ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LELIEUVRE

Sur les surfaces à génératrices rationnelles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 12 (1895), p. 57-143
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1895_3_12__57_0>

SUR LES

SURFACES A GÉNÉRATRICES RATIONNELLES,

PAR M. LELIEUVRE,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE ROUEN.

INTRODUCTION.

1. Soit une famille de lignes unicursales G, dépendant d'un paramètre u; les coordonnées d'un point de cette ligne sont des fonctions rationnelles d'un paramètre t, choisi de telle sorte qu'à un point de l'une de ces lignes correspond en général une valeur et une seule de ce paramètre; dès que les coordonnées sont ainsi exprimées rationnellement en fonction de t, nous convenons de dire que les lignes G ou $u =$ const. sont *divisées homographiquement* par les lignes $t =$ const. tracées sur la surface S engendrée par elles quand u varie.

Nous nous sommes proposé la détermination de certaines familles de lignes tracées sur la surface S et définies par une équation différentielle du premier ordre entre u et t, de la forme

$$\text{(I)} \qquad A_0 t'^m + A_1 t'^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$

t' désignant la dérivée $\frac{dt}{du}$, et $A_0, A_1, \ldots, A_m$ étant des polynomes entiers en t, à coefficients fonctions de u. D'ailleurs, la transformation homographique générale effectuée sur t

$$t = \frac{\alpha t_1 + \beta}{\alpha_1 t_1 + \beta_1}$$

ramène le degré des polynomes A successifs à augmenter de deux unités quand l'indice de A augmente d'une unité. Nous étudierons les *conjuguées* des génératrices G, leurs *trajectoires orthogonales*, ou encore les lignes *minima*, *asymptotiques*, ou de *courbure* de la surface S : l'équation (I) est alors du premier ou du second degré par rapport à t'.

Le problème proposé se ramène à l'intégration de (I). On sait que cette intégration est facilitée : 1° par la présence de facteurs communs aux coefficients A; 2° par l'existence de racines multiples, par rapport à t, du discriminant de (I), considérée comme équation entière par rapport à t'; 3° par celle de solutions singulières de cette équation.

2. Notamment, il y a lieu de considérer le cas où l'intégrale générale de l'équation (I) n'a que des *points critiques fixes*. On sait qu'il est d'abord nécessaire pour cela que A_0 divise tous les autres coefficients A, de sorte que l'on peut alors ramener l'équation à la forme que nous appellerons *normale*, dans laquelle A_0 est indépendant de t, A_1 au plus du second degré, et généralement, quel que soit p, A_p du degré $2p$ au plus, par rapport à t. Nous devrons donc d'abord rechercher les conditions à remplir par les génératrices G pour que toutes les racines de A_0 appartiennent aux coefficients suivants. Si l'équation (I) est du premier degré en t', c'est alors *une équation de Riccati*, facile à intégrer dès qu'on en connaît une solution particulière. Si l'équation (I) est du second degré en t', d'autres conditions sont nécessaires; les points critiques sont fixes : 1° quand le discriminant est un carré parfait; l'équation se décompose en deux équations de Riccati; 2° quand il a une racine double, et les deux autres solutions singulières; 3° quand il a quatre racines solutions singulières.

Dans ces deux derniers cas, comme le discriminant a toujours au moins trois racines distinctes, on peut, par une transformation homographique effectuée sur la variable t et déterminée algébriquement, les ramener à être constantes, égales par exemple à 0, ∞ et 1. Alors l'équation résolue devient, T étant la nouvelle variable,

$$T' = \alpha T^2 + \beta T + \gamma \pm \delta\sqrt{T(T-1)(T-a)} \qquad (a \text{ fonction de } u).$$

Dans le cas où les quatre racines du discriminant sont des solutions singulières distinctes, les trois premières 0, ∞ et 1 doivent donc annuler $\alpha T^2 + \beta T + \gamma$, qui est, par conséquent, identiquement nul; d'où il suit que la quatrième solution singulière $T = a$ est constante, et par conséquent les variables se séparent.

Dans l'autre cas, a doit être égal à l'une des trois autres racines : on peut supposer $a = 1$; $\alpha T^2 + \beta T + \gamma$ admet les deux autres qui sont solutions singulières; donc il se réduit à βT et l'équation résolue devient

$$T' = \beta T \pm \delta (T - 1)\sqrt{T}.$$

La transformation $T = \theta^2$ la ramène à deux équations de Riccati qui ne diffèrent que par le signe de θ.

3. On a signalé depuis longtemps des exemples dans lesquels la détermination de familles de lignes énumérées ci-dessus se ramène à intégrer l'équation de Riccati. Citons parmi les plus connus celui de la seconde famille d'asymptotiques d'une surface réglée, des trajectoires orthogonales d'un système de cercles, des conjuguées d'une série de coniques ayant deux enveloppes, etc.

Dans la première Partie de ce travail, nous indiquons d'abord comment les plus simples et les plus connus de ces résultats pouvaient être prévus presque sans calculs et nous appliquons ces considérations préliminaires à l'étude des lignes de courbure des surfaces réglées et cerclées.

Dans la seconde Partie, en supposant que l'équation (I) définisse une des familles de lignes énumérées ci-dessus, nous exposons une méthode générale de recherche des conditions d'existence, sur la surface S, d'un lieu $t = \varphi(u)$, tel que $\varphi(u)$ soit racine commune des coefficients de l'équation (I), ou racine multiple de son discriminant, ou solution singulière. Nous commençons par montrer l'esprit de la méthode sur l'exemple simple des trajectoires orthogonales d'un système de lignes planes, puis nous appliquons la méthode générale à l'équation des conjuguées des génératrices G et à celle des asymptotiques de la surface S qu'elles engendrent.

La troisième Partie est consacrée à l'application des résultats précédents à la recherche des familles de lignes unicursales planes et de cubiques gauches divisées homographiquement par leur conjuguées, et à l'étude des lignes asymptotiques de la surface S correspondante. Dans le cas où les lignes G sont planes, la transformation de Laplace nous permet de rapporter immédiatement la surface S aux lignes G et à leurs conjuguées, et son application répétée donne des solutions du même problème, dans le cas où la génératrice G est gauche.

Notations employées. — Nous déterminerons un point de la génératrice G soit par les coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z, soit par des coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 définies par la formule générale

$$\rho x_i = a_i t^m + b_i t^{m-1} + \ldots + l_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Un plan tangent à S sera déterminé soit par ses coordonnées ordinaires l, m, n, soit par des coordonnées homogènes $v_i (i = 1, 2, 3, 4)$ (1).

Les dérivations par rapport à u seront généralement indiquées par la notation à accents.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ a_n & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix}$$

sera représenté par $|a, b, c, \ldots, l|$.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

GÉNÉRALITÉS.

§ 1. — Interprétation géométrique de la forme normale de l'équation (I).

1. Supposons que la génératrice G n'ait pas de *points de rebroussement* (sauf peut-être pour certaines valeurs particulières de u); par consé-

(1) Nous supposerons ρ fonction de u seul, et les v exprimés (à un facteur près, fonction de u seul) par les déterminants $\left| x \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial u} \right|$, formés avec les coordonnées ponctuelles homogènes x prises trois à trois.

quent, les quatre dérivées partielles $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ ne s'annulent pas à la fois pour une même valeur de t, quel que soit u. Supposons aussi que la génératrice G n'ait pas d'*enveloppe*, c'est-à-dire que les quatre coordonnées v_i du plan tangent à S n'aient pas non plus de racine commune, quel que soit u. Considérons la famille E de lignes tracées sur S et définie par l'équation

$$A_0 dt^m + A_1 dt^{m-1} du + \ldots + A_m du^m = 0,$$

dans laquelle je suppose les polynomes A premiers entre eux. Le lieu géométrique des points de S en chacun desquels $du = 0$ le long d'une des lignes E qui y passent est donc défini par $A_0 = 0$. Par conséquent, il faut et il suffit, pour que l'équation soit normale, que ce lieu se compose de génératrices G, $u =$ const.

Mais en un pareil point (supposé ramené à distance finie) dont les coordonnées cartésiennes sont x, y, z, les projections du déplacement sur une ligne qui y passe sont

$$\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial t} dt, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial t} dt, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial t} dt,$$

qui se réduisent, pour $du = 0$, à

$$\frac{\partial x}{\partial t} dt, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} dt, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} dt,$$

expressions non illusoires puisque, par hypothèse, G n'a pas de rebroussement. Donc le déplacement est tangent à G.

Réciproquement, il ne peut en être ainsi que si $du = 0$, car, par hypothèse, les trois rapports $\frac{\partial x}{\partial u} : \frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial u} : \frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial u} : \frac{\partial z}{\partial t}$ ne sont pas égaux au point considéré, le plan tangent à S y étant bien déterminé. On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Si la génératrice* G *n'a ni rebroussement, ni enveloppe, il faut et il suffit, pour que l'équation de la famille* E *soit normale, que le lieu des points de contact d'une génératrice* G *avec une ligne* E *soit formé de lignes* G, $u =$ const.

2. Le raisonnement fait pour établir ce théorème devient insuffisant si G a un rebroussement ou une ligne enveloppe. Et, en effet, il peut

arriver alors que, l'équation de la famille E étant normale, il y ait cependant un lieu de points de contact d'une ligne E avec une génératrice G qui ne soit pas formé de lignes $u =$ const. Par exemple, considérons la famille plane de paraboles définies par les coordonnées

$$x = a + 2Rt, \qquad y = R(1 + t^2),$$

R étant constant et a fonction de u. On a

$$dx = a'du + 2R\,dt, \qquad dy = 2Rt\,dt.$$

La droite $y = R$ est une enveloppe de ces coniques, $t = 0$. Supposons que la famille E soit définie par l'équation

$$dt = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)\,du.$$

On aura donc sur toute ligne E, le long de $t = 0$,

$$dx = (a' + 2R\gamma)\,du,$$
$$dy = 0.$$

Donc, si $a' + 2R\gamma$ est $\neq 0$, on peut affirmer que l'enveloppe $t = 0$ est un lieu de points de contact d'une génératrice et d'une ligne E, et cependant l'équation différentielle de la famille E est normale.

Nous allons maintenant appliquer le théorème précédent à quelques exemples simples.

§ 2. — Applications.

1° Les génératrices rectilignes G d'une *surface gauche* S n'ont ni rebroussement ni enveloppe. Considérons la famille E de leurs *trajectoires orthogonales;* si une génératrice G est tangente en un point à sa trajectoire orthogonale, elle est isotrope en ce point, et, par suite, en tous ses points; donc le lieu des points de contact d'une génératrice G et d'une ligne E est formé des génératrices isotropes de la surface. Par conséquent, l'équation différentielle de la famille E doit être une équation de Riccati. On voit de même que l'équation différentielle des *lignes minima de* S doit être normale. Soit encore la seconde série de *lignes asymptotiques* de S. Si l'une d'elles est tangente à une droite G en un point, cette droite G est une droite parabolique de la surface S, et le contact entre elle et l'asymptotique a lieu en tous ses points; donc l'équation différentielle de la seconde série d'asymptotiques est une équation de Riccati. Soit enfin la famille des lignes de courbure; si l'une d'elles est tangente à une génératrice G en un point, comme les tangentes de courbure en ce point sont conjuguées à la fois par rapport aux directions asymptotiques et minima, c'est que G est minima, ou bien est une droite parabolique de la surface, et le contact entre elle et une ligne de courbure subsiste en tous ses points. Donc l'équation différentielle des lignes de courbure de S doit être normale.

