Riquier.

Sur les notions de limite et de continuité et sur quelques propriétés générales des fonctions continues d'un nombre quelconque de variables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 12 (1895), p. 197-210

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1895_3_12__197_0>

SUR LES

NOTIONS DE LIMITE ET DE CONTINUITÉ

ET SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS CONTINUES D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES,

Par M. RIQUIER,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN.

1. La manière dont il convient de définir les notions de *limite* et de *continuité* se présente, au début de l'Analyse, comme un point quelque peu délicat; les diverses définitions qui en ont été données jusqu'ici, celle même qu'avec bien d'autres auteurs j'ai donnée naguère de la continuité [1], ne me paraissant pas entièrement satisfaisantes, je désire revenir aujourd'hui sur cette question et indiquer les améliorations dont elle me semble susceptible. Pour abréger, je supprimerai toute démonstration et me bornerai strictement aux définitions et aux énoncés.

2. Les notions de limite et de continuité, comme on le verra ci-après, se rattachent par un lien immédiat à celle de *quantité* : il convient donc de donner sur cette dernière quelques indications sommaires, permettant de concevoir comment on peut, avec la seule notion de nombre entier et sans faire intervenir jamais la moindre considération relative aux grandeurs concrètes, définir tour à tour les fractions, les quantités négatives et les nombres incommensurables. Cette question

---

[1] RIQUIER, *Sur les fonctions continues d'un nombre quelconque de variables, et sur le principe fondamental de la théorie des équations algébriques* (*Annales de l'École Normale supérieure*; 1890).

préliminaire si importante a été traitée récemment par M. Méray ([1]), dont je vais tout d'abord résumer les idées, en les modifiant sur quelques points ([2]).

3. Nous nommerons *expression fractionnaire* la simple association, dans un ordre déterminé, de deux entiers dont le premier s'appelle *numérateur*, et le second, essentiellement différent de zéro, *dénominateur*. L'expression fractionnaire qui a pour numérateur n et pour dénominateur d sera désignée par le symbole

$$[n, d].$$

Nous conviendrons de dire que deux expressions fractionnaires

$$[n', d'], \quad [n'', d'']$$

jouissent l'une par rapport à l'autre de la propriété (λ), si les deux multiplications

$$n'd'', \quad n''d'$$

donnent pour résultat le même entier.

Cela posé, on établit sans peine la proposition suivante :

Les diverses expressions fractionnaires se partagent en une infinité de groupes, contenant chacun une infinité d'expressions, et tels : 1° *que deux expressions fractionnaires appartenant à un même groupe, ou, comme*

([1]) Les Mémoires de M. Méray sur ce sujet ont pour titres :

Les fractions et les quantités négatives (*Nouvelles Annales de Mathématiques*; 1890):

Sur le sens qu'il convient d'attacher à l'expression « nombre incommensurable », et sur le criterium de l'existence d'une limite pour une quantité variable de nature donnée (*Annales de l'École Normale supérieure*; 1887).

Ils se trouvent reproduits dans la première Partie d'un Ouvrage de M. Méray, actuellement en cours de publication, et intitulé : *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques*.

M. Kronecker, de Berlin, s'est également préoccupé de ramener la notion de nombre irrationnel à celle de nombre rationnel : le point de vue adopté par M. Méray me semble toutefois préférable.

([2]) Voici les principales modifications que j'ai cru devoir apporter à l'exposé de M. Méray : 1° j'ai adopté pour les *valeurs fractionnaires* une définition toute différente ; 2° j'ai modifié sa définition des *valeurs infinitésimales* de manière qu'elle offrît avec celle des valeurs fractionnaires le plus d'analogie possible; 3° j'ai établi, entre la notion de *valeur infinitésimale* et celle de *limite*, une distinction que M. Méray ne fait pas, et qui me paraît utile.

cas particulier, identiques entre elles, jouissent l'une par rapport à l'autre de la propriété (λ); 2° *que deux expressions fractionnaires appartenant à deux groupes différents ne jouissent pas l'une par rapport à l'autre de la propriété* (λ).

