et que $\varphi(t)$ est holomorphe.

Ainsi, quand on a $\beta>0$, il existe toujours une fonction holomorphe $f(\alpha)$ telle que, pour $y=y_0$, l'intégrale Z_1 soit égale à une fonction holomorphe donnée $\varphi(x)$; la valeur de $f(\alpha)$ se déduit immédiatement de celle de la fonction ψ. On a donc

$$f(\alpha)=\frac{1-\beta}{-4\pi\sin\pi\beta}(\alpha-y_0)^{\beta'}\int_{C_1}\varphi(t)\,(t-\alpha)^{\beta-2}\,dt.$$

Remplaçons $f(\alpha)$ par cette expression dans la formule (51); l'intégrale Z_1 devient

$$\frac{\beta-1}{4\pi\sin\pi\beta}\int_{C}(\alpha-x)^{-\beta}\left(\frac{\alpha-y_0}{\alpha-y}\right)^{\beta'}d\alpha\int_{C_1}\varphi(t)\,(t-\alpha)^{\beta-2}\,dt,$$

ou bien, en intervertissant l'ordre des intégrations,

$$(56)\qquad Z_1=\frac{\beta-1}{4\pi\sin\pi\beta}\int_{C_1}\varphi(t)\,dt\int_{C}\left(\frac{t-\alpha}{\alpha-x}\right)^{\beta}\left(\frac{\alpha-y_0}{\alpha-y}\right)^{\beta'}\frac{d\alpha}{(t-\alpha)^2}.$$

L'intégrale

$$\int_{C}\left(\frac{t-\alpha}{\alpha-x}\right)^{\beta}\left(\frac{\alpha-y_0}{\alpha-y}\right)^{\beta'}\frac{d\alpha}{(t-\alpha)^2}$$

est une solution particulière de l'équation $E(\beta, \beta')$ dépendant du paramètre t et se réduisant, pour $y = y_0$, à

$$\frac{-1}{t-x}\left(\frac{t-x_0}{x-x_0}\right)^{\beta-1} 2i\sin\pi\beta.$$

Représentons-la par $Z(x, y, t, y_0)$. La solution, qui est égale à $\varphi(x)$ pour $y = y_0$, est représentée par l'intégrale définie

$$\frac{\beta-1}{4\pi\sin\pi\beta}\int_{C_1}\varphi(t)\,Z(x, y, t, y_0)\,dt. \tag{57}$$

Quand β est un nombre entier, les formules que nous venons d'établir deviennent illusoires, mais la méthode subsiste. Nous étudierons plus loin ce cas simple.

45. Si l'on suppose la partie réelle de β négative ou nulle, les résultats paraissent tout d'abord perdre une partie de leur généralité, puisque l'expression trouvée pour $f(\alpha)$ n'a plus de sens que lorsque le point x_0 est pour la fonction $\varphi(x)$ un zéro d'un ordre suffisant de multiplicité. Il ne résulte pas de là qu'on ne pourra trouver une fonction $f(\alpha)$ et des contours d'intégration de manière à satisfaire aux conditions aux limites comme dans le cas précédent, mais seulement que $f(\alpha)$ ne sera pas holomorphe. La méthode que nous venons de suivre sera encore applicable avec quelques modifications que nous allons indiquer. Soit n un nombre entier supérieur à la partie réelle de $-\beta$. Toute fonction $\varphi(x)$, holomorphe dans la région considérée, peut être mise sous la forme

$$\varphi(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + (x-x_0)^n\varphi_1(x).$$

La formule (55) aura un sens quand on y remplacera $\varphi(x)$ par le dernier terme de cette expression. Il suffit donc de chercher la modification à laquelle donnent lieu les premiers. L'intégrale

$$\int(\alpha-x)^{-\beta}(\alpha-x_0)^{\beta+p-1}\,d\alpha,$$

relative à un lacet ayant son entrée en x et entourant le point x_0, est égale à

$$2\pi i\,\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+p-1)}{p!}\,(x-x_0)^p,$$

quand on détermine convenablement la valeur initiale de la fonction intégrée. Ce résultat nous donne immédiatement les premiers termes de la fonction $\varphi(x)$, et même les termes quelconques.

Considérons dans l'équation (51) le symbole $\int_x$ comme relatif à une intégration en quelque sorte indéfinie effectuée sur un contour fermé arbitraire, ou même sur plusieurs contours différents. L'expression Z_1 représentera alors, dans toute sa généralité, une demi-solution du problème susceptible de prendre pour $y = y_0$ des valeurs données en fonction de x. Le second terme de l'intégrale (50) jouissant évidemment des mêmes propriétés, la formule considérée donne l'intégrale générale de l'équation d'Euler et de Poisson.