2° Soit une surface engendrée par une ligne *plane* mobile G *sans enveloppe ni rebroussement;* considérons les *conjuguées* E *de* G. Si, en un point M, G est tangente à sa conjuguée, comme par hypothèse il y a en ce point une tangente à G et un plan tangent à la surface S qu'elle engendre, parfaitement déterminés, deux cas peuvent se présenter : 1° le plan de G n'est pas le plan tangent à S au point M; alors il est sécant à S, et comme la tangente à G doit être asymptotique, le rayon de courbure de G est infini, M est un point d'inflexion de G; réciproquement, si en un point d'inflexion de G, le plan de cette ligne n'est pas tangent à S, G et sa conjuguée y seront tangentes, *à moins que les deux asymptotes de l'indicatrice de* S *ne soient confondues,* auquel cas la direction conjuguée de G est indéterminée; pour que cela ait lieu tout le long de la ligne décrite par l'inflexion, il faut et il suffit, comme on sait, *que la tangente d'inflexion engendre une développable* tout le long de ce lieu qui est une ligne parabolique de S; 2° le plan de G est le plan tangent; alors M est situé sur la caractéristique de ce plan; réciproquement, en tout point d'intersection de G avec cette caractéristique, le plan de G est le plan tangent, bien déterminé par hypothèse, à la surface S, et, par conséquent, la tangente à G est nécessairement asymptotique, de sorte que la conjuguée de G lui est tangente en ce point. Donc les points de contact de G avec une conjuguée ne peuvent être que ses points d'inflexion, ou ses points d'intersection avec la caractéristique de son plan. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Pour qu'une ligne plane unicursale G *soit divisée homographiquement par ses conjuguées, il est nécessaire qu'elle ait le nombre maximum d'en-*

veloppes et, de plus, que ses tangentes d'inflexion décrivent des développables.

Une discussion ultérieure permettra de reconnaître si ces conditions sont suffisantes. Mais, dès à présent, remarquons que les trois coefficients A, B, C de l'équation des asymptotiques de la surface engendrée S s'annulent évidemment tous les trois à la fois pour toute racine commune aux quatre coordonnées du plan tangent; ces coefficients, une fois l'équation rendue entière en t, sont, en effet, exprimés ainsi

$$\mathrm{A}=\sum \varphi_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2},\qquad \mathrm{B}=\sum \varphi_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial t},\qquad \mathrm{C}=\sum \varphi_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}\qquad (i=1,2,3,4).$$

Par conséquent, tout facteur $t-\varphi(u)$, tel que $t=\varphi(u)$ soit une enveloppe (réductible à un point) des génératrices G, s'il est simple dans A, disparaîtra certainement de l'équation différentielle, de façon que A ne le contiendra plus. Cette remarque et ce qui précède entraînent le théorème suivant :

Si une conique mobile a deux enveloppes fixes distinctes, elle est divisée homographiquement par ses conjuguées, et l'équation des lignes asymptotiques de la surface qu'elle engendre est normale (¹).

Si la conique mobile n'a aucune enveloppe, dans l'équation différentielle des asymptotiques, A_0 sera du second degré et s'annulera aux points de rencontre de G avec la caractéristique de son plan.

Si la conique a une seule enveloppe, on pourra supprimer dans les trois coefficients le facteur correspondant, et A_0 restera *généralement* ensuite du premier degré. Si cependant la conique est tracée dans le plan osculateur à l'enveloppe, le *carré* du facteur disparaît aux trois termes et l'équation devient normale. Ce point sera établi dans la seconde Partie.

§ 3. — Des facteurs communs aux coefficients de l'équation (I).

Une fois la famille E de lignes que l'on veut déterminer, définie géométriquement, on forme son équation différentielle (I) par un pro-

(¹) *Voir* BLUTEL, *Annales de l'École Normale,* mai-juin 1890.

cédé quelconque et on la ramène à être entière en t. L'exemple précédent nous montre la nécessité de rechercher alors dans quel cas les coefficients de cette équation ont un facteur commun. Voici, à ce sujet, quelques remarques simples :

1° Nous avons déjà observé que, si les coordonnées v du plan tangent ont un facteur commun, il existe dans l'équation des *asymptotiques* écrites sous la forme

$$dt^2 \sum v_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t_2} + 2\,dt\,du \sum v_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial t} + du^2 \sum v_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

A ce facteur correspond une *enveloppe* ou un lieu *de points de rebroussement* des génératrices G. Ce n'est d'ailleurs pas le seul cas où l'équation différentielle possède ainsi un diviseur entier en t, comme on le verra dans la seconde Partie de ce travail.

2° Si l'on écrit l'équation des *lignes de courbure* ainsi

$$dx(m\,dn - n\,dm) + dy(n\,dl - l\,dn) + dz(l\,dm - m\,dl) = 0,$$

on aperçoit immédiatement qu'un facteur $t - t_0$, commun à l, m, n coordonnées du plan tangent, figurera au *carré au moins* dans le premier membre. Ainsi une ligne enveloppe ou un lieu de rebroussement des lignes G permet d'abaisser de *deux unités au moins* le degré des coefficients de l'équation des lignes de courbure.

Quand la génératrice G *n'a ni rebroussement, ni enveloppe, on peut trouver facilement la condition nécessaire pour que l'équation des lignes de courbure soit divisible par* $t - t_0$; il y a, par hypothèse, un plan tangent bien déterminé à S en chaque point de $t = t_0$; il faut et il suffit qu'en chacun de ces points, les directions minima soient confondues avec les directions asymptotiques. Si les directions minima sont distinctes, l'indicatrice sera circulaire : il faut et il suffit que $t = t_0$ soit une *ligne d'ombilics*. Si les directions minima sont confondues, $t = t_0$ sera une ligne parabolique *asymptotique* et *minima;* il est nécessaire et suffisant pour cela qu'elle soit une ligne de courbure *double*, c'est-à-dire que $l^2 + m^2 + n^2$ contienne le facteur $(t - t_0)^2$. En effet, employons les notations habituelles, dans le cas où l'on rapporte la surface aux lignes $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ Le long de la ligne considérée, on doit avoir

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}$$

et

$$1+p^2+q^2=0,$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{-q^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{-p^2}{t}.$$

Or posons

$$1+p^2+q^2 = F(x, y);$$

nous aurons

$$\frac{\partial F}{\partial x} = pr+qs, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = ps+qt.$$

Donc les conditions indiquées équivalent à

$$F=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=0$$

à la fois. Il faut et il suffit pour cela que $t=t_0$ soit racine *double* de F, de sorte que, le long de $t=t_0$, le discriminant de l'équation des lignes minima a une racine double.

Ces considérations s'appliquent aussitôt, comme on le voit, aux surfaces cerclées.

3° Si une génératrice quelconque G a un point *cyclique* $t=t_0$, et qu'on écrive ainsi l'équation des lignes *minima* de S :

$$P = \Sigma(x_4\,dx_i - x_i\,dx_4)^2 = 0 \qquad (i=1, 2, 3)(x_4=0 \text{ plan de } \infty),$$

son premier membre admet le diviseur $(t-t_0)^2$. En effet, nous pouvons d'abord supposer que, par une transformation homographique préalable de t, on a ramené t_0 à être nul. On aura alors

$$x_i = \alpha_i + tX_i \qquad (i=1, 2, 3);$$
$$x_4 = tX_4,$$

avec la condition

$$\Sigma\alpha_i^2 = 0,$$

d'où

$$x_4\,dx_i - x_i\,dx_4 = -\alpha_i X_4\,dt + t(X_4\,d\alpha_i - \alpha_i\,dx_4) + t^2 M.$$

Par conséquent, le polynome P contient le facteur t^2.

Quand la génératrice G est conique, on voit immédiatement que, dans le développement de P, A_0 est du quatrième degré. Donc, si G a deux points cycliques, l'équation devient normale. D'où ce théorème connu :

Un cercle variable est divise homographiquement par ses trajectoires orthogonales, et l'équation des lignes minima de la surface qu'il engendre est normale.

§ 4. — Des solutions singulières de l'équation I.

Une pareille solution doit annuler le discriminant de l'équation (I) et vérifier cette équation. Prenons comme exemple le cas des lignes de *courbure* en *supposant que* G *n'ait ni rebroussement, ni enveloppe.* Il y a en chaque point de G un plan tangent à S bien déterminé ; si en ce point, $t = t_0$ annule le discriminant de l'équation différentielle, les deux directions principales de S sont confondues; elles sont donc minima, et une direction asymptotique doit être confondue avec elles; donc la surface possédera une *ligne asymptotique minima*. Réciproquement, supposons qu'il existe une pareille ligne; si elle est droite, c'est une droite isotrope, la normale à S en chacun de ses points est dans le plan isotrope correspondant; donc cette droite est une ligne de courbure satisfaisant à l'équation différentielle et annulant son discriminant; si l'asymptotique minima est courbe, son plan osculateur en chaque point, qui est le plan tangent à la surface, est isotrope. Donc, le long de cette ligne, on a (notations usuelles) $1 + p^2 + q^2 = 0$: par conséquent, cette ligne satisfait à l'équation des lignes de courbure; *soit* γ *une pareille ligne.* Ainsi, quand G satisfait aux conditions supposées, une solution singulière de l'équation des lignes de courbure est, soit une *droite isotrope*, soit *une ligne* γ *minima*.

Remarque. — Le discriminant, égalé à zéro, représente le lieu des points où une direction asymptotique est minima; donc, pour qu'il ait une racine double, il faut et il suffit que le *cône des directions asymptotiques* le long d'une génératrice G soit *tangent au cercle de l'infini.*

Appliquons maintenant les considérations qui précèdent aux surfaces réglées et cerclées.

II.

LIGNES DE COURBURE DES SURFACES RÉGLÉES.

---

§ 1. — Représentation de la surface. Équation des lignes de courbure.

1. Nous représentons ainsi les coordonnées d'un point de la surface

$$x = \xi + \alpha t, \qquad y = \eta + \beta t, \qquad z = \zeta + \gamma t \qquad (\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma \text{ fonctions de } u).$$

Les seules surfaces réglées réelles à génératrices imaginaires étant des quadriques, nous supposerons les génératrices réelles; nous pourrons alors prendre

$$\Sigma\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

et choisir pour variable u l'arc de la ligne sphérique (α, β, γ), de sorte qu'on aura aussi

$$\Sigma\alpha'^2 = \left(\frac{d\alpha}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{du}\right)^2 = 1.$$

Rapportons la direction de la tangente à la directrice D, $t = 0$, au trièdre trirectangle T formé par les directions α, β, γ, α', β', γ' et la direction perpendiculaire α_1, β_1, γ_1 déterminée par

$$\alpha_1 = \beta\gamma' - \gamma\beta', \qquad \beta_1 = \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \qquad \gamma_1 = \alpha\beta' - \beta\alpha'.$$

Les équations connues donnent, en appelant p, q, r les rotations du trièdre

$$\alpha' = q\alpha_1 - r\alpha', \qquad \alpha'' = r\alpha - p\alpha_1, \qquad \alpha'_1 = p\alpha' - q\alpha, \qquad \ldots,$$

de sorte que l'on a

$$q = 0, \quad r = -1, \quad p = -|\alpha\alpha'\alpha''| \quad (\text{déterminant de } \alpha, \beta, \gamma \text{ et de leurs dérivées}),$$

d'où, en désignant par H le déterminant $|\alpha\alpha'\alpha''|$,

$$\alpha'' = -\alpha + \mathrm{H}\alpha_1, \qquad \alpha'_1 = -\mathrm{H}\alpha'.$$

Nous poserons donc

$$\frac{d\xi}{du}=\xi'=\lambda\alpha+\mu\alpha'+\nu\alpha_1,\qquad \eta'=\lambda\beta+\mu\beta'+\nu\beta_1,\qquad \zeta'=\lambda\gamma+\mu\gamma'+\nu\gamma_1,$$

et le plan tangent sera dirigé par les quantités

$$l=-(\mu+t)\alpha_1+\nu\alpha',\qquad m=-(\mu+t)\beta_1+\nu\beta',\qquad p=-(\mu+t)\gamma_1+\nu\gamma'.$$

Quand $\lambda=0$, D est orthogonale aux génératrices; si $\mu=0$, D est la ligne de striction (plan central tangent le long de D); enfin, si $\nu=0$, la surface est développable.