On attribue alors, par convention, une valeur unique, dite *fractionnaire,* à toutes les expressions contenues dans un même groupe, et les valeurs fractionnaires qui correspondent à deux groupes distincts, sont, également par convention, considérées comme distinctes. Deux valeurs fractionnaires sont dites *égales* ou *inégales* suivant qu'elles sont ou non identiques l'une à l'autre.

Parmi les groupes d'expressions fractionnaires dont il vient d'être question, il en est un, remarquable entre tous, qui comprend, à l'exclusion de toute autre, les diverses expressions fractionnaires de numérateur O; nous désignerons par ∇ la valeur fractionnaire correspondante.

Si l'on désigne par

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2$$

les groupes correspondant à deux valeurs fractionnaires non identiques, et si, dans ces groupes respectifs, on choisit à volonté deux expressions

$$[n_1, d_1], \quad [n_2, d_2],$$

il est facile de se convaincre que *l'entier* $n_1 d_2$, *forcément différent de l'entier* $n_2 d_1$, *lui est ou constamment supérieur, ou constamment inférieur, indépendamment des choix opérés dans les groupes* Γ_1, Γ_2 : suivant qu'on se trouvera placé dans l'un ou l'autre cas, on dira que la valeur commune des expressions du premier groupe est *supérieure* ou *inférieure* à la valeur commune des expressions du second. On établit d'ailleurs fort aisément que *si une première valeur est supérieure à une deuxième, et celle-ci supérieure à une troisième, la première est supérieure à la troisième.*

Pour définir l'addition des valeurs fractionnaires, on commence par résoudre le problème suivant : *Construire g expressions fractionnaires, de même dénominateur, dont les valeurs soient données.* Cela fait, *si l'on désigne par*

$$[p_1, q], \quad [p_2, q], \quad \ldots, \quad [p_g, q]$$

les g expressions fractionnaires dont l'ensemble constitue une solution quelconque du problème dont il s'agit, l'expression fractionnaire

$$[p_1 + p_2 + \ldots + p_g, q],$$

déduite des précédentes par l'addition des numerateurs, varie, il est vrai, avec la solution considérée, mais garde une valeur constante, qui est, par définition même, la *somme* des valeurs proposées.

Si, des valeurs fractionnaires quelconques étant données, on en considère des expressions respectives quelconques

$$[a_1, b_1], \quad [a_2, b_2], \quad \ldots, \quad [a_k, b_k],$$

l'expression fractionnaire

$$[a_1 a_2 \ldots a_k, b_1 b_2 \ldots b_k],$$

déduite des précédentes par la multiplication des termes semblables, varie encore avec les expressions choisies pour les valeurs proposées, mais garde une valeur constante, qui est, par définition même, le *produit* des valeurs proposées.

Quant à la *soustraction* et à la *division* des *fractions* (ce mot doit être considéré comme synonyme de *valeurs fractionnaires*), nous les définirons, suivant l'habitude, comme les opérations inverses de l'*addition* et de la *multiplication.* Retrancher d'une fraction donnée une autre fraction donnée, c'est trouver une troisième fraction qui, ajoutée à la seconde, régénère la première; diviser une fraction donnée par une autre fraction donnée, c'est trouver une troisième fraction qui, multipliée par la seconde, régénère la première. Dans le *monde des fractions,* comme dans le *monde des entiers,* la soustraction est, tantôt possible, tantôt impossible; la *division* au contraire, *rarement possible dans le monde des entiers, l'est toujours dans le monde des fractions,* abstraction faite du cas singulier où le diviseur est ∇.