On pourrait varier d'une infinité de manières les contours d'intégration et les fonctions arbitraires de façon à obtenir des intégrales possédant un nombre quelconque de caractéristiques singulières.

46. Au lieu de déduire directement l'intégrale générale de la solution particulière considérée, on peut chercher d'abord une intégrale principale holomorphe ne s'annulant pas sur la caractéristique paramétrique. La méthode générale est ici applicable. Soit (x_0) un point intérieur au contour d'intégration et $f(\alpha)$ une fonction holomorphe; l'intégrale

$$z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_x f(\alpha)\left(\frac{\alpha - x}{\alpha - x_0}\right)^{-\beta}(\alpha - y)^{-\beta'}\frac{d\alpha}{\alpha - x_0} \tag{58}$$

prend, pour $x = x_0$, la valeur suivante

$$f(x_0)(x_0 - y)^{-\beta'},$$

qui est une solution de l'équation dérivée. Donc z_0 est une intégrale principale. On peut lui donner différentes formes en variant la fonction $f(\alpha)$.

Cherchons la condition pour qu'il existe une intégrale principale entière et de degré n par rapport à $x_0 - x$; c'est en même temps la condition pour que la première substitution de Laplace conduise à une suite limitée. Dans ce cas, toute intégrale principale de la forme (58), considérée comme fonction de y, satisfera à une équation linéaire d'ordre $n+1$, à coefficients indépendants de x_0,

$$\frac{d^{n+1}z}{dy^{n+1}}+p_1\frac{d^n z}{dy^n}+\ldots+p_n z=0.$$

En exprimant cette propriété nous avons

$$\begin{aligned}0=\int_x f(\alpha)\left(\frac{\alpha-x}{\alpha-x_0}\right)^{-\beta}(\alpha-y)^{-(\beta'+n+1)}\frac{d\alpha}{\alpha-x_0}\,[\beta'(\beta'+1)\ldots(\beta'+n)\\+A_1(\alpha-y)+A_2(\alpha-y)^2+\ldots],\end{aligned}$$

les coefficients A_1, A_2, ... ne dépendant que de x et de y.

L'intégrale doit s'annuler quelle que soit la fonction holomorphe $f(\alpha)$ et quel que soit le contour d'intégration, pourvu qu'il renferme les deux points x et x_0, mais non le point y. Pour cela, il faut et il suffit que la fonction soumise à l'intégration soit holomorphe en α.

Le degré du point critique x_0 est $\beta-1$; cet exposant devra donc être entier et positif, ou bien le point critique devra disparaître. D'où deux cas à distinguer :

1° β entier et positif; soit par exemple $\beta=n+1$; nous pourrons alors déterminer les coefficients A_1, A_2, ... de la parenthèse de manière qu'elle se réduise à

$$\beta'(\beta'+1)\ldots(\beta'+n)\frac{(\alpha-x)^{n+1}}{(y-x)^{n+1}}.$$

Il n'y a plus aucun point critique dans le domaine limité par le contour; donc l'intégrale est nulle.

2° β quelconque. Le point critique x_0 doit disparaître, et comme la parenthèse est indépendante de x_0, elle devra être nulle quel que soit α, ce qui exige les relations

$$\beta'(\beta'+1)\ldots(\beta'+n)=0,\qquad A_1=A_2=\ldots=0.$$

Donc β' sera un entier négatif, inférieur ou égal à n.

Réciproquement, quand l'une des conditions précédentes est vérifiée, l'équation proposée donne lieu à une suite limitée par l'application de la première substitution de Laplace.

Ces résultats sont faciles à déduire de la forme des invariants successifs ou du développement en série des intégrales principales; mais j'ai pensé qu'il était intéressant de les établir directement comme application des théories générales exposées précédemment.

47. Étudions quelques intégrales principales particulières. Soit d'abord

$$(59) \qquad z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_x \left(\frac{\alpha - x}{\alpha - x_0}\right)^{-\beta} (\alpha - y)^{-\beta'} \frac{d\alpha}{\alpha - x_0}.$$

Nous ramènerons z_0 à la forme ordinaire des fonctions hypergéométriques en posant

$$\alpha - x = -\theta(x - x_0),$$

$$\frac{x - x_0}{x - y} = u,$$

θ désignant la nouvelle variable d'intégration.

La solution z_0 devient, à un facteur constant près,

$$\frac{(y - x)^{-\beta'}}{2\pi i}\int \theta^{-\beta}(1 - \theta)^{\beta - 1}(1 - \theta u)^{-\beta'} d\theta,$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour enfermant les deux points critiques 0 et 1; nous prendrons, par exemple, un lacet ayant son entrée en l'un de ces points et dont le cercle entoure l'autre.