Écartons ce dernier cas, mais supposons $\mu=0$. La surface S est complètement déterminée par les trois fonctions de u, λ, ν et H. Elle est à plan directeur quand $H=0$. Enfin on voit facilement que ν est, au signe près, le paramètre de distribution. *L'équation des lignes minima* est

$$dt^2+2\lambda\, dt\, du+(\lambda^2+\nu^2+t^2)\, du^2=0. \tag{1}$$

Elle est bien normale et admet la solution particulière $t=\infty$ qui est racine double de son discriminant. Son intégrale générale n'a ses points critiques fixes que si les deux autres racines $t=\pm\nu i$ du discriminant sont solutions singulières. D'où

$$\nu'=0,\qquad \lambda=0,$$

qui caractérisent les *surfaces à paramètre de distribution constant, et dans lesquelles la ligne de striction est orthogonale aux génératrices*. Les lignes *minima* s'obtiennent aussitôt par *quadratures*.

Les lignes de courbures particulières γ sont données sur toute surface réglée par

$$t^2+\nu^2=0\qquad \text{ou}\qquad t=\pm\nu i;$$

elles sont minima dans le cas ci-dessus.

2. L'équation des *asymptotiques* s'obtient immédiatement par la formule

$$\Sigma\, dl.dx=0,$$

qui, développée, donne

$$2\nu\, dt-(\mathrm{H}t^2+\nu' t+\mathrm{H}\nu^2-\lambda\nu)\, du=0=2\nu\, dt-\mathrm{P}\, du. \tag{2}$$

C'est bien une équation de Riccati, qui admet la solution $t=\infty$ dans le seul cas des surfaces à plan directeur.

L'équation des *lignes de courbure* se déduit de (1) et (2) par la règle connue; elle est normale et s'écrit sous la forme suivante

$$(3) \qquad \nu\, dt^2 - \mathrm{P}\, du\, dt - [\lambda \mathrm{P} + \nu(\lambda^2 + \nu^2 + t^2]\, du^2 = 0.$$

Son discriminant est

$$\Delta = \mathrm{P}^2 + 4\nu[\lambda \mathrm{P} + \nu(\lambda^2 + \nu^2 + t^2)] = \mathrm{P}^2 + 4\nu \mathrm{Q}.$$

Il a la racine double $t=\infty$ pour les surfaces à plan directeur.

§ 2. — Étude des lignes de courbure.

Recherchons les surfaces réglées pour lesquelles l'intégrale générale de (3) a ses points critiques fixes. Nous aurons à distinguer deux cas :

1° La surface n'est pas a plan directeur. — Les directions asymptotiques le long de chaque génératrice sont parallèles aux génératrices du cône directeur de l'hyperboloïde osculateur le long de cette droite. Les surfaces cherchées sont donc celles où cet hyperboloïde est *de révolution* (Δ a deux racines doubles), ou bien celles où cet hyperboloïde est *simplement tangent au cercle de* ∞, les deux autres racines de Δ étant solutions *singulières* : ces surfaces sont évidemment *imaginaires ;* ou enfin celles où les quatre racines de Δ sont solutions singulières, de sorte que la surface a *quatre directions rectilignes isotropes* (quadriques) ou *deux* pareilles *directrices,* et les *deux lignes* γ *minima.*

I. On trouve facilement les conditions d'après lesquelles Δ est carré parfait en l'écrivant ainsi

$$\Delta = (\mathrm{P} + 2\nu \mathrm{K})^2 - 4\nu \mathrm{KP} - 4\nu^2 \mathrm{K}^2 + 4\nu \mathrm{Q},$$

K étant une fonction de u à déterminer de façon que Δ se réduise au premier carré. On trouve ainsi la condition $\mathrm{K}=0$, de sorte que les surfaces cherchées sont celles où Δ se réduit à P^2, Q étant identique à zéro, ce qui donne

$$\nu' = 0, \qquad \lambda \mathrm{H} + \nu = 0.$$

Le paramètre de distribution doit donc être constant et la ligne de striction une ligne de courbure (1). L'équation des lignes de courbure se décompose en

$$dt = 0, \qquad \nu\, dt - \mathrm{H}(\lambda^2 + \nu^2 + t^2)\, du = 0.$$

La première série renferme la ligne de striction et les deux lignes γ; de sorte qu'on n'a pas d'intégrales de la deuxième série.

Le cône directeur de la surface est arbitraire, il détermine la surface, à l'aide des formules

$$\lambda = -\frac{\nu}{\mathrm{H}}, \qquad \xi' = \lambda(\alpha - \mathrm{H}\alpha_1) = -\lambda\alpha'' = \frac{\nu\alpha''}{\mathrm{H}}, \qquad \ldots,$$

d'où la ligne de striction par quadratures.

Le cône directeur est de révolution quand H est constant, alors λ l'est aussi; on reconnaît immédiatement que la surface S est *une quadrique de révolution*.

Il n'existe pas d'autres surfaces de cette catégorie dont les génératrices appartiennent à *un complexe linéaire*, et, par suite, il *n'existe pas de telles surfaces du troisième et du quatrième degré*. En effet, soit Oz l'axe du complexe. On devrait avoir

$$\beta\xi - \alpha\eta = a\gamma,$$

a étant une constante. Deux dérivations successives donnent alors

$$\beta'\xi - \alpha'\eta = (a - \nu)\gamma',$$
$$\beta''\xi - \alpha''\eta = (2\nu - a)\gamma + \left[\frac{\nu}{\mathrm{H}} + (a - \nu)\mathrm{H}\right]\gamma_1,$$

d'où par élimination de ξ, η, la condition cherchée qui détermine le cône directeur

$$\nu\left(\gamma + \frac{\gamma_1}{\mathrm{H}}\right)^2 + a - \nu = 0,$$

d'où

$$\gamma_1 = \mathrm{H}\left(-\gamma \pm \sqrt{\frac{\nu - a}{\nu}}\right),$$

par suite

$$\gamma'_1 = -\mathrm{H}\gamma' + \mathrm{H}'\left(-\gamma \pm \sqrt{\frac{\nu - a}{\nu}}\right).$$

(1) M. P. Serret a signalé ces surfaces (*Théorie des lignes à double courbure*), p. 158; 1860.

Mais $\gamma'_1 = -\mathrm{H}\gamma'$, donc ou H, ou γ, est constant; dans les deux cas, le cône directeur est de révolution.

2. Soient maintenant les surfaces pour lesquelles les deux lignes γ sont des asymptotiques minima; nous avons vu qu'on avait alors

$$\nu' = 0, \qquad \lambda = 0.$$

On voit aussitôt que les deux autres racines de Δ ne peuvent être à la fois solutions singulières.

3. Il ne reste plus que le cas où la surface S admet quatre directrices isotropes; *elle est donc une quadrique*. En définissant ainsi cette surface

$$x = a\frac{1+\lambda\mu}{\lambda+\mu}, \qquad y = b\frac{1-\lambda\mu}{\lambda+\mu}, \qquad z = c\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu},$$

l'équation des asymptotiques est

$$d\lambda\, d\mu = 0,$$

celle des lignes minima

$$\mathrm{A}\, d\lambda^2 + 2\mathrm{B}\, d\lambda\, d\mu + \mathrm{C}\, d\mu^2 = 0,$$

avec

$$\mathrm{A} = a^2(\mu^2-1)^2 + b^2(\mu^2+1)^2 + 4c^2\mu^2 = \mathrm{F}(\mu), \qquad \mathrm{C} = \mathrm{F}(\lambda),$$

celle des lignes de courbure sera

$$\mathrm{C}\, d\mu^2 - \mathrm{A}\, d\lambda^2 = 0,$$

qui se ramène aussitôt à l'équation d'Euler.

2° La surface réglée est a plan directeur, $\mathrm{H} = 0$. — Les directions asymptotiques le long d'une génératrice sont parallèles à un plan, et le discriminant n'est carré parfait que si ce plan est isotrope. La seule surface réelle correspondante est le *paraboloïde de révolution.* Si les deux racines de Δ correspondent à deux directrices rectilignes isotropes, on a le *paraboloïde quelconque*. Enfin, si les deux lignes γ sont minima, comme alors $\lambda = \nu' = 0$, on aura, en prenant $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 1$,

$$\xi' = 0, \qquad \eta' = 0, \qquad \zeta' = \nu,$$

ce qui caractérise l'*hélicoïde à plan directeur.*

III.

LIGNES DE COURBURE DES SURFACES CERCLÉES.

§ 1. — Représentation de la surface. Équation des lignes de courbure.

1. Soit un cercle réel O entraîné avec un trièdre $Oxyz$, Oz étant l'axe du cercle. Soient R le rayon, $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$, fonctions de u, les translations et rotations du trièdre O, O_1 un point du cercle déterminé par l'angle φ de Ox avec OO_1. Les projections, sur les arêtes, du déplacement de O_1 sont :

$$\begin{array}{lll} \text{Sur } Ox\ldots\ldots\ldots & (\xi + R'\cos\varphi - rR\sin\varphi)\,du + R\cos\varphi\,d\varphi, & \\ \text{Sur } Oy\ldots\ldots\ldots & (\eta + R'\sin\varphi + rR\cos\varphi)\,du - R\sin\varphi\,d\varphi, & \\ \text{Sur } Oz\ldots\ldots\ldots & [\zeta + R(p\sin\varphi - q\cos\varphi)]\,du & = P\,du. \end{array}$$

Soient O_1z_1 la demi-normale en O_1 à la surface S engendrée, z_1 étant sur Oz, O_1z_1 la demi-tangente au cercle dans le sens positif de φ, O_1y_1 une demi-perpendiculaire à $x_1O_1z_1$ complétant un trièdre O_1 de même sens de rotation que O; déterminons O_1z_1 par l'angle V de O_1O avec O_1z_1, en prenant pour sens positif celui de la rotation positive autour de O_1x_1. Posons $Oz_1 = l$, les cosinus directeurs de O_1z_1 seront proportionnels à $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $\frac{-l}{R}$, et l'on devra avoir

$$\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi + R' - \frac{lP}{R} = 0,$$

d'où

$$\frac{l}{R} = \frac{\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi + R'}{P} = \frac{M}{P} = \operatorname{tang} V.$$

Cherchons les rotations et translations du trièdre O_1. Soient $\rho, \varpi, \tau, \lambda, \mu, \nu$ ces quantités dans les déplacements $\varphi = \text{const.}$, $\rho_1, \varpi_1, \tau_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ dans les déplacements $u = \text{const.}$

Les cosinus directeurs du trièdre O_1 par rapport à $Oxyz$ sont :

$$\begin{array}{llll} \text{Pour } O_1x_1\ldots\ldots\ldots & -\sin\varphi, & \cos\varphi, & 0, \\ \text{Pour } O_1y_1\ldots\ldots\ldots & -\sin V\cos\varphi, & -\sin V\sin\varphi, & -\cos V, \\ \text{Pour } O_1z_1\ldots\ldots\ldots & -\cos V\cos\varphi, & -\cos V\sin\varphi, & \sin V, \end{array}$$