4. Voici comment il convient de définir les quantités positives et négatives.

A toute valeur fractionnaire distincte de ∇ on fait correspondre *deux* valeurs, que l'on qualifie l'une de *positive,* l'autre de *négative;* à la valeur ∇ on fait correspondre *une seule* valeur, que l'on qualifie de *neutre :* les diverses *valeurs qualifiées* ainsi obtenues sont, par convention, toutes distinctes entre elles. Deux valeurs qualifiées sont dites *égales* ou *inégales,* suivant qu'elles sont ou non identiques l'une à l'autre.

Deux valeurs qualifiées, l'une positive, l'autre négative, correspondant à une même *valeur absolue,* sont dites *opposées;* la valeur neutre est considérée comme étant son *opposée* à elle-même.

Pour ajouter entre elles des quantités qualifiées données, on commence par faire la somme des valeurs absolues de celles qui sont positives, puis la somme des valeurs absolues de celles qui sont négatives, en négligeant les quantités neutres; soient P et N les deux sommes ainsi obtenues : si P est plus grand que N, la *somme* des quantités qualifiées données est positive et a pour valeur absolue $P - N$; si P est plus petit que N, elle est négative et a pour valeur absolue $N - P$; si $P = N$, elle est neutre.

Le *produit* de plusieurs quantités qualifiées a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues des facteurs; si quelqu'un de ceux-ci est neutre, le produit l'est également; dans le cas contraire, il est positif ou négatif suivant que le nombre des facteurs négatifs est pair ou impair.

Dans le monde des valeurs qualifiées, la soustraction et la division se définissent encore comme les opérations inverses de l'addition et de la multiplication; *la division,* devenue possible, dans le monde des valeurs fractionnaires, toutes les fois que le diviseur n'est pas ∇, *demeure possible, dans le monde des valeurs qualifiées,* toutes les fois que le diviseur n'est pas neutre; en outre, *l'impossibilité éventuelle de la soustraction,* qui subsiste dans le premier de ces deux mondes, *disparaît entièrement* dans le second.

En désignant par a, b deux quantités qualifiées quelconques, on voit sans peine que *les différences $a - b$, $b - a$ sont des quantités opposées, de valeur neutre ou non neutre suivant que les valeurs qualifiées a, b sont ou non identiques :* dans le cas où a, b ne sont pas identiques, la valeur a est dite *supérieure* ou *inférieure* à b, suivant que la différence $a - b$ est positive ou négative. On démontre aisément que, *si une première valeur qualifiée est supérieure à une deuxième, et celle-ci supérieure à une troisième, la première est supérieure à la troisième.*

5. Nous nommerons *expression infinitésimale* une valeur qualifiée variable dépendant de certains *indices*, c'est-à-dire de certains entiers indéterminés dont chacun peut varier arbitrairement à partir de telle ou telle valeur fixe qu'on lui assigne pour valeur minima [1].

Une expression infinitésimale $a_{m,n,\ldots}$ dépendant des indices $m, n, \ldots$ sera dite *infiniment petite*, si à toute valeur positive ε on peut faire correspondre des entiers déterminés $\mu, \nu, \ldots$ tels, que les relations simultanées

$$m \geqq \mu, \qquad n \geqq \nu, \qquad \ldots$$

entraînent, comme conséquence nécessaire, la double inégalité

$$\left.\begin{array}{r} a_{m,n,\ldots} \\ \text{opp. } a_{m,n,\ldots} \end{array}\right\} < \varepsilon.$$

Nous conviendrons de dire que deux expressions infinitésimales

$$a_{m,\ldots,p,\ldots}, \quad b_{n,\ldots,p,\ldots},$$

pouvant avoir un certain nombre d'indices communs $p, \ldots$, *jouissent l'une par rapport à l'autre de la propriété* (0), si l'expression infinitésimale

$$a_{m,\ldots,p',\ldots} - b_{n,\ldots,p'',\ldots},$$

dépendant des indices $m, \ldots, n, \ldots, p', \ldots, p'', \ldots$, est infiniment petite.