D'après cela nous pourrons écrire, en négligeant encore un facteur constant et en désignant par F la série hypergéométrique de Gauss :

$$z_0 = (y - x)^{-\beta'} \mathrm{F}\left(\beta', 1 - \beta, 1, \frac{x - x_0}{x - y}\right).$$

On déduit de là immédiatement la condition trouvée plus haut pour que le développement soit limité.

On peut aussi retrouver directement, par le développement en série, l'intégrale que nous venons d'obtenir.

Considérons la solution

$$(\alpha - x)^{-\beta}(\alpha - y)^{-\beta'},$$

que nous désignerons par la notation $z^{-\beta}$. Développons le second facteur $(\alpha - y)^{-\beta'}$, suivant les puissances de $\alpha - x$. On a

$$(\alpha - y)^{-\beta'} = (x - y)^{-\beta'}\left[1 + \frac{\beta'}{1}\frac{x - \alpha}{x - y} + \frac{\beta'(\beta' + 1)}{1.2}\frac{(x - \alpha)^2}{(x - y)^2} + \ldots\right].$$

La méthode indiquée au n° 41 nous donne immédiatement le développement de l'intégrale principale sous la forme

$$z_0 = (x-y)^{-\beta'}\left[1 + \frac{(1-\beta)\beta'}{1.1}\,\frac{\alpha-x}{y-x} + \frac{(1-\beta)(2-\beta)\beta'(\beta'+1)}{1.2\;1.2}\,\frac{(\alpha-x)^2}{(y-x)^2} + \dots\right].$$

Donc

$$(60) \qquad z_0 = (x-y)^{-\beta'}\,\mathrm{F}\left(1-\beta,\ \beta',\ 1,\ \frac{\alpha-x}{y-x}\right).$$

Déterminons maintenant l'intégrale doublement principale de M. Darboux. Quand on y fait $x = x_0$, elle est égale à $\left(\frac{x_0-y}{x_0-y_0}\right)^{-\beta'}$ et pour $y = y_0$ elle devient $\left(\frac{y_0-x}{y_0-x_0}\right)^{-\beta}$. Nous sommes conduit à déterminer la fonction $f(\alpha)$ dans l'expression suivante

$$\frac{1}{2\pi i}\int_x f(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta}(y-\alpha)^{-\beta'}d\alpha$$

par ces conditions aux limites. Prenons pour chemin d'intégration un contour fermé renfermant les deux points x et x_0, l'origine étant infiniment voisine de x_0. Les résultats du n° 44 nous donnent immédiatement la détermination de $f(\alpha)$. On aura donc, en désignant l'intégrale cherchée par $z(x, y, x_0, y_0)$:

$$z(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_x \left(\frac{\alpha-x}{\alpha-x_0}\right)^{-\beta}\left(\frac{\alpha-y}{\alpha-y_0}\right)^{-\beta'}\frac{(y_0-x_0)\,d\alpha}{(\alpha-x_0)(\alpha-y_0)}.$$

Les points y et y_0 sont supposés extérieurs au contour d'intégration.

Cette intégrale est évidemment principale par rapport à x; elle l'est aussi par rapport à y d'après la détermination de la fonction $f(\alpha)$. Vérifions directement ce dernier résultat. L'intégrale de la fonction

$$\left(\frac{\alpha-x}{\alpha-x_0}\right)^{-\beta}\left(\frac{\alpha-y}{\alpha-y_0}\right)^{-\beta'}\frac{y_0-x_0}{(\alpha-x_0)(\alpha-y_0)},$$

relative à un cercle de rayon infini, est nulle. La fonction est d'ailleurs uniforme à l'extérieur de tout contour simple renfermant les quatre points critiques. D'où l'on déduit que l'intégrale, prise dans le sens positif le long d'un contour fermé relatif aux deux points x et x_0, est égale à l'intégrale prise dans le sens négatif le long d'un second contour ayant la même origine et entourant les deux points y et y_0. La conclusion s'en déduit immédiatement.

Nous allons mettre la fonction $z(x, y, x_0, y_0)$ sous la forme ordinaire des fonctions hypergéométriques. Effectuons une transformation homographique

$$\alpha = \frac{lt+m}{t+n},$$

choisie de manière à faire correspondre aux points critiques x_0, x, y_0 du plan des α, les points o, 1, ∞ du plan des t; il faudra prendre

$$l = y_0, \qquad m = x_0 \frac{y_0 - x}{x - x_0}, \qquad n = \frac{y_0 - x}{x - x_0}.$$

L'intégrale devient

$$(y_0 - x_0)^{\beta+\beta'}(x - y_0)^{-\beta}(y - x_0)^{-\beta'} \frac{1}{2\pi i}\int t^{\beta-1}(1-t)^{-\beta}(1-\sigma t)^{-\beta'} dt,$$

en posant

$$\sigma = \frac{(y - y_0)(x - x_0)}{(y - x_0)(x - y_0)}.$$

Nous avons donc

$$(61) \quad z(x, y, x_0, y_0) = (y_0 - x_0)^{\beta+\beta'}(y_0 - x)^{-\beta}(y - x_0)^{-\beta'} \mathrm{F}(\beta, \beta', 1, \sigma).$$

C'est le résultat obtenu par M. Darboux, sauf le changement de x et y en x_0 et y_0 et inversement.