1° Quand u reste constant, O_1 se déplace sur le cercle. On a la translation $R\,d\varphi$ le long de O_1x_1, accompagnée de la rotation $d\varphi$ autour de Oz et $\frac{\partial V}{\partial \varphi}d\varphi$ autour de O_1x_1. Donc

$$\lambda_1 = R, \qquad \mu_1 = 0, \qquad \nu_1 = 0, \qquad \rho_1 = \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \qquad \varpi_1 = -\cos V, \qquad \tau_1 = \sin V.$$

2° Quand φ reste constant, le mouvement de rotation de O_1 résulte de la rotation p, q, r de O et de la rotation $\frac{\partial V}{\partial u}du$ autour de O_1x_1. Quant à la translation, ses composantes sont les projections sur les axes O_1 du déplacement de ce point, exprimé plus haut; d'où

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial u} + q\cos\varphi - p\sin\varphi,$$
$$\varpi = -\sin V(p\cos\varphi + q\sin\varphi) - r\cos V,$$
$$\tau = -\cos V(p\cos\varphi + q\sin\varphi) + r\sin V,$$
$$\lambda = -\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi + rR = N, \qquad \mu = -M\sin V - P\cos V, \qquad \nu = 0,$$

et l'on a l'identité

$$rR - N = -\frac{\partial M}{\partial \varphi}.$$

On sait maintenant former l'équation des lignes de courbure. Cette équation est

$$(\rho + \rho_1\varphi')(\lambda + \lambda_1\varphi') + (\varpi + \varpi_1\varphi')\mu = 0.$$

Ses coefficients ont les valeurs suivantes :

$$\lambda_1\rho_1 = R\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \qquad \lambda\rho_1 + \rho\lambda_1 + \mu\varpi_1 = N\frac{\partial V}{\partial \varphi} + R\frac{\partial V}{\partial u} + \zeta,$$
$$\lambda\rho + \mu\varpi = N\left(\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\zeta}{R}\right) - \frac{M^2 + P^2}{R}\frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

Revenons à la variable $t = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$, et posons

$$A = \xi(1 - t^2) + 2\eta t + R'(1 + t^2),$$
$$B = \zeta(1 + t^2) + R[2pt - q(1 - t^2)],$$
$$C = rR(1 + t^2) - 2\xi t + \eta(1 - t^2),$$
$$2D = B\frac{\partial A}{\partial t} - A\frac{\partial B}{\partial t}, \qquad F = R\left(B\frac{\partial A}{\partial u} - A\frac{\partial B}{\partial u}\right) + \zeta(A^2 + B^2), \qquad \operatorname{tang} V = \frac{A}{B}.$$

Nous obtiendrons facilement l'équation suivante des lignes de courbure,

$$D\alpha^2 + (CD + F)\alpha + CF - D(A^2 + B^2) = 0$$

ou

$$(c) \qquad (C + \alpha)(D\alpha + F) - D(A^2 + B^2) = 0,$$

α désignant la quantité $2Rt'$. *Le coefficient* D *est généralement du second degré.*

2. *L'équation des lignes minima* est

$$(\lambda + \lambda_1 \varphi')^2 + \mu^2 = 0,$$

qui devient, par les transformations précédentes,

$$(m) \qquad (C + \alpha)^2 + A^2 + B^2 = 0.$$

Elle est bien *normale*, et l'équation de Riccati *des trajectoires orthogonales* est

$$C + \alpha = 0.$$

Les lignes de courbure particulières γ sont déterminées par l'équation

$$A^2 + B^2 = 0.$$

L'intégrale de l'équation (m) *a ses points critiques fixes :* 1° quand $A^2 + B^2$ est carré parfait; 2° quand ce polynome a une racine double et que les deux autres lignes γ sont minima; 3° quand les quatre lignes γ sont minima.

On vérifie aisément que les lignes γ satisfont à l'équation (c), car on reconnaît que le long de ces lignes on a toujours

$$D\alpha + F = 0.$$

Les points du cercle qui appartiennent aux lignes γ sont ceux où le plan tangent à la surface engendrée passe par l'un des foyers de la génératrice.

§ 2. — Cas où l'équation (c) est normale.

1. D'après ce que nous avons vu (I, § 3), les cas possibles de ce genre sont les suivants : 1° *le cercle générateur a une enveloppe;* 2° $A^2 + B^2$ *est*

un carré parfait, les lignes γ sont confondues deux à deux (¹); 3° *la surface cerclée admet deux lignes d'ombilics*. Analytiquement, la condition est que le polynome D divise F. Le premier cas est celui où A et B ont un facteur commun, correspondant à l'enveloppe, le long de laquelle tang V doit apparaître comme indéterminée. Dans le second cas, les polynomes $A + Bi$, $A - Bi$ sont des carrés parfaits; d'ailleurs A et B ne peuvent avoir en même temps un facteur linéaire commun, car ils en auraient un second et la surface deviendrait une enveloppe de sphères : nous écartons cette hypothèse. Ces deux premiers cas sont les seuls où D divise à la fois $A^2 + B^2$ et $B\frac{\partial A}{\partial u} - A\frac{\partial B}{\partial u}$: ils sont évidemment réalisables géométriquement; nous montrerons la possibilité du troisième et dernier cas.

2. Supposons l'équation normale et posons $F = DG$, G étant un polynome entier du second degré. L'équation (c) devient

$$(C + \alpha)(G + \alpha) - (A^2 + B^2) = 0.$$

Son discriminant Δ est

$$\Delta = (C - G)^2 + 4(A^2 + B^2).$$

L'intégrale de l'équation (c) aura ses points critiques fixes :

1° Si Δ est carré parfait, soit $\Delta = P^2$. Alors l'équation (c) donne

$$\alpha = \frac{-C - G \pm P}{2}.$$

Le long des lignes γ, $A^2 + B^2 = 0$, $G + \alpha = 0$; donc ces lignes seront des solutions particulières de l'équation de Riccati, dans laquelle le numérateur se réduit à $-2G$ pour $A^2 + B^2 = 0$.

2° Si deux des racines de Δ sont égales, et les deux autres solutions singulières, nous savons que ces solutions ne peuvent correspondre qu'à une ligne γ minima, ou à une directrice isotrope rectiligne, ou peut-être *à l'enveloppe*, quand il y en a une, car nos raisonnements ne s'appliquent pas le long d'une telle ligne. Une ligne γ est d'ailleurs

(¹) *Surfaces à focale isotrope* de M. Demartres. Thèse, 1885. Gauthier-Villars.

solution singulière si elle est minima, c'est-à-dire vérifie à la fois les équations

$$C + \alpha = 0, \qquad A^2 + B^2 = 0.$$

Une directrice rectiligne isotrope annule Δ et satisfait à l'équation

$$\alpha + \frac{C + G}{2} = 0.$$

3° Enfin, aux quatre racines de Δ peuvent correspondre quatre solutions singulières.

§ 3. — D'une classe particulière de surfaces répondant à la question.

Toutes les surfaces déterminées par la condition que le polynome $CD - F$ *soit identique à* 0 *répondent à la question;* car, d'après cette identité, D divise F, et, d'autre part, Δ se réduit à $4(A^2 + B^2)$; mais les lignes $A^2 + B^2 = 0$ vérifient l'équation $G + \alpha = 0$, et dans le cas qui nous occupe $G = C$; donc toute racine simple de Δ sera solution singulière puisqu'elle vérifiera l'équation $C + \alpha = 0$; par suite, selon que $A^2 + B^2$ aura quatre racines simples ou une racine double et deux autres distinctes, ou deux racines égales deux à deux, on aura un des cas d'intégration que nous venons de signaler.

La signification géométrique de l'identité $CD - F = 0$ est la suivante : cette identité est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (c) devienne

$$(C + \alpha)^2 - (A^2 + B^2) = 0,$$

qui caractérise les surfaces dont les lignes de courbure sont conjuguées par rapport au cercle et à ses trajectoires orthogonales, $C + \alpha = 0$. Donc on a le théorème suivant :

Les lignes de courbure des surfaces cerclées telles que ces lignes soient également inclinées en chaque point sur le cercle générateur s'obtiennent par l'intégration d'équations de Riccati ou par quadratures.

La détermination générale de ces surfaces paraît difficile; l'identité $CD - F = 0$ donne cinq équations de condition différentielles entre les cinq fonctions arbitraires dont dépend la surface [1].

Nous allons former les trois catégories de surfaces pour lesquelles l'équation (c) est normale et donner, pour chacune d'elles, quelques exemples d'intégration relatifs notamment aux surfaces particulières que nous venons d'indiquer, et qui peuvent appartenir à l'une des trois catégories.

§ 4. — Surfaces Θ dont la génératrice a une enveloppe.

Supposons cette enveloppe correspondant à $t = \infty$. A et B doivent avoir une racine infinie commune, d'où les conditions $\xi = R'$, $\zeta = -Rq$. La surface dépend encore de p, q, r, η et R. Les composantes du déplacement du point de contact du cercle avec l'enveloppe sont

$$\xi - R' = 0, \qquad \eta - rR, \qquad \zeta + Rq = 0.$$

Si l'on a $\eta = rR$, l'enveloppe est un point, la surface est inverse d'une surface réglée, et nous pouvons laisser ce cas de côté : nous prendrons alors pour variable u l'arc de l'enveloppe, et nous poserons, par conséquent,

$$\eta = rR + 1;$$

la surface dépend alors de quatre fonctions arbitraires p, q, r, R. On a

$$A = 2(\xi + \eta t), \quad B = 2R(pt - q), \quad C = -t^2 - 2\xi t + 2\eta - 1, \quad D = -2R(q\eta + p\xi)$$

(nous écartons les enveloppes de sphères $D = 0$). On voit que les coefficients de (c) admettent, comme on l'avait prévu, la racine double commune $t = \infty$.

Voyons si l'enveloppe peut être solution singulière : le discriminant Δ n'admet la racine $t = \infty$ que s'il en est ainsi du polynome $CD - F$; mais alors *il l'admet comme racine double* et nous n'avons plus à nous préoccuper de savoir si elle peut être néanmoins solution singulière.

---

(1) M. Demartres (Thèse, 1885; Gauthier-Villars) indique la détermination des surfaces cerclées dont les lignes de courbure ont, sur chaque génératrice circulaire, une inclinaison constante, *mais différente de* 45°. Sa méthode n'est pas applicable à ce cas particulier, sauf pour les anallagmatiques à focale isotrope.

Ainsi, *par une condition unique, l'enveloppe correspond à une racine double du discriminant.*

1. Pour exprimer que Δ est carré parfait, il suffira de déterminer une fonction $2f$ de u seul, telle que l'on ait identiquement

$$\Delta = (CD - F + 2f)^2,$$

d'où l'identité nécessaire et suffisante

$$D^2(A^2 + B^2) - f(CD - F) + f^2 = 0.$$

L'équation (c) donne alors

$$\alpha = \frac{f - F}{D}, \qquad \alpha = -\left(C + \frac{f}{D}\right).$$

Les lignes γ vérifient la seconde de ces équations; ce sont ici les deux lignes $A^2 + B^2 = 0$ (deux des quatre lignes du cas général sont confondues avec l'enveloppe).