Une expression infinitésimale jouissant par rapport à elle-même de

---

(1) Exemples : 1° Si, désignant par m, n des entiers indéterminés, on considère les deux quantités positives de valeurs absolues $[1, m]$, $[1, n]$, la somme de ces deux quantités, leur produit, l'excès de la première sur la seconde, le quotient de la première par la seconde, etc., sont autant d'expressions infinitésimales dont chacune dépend des indices m, n arbitrairement variables à partir de 1 ($m \geqq 1$, $n \geqq 1$). 2° Si, désignant par p, q des entiers indéterminés, on considère les deux quantités positives de valeurs absolues $[1, p-2]$, $[1, q-5]$, la somme de ces deux quantités, leur produit, l'excès de la première sur la seconde, le quotient de la première par la seconde, etc., sont autant d'expressions infinitésimales dépendant des indices p, q, qui peuvent varier arbitrairement, l'un à partir de 3 ($p \geqq 3$), l'autre à partir de 6 ($q \geqq 6$). 3° Le $k^{\text{ième}}$ terme d'une progression arithmétique ou géométrique, dont le premier terme et la raison sont des quantités qualifiées données, la somme des k premiers termes de cette progression, leur produit, la somme de leurs carrés, etc., sont autant d'expressions infinitésimales, dont chacune dépend de l'indice k, arbitrairement variable à partir de 1 ($k \geqq 1$).

la propriété (0) sera dite *convergente*. Telles sont, en particulier : 1° une expression infinitésimale infiniment petite; 2° une expression infinitésimale *immobile*, c'est-à-dire qui garde toujours la même valeur qualifiée, indépendamment des valeurs entières que l'on attribue aux indices.

Une expression infinitésimale non convergente sera dite *divergente*.

Il est aisé de prouver que, si deux expressions infinitésimales jouissent l'une par rapport à l'autre de la propriété (0), chacune d'elles en jouit aussi par rapport à elle-même. En conséquence, une expression divergente ne peut jouir de la propriété (0), ni vis-à-vis d'elle-même, ni vis-à-vis d'aucune autre expression.

Cela posé, on établit sans difficulté la proposition suivante :

Les diverses expressions convergentes se partagent en une infinité de groupes, contenant chacun une infinité d'expressions, et tels : 1° *que deux expressions appartenant à un même groupe, ou, comme cas particulier, identiques entre elles, jouissent l'une par rapport à l'autre de la propriété* (0); 2° *que deux expressions appartenant à deux groupes différents ne jouissent pas l'une par rapport à l'autre de la propriété* (0).

On attribue alors, par convention, une valeur unique, dite *infinitésimale*, à toutes les expressions contenues dans un même groupe, et les valeurs infinitésimales qui correspondent à deux groupes distincts sont, également par convention, considérées comme distinctes. Deux valeurs infinitésimales sont dites *égales* ou *inégales*, suivant qu'elles sont ou non identiques l'une à l'autre.

Parmi les groupes d'expressions infinitésimales dont il vient d'être question, il en est un, remarquable entre tous, qui contient, à l'exclusion de toute autre, les diverses expressions infinitésimales infiniment petites; ces dernières y sont deux à deux opposées. Dans tout autre groupe, une expression quelconque conserve, à partir de valeurs suffisamment grandes de ses indices, une qualification constante (positive ou négative) indépendante du choix que l'on peut faire parmi les diverses expressions du groupe. Enfin, exclusion faite du groupe qui correspond aux expressions infiniment petites, les autres se partagent en couples dans chacun desquels les expressions du premier groupe sont respectivement opposées à celles du second. Cela posé, la valeur infinitésimale qui correspond au groupe des expressions infiniment petites est dite *téléo-neutre;* toute autre valeur infinitésimale est dite *téléo-positive* ou *téléo-négative*, suivant que l'une quelconque de ses expressions finit par rester constamment positive ou constamment négative. La valeur téléo-neutre est dite *opposée* à elle-même, et les autres se partagent en couples de valeurs dites *opposées*.

Une valeur infinitésimale est dite *commensurable* ou *incommensurable*, suivant qu'elle admet ou non une expression immobile.