La connaissance de cette intégrale permet de représenter par des intégrales définies toute solution définie par des valeurs initiales données, soit sur des caractéristiques, soit sur une autre courbe.

48. Étudions maintenant d'autres intégrales qui permettent de représenter les solutions par des développements en séries. Soit $\varphi_\mu(x, y)$ l'intégrale qui se réduit, pour $y = y_0$, à

$$\frac{1}{\Gamma(\mu+1)}(x - x_0)^\mu$$

et qui est en outre de la forme

$$(x - x_0)^\mu u(x, y),$$

u désignant une fonction holomorphe.

Ces intégrales sont encore représentées par l'expression

$$\int_x f(\alpha)(\alpha-x)^{-\beta}(\alpha-y)^{-\beta'}\,d\alpha,$$

où l'on détermine convenablement la fonction $f(\alpha)$ d'après la méthode du n° 44; on trouve, en supposant la partie réelle de $\beta+\mu$ positive

$$f(\alpha)=\frac{-1}{2\pi i}\,\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\mu+\beta)}(\alpha-x_0)^{\mu+\beta-1}(\alpha-y_0)^{\beta'}.$$

On a, par conséquent

$$\varphi_\mu=\frac{-1}{2\pi i}\,\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\mu+\beta)}\int_x\left(\frac{\alpha-x}{\alpha-x_0}\right)^{-\beta}\left(\frac{\alpha-y}{\alpha-y_0}\right)^{-\beta'}(\alpha-x_0)^{\mu-1}\,d\alpha.$$

La transformation homographique, dont nous avons fait usage pour l'intégrale doublement principale, ramène la fonction φ_μ à la forme des intégrales hypergéométriques.

Posons

$$\xi=\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(y-x_0)(x-y_0)},$$

$$\eta=\frac{x-x_0}{x-y_0}.$$

L'expression précédente devient

$$(x_0-y_0)^{\beta+\beta'+\mu}(x-y_0)^{-\beta-\mu}(x-x_0)^{\mu}(x_0-y)^{-\beta'}e^{\pi i\beta}\frac{-1}{2\pi i}\,\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\mu+\beta)}$$
$$\times\int t^{\beta+\mu-1}(1-t)^{-\beta}(1-t\xi)^{-\beta'}(1-t\eta)^{-(\mu+1)}\,dt;$$

d'où enfin

$$(62)\quad \varphi_\mu=(x_0-y_0)^{\beta+\beta'+\mu}(x-y_0)^{-\beta-\mu}(x-x_0)^{\mu}(x_0-y)^{-\beta'}\frac{1}{\Gamma(\mu+1)}\,F(\beta+\mu,\beta',\mu+1,\mu+1,\xi,\eta).$$

$F(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \xi, \eta)$ désigne ici la série hypergéométrique à deux variables de M. Appell, du moins dans les régions où elle est convergente,

$$F(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\xi,\eta)=\sum_{m,n}\frac{(\alpha,\,m+n)(\beta,\,m)(\beta' n)}{(\gamma,\,m+n)\,m!\,n!}\xi^m\eta^n,$$

en posant, pour abréger

$$(\alpha,\,m)=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1),\qquad (\alpha,\,0)=1.$$

Il existe une seconde série d'intégrales analogues aux précédentes, et qui s'en déduisent en permutant simplement les variables et les exposants correspondants. Nous les désignerons par le symbole ψ_μ. Enfin l'intégrale qui se réduit à l'unité sur deux caractéristiques est constamment égale à 1. Toute solution holomorphe de l'équation d'Euler et de Poisson est développable en une double série de fonctions φ et ψ à indices entiers et positifs.

Considérons encore les intégrales suivantes qui donnent également lieu à un développement en série des solutions générales.

Soit

$$z_\mu = \mathrm{A}\int_x (\alpha - x)^{-\beta}(\alpha - y)^{-\beta'}(\alpha - x_0)^{\beta'+\mu-1}\,d\alpha,$$

A désignant un facteur constant. Cette intégrale s'exprime encore à l'aide de fonctions hypergéométriques, et l'on a, en déterminant convenablement la constante A,

$$z_\mu = (x - x_0)^\mu (x_0 - y)^{-\beta'}\,\mathrm{F}\left(\beta', \beta + \mu, \mu + 1, \frac{x - x_0}{y - x_0}\right),$$

pourvu que μ ne soit pas un entier négatif.