2. Le discriminant de l'équation (m) des lignes minima a, dans ce cas, la *racine double* $t = \infty$: donc le seul cas où l'intégrale de (m) ait ses points critiques fixes est alors celui où les deux lignes (γ) sont *minima*, et vérifient les deux équations $A^2 + B^2 = 0$, $C + \alpha = 0$; elles sont aussi, dans ce cas, solutions singulières de (c), et annulent, par conséquent, son discriminant, d'où l'identité

$$CD - F = H(A^2 + B^2) \qquad (H \text{ fonction de } u \text{ seul}),$$

nécessaire et suffisante pour que les lignes γ soient solutions singulières de (m) *et de* (c). Il en résulte

$$\Delta = (A^2 + B^2)[H^2(A^2 + B^2) + 4D^2],$$

et Δ a une racine double lorsqu'il en est ainsi du crochet; en se bornant aux résultats réels, il faut pour cela que $H = 0$, et *nous retrouvons ainsi les surfaces de cette catégorie à lignes de courbure également inclinées sur la génératrice.*

3. Voici deux exemples simples du cas où Δ est carré parfait et de celui où les lignes de courbure sont également inclinées sur le cercle. Avant de les traiter, remarquons que les surfaces de cette catégorie

n'ont *jamais leur focale isotrope*, car les composantes du déplacement d'un foyer $z = i\mathrm{R}$ du cercle générateur sont

$$\mathrm{R}' + iq\mathrm{R}, \qquad \eta - ip\mathrm{R}, \qquad -q\mathrm{R} + i\mathrm{R}' = i(\mathrm{R}' + iq\mathrm{R});$$

par conséquent, les déplacements des *deux* foyers ne seraient isotropes que si $\eta = p = 0$, et la surface serait enveloppe de sphères.

L'expression développée de $\mathrm{CD} - \mathrm{F}$ est

$$\begin{aligned}\mathrm{CD} - \mathrm{F} = 2\mathrm{R}\,\big\{&(p\xi + q\eta)[t^2(2\eta+1) + 4\xi t - (2\eta - 1)] \\ &+ 2q\mathrm{R}^2(pt - q)^2 - 2\mathrm{R}[(pt - q)(\eta' t + \xi') - (p't - q')(\eta t + \xi)]\big\}.\end{aligned}$$

Premier exemple. — Cherchons les surfaces pour lesquelles Δ est carré parfait, et *telles que le cercle générateur soit dans le plan osculateur de l'enveloppe*, d'où $p = 0$. En développant l'identité indiquée

$$\mathrm{D}^2(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2) - f(\mathrm{CD} - \mathrm{F}) - f^2 = 0,$$

on trouve les résultats suivants, dans lesquels λ désigne une fonction arbitraire de u,

$$(\lambda\mathrm{R}^2)' = \frac{\lambda^2\lambda'}{1 + \lambda'^2 - \lambda\lambda''}, \qquad q = \frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}\lambda'}, \qquad \eta = \lambda q, \qquad f = \frac{8q\mathrm{R}\eta^3}{2\eta + 1},$$

d'où *une solution dépendant d'une fonction arbitraire*, et dont les lignes de courbure sont déterminées par deux équations de Riccati.

Deuxième exemple. — Dans cet exemple, $\mathrm{CD} - \mathrm{F}$ est identique à 0, ce qui donne lieu, pour cette catégorie de surfaces, à trois équations entre les quatre fonctions p, q, R, η. *Supposons en particulier que le diamètre* $\mathrm{O}x$ *du cercle, normal à l'enveloppe, décrive une développable*. On trouve alors, une fois écartées les enveloppes de sphères, les conditions

$$q = 0, \qquad 2\eta = 1, \qquad 2p\xi + \mathrm{R}p' = 0, \qquad 2p\xi^2 - \mathrm{R}(p\xi' - \xi p') = 0$$

(et l'on a déjà $\xi = \mathrm{R}'$), d'où l'on déduit

$$\xi' = 0, \qquad \xi = a\,(\text{const.}), \qquad p\mathrm{R}^2 = b\,(\text{const.}).$$

Donc on prendra

$$\mathrm{R} = au, \qquad p = \frac{b}{\mathrm{R}^2}, \qquad r = -\frac{1}{2\mathrm{R}}.$$

D'ailleurs, le point A de OX qui décrit l'enveloppe G de cet axe est justement le point du cercle diamétralement opposé au contact avec l'enveloppe, car la projection du déplacement de ce point d'abscisse R sur Oy est $\eta + r\mathrm{R}$, qui est ici nulle; l'arc de G peut d'ailleurs être pris égal à $2\mathrm{R}$, car sa dérivée est $\xi + \mathrm{R}' = 2\mathrm{R}'$. On déduit donc de là le théorème suivant :

Soit une ligne Γ *dont le rayon de courbure est proportionnel à l'arc, le rayon de torsion au carré de l'arc, et un cercle mobile orthogonal à* G, *de diamètre égal à l'arc et tangent à une développante de* G. *Les lignes de courbure de la surface qu'il engendre sont également inclinées sur lui, et se déterminent par l'intégration d'équations de Riccati.*

4. Si l'on cherche les surfaces du premier exemple ci-dessus pour lesquelles l'enveloppe est *une droite* ($r = 0$), celles que l'on trouve sont comprises dans une *classe générale qui doit être signalée :* le cercle générateur est tangent à une droite en un point mobile déterminé par sa distance u à une origine fixe, le rayon R du cercle et l'angle ω de son plan avec un plan fixe étant donnés par les formules

$$u = \alpha \operatorname{tang} \mathrm{K}\omega, \qquad \mathrm{R} = \frac{\beta}{\cos^2 \mathrm{K}\omega}.$$

$\alpha, \beta, \mathrm{K}$ sont trois constantes (dont une d'homothétie); d'où

$$\mathrm{A} = 2(\xi + t), \qquad \mathrm{B} = 2\zeta = \mathrm{D},$$
$$q = \frac{d\omega}{du} = \frac{\cos^2 \mathrm{K}\omega}{\mathrm{K}\alpha}, \qquad \zeta = -\mathrm{R}q = \frac{\beta}{\mathrm{K}\alpha}\ (\text{const.}),$$

ce qui conduit à prendre $t + \xi = v$ à la place de t, comme variable. Les lignes $v =$ const. correspondent à la condition géométrique $\mathrm{V} =$ const. On trouve alors facilement

$$\mathrm{C} + \alpha = 2\mathrm{R}v' - v^2 - \frac{4\beta^2}{\alpha^2} + 1, \qquad \mathrm{D}\alpha + \mathrm{F} = 4\zeta(\mathrm{R}v' + v^2 + \zeta^2);$$

donc, comme ζ est constant, *les variables se séparent immédiatement dans les équations des trajectoires orthogonales du cercle générateur, des lignes minima de la surface engendrée et de ses lignes de courbure;* les points critiques des intégrales de ces deux dernières équations ne sont d'ailleurs pas fixes, en général; ils peuvent le devenir si les constantes α, β, K vérifient une condition convenable. Si l'on choisit pour K un nombre commensurable, *ces surfaces sont algébriques*.

5. Il reste à donner un exemple *d'une surface* Θ *pour laquelle les quatre racines de* Δ *sont solutions singulières de l'équation* (c). Cette quadruple condition peut déterminer analytiquement la surface. Le cercle générateur doit alors s'appuyer sur quatre directrices isotropes, dont deux au moins sont rectilignes, les deux autres pouvant être, soit les lignes γ, soit deux autres droites. Or, ces quatre directrices déterminent une congruence de cercles qui s'appuient sur elles; *en général*, les seuls ensembles de cercles à un paramètre de cette congruence, admettant une enveloppe, sont formés de cercles passant par un point fixe d'une des directrices, et les surfaces correspondantes sont inverses de surfaces réglées. Cependant, le second exemple ci-dessus montre qu'il n'en est pas toujours ainsi, car le cercle générateur s'y appuie sur les deux lignes γ en restant tangent à leurs plans osculateurs : donc il appartient à une congruence dans laquelle les points focaux sur chaque cercle sont confondus deux à deux; et cependant nous obtenons une infinité de ces cercles enveloppés par une ligne proprement dite. Voici comment on peut expliquer ce fait : soient

$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \psi(x, y, z, a, b) = 0$$

les équations d'un cercle dépendant de deux paramètres arbitraires a et b.

Ses foyers sont sur la surface Σ :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial\psi}{\partial b} - \frac{\partial\psi}{\partial a}\frac{\partial\varphi}{\partial b} = 0$$

(qu'on peut supposer toujours être une quadrique, en laissant de côté les deux foyers à l'infini); supposons que les points d'intersection de Σ avec le cercle correspondant soient bien déterminés (sauf peut-être pour certains cercles déterminés en *nombre fini*) et qu'ils décrivent une *ligne*

$$x = f_1(a), \qquad y = f_2(a), \qquad z = f_3(a),$$

a ayant été convenablement choisi au préalable. Si a reste fixe, b variant seul, deux cercles voisins se rencontrent, de sorte que $\frac{\partial \varphi}{\partial b}$, $\frac{\partial \psi}{\partial b}$ sont identiquement annulés par $x = f_1(a)$, $y = f_2(a)$, $z = f_3(a)$, quels que soient a et b.

Par suite, l'équation différentielle

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} da + \frac{\partial \varphi}{\partial b} db = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial a} da + \frac{\partial \psi}{\partial b} db = 0,$$

qui détermine les systèmes enveloppés, se réduit à $da = 0$, car $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$, $\frac{\partial \psi}{\partial a}$ ne s'annulent pas à la fois le long de la ligne focale considérée, puisque, alors, *tous* les cercles de la congruence seraient tangents à cette ligne. Mais supposons, au contraire, qu'il existe un système *simplement infini* de cercles de la congruence, tels que chacun d'eux soit *tout entier* sur la surface Σ correspondante, de sorte qu'il suffit pour cela d'une seule condition entre a et b,

$$F(a, b) = 0;$$

on en tire

$$b = F_1(a),$$

et en remplaçant x, y, z, b par f_1, f_2, f_3, F_1 dans l'équation $d\varphi = 0$, on obtient une équation ordinaire qui détermine le point (a) du cercle où ce cercle rencontrera le cercle infiniment voisin; ce point décrira l'enveloppe du système $F(a, b) = 0$. C'est cette circonstance qui doit se présenter dans l'exemple signalé. Or, une fois choisies les directrices de la congruence, on pourra la reconnaître par des opérations *purement algébriques*. D'où, par exemple, le théorème suivant :

On pourra toujours obtenir, par des opérations purement algébriques, les surfaces Θ dont le cercle générateur s'appuie sur quatre droites isotropes; leurs lignes de courbure s'obtiennent par quadratures.

D'ailleurs l'étude, faite à ce point de vue, de la congruence des cercles qui s'appuient sur quatre droites isotropes paraît compliquée. Remarquons seulement que, si deux des directrices se rencontrent, les cercles de la congruence qui ne passent pas en leur point commun appartiennent chacun à une sphère tangente au plan de ces droites en leur intersection; par suite, ils ne peuvent s'associer de façon à donner des cercles enveloppés par une ligne proprement dite. En général, le plan des cercles enveloppe une surface de troisième classe contenant les quatre directrices; si ces droites sont sur une même quadrique, l'enveloppe se décompose en cette quadrique et son centre; si l'on considère un des cercles dont le plan passe par ce centre, on peut, *sous une seule condition*, le faire passer aussi au centre et l'on a ainsi un nouvel exemple du fait signalé plus haut. Mais *la surface* Θ *correspondante est évidemment une inverse de quadrique*.

§ 5. — Surfaces à focale isotrope.