Si l'on désigne par

$$A,\quad B,\quad \ldots,\quad L \tag{1}$$

des valeurs infinitésimales données, et par

$$a,\quad b,\quad \ldots,\quad l \tag{2}$$

des expressions quelconques (nécessairement convergentes) de ces valeurs, toute combinaison déterminée Ω d'additions, soustractions et multiplications à exécuter sur $a, b, \ldots, l$ fournit une nouvelle expression ayant pour indices tous ceux des indices de $a, b, \ldots, l$ qui sont distincts entre eux. Cela posé, *l'expression ainsi engendrée est convergente, et sa valeur infinitésimale est indépendante des diverses manières dont peuvent être choisies les expressions* (2) *des valeurs données* (1); cette valeur infinitésimale constante est, par définition, le *résultat de l'opération* Ω *exécutée sur les valeurs données*.

Si l'on désigne par A, B deux valeurs infinitésimales quelconques, la seconde non téléo-neutre, et par a, b deux expressions quelconques de ces valeurs, *le quotient de a par b est une expression convergente dont la valeur infinitésimale ne dépend pas du choix que l'on peut faire parmi les expressions diverses des valeurs données* A, B ; cette valeur infinitésimale constante est, par définition, le *quotient de* A *par* B.

En désignant par A, B deux quantités [1] infinitésimales quelconques, on voit sans peine que *les différences* $A-B$, $B-A$ *sont des quantités opposées, dont la valeur est ou non téléo-neutre, suivant que les quantités infinitésimales* A, B *sont ou non identiques :* dans le cas où A, B ne sont pas identiques, la valeur A est dite *supérieure* ou *inférieure* à la

---

[1] Les mots *nombre, valeur, quantité* doivent être considérés comme synonymes.

valeur B, suivant que la différence A — B est téléo-positive ou téléo-négative. On démontre aisément que, *si une première valeur infinitésimale est supérieure à une deuxième, et celle-ci supérieure à une troisième, la première est supérieure à la troisième.*

L'extraction d'une racine, opération presque toujours impossible dans le monde des valeurs fractionnaires ou positives, devient au contraire toujours possible dans le monde des valeurs téléo-positives : on peut effectivement démontrer qu'*étant donnée une valeur infinitésimale non téléo-négative, il existe une valeur de même nature, et une seule, régénérant la proposée par son élévation à la puissance* r; on la nomme *racine $r^{\text{ième}}$ arithmétique de la proposée* (¹).

6. Ces préliminaires posés, passons à l'objet direct de la présente Note.

Nous nommerons *variante* une expression de tous points semblable à une expression infinitésimale, si ce n'est qu'à chaque système de valeurs particulières des indices correspond, comme valeur actuelle de l'expression, une valeur infinitésimale au lieu d'une valeur qualifiée.

Considérons une variante $v_{m,n,\ldots}$ dépendant des indices m, n, ..., et désignons par $\varepsilon_{m,n,\ldots}$ une expression infinitésimale aux mêmes indices, arbitrairement choisie sous les seules conditions d'être infiniment petite et d'avoir des valeurs actuelles toutes positives. A un système quelconque μ, ν, ... de valeurs particulières de m, n, ... correspond, comme valeur actuelle de $v_{m,n,\ldots}$, la quantité infinitésimale $v_{\mu,\nu,\ldots}$; à celle-ci faisons correspondre maintenant, suivant quelque loi déterminée Ψ, une valeur qualifiée $a_{\mu,\nu,\ldots}$ telle, qu'en assimilant pour un instant $a_{\mu,\nu,\ldots}$ et $\varepsilon_{\mu,\nu,\ldots}$ à des valeurs infinitésimales commensurables, les différences opposées $v_{\mu,\nu,\ldots} - a_{\mu,\nu,\ldots}$, $a_{\mu,\nu,\ldots} - v_{\mu,\nu,\ldots}$ soient toutes deux inférieures à $\varepsilon_{\mu,\nu,\ldots}$: cette valeur qualifiée, qui varie avec les valeurs particulières attribuées à m, n, ..., engendre une expression infinitésimale $a_{m,n,\ldots}$, dépendant des mêmes indices que la variante proposée