L'intégrale

$$\int_x f(\alpha)\left(\frac{\alpha - x}{\alpha - x_0}\right)^{-\beta}(\alpha - y)^{-\beta'}\,d\alpha,$$

où la fonction $f(\alpha)$ est développable suivant les puissances entières ou non de $\alpha - x_0$, peut être représentée par une série convergente de fonctions z_μ.

Dans tout ce qui précède le point x_0 est supposé intérieur au contour d'intégration ou sur le contour même.

49. Étudions maintenant d'une manière plus particulière le cas où l'un des nombres β ou β' est entier.

1° Supposons que β soit un entier positif, $\beta = n + 1$.

L'intégrale

$$\int_x \frac{f(\alpha)(\alpha - y)^{-\beta'}}{(\alpha - x)^{n+1}}\,d\alpha$$

se met immédiatement sous la forme

$$\frac{d^n}{dx^n}[X(x-y)^{-\beta'}],$$

X désignant une fonction arbitraire de x.

Si en même temps β' est aussi un entier positif $m+1$, l'expression devient, à un facteur près,

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}\,\frac{X}{x-y}.$$

Le second terme de la formule (50) est évidemment susceptible d'une représentation analogue

$$-\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}\,\frac{Y}{x-y}.$$

Donc l'intégrale générale se met alors sous la forme simple suivante

$$Z=\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}\,\frac{X-Y}{x-y}.$$

Avec la signification ordinaire des dérivées cette forme n'est applicable que lorsque les nombres β et β' sont entiers et positifs; mais en introduisant la notation des dérivées à indices quelconques on peut la regarder comme générale, et l'on a

$$Z=\frac{\partial^{\beta+\beta'-2}}{\partial x^{\beta-1}\,\partial y^{\beta'-1}}\,\frac{X-Y}{x-y}.$$

2° Supposons que β' soit entier et négatif ou nul; $\beta'=-n$. Les chemins d'intégration décrits autour du point y devront être remplacés par des chemins dont l'une des limites soit en y. Cela posé, considérons l'intégrale

$$Z_1=\int_x(\alpha-y)^n(\alpha-x)^{-\beta}f(\alpha)\,d\alpha.$$

Soit V une fonction de α et de x définie par l'équation

$$\frac{\partial^{n+1}V}{\partial\alpha^{n+1}}=f(\alpha)(\alpha-x)^{-\beta}.$$

Nous prendrons par exemple

$$V = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{\alpha} f(t)(t-x)^{-\beta}(\alpha - t)^n\, dt.$$

L'intégrale Z_1 s'exprime en fonction linéaire de $V(x, x)$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre n, et l'on voit que V est une fonction arbitraire de x. Il est facile d'avoir l'expression, sous forme de dérivée, de cette solution, soit directement, soit en partant de l'intégrale principale définie par la formule (60), qui devient ici

$$z(x, y, \alpha) = (x-y)^n\left[1 + \frac{\beta - 1}{1}\,\frac{n}{1}\,\frac{\alpha - x}{y - x} + \frac{(\beta-1)(\beta-2)}{1.2}\,\frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{(\alpha-x)^2}{(y-x)^2} + \ldots\right].$$

On en déduit immédiatement que Z_1 sera de la forme suivante

$$(x-y)^n\left[\frac{d^n X}{dx^n} + \frac{n}{1}\,\frac{(\beta-1)}{x-y}\,\frac{d^{n-1}X}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{(\beta-1)(\beta-2)}{(x-y)^2}\,\frac{d^{n-2}X}{dx^{n-2}} + \ldots\right],$$

ce qui peut s'écrire enfin

$$Z_1 = (x-y)^n (x-y)^{1-\beta}\frac{\partial^n}{\partial x^n}[X(x-y)^{\beta-1}].$$

Si β est lui-même un entier négatif, $-m$, on a

$$\frac{X}{(x-y)^{1-\beta}} = \frac{X}{(x-y)^{m+1}} = \frac{1}{m!}\,\frac{\partial^m}{\partial y^m}\,\frac{X}{x-y},$$

et, par suite, à un facteur près

$$Z_1 = (x-y)^{m+n+1}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^n\,\partial y^m}\,\frac{X}{x-y}.$$

L'intégrale générale est donc

$$Z = (x-y)^{m+n+1}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^n\,\partial y^m}\,\frac{X-Y}{x-y}.$$

En généralisant cette expression par les dérivées à indices quelconques on peut encore représenter l'intégrale par la formule suivante, quels que soient β et β',

$$Z = (x-y)^{1-\beta-\beta'}\frac{\partial^{-\beta'-\beta}}{\partial x^{-\beta'}\,\partial y^{-\beta}}\,\frac{X-Y}{x-y}.$$

50. Étudions enfin quelques nouvelles formes d'intégrales que l'on obtient en prenant un contour d'intégration renfermant à la fois les deux points critiques x et y. Nous les représenterons par

$$\int_{x,y} f(\alpha)(\alpha - x)^{-\beta}(\alpha - y)^{-\beta'}\, d\alpha.$$

En déduisant une intégrale particulière, nous pourrons supposer que le contour d'intégration a pour origine un point infiniment voisin de x (ou le point x lui-même, quand la partie réelle de $-\beta$ est supérieure à -1).