1. Ces surfaces forment la seconde classe de celles pour lesquelles l'équation (c) est normale.

Elles nous sont apparues comme celles où les lignes γ sont confondues deux à deux (les enveloppes de sphère étant écartées). Il est facile d'en conclure que les focales (qui peuvent former une seule ligne analytique, ou non) doivent être isotropes et réciproquement; considérons, en effet, deux cercles générateurs infiniment voisins, C et C′, et deux cônes isotropes voisins qui les contiennent et ont pour sommets deux foyers voisins F et F′. Les plans tangents isotropes à la surface engendrée, le long de C, sont les plans tangents communs aux deux cônes F, F′ et aux cônes conjugués F_1, F'_1, c'est-à-dire les plans tangents menés au cercle de l'infini par les tangentes aux focales lieux de F et F_1, par ces points F et F_1. Or, dans le cas actuel, les deux plans tangents issus d'un même foyer doivent se confondre; donc la tangente à la focale doit être isotrope et réciproquement. Donc ces surfaces sont engendrées ainsi : *le cercle générateur est à l'intersection de deux cônes isotropes dont les sommets décrivent deux lignes isotropes arbitraires* L et L_1; par conséquent, elles dépendent de trois fonctions arbitraires, comme le montre d'ailleurs M. Demartres dans le Mémoire déjà cité. [Il est à remarquer que les surfaces Θ de la classe précédente sont les seules qui dépendent encore de quatre arbitraires, l'équation (c) étant normale.]

Formons l'équation (c) dans le cas actuel, en posant

$$A + Bi = P^2, \qquad A - Bi = Q^2,$$

P et Q étant deux polynomes linéaires en t, qui, égalés à o, déterminent les deux lignes *doubles* γ. L'équation (m) est

$$(C+\alpha)^2 + P^2 Q^2 = 0;$$

elle se décompose immédiatement en deux équations de Riccati. On trouve, d'autre part,

$$2D = -\frac{i}{2}\left(P\frac{\partial Q}{\partial t} - Q\frac{\partial P}{\partial t}\right)PQ, \qquad F = \left[-\frac{i}{2}R\left(P\frac{\partial Q}{\partial u} - Q\frac{\partial P}{\partial u}\right) + \zeta PQ\right]PQ,$$

et, par conséquent, F et D ont bien le facteur commun PQ. Donc on peut poser $F = DG$, G étant entier en t, et l'équation (c) devient

$$(C+\alpha)(G+\alpha) - P^2 Q^2 = 0.$$

On a d'ailleurs

$$\Delta = (C-G)^2 + 4P^2Q^2,$$

d'où cette conséquence que, si une des racines γ annule le discriminant, *elle y est racine double*. Par conséquent, nous n'avons pas à rechercher dans quel cas les lignes γ deviennent solutions singulières, et nous sommes ainsi conduits à étudier les surfaces telles que Δ soit carré parfait, sous la condition $C - G = 2\rho\, PQ$, ρ étant fonction de u seul.

2. Prouvons que, quand *Δ s'annule ainsi sur une ligne γ, elle est droite, et réciproquement*. En effet, comme nous l'avons vu, si Δ s'annule sur γ, il en est de même de $C+\alpha$ et réciproquement, c'est-à-dire que γ satisfait à la condition d'être orthogonale au cercle générateur; mais, en tout point de γ, le plan tangent est isotrope : donc la direction orthogonale au cercle générateur dans ce plan l'est aussi; par suite, il faut et il suffit ici que γ soit isotrope; or, si la focale correspondante est courbe, γ est tracée sur la développable isotrope dont cette focale est l'arête, donc γ ne peut être isotrope; ainsi, il faut que la focale soit droite, et cette condition est suffisante, car le plan isotrope correspondant à cette droite est tangent à tous les cercles générateurs, et γ se confond avec la focale, en coupant orthogonalement ces cercles. *Donc les surfaces ci-dessus ont pour focales deux droites isotropes et réciproquement;* si les deux focales se coupent, la surface est une inverse de

cylindre, cas écarté; si elles ne se coupent pas, il existe une sphère unique les contenant, et tout cercle générateur, ayant ses foyers sur cette sphère, lui est orthogonal. Donc les surfaces sont anallagmatiques; ce sont évidemment toutes les anallagmatiques à focale isotrope. D'où le théorème suivant :

Les lignes de courbure des surfaces anallagmatiques à focale isotrope se déterminent par l'intégration de deux équations de Riccati (1).

En posant $G = C - 2\rho PQ$, l'équation (c) devient

$$(C+\alpha)^2 - 2\rho PQ(C+\alpha) - P^2Q^2 = 0,$$

d'où

$$C+\alpha = (\rho \pm \sqrt{\rho^2+1})PQ.$$

On a donc deux intégrales particulières $P = 0$, $Q = 0$ de chacune des équations de Riccati; la forme de ce résultat montre facilement ce théorème, dû à M. Demartres, que les lignes de courbure de chaque série ont une inclinaison *constante* sur le cercle générateur, tout le long de ce cercle; dans le cas particulier de $\rho = 0$, cette inclinaison est de 45°.

3. Il faut remarquer que, d'une manière générale, *si une génératrice rationnelle d'une surface s'appuie sur une droite isotrope $t = 0$ en restant tangente au plan isotrope correspondant, le discriminant de l'équation des lignes de courbure admet $t = 0$ comme racine multiple.* On le reconnaît aisément en mettant les coordonnées d'un point de la génératrice et les paramètres directeurs du plan tangent en ce point sous la forme

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha\varphi(u) + tX, & y &= y_0 + \beta\varphi(u) + tY, & z &= z_0 + \gamma\varphi(u) + tZ, \\ l &= \alpha + tL, & m &= \beta + tM, & n &= \gamma + tN, \end{aligned}$$

x_0, y_0, z_0 étant des constantes, α, β, γ aussi, avec la condition $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 0$. Si l'on forme alors l'équation

$$dl(m\,dz - n\,dy) + dm(n\,dx - l\,dz) + dn(n\,dy - n\,dx) = 0,$$

on reconnaîtra facilement l'exactitude du fait énoncé.

(1) DEMARTRES, *Comptes rendus*, 1888, 1er semestre.

4. Revenons aux surfaces à focale isotrope; Δ peut être carré parfait autrement, lorsqu'on a

$$C - G + 2iPQ = R^2, \qquad C - G - 2iPQ = S^2,$$

R et S étant deux fonctions linéaires de t, imaginaires conjuguées si la surface est réelle; on en déduit

$$4iPQ = R^2 - S^2 = (R - S)(R + S),$$

$R + S$ étant réel et du premier degré par rapport à t, ainsi que P, Q. Cette identité ne fournit pas de surfaces réelles.

5. Il reste encore à examiner si, pour les surfaces considérées, l'équation (c) peut avoir des solutions singulières correspondant à des droites isotropes. Remarquons que, en se donnant le lieu isotrope des foyers, on achève de déterminer géométriquement la surface par une directrice isotrope, car on a immédiatement les foyers du cercle générateur passant par un point choisi sur cette droite. Le cas de quatre directrices isotropes ne doit se présenter qu'exceptionnellement, puisqu'il introduit quatre conditions nouvelles. D'ailleurs, on peut déterminer les foyers, fonctions de deux paramètres a et b, des cercles de la congruence s'appuyant sur les quatre directrices; si l'on exprime que chacun d'eux décrit un lieu isotrope, on aura entre a et b deux conditions différentielles, et l'on pourra toujours reconnaître *algébriquement* si elles sont compatibles.

§ 6. — Surfaces à deux lignes ombilicales.

1. Le long d'une ligne ombilicale, le centre de courbure unique de la surface qui doit se trouver sur l'axe du cercle décrira une ligne tangente à la normale à la surface. Il suffit donc, pour obtenir les surfaces en question, d'exprimer qu'il existe deux normales possédant la propriété précédente; choisissons Ox de façon que leurs pieds sur le cercle correspondent aux amplitudes ω et $-\omega$ (ω différent de o et de π); soient a et b les z des centres de courbure correspondants. On devra donc avoir

$$\frac{\xi + qa}{R\cos\omega} = \frac{\eta - pa}{R\sin\omega} = \frac{\zeta + a'}{-a}, \qquad \frac{\xi + qb}{R\cos\omega} = \frac{\eta - pb}{-R\sin\omega} = \frac{\zeta + b'}{-b},$$

d'où, en égalant à λ les premiers rapports, à μ les seconds,

$$\begin{aligned}
\xi &= \lambda \mathrm{R} \cos\omega - aq = \mu \mathrm{R} \cos\omega - bq,\\
\eta &= \lambda \mathrm{R} \sin\omega + ap = -\mu \mathrm{R} \sin\omega + bp,\\
\zeta &= -a' - \lambda a \qquad = -b' - \mu b.
\end{aligned}$$

De plus, il reste à exprimer que les droites de directions ($\mathrm{R}\cos\omega$, $\mathrm{R}\sin\omega$, $-a$), ($\mathrm{R}\cos\omega$, $-\mathrm{R}\sin\omega$, $-b$) sont normales à la surface engendrée par le cercle mobile, ce qui donne facilement, en vertu des équations précédentes, les conditions

$$\begin{aligned}
\lambda(\mathrm{R}^2 + a^2) + aa' + \mathrm{R}\mathrm{R}' &= 0,\\
\mu(\mathrm{R}^2 + b^2) + bb' + \mathrm{R}\mathrm{R}' &= 0.
\end{aligned}$$

Posons $a = \mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,\alpha$, $b = \mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,\beta$; nous tirons de là

$$\lambda = -\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}} - \alpha'\,\mathrm{tang}\,\alpha, \qquad \mu = -\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}} - \beta'\,\mathrm{tang}\,\beta;$$

on en déduit

$$\zeta = -\mathrm{R}\alpha' = -\mathrm{R}\beta',$$

donc

$$\alpha' = \beta' \qquad \text{ou} \qquad \alpha - \beta = \text{const.};$$

cette constante ne peut d'ailleurs être nulle, car il s'ensuivrait $a = b$, $\lambda = \mu$ et, par suite, d'après les équations ci-dessus, $\omega = 0$ ou π; elle ne peut davantage être égale à π. Par conséquent, nous obtenons les valeurs suivantes des rotations et translations

$$q = \frac{(\lambda - \mu)\cos\omega}{\mathrm{tang}\,\alpha - \mathrm{tang}\,\beta}, \qquad p = -\frac{(\lambda + \mu)\sin\omega}{\mathrm{tang}\,\alpha - \mathrm{tang}\,\beta},$$

$$= \mathrm{R}\cos\omega\,\frac{\mu\,\mathrm{tang}\,\alpha - \lambda\,\mathrm{tang}\,\beta}{\mathrm{tang}\,\alpha - \mathrm{tang}\,\beta}, \quad \eta = -\mathrm{R}\sin\omega\,\frac{\lambda\,\mathrm{tang}\,\beta + \mu\,\mathrm{tang}\,\alpha}{\mathrm{tang}\,\alpha - \mathrm{tang}\,\beta}, \quad \zeta = -\mathrm{R}\alpha',$$

λ et μ ayant les valeurs ci-dessus, d'où l'on déduit

$$\lambda\,\mathrm{tang}\,\beta - \mu\,\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}(\mathrm{tang}\,\alpha - \mathrm{tang}\,\beta), \qquad \mu - \lambda = \alpha'(\mathrm{tang}\,\alpha - \mathrm{tang}\,\beta).$$

Les surfaces cherchées sont ainsi déterminées à l'aide de quatre fonctions de u : α, R, r et ω; l'une d'elles pouvant être prise comme variable, la solution dépend bien de trois fonctions arbitraires. Un calcul direct donne les expressions suivantes de A et B

$$A = H(M \operatorname{tang}\beta - N \operatorname{tang}\alpha), \qquad B = A(M - N)$$

en posant

$$H = \frac{2R}{\cos^2\frac{\omega}{2}(\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta)},$$

$$M = \lambda\left(t - \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\right)^2 = \lambda(t-\rho)^2,$$

$$N = \mu\left(t + \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\right)^2 = \mu(t+\rho)^2 \qquad \left(\rho = \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\right).$$

On en déduit

$$D = 2H^2\lambda\mu\rho(\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta)(t^2-\rho^2),$$

$$\begin{aligned} F = {} & RH^2(t^2-\rho^2)[(\mu\lambda' - \lambda\mu')(t^2-\rho^2) - 4\lambda\mu\rho' t](\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta) \\ & - RH^2\alpha'(\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta)^2\lambda\mu(t^2-\rho^2)^2, \end{aligned}$$

et l'on reconnaît ainsi la présence du facteur commun $t^2-\rho^2$, dont la disparition rend l'équation (c) normale. En posant $F = DG$, on a donc

$$G = R\frac{[\mu\lambda' - \lambda\mu' - \lambda\mu(\mu-\lambda)](t^2-\rho^2) - 4\lambda\mu\rho' t}{2\lambda\mu\rho},$$

et l'équation (c) prend la forme

$$(C+\delta)(G+\delta) - (A^2+B^2) = 0,$$

δ désignant $2Rt'$.