(¹) Il conviendrait peut-être de nommer *Analyse infinitésimale* l'ensemble des théories ressortissant au monde des valeurs infinitésimales et de leurs accouplements en imaginaires; l'Analyse infinitésimale comprendrait alors essentiellement, outre le Calcul différentiel et intégral, un certain nombre de théories élémentaires telles que le calcul des radicaux arithmétiques et la résolution de l'équation du second degré.

$v_{m,n,\ldots}$. Or, le choix variable des éléments arbitraires que comporte la génération précédente, nous voulons dire de la variante $\varepsilon_{m,n,\ldots}$ et de la loi Ψ, fournit diverses expressions infinitésimales analogues à $a_{m,n,\ldots}$, lesquelles sont forcément, comme on peut le démontrer, *ou toutes de même valeur infinitésimale, ou toutes divergentes*. Cela étant, nous dirons que la variante proposée $v_{m,n,\ldots}$ est *convergente* dans le premier cas, *divergente* dans le second; dans le cas de la convergence, nous dirons en outre qu'elle *a pour limite* (ou qu'elle *tend vers*) la valeur infinitésimale commune aux diverses expressions infinitésimales $a_{m,n,\ldots}$, ...

Voici maintenant les principales propositions relatives aux variantes convergentes et à leurs limites.

Pour qu'une variante tende vers la valeur téléo-neutre, il faut et il suffit qu'à partir de valeurs suffisamment grandes de ses indices, elle devienne, ainsi que son opposée, moindre qu'un nombre téléo-positif arbitrairement choisi.

Pour qu'une variante $v_{m,n,\ldots}$, aux indices m, n, ..., tende vers quelque limite, il faut et il suffit que la variante

$$v_{m',n',\ldots} - v_{m'',n'',\ldots},$$

aux indices m', n', ..., m'', n'', ..., tende vers la valeur téléo-neutre.

Pour que deux variantes

$$v_{m,\ldots,p,\ldots}, \quad w_{n,\ldots,p,\ldots}$$

tendent vers une même limite, il faut et il suffit que la variante

$$v_{m,\ldots,p',\ldots} - w_{n,\ldots,p'',\ldots}$$

tende vers la valeur téléo-neutre.

Pour qu'une variante $v_{m,n,\ldots}$ tende vers V, *il faut et il suffit que $v_{m,n,\ldots} - \mathrm{V}$ tende vers la valeur téléo-neutre.*

Si sur des variantes convergentes on exécute une combinaison déterminée Ω d'additions, soustractions et multiplications, la variante ainsi engendrée tend vers une limite qu'on obtient en exécutant sur celles des proposées la même combinaison Ω.

Si les variantes u, v tendent vers les limites U, V, *la seconde non téléo-neutre, le quotient $\frac{u}{v}$ a pour limite $\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}}$.*

Lorsqu'une variante tend vers une limite téléo-positive ou téléo-néga-

tive, elle demeure, à partir de valeurs suffisamment grandes de ses indices, téléo-positive dans le premier cas, téléo-négative dans le second.

Si la variante v, aux valeurs actuelles non téléo-négatives, a pour limite V, *la racine $r^{\text{ième}}$ arithmétique de v a pour limite celle de* V.

7. Nous plaçant désormais dans le monde des valeurs infinitésimales, nous nommerons *point à h coordonnées* tout système de valeurs particulières respectivement attribuées aux h lettres x, y, ..., et *espace à h dimensions* l'ensemble de tous les points à h coordonnées.

La *distance* des deux points

$$(x_1, y_1, \ldots), \quad (x_2, y_2, \ldots)$$

sera, par définition, la racine carrée arithmétique de la quantité

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \ldots .$$

Pour que deux points soient identiques, il faut et il suffit que leur distance soit téléo-neutre.