Considérons l'intégrale

$$\int_{x,y} (\alpha - x)^{-\beta}(\alpha - y)^{-\beta'}(\alpha - u)^{\beta+\beta'+\gamma-2}\, d\alpha,$$

le point u étant supposé extérieur au contour d'intégration.

Cette expression se ramène encore aux fonctions hypergéométriques; mais le résultat se simplifie quand on a $\gamma = 0$. L'intégrale devient alors de la forme

$$Z_1(x, y, u) = A(x - u)^{\beta-1}(y - u)^{\beta'-1}(y - x)^{1-\beta-\beta'},$$

où l'on désigne par A un facteur constant. La solution ainsi obtenue dépend d'un nouveau paramètre u; elle admet les deux caractéristiques singulières mobiles $x = u$, $y = u$ qui se coupent sur le lieu des points critiques propres. On pourrait aussi en déduire toutes les intégrales de l'équation proposée.

A l'aide des deux intégrales

$$z(x, y, \alpha) = (\alpha - x)^{-\beta}(\alpha - y)^{-\beta'}$$

et

$$z_1(x, y, \alpha) = (y - x)^{1-\beta-\beta'}(x - \alpha)^{\beta-1}(y - \alpha)^{\beta'-1},$$

M. Appell a représenté pour la première fois l'intégrale générale de l'équation d'Euler et de Poisson dans le cas où β et β' sont quelconques. La formule de M. Appell devient, avec les notations ci-dessus,

$$Z = \int_{x,y} f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha + \int_{x,y} \varphi(\alpha)\, z_1(x, y, \alpha)\, d\alpha. \tag{63}$$

51. L'équation d'Euler et de Poisson est un cas particulier de la suivante, trouvée au n° 42,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - \frac{\psi(y)}{x-y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\varphi(x)}{x-y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{64}$$

Celle-ci admet également une intégrale particulière dépendant d'un paramètre et égale au produit d'une fonction de y par une fonction de x

$$z(x, y, \alpha) = e^{\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\alpha - x} + \int \frac{\psi(y)\,dy}{\alpha - y}}.$$

De cette solution particulière on peut déduire une intégrale qui s'exprime au moyen de deux fonctions arbitraires,

$$Z = \int_x f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha + \int_y \varphi(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha. \tag{65}$$

La première intégration est relative au point x, et la seconde au point y.

En particulier, le calcul des intégrales principales se fait très simplement. Définissons d'abord les intégrales qui figurent en exposants

$$\int \frac{\varphi(x)}{\alpha - x}\, dx, \quad \int \frac{\psi(y)}{\alpha - y}\, dy.$$

Nous évaluerons la première à partir d'une limite inférieure x_0 et le long d'un chemin déterminé $x_0 x$. De même, la seconde sera évaluée le long d'un chemin $y_0 y$. Considérons maintenant un contour fermé simple ne coupant aucune de ces lignes, mais renfermant les deux points critiques x_0 et x, le chemin $y_0 y$ étant complètement extérieur. Soit, d'autre part, $f(\alpha)$ une fonction holomorphe dans l'aire limitée par ce contour. L'intégrale

$$Z_x = \frac{1}{2\pi i} \int_x f(\alpha)\, e^{\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi(x)}{\alpha - x} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\psi(y)}{\alpha - y} dy} \frac{d\alpha}{\alpha - x_0}, \tag{66}$$

évaluée le long du chemin que nous venons de définir, est une intégrale principale admettant la caractéristique paramétrique $x = x_0$.

Ce résultat rentre encore dans la méthode générale que nous avons indiquée.

L'intégrale doublement principale de Riemann est représentée par l'expression

$$(67) \quad z(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi i}\int e^{\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)}{\alpha - x}dx + \int_{y_0}^{y}\frac{\psi(y)}{\alpha - y}dy}\frac{(x_0 - y_0)\,d\alpha}{(\alpha - x_0)(\alpha - y_0)},$$

le contour d'intégration étant toujours le même. Ce résultat se vérifie comme dans le cas de l'équation d'Euler. Traçons dans le plan des α deux contours fermés simples de même origine, le premier renfermant la ligne $x_0 x$ et le second la ligne $y_0 y$, les aires de ces deux contours n'empiétant pas l'un sur l'autre. La fonction de α

$$e^{\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)}{\alpha - x}dx + \int_{y_0}^{y}\frac{\psi(y)}{\alpha - y}dy}\frac{x_0 - y_0}{(\alpha - x_0)(\alpha - y_0)}$$

est holomorphe dans toute région du plan complètement extérieure aux contours considérés et, de plus, l'intégrale de cette fonction, évaluée suivant la circonférence d'un cercle de rayon infini, est nulle. Le raisonnement du n° 47 est donc applicable, et nous pouvons considérer l'équation (64) comme complètement intégrée.

52. Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit intégrable par la méthode de Laplace.

Si la première substitution donne une suite limitée au bout de n opérations, toute intégrale principale par rapport à x, $z(x, y, x_0)$, regardée comme fonction de y, vérifiera une équation linéaire d'ordre $n+1$ à coefficients indépendants de x_0. En raisonnant comme pour l'équation d'Euler, nous trouvons qu'il existe une intégrale principale à développement limité, quand l'une des expressions

$$\varphi(x) - 1, \quad -\psi(y)$$

est un entier positif ou nul.

Considérons successivement ces deux cas.

1° Soit $\varphi(x) = n + 1$; le premier terme de la formule (65) donne une intégrale de la forme

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[X e^{\int \frac{\psi(y)}{x-y} dy}\right],$$

où X désigne une fonction arbitraire de x.

2° Supposons $\psi(y) = -n$. L'intégrale relative à x dans la formule (50) devient

$$\int_x (y-\alpha)^n e^{\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\alpha - x}} f(\alpha)\,d\alpha. \tag{68}$$

Soit

$$X(\varphi) = \int_x f(\alpha)\,e^{\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\alpha - x}}\,d\alpha.$$

L'intégrale (68) peut s'écrire

$$(y-x)^n X(\varphi) + \frac{n}{1}(y-x)^{n-1} X(\varphi - 1) + \frac{n(n-1)}{1.2} X(\varphi - 2) + \ldots + X(\varphi - n).$$

D'autre part on a

$$\frac{d}{dx} X(\varphi) = \varphi\, X(\varphi + 1)$$

et, par conséquent,

$$\frac{d}{dx} X(\varphi - n) = (\varphi - n)\, X(\varphi - n + 1),$$

$$\frac{d^2}{dx^2} X(\varphi - n) = \frac{d\varphi}{dx} X(\varphi - n + 1) + (\varphi - n)(\varphi - n + 1)\, X(\varphi - n + 2),$$

$$\frac{d^3}{dx^3} X(\varphi - n) = \frac{d^2\varphi}{dx^2} X(\varphi - n + 1) + 2(\varphi - n) + (\varphi - n + 1)\frac{d\varphi}{dx} X(\varphi - n + 2)$$
$$+ (\varphi - n)(\varphi - n + 1)(\varphi - n + 2)\, X(\varphi - n + 3),$$

. . . .

On voit que toutes les fonctions $X(\varphi - i)$, où l'indice i est égal ou inférieur à n, s'expriment linéairement à l'aide des dérivées de la fonction arbitraire $X(\varphi - n)$: il en est donc de même de l'intégrale considérée, ce qui montre que l'équation est encore dans ce cas intégrable par la méthode de Laplace.

La considération des invariants successifs conduit sans peine au même résultat.

53. L'équation (64) est intéressante parce qu'on peut y ramener toutes les équations qui admettent trois intégrales distinctes de la forme

$$XY,$$

sauf quelques cas simples exceptionnels.

En effet, supposons que l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

ait trois solutions de cette forme. En prenant comme fonction inconnue le rapport de z à l'une d'entre elles on fera disparaître le dernier terme de l'équation; nous pourrons donc nous borner à considérer les équations où z figure seulement par ses dérivées et qui admettent deux solutions

$$X_1Y_1, \quad X_2Y_2.$$

En exprimant que ces solutions vérifient l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

on calcule a et b. On trouve pour ces coefficients des valeurs de la forme suivante

$$a = \frac{u_1}{u_1v_2 - v_1u_2} = \frac{\frac{1}{v_1}}{\frac{v_2}{v_1} - \frac{u_2}{u_1}},$$

$$b = \frac{-v_1}{u_1v_2 - v_1u_2} = \frac{-\frac{1}{u_1}}{\frac{v_2}{v_1} - \frac{u_2}{u_1}},$$

en désignant par u_1 et u_2 des fonctions de x, par v_1 et v_2 des fonctions de y.

Prenons comme nouvelles variables indépendantes

$$\xi = \frac{u_2}{u_1}, \qquad \eta = \frac{v_2}{v_1}$$

et posons

$$\frac{1}{u_1} = \varphi(\xi), \qquad \frac{1}{v_1} = \psi(\eta),$$

nous trouvons enfin la forme (64)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\psi(\eta)}{\xi-\eta}\frac{\partial z}{\partial\xi} + \frac{\varphi(z)}{\xi-\eta}\frac{\partial z}{\partial\eta} = 0.$$

Nos calculs seraient en défaut au cas où l'une des quantités par lesquelles on a divisé serait nulle, ou bien encore au cas où l'un des rapports

$$\frac{u_2}{u_1}, \quad \frac{v_2}{v_1}$$

serait égal à une constante.