2. Son discriminant est $\Delta = (C-G)^2 + 4(A^2+B^2)$. Donc les quatre lignes γ, qui annulent A^2+B^2, ne seront solutions singulières, *si* $C-G$ *n'est pas nul,* que si A^2+B^2 devient carré parfait, ce qui nous ramène aux surfaces de la classe précédente; si, au contraire, $C-G$ *est identiquement nul,* nous avons *un cas nouveau dans lequel les quatre lignes* γ *sont solutions singulières : c'est celui des surfaces de cette catégorie dont les lignes de courbure sont également inclinées sur le cercle générateur.* On a, comme on l'a vu,

$$C = rR(1+t^2) - 2\xi t + \eta(1-t^2).$$

Les trois conditions d'identification de C — G à o sont donc

$$rR+\eta=-R\rho^2T, \qquad rR-\eta=RT, \qquad \frac{R\rho'}{\rho}=\xi=-R'\cos\omega,$$

en désignant par T la quantité $\frac{\mu\lambda'-\lambda\mu'-\lambda\mu(\mu-\lambda)}{2\lambda\mu\rho}$. La dernière condition est vérifiée identiquement par $\omega=\pm\frac{\pi}{2}$; car, développée, elle devient

$$\frac{R\omega'}{\sin\omega}=-R'\cos\omega.$$

Il suffira d'ailleurs d'examiner l'hypothèse $\omega=+\frac{\pi}{2}$ ou $\rho=1$. Si ω est variable, l'équation précédente donne immédiatement

$$R\operatorname{tang}\omega=m\ (\text{const.}).$$

Soit d'abord $\rho=1$, il s'ensuit $r=0$, $\eta=-RT$, et cette dernière équation, développée, donne

$$\frac{\mu\lambda'-\lambda\mu'-\lambda\mu(\lambda-\mu)}{2\lambda\mu}=\frac{\lambda\operatorname{tang}\beta+\mu\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\beta},$$

c'est-à-dire une relation différentielle du second ordre entre R et α qui, simplifiée, devient

$$\frac{\lambda'}{\lambda}-\frac{\mu'}{\mu}=(\lambda+\mu)\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Le plan du cercle générateur des surfaces correspondantes est, d'ailleurs, parallèle à une droite fixe, car on a $q=0$. *En particulier*, si $\lambda=\mu$, $\alpha+\beta=\pi$, on a les surfaces déterminées par

$$p=\frac{R'}{R\operatorname{tang}\alpha}, \qquad q=0, \qquad r=0, \qquad \xi=0=\eta=\zeta, \qquad (\alpha\ \text{const.});$$

elles sont engendrées par un cercle de centre fixe tournant autour d'un de ses diamètres, de façon que l'angle de rotation soit proportionnel au logarithme du rayon. L'équation des lignes de courbure est

$$\partial^2=16R'^2\cot^2\alpha\,[(t^2+1)^2\operatorname{tang}^2\alpha+4t^2]=4R^2t'^2.$$

On les a immédiatement par une quadrature.

Considérons maintenant l'autre hypothèse

$$R \tang \omega = m;$$

elle exprime qu'il y a sur Ox un point de puissance constante par rapport au cercle, quand ce cercle varie. On voit facilement que ce point est *alors fixe*. En effet, ses coordonnées sont

$$x = \frac{R}{\cos \omega}, \qquad y = z = 0;$$

donc les projections de son déplacement sont

$$\xi + \left(\frac{R}{\cos \omega}\right)', \qquad \eta + \frac{rR}{\cos \omega}, \qquad \zeta - \frac{qR}{\cos \omega};$$

mais

$$\xi = -R' \cos \omega, \qquad 2\eta = -RT(1 + \rho^2), \qquad 2rR = RT(1 - \rho^2), \qquad \zeta = -R\alpha'.$$

Ces égalités, jointes à la valeur de q, trouvée antérieurement, et à la condition $R \tang \omega = m$, entraînent la nullité des trois projections du déplacement. Donc, *les surfaces que nous considérons sont anallagmatiques*. La condition $2\eta = -RT(1 + \rho^2)$ les détermine; c'est une relation différentielle du second ordre entre α et ω. On obtient une solution particulière en cherchant les surfaces telles que *le plan du cercle soit parallèle à une droite fixe parallèle à* Ox; on doit avoir $q = 0 = r$. Il faut et il suffit pour cela que $\lambda = \mu$, d'où $T = 0 = \eta$; par conséquent, α et β doivent être supplémentaires (et par suite constants). Les surfaces sont alors ainsi déterminées :

$$\xi = \frac{m\omega' \cos \omega}{\sin^2 \omega}, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad p = -\frac{\omega' \cot \alpha}{\cos \omega}, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad R \tang \omega = m;$$

par conséquent, *le plan du cercle tourne autour d'une droite, le centre décrit cette droite, et si u est sa distance à un point fixe de la droite, l'angle de rotation θ du plan du cercle et le rayon* R *sont donnés par les formules*

$$m = -u \sin \omega, \qquad R = m \cot \omega = -u \cos \omega, \qquad \theta = \cot \alpha \, L \tang \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right).$$

On formerait aisément l'équation des lignes de courbure, qui se ramène *aux quadratures* dès que l'on a intégré l'équation des trajectoires orthogonales, réduite ici à $Rt' + R' \cos \omega t = 0$; cette intégration est immédiate.

Ainsi, nous terminons par un dernier exemple du cas, qui n'a pas encore été rencontré, où les quatre lignes γ sont solutions singulières, à la fois, des équations (m) et (c). Les surfaces à lignes ombilicales pourraient naturellement fournir aussi des exemples des autres cas.

DEUXIÈME PARTIE.

I.

GÉNÉRALITÉS.

Dans cette seconde Partie, nous nous proposons de montrer comment on peut étudier le rôle d'une ligne $t = t_0$ tracée sur la surface S lieu des génératrices rationnelles G, par rapport à l'équation différentielle du premier ordre d'une famille de lignes définies géométriquement sur la surface. Observons d'abord que, par une transformation homographique préalable effectuée sur t, on peut réduire t_0 à 0, ce que nous supposerons toujours.

§ 1. — Développement des coordonnées d'un point de la génératrice rationnelle.

Les coordonnées absolues d'un point de G sont des fonctions rationnelles de t. On peut toujours les écrire ainsi :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_0 + f\,t^m X_1 + f_1\,t^{m+n} Y_1 + f_2\,t^{m+n+n'} Z_1,\\ y &= y_0 + g\,t^m X_1 + g_1\,t^{m+n} Y_1 + g_2\,t^{m+n+n'} Z_1,\\ z &= z_0 + h\,t^m X_1 + h_1\,t^{m+n} Y_1 + h_2\,t^{m+n+n'} Z_1,\end{aligned}\right.$$

sous les conditions suivantes : x_0, y_0, z_0, f, g, h, f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, h_2 sont des fonctions de u seul; si la génératrice est gauche, le déterminant $|f\ g\ h|$ est $\neq 0$; n et n' sont des entiers positifs au moins égaux à 1, m un entier $\neq 0$, mais *positif* ou *négatif* suivant que la ligne $t=0$ est à distance finie ou à l'infini, et, dans ce dernier cas, $m+n$, $m+n+n'$ sont supposés $\neq 0$; enfin X_1, Y_1, Z_1, fonctions de t et de u, ont pour $t=0$ une valeur finie, $\neq 0$. Le développement en série suivant les puissances entières de t des trois coordonnées x, y, z permettrait, par exemple, d'arriver à ces expressions; d'ailleurs, elles sont évidemment possibles d'une infinité de manières, car on peut, sans en modifier la forme, remplacer f_1, g_1, h_1 par des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients fonctions de u, d'elles-mêmes et des fonctions f, g, h de la colonne verticale qui les précède, et de même f_2, g_2, h_2 par des combinaisons linéaires et homogènes d'elles-mêmes et des coefficients des deux colonnes précédentes. La signification géométrique des coefficients rend ce fait évident : Supposons d'abord la ligne $t=0$ à distance finie; x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du point décrivant la ligne $t=0$ de la surface; f, g, h dirigent la tangente à la génératrice G en ce point, $f_1\ g_1\ h_1$ une droite quelconque du plan osculateur, $f_2\ g_2\ h_2$ une droite quelconque hors de ce plan ($|f\ g\ h|\neq 0$). Les exposants ont aussi une signification géométrique, et indiquent le nombre de points communs confondus avec $t=0$ de G, entre cette ligne, un plan sécant quelconque, un plan tangent et le plan osculateur; nous appellerons m *l'ordre de singularité* du point $t=0$ sur G : dès que m est >1, il y a rebroussement en ce point; n sera *l'ordre tangentiel* en ce point : si $n>1$, il y a inflexion; enfin n' sera *l'ordre d'osculation :* si $n'>1$, le plan osculateur est stationnaire. Supposons maintenant m négatif $=-m'$, $t=0$ étant alors à l'infini sur la surface; on peut prendre pour coordonnées homogènes du point

$$x_1 = x_0 t^{m'} + f X_1 + f_1 t^n Y_1 + f^2 t^{n+n'} Z_1, \qquad x_2 = \ldots, \qquad x_3 = \ldots, \qquad x_4 = t^{m'},$$

et alors trois cas sont à distinguer : 1° $m'<n$ le point considéré sur G est à l'infini dans la direction f, g, h, qui est celle de l'asymptote passant par (x_0, y_0, z_0), f_1, g_1, h_1 dirige une droite du plan osculateur à l'infini, f_2, g_2, h_2 une droite quelconque hors de ce plan;

2° $n+n'>m'>n$, le point de G est encore à l'infini dans la direction f, g, h, mais l'asymptote est entièrement à l'infini, et seul le plan osculateur est encore à distance finie et déterminée par les directions f, g, h, f_1, g_1, h_1; (x_0, y_0, z_0) est un point quelconque de ce plan, à distance finie; 3° m' est $>n+n'$, le point de G est à l'infini dans la direction f, g, h, mais la tangente et le plan osculateur sont à l'infini; f_1, g_1, h_1 détermine un second point à l'infini de l'asymptote, (x_0, y_0, z_0) est un point quelconque de l'espace. On déterminerait facilement, dans chacun de ces trois cas, les ordres de singularité, tangentiel et d'osculation du point.

Ce mode de représentation convient naturellement au cas particulier de G plane; il suffit de supposer n' infini, ou de supprimer la dernière colonne verticale dans les expressions indiquées; alors si G n'est pas droite, les deux directions f, g, h, f_1, g_1, h_1 sont distinctes.