Dans l'espace à h dimensions, on a souvent à considérer, à l'exclusion de tous les autres points, ceux dont les coordonnées satisfont à certaines conditions analytiques, d'une nature absolument quelconque d'ailleurs : leur ensemble constitue ce qu'on appelle un *fragment* de l'espace à h dimensions.

Un point sera dit *contigu* à un fragment donné, si sa distance à un point variable du fragment, sans jamais devenir téléo-neutre, peut tomber néanmoins au-dessous de toute valeur téléo-positive.

Un fragment d'espace sera dit *complet*, s'il n'existe aucun point qui lui soit contigu.

Lorsque la distance d'un point fixe de l'espace à tout point d'un fragment donné reste constamment inférieure à quelque nombre téléo-positif, un point fixe quelconque jouit de la même propriété, et le fragment est dit *limité*.

Nous nommerons *variante complexe* un point ayant pour coordonnées h variantes simples; les divers indices dont celles-ci dépendent dans leur ensemble varient chacun à partir de telle ou telle valeur fixe qu'on lui assigne pour valeur minima.

Une variante complexe sera dite *convergente*, si ses coordonnées le sont toutes à la fois, et le point obtenu en remplaçant ces dernières par leurs limites respectives sera la *limite* de la variante complexe.

8. Si à tout point $(x, y, \ldots)$ d'un fragment de l'espace à h dimensions on fait correspondre, suivant quelque loi déterminée, une valeur (infinitésimale) $f(x, y, \ldots)$, cette loi définit une *fonction* des *h variables $x, y, \ldots$* dans le fragment considéré.

Une fonction $f(x, y, \ldots)$ de h variables, définie dans un fragment E, y sera dite *continue*, si, la variante complexe $(u, v, \ldots)$ étant arbitrairement choisie sous les seules conditions d'être constamment située dans E et de tendre vers quelque point $(U, V, \ldots)$ de ce fragment, la variante simple $f(u, v, \ldots)$ a pour limite $f(U, V, \ldots)$.

On appelle *composition* des fonctions l'opération qui consiste à substituer aux variables $s, t, \ldots$ d'une fonction donnée $\varphi(s, t, \ldots)$ autant de fonctions données

$$S(x, y, \ldots), \quad T(x, y, \ldots), \quad \ldots \tag{3}$$

d'autres variables $x, y, \ldots$, ce qui engendre évidemment une nouvelle fonction de ces dernières

$$F(x, y, \ldots) = \varphi\{S(x, y, \ldots), \ T(x, y, \ldots), \ \ldots\};$$

relativement à cette opération, les fonctions (3) sont dites *simples*, $\varphi(s, t, \ldots)$ se nomme la fonction *composante*, et $F(x, y, \ldots)$ la fonction *composée*. Cela posé, *si les fonctions simples* (3) *sont toutes continues dans un fragment d'espace* $E_{x,y,\ldots}$; *si la composante* $\varphi(s, t, \ldots)$ *jouit de la même propriété dans un fragment d'espace* $E_{s,t,\ldots}$; *si enfin les valeurs des fonctions simples en chaque point du premier sont les coordonnées de quelque point du second : la fonction composée* $F(x, y, \ldots)$ *est certainement continue dans le premier fragment.*

En rapprochant de ce qui précède les propositions énoncées plus haut relativement aux limites, on en déduit immédiatement les conséquences particulières suivantes : 1° *Le quotient* $\frac{x}{y}$ *est une fonction de x, y continue dans tout fragment de l'espace à deux dimensions où la variable y n'est jamais téléo-neutre;* 2° *Une fonction entière des h variables $x, y, \ldots$ est continue dans un fragment quelconque de l'espace à h dimensions;* 3° *Si les fonctions* $P(x, y, \ldots)$, $Q(x, y, \ldots)$, $\ldots$ *sont continues dans un même fragment d'espace, toute combinaison entière de ces fonctions y est également continue;* 4° *Si les deux fonctions* $P(x, y, \ldots)$, $Q(x, y, \ldots)$ *sont continues dans un même fragment d'espace, sans que la seconde y* *devienne jamais téléo-neutre, le quotient* $\frac{P(x, y, \ldots)}{Q(x, y, \ldots)}$ *y est également continu;* 5° *Si la fonction* $P(x, y, \ldots)$ *est continue dans un fragment d'espace sans jamais y être téléo-négative, la racine* $r^{\text{ième}}$ *arithmétique de* $P(x, y, \ldots)$ *y est également continue.*