Nous avons déjà trouvé ce résultat en cherchant les solutions de l'équation (B), du n° 42, qui sont de la forme XY.

54. Le résultat obtenu au n° 52, pour les équations de la forme (64) intégrables par la méthode de Laplace, peut être facilement généralisé.

Considérons une équation linéaire n'ayant pas de terme en z

$$(69) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

à coefficients uniformes. Supposons que a, regardé comme fonction de y, admette une ligne de pôles représentée par une équation analytique

$$G(x, y) = 0.$$

Soit $y = \theta(x)$ une valeur de y satisfaisant à cette équation, uniforme dans un domaine suffisamment restreint; nous pourrons alors écrire

$$a = \frac{A_0}{[y-\theta(x)]^p} + \frac{A_1}{[y-\theta(x)]^{p-1}} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{y-\theta} + \varphi(x, y),$$

A_0, A_1, ..., A_{p-1} désignant des fonctions de x seul, que je suppose uniformes et continues dans le même domaine, et $\varphi(x, y)$ désignant une fonction holomorphe de x et de y.

Dans la même hypothèse, le coefficient b, regardé comme fonction de x, se mettra sous la forme

$$b = \frac{B_0 \theta'}{(y-\theta)^q} + \frac{B_1 \theta'}{(y-\theta)^{q-1}} + \ldots + \frac{B_{q-1} \theta'}{y-\theta} + \psi(x, y),$$

les coefficients B_0, B_1, ... dépendant de y seul.

Cherchons les invariants h et k, dans lesquels nous tiendrons compte seulement des termes du plus bas degré en $y - \theta$.

Nous aurons

$$(70) \qquad \left\{ \begin{aligned} h &= \frac{p A_0 \theta'}{(y-\theta)^{p+1}} + \frac{A_0 B_0 \theta'}{(y-\theta)^{p+q}} + \ldots, \\ k &= \frac{-q B_0 \theta'}{(y-\theta)^{q+1}} + \frac{A_0 B_0 \theta'}{(y-\theta)^{p+q}} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

L'invariant h_1 se calculera par la formule bien connue [1]

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x\, \partial y}.$$

Nous distinguerons différents cas :

1° Soient d'abord $p > 1$ et $q > 1$. — Le terme du plus bas degré en $y - \theta$ est égal à $\frac{A_0 B_0 \theta'}{(y-\theta)^{p+q}}$; il est le même dans tous les invariants. Donc l'équation ne sera pas intégrable par la méthode de Laplace.

2° $p = 1$, $q > 1$. — Le terme du plus bas degré de l'invariant h a pour coefficient $A_0 B_0$. Dans les invariants suivants on retrouve le même terme avec les coefficients

$$(A_0 + q) B_0, \quad (A_0 + 2q) B_0, \quad \ldots, \quad (A_0 + nq) B_0;$$

pour que la première suite puisse être limitée, il faut donc que A_0 soit un entier négatif multiple de q.

3° $q = 1$, $p > 1$. — Le coefficient du terme du moindre degré de k est encore $A_0 B_0$. Le terme analogue des invariants suivants s'obtient en changeant B_0 successivement en

$$B_0 + p, \quad B_0 + 2p, \quad \ldots, \quad B_0 + np.$$

---

(1) DARBOUX, t. II, p. 28.

Cette suite ne pourra donc se limiter que si B_0 est un entier négatif multiple de p.

4° $q = p = 1$. — Les coefficients des termes du moindre degré forment la suite

$$A_0(B_0+1), \quad (A_0+1)(B_0+2), \quad \ldots, \quad (A_0+n-1)(B_0+n);$$

pour qu'elle soit limitée, il faut que l'un des nombres A_0, B_0 soit un entier négatif, ou que l'on ait $A_0 = 0$.

5° $p > 1$, $q = 0$ ou bien $q > 1$, $p = 0$. — La suite ne peut pas se limiter.

La seconde substitution de Laplace nous donnerait des résultats identiques, sauf le changement des nombres négatifs en nombres positifs.

De ce calcul, il résulte que, lorsqu'une équation de la forme (69) est intégrable par la méthode de Laplace, l'une des équations dérivées a son intégrale régulière au voisinage d'une courbe critique propre quelconque, et que la racine correspondante de l'équation déterminante est entière.

On voit l'analogie qui existe entre les équations intégrables sous forme finie et les équations différentielles linéaires ordinaires dont les intégrales sont rationnelles.