9. Nous formulerons enfin les théorèmes généraux suivants :

I. *Si l'on désigne par* $f(x, y, \ldots)$ *une fonction continue dans un espace complet, par* $(x_0, y_0, \ldots)$ *un point fixe et par* $(x, y, \ldots)$ *un point variable situés l'un et l'autre dans cet espace, on peut, un nombre téléo-positif* α *étant donné, assigner un nombre téléo-positif* β *tel, que la double relation*

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0, y_0, \ldots) - f(x, y, \ldots) \\ f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots) \end{array}\right\} < \alpha$$

soit une conséquence des relations simultanées

$$\left.\begin{array}{l} x_0 - x \\ x - x_0 \end{array}\right\} < \beta, \qquad \left.\begin{array}{l} y_0 - y \\ y - y_0 \end{array}\right\} < \beta, \qquad \ldots.$$

II. *Si l'on désigne par* $f(x, y, \ldots)$ *une fonction continue dans un espace à la fois complet et limité, et par* $(x', y', \ldots)$, $(x'', y'', \ldots)$ *deux points variables situés l'un et l'autre dans cet espace, on peut, un nombre téléo-positif* α *étant donné, assigner un nombre téléo-positif* β *tel, que la double relation*

$$\left.\begin{array}{l} f(x', y', \ldots) - f(x'', y'', \ldots) \\ f(x'', y'', \ldots) - f(x', y', \ldots) \end{array}\right\} < \alpha$$

soit une conséquence des relations simultanées

$$\left.\begin{array}{l} x' - x'' \\ x'' - x' \end{array}\right\} < \beta, \qquad \left.\begin{array}{l} y' - y'' \\ y'' - y' \end{array}\right\} < \beta, \qquad \ldots.$$

III. *Lorsqu'une fonction est continue dans un espace à la fois complet et limité, elle y demeure, ainsi que son opposée, constamment inférieure à quelque nombre téléo-positif.*

IV. *Soient* C *une constante infinitésimale, et* $f(x, y, \ldots)$ *une fonction continue dans un espace à la fois complet et limité : si, quel que soit le nombre téléo-positif* α, *il existe dans l'espace en question quelque point* *où les différences opposées*

$$C - f(x, y, \ldots), \quad f(x, y, \ldots) - C$$

tombent l'une et l'autre au-dessous de α, *le même espace contient certainement quelque point où* $f(x, y, \ldots)$ *prend la valeur* C.

V. *Lorsqu'une fonction est continue dans un espace à la fois complet et limité, on peut assigner deux valeurs extrêmes, l'une supérieure, l'autre inférieure, dont chacune est atteinte par la fonction en quelque point de cet espace* (les deux valeurs extrêmes se confondent si la fonction se réduit à une constante).

Je ferai observer, au sujet du théorème I, que la propriété qui sert de définition habituelle à la continuité, et à l'aide de laquelle je l'ai définie moi-même dans mon Mémoire de 1890 [1], devient ici l'objet d'une proposition démontrable, exigeant toutefois que l'espace où l'on considère la fonction soit un espace complet; quant aux théorèmes II, III, IV, V, qui figuraient déjà dans le Mémoire dont il s'agit, leurs énoncés subsistent malgré le changement de définition.

---

[1] *Sur les fonctions continues, etc.* (*Annales de l'École Normale supérieure*; 1890).