De plus, il est réalisable dans tous les cas, *que le point* $t=0$ *soit réel ou imaginaire*, par exemple, en déterminant d'abord les coefficients fonctions de u d'après leur signification géométrique, d'où l'on déduira facilement ensuite, par identification, les exposants m, n, n'.

§ 2. — Principe de la méthode.

C'est, au fond, celui qui a déjà été appliqué aux surfaces réglées et cerclées [1]. Nous rapportons la génératrice G à un trièdre trirectangle T lié à elle et qui ne dépend que de u. Soient (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de l'origine O de ce trièdre par rapport aux axes coordonnés fixes $Oxyz$, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ les paramètres directeurs des arêtes OX, OY, OZ de ce trièdre, L, M, N, P, Q, R ses composantes de translation et de rotation (projetées sur lui-même). Toutes ces quantités sont des fonctions de u seul; les coordonnées X, Y, Z d'un point M de la génératrice G par rapport à ce trièdre dépendent de u et de t, et les coordonnées x, y, z de ce point par rapport aux axes fixes $Oxyz$ sont exprimées ainsi :

$$x = x_0 + \alpha X + \alpha_1 Y + \alpha_2 Z, \qquad y = \ldots, \qquad z = \ldots.$$

(1) Thèse, Chap. II, Ire Partie.

Les composantes suivant les arêtes de T d'un déplacement de M sont

$$\frac{\partial X}{\partial t} dt + \left(L + \frac{\partial X}{\partial u} + QZ - RY\right) du, \qquad \ldots, \qquad \ldots.$$

Par conséquent, si l'on considère une famille de lignes tracées sur la surface S, dont l'équation traduise une propriété de ce déplacement, on pourra exprimer les coefficients de cette équation d'une part avec L, M, N, P, Q, R, et leurs dérivées, d'autre part, avec X, Y, Z, et leurs dérivées partielles, et l'on étudiera la composition de ces coefficients par rapport au facteur t, $t = 0$ étant la ligne considérée sur la surface.

Le succès du procédé tient au choix du trièdre T lié à la génératrice mobile.

Pour faire ce choix, revenons aux expressions fondamentales (1) des coordonnées.

Si la direction fgh n'est pas *isotrope, non plus* que le plan des directions $fgh, f_1 g_1 h_1$, tout le long de la ligne $t = 0$, nous pourrons prendre OX de T parallèle à f, g, h, OY perpendiculaire à OX dans le plan P $[f, g, h, f_1, g_1, h_1]$, OZ complétant le trièdre; et nous supposerons les développements préparés de façon que l'on ait

$$f = \alpha, \qquad g = \beta, \qquad h = \gamma, \qquad f_1 = \alpha_1, \qquad g_1 = \beta_1, \qquad h_1 = \gamma_1;$$

de plus nous prendrons pour origine O de T le point $(x_0 y_0 z_0)$ des développements (1); et cela peut se faire, que $t = 0$ *soit à distance finie ou à l'infini*. En particulier, si $t = 0$ est à distance finie, le trièdre T n'est autre chose que le trièdre naturel de G (tangente, normale principale, binormale) au point $t = 0$ de cette ligne (notons que ce point peut rester fixe). Si la direction f, g, h ou le plan P sont isotropes, T ne peut plus être ainsi choisi. On dirige alors les arêtes de ce trièdre par des combinaisons linéaires et homogènes convenablement choisies des coefficients $f\ldots, g\ldots, h\ldots$ des développements; nous ne nous arrêterons pas à les indiquer en général, et nous nous bornerons à en montrer un exemple simple en traitant le problème suivant.

II.

SYSTÈMES RATIONNELS PLANS DIVISÉS HOMOGRAPHIQUEMENT PAR LEURS TRAJECTOIRES ORTHOGONALES.

Proposons-nous le problème suivant :

A quelles conditions une génératrice rationnelle plane mobile est-elle divisée homographiquement par ses trajectoires orthogonales?

On sait que l'orthogonalité se conserve quand on développe le plan mobile de la génératrice sur un plan fixe; donc il suffit de résoudre la question pour un réseau *plan* de génératrices rationnelles. Supposons-le défini par les expressions

$$x = x_0 + f t^m X_1 + f_1 t^{m+n} Y_1,$$
$$y = y_0 + g t^m X_1 + g_1 t^{m+n} Y_1.$$

Nous prendrons toujours le point $(x_0, y_0, 0)$ pour origine du trièdre $T(\gamma = \gamma_1 = z_0 = 0)$, de sorte qu'on aura aussi dans le plan du système

$$x = x_0 + \alpha X + \alpha_1 Y, \qquad y = y_0 + \beta X + \beta_1 Y$$

(notations ci-dessus). L'équation différentielle des trajectoires orthogonales sera

$$\xi\, dt + \xi_1\, du = 0,$$

en posant

$$\xi = \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)^2, \qquad \xi_1 = \frac{\partial X}{\partial t}\left(L + \frac{\partial X}{\partial u} - RY\right) + \frac{\partial Y}{\partial t}\left(M + \frac{\partial Y}{\partial u} + RX\right).$$

Il faut donc chercher dans quel cas ξ_1 est divisible par ξ, c'est-à-dire à quelles conditions un facteur t^p de ξ apparaît dans ξ_1, de sorte que $\frac{\xi_1}{\xi}$ ne devienne pas infini pour $t = 0$. Ici, f, g dirigent la tangente à G, quand $t = 0$ est à distance finie, ou bien, quand cette ligne $t = 0$ est à l'infini, indiquent la direction dans laquelle s'éloigne le point correspondant.

1° La direction (f, g) n'est *pas isotrope*. On peut supposer $\alpha = f$,

$\beta = g$, $\alpha_1 = f_1$, $\beta_1 = g_1$, $X = t^m X_1$, $Y = t^{m+n} Y_1$, de sorte que T est le trièdre naturel de la génératrice, le long de la ligne $t = 0$. Nous poserons

$$\frac{\partial X}{\partial t} = t^{m-1} X_2, \qquad \frac{\partial Y}{\partial t} = t^{m+n-1} Y_2,$$

X_2 et Y_2 étant finis et $\neq 0$ pour $t = 0$. Donc on pourra écrire

$$\xi = t^{2m-2} S, \qquad \xi_1 = t^{m-1}(LX_2 + Mt^n Y_2) + t^{2m-1} S_1,$$

S étant fini et $\neq 0$, pour $t = 0$, et S_1 étant alors fini, mais pouvant être nul.

Pour étudier le rapport $\frac{\xi_1}{\xi}$, distinguons deux cas suivant que m est positif ou négatif.

Si m est positif, c'est-à-dire si $t = 0$ est à distance finie, le rapport $\frac{\xi_1}{\xi}$ reste fini pour $t = 0$ aux conditions suivantes : dès que m est > 1, $L = 0$ doit être nul, c'est-à-dire que la ligne $t = 0$ est orthogonale aux génératrices; cela suffit, si n est $\geqq m - 1$; si $n < m - 1$, il faut de plus que $M = 0$, c'est-à-dire que le point singulier $t = 0$ doit rester fixe. Ainsi les rebroussements à distance finie des génératrices, pour lesquels $m \leqq n + 1$, doivent se déplacer orthogonalement aux génératrices; les autres rebroussements à distance finie ($m > n + 1$) doivent rester fixes.

Si m est négatif $= -m'$, on a

$$\xi = t^{-2m'-2} S, \qquad \xi_1 = t^{-m'-1}(LX_2 + Mt^n Y_2) + t^{-2m'-1} S_1,$$

d'où

$$\frac{\xi_1}{\xi} = t^{m'+1} \frac{LX_2 + Mt^n Y_2}{S} + t\frac{S_1}{S},$$

dont la limite est 0 pour $t = 0$. Donc cette hypothèse n'entraîne aucune condition nouvelle.

2° La direction (f, g) est *isotrope*. On peut disposer les développements de x et y de façon que (f_1, g_1) soit la direction conjuguée, à l'aide d'une substitution linéaire préalable effectuée sur ces derniers coefficients. Nous poserons alors

$$f = \alpha + i\alpha_1, \qquad g = \beta + i\beta_1, \qquad f_1 = \alpha - i\alpha_1, \qquad g_1 = \beta - i\beta_1,$$

en assujettissant α, β, α_1, β_1 aux conditions

$$\alpha^2+\beta^2=\alpha_1^2+\beta_1^2=1, \qquad \alpha\alpha_1+\beta\beta_1=0,$$

qui sont compatibles avec les égalités précédentes, par hypothèse; le trièdre T est alors déterminé. On tire de là

$$\begin{aligned} x &= x_0+(\alpha+i\alpha_1)\,t^m X_1+(\alpha-i\alpha_1)\,t^{m+n}Y_1 \\ &= x_0+\alpha(t^m X_1+t^{m+n}Y_1)+\alpha_1 i(t^m X_1-t^{m+n}Y_1), \\ y &= y_0+(\beta+i\beta_1)\,t^m Y_1+(\beta-i\beta_1)\,t^{m+n}Y_1 \\ &= x_0+\beta(t^m X_1+t^{m+n}Y_1)+\beta_1 i(t^m X_1-t^{m+n}Y_1), \end{aligned}$$

donc

$$X=V+W, \qquad Y=i(V-W),$$

en posant

$$V=t^m X_1, \qquad W=t^{m+n}Y_1;$$

ξ et ξ_1 se transforment alors ainsi

$$\xi=L\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial W}{\partial t}=t^{2m+n-2}S,$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\partial V}{\partial t}(L+iM) \\ &\quad+\frac{\partial W}{\partial t}(L-iM)+2\frac{\partial V}{\partial t}\left(\frac{\partial W}{\partial u}+RiW\right)+2\frac{\partial W}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial u}-RiV\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\xi_1=t^{m-1}[X_2(L+iM)+t^n Y_2(L-iM)]+t^{2m+n-1}S_1,$$

S étant fini et $\neq 0$ pour $t=0$, et S_1 restant alors fini.

Si m est positif, il sera donc nécessaire que $L+iM=0$, c'est-à-dire que la ligne $t=0$ soit isotrope; cela sera suffisant si $m=1$; sinon, $L-iM$ devient aussi nul, par conséquent les points de rebroussement à tangente isotrope doivent rester fixes.

Soit m négatif, égal à $-m'$; on a alors

$$\xi=t^{-2m'+n-2}S, \qquad \xi_1=t^{-m'-1}[X_2(L+iM)+t^n Y_2(L-iM)]+t^{-2m'+n-1}S,$$

$$\frac{\xi_1}{\xi}=\frac{t^{m'+1-n}}{S}[X_2(L+iM)+t^n Y_2(L-iM)]+\frac{tS_1}{S}.$$

Donc, quand m' dépasse n, c'est-à-dire quand l'asymptote est à l'infini, il n'intervient aucune condition nouvelle. Mais, si l'asymptote est à distance finie, lorsque $m'+1$ est $<n$, il faut que $L+iM=0$, c'est-à-dire que le point (x_0, y_0) doit décrire une droite isotrope. D'ailleurs, on a

$$L+iM=\alpha x'_0+\beta y'_0+i(\alpha_1 x'_0+\beta_1 y'_0)=fx'_0+gy'_0$$

(les accents indiquant la dérivation par rapport à u); si $g=if$, la condition est $x_0+iy_0=\text{const.}$, qui exprime que l'asymptote est fixe. Les coordonnées homogènes sont ici

$$x_1=x_0 t^{m'}+f\mathrm{X}_1+f_1 t^n \mathrm{Y}_1, \qquad x_2=\ldots, \qquad x_3=\ldots, \qquad x_4=t^{m'};$$

on a $m'<n$, et l'ordre tangentiel est, d'après ces expressions, $n-m'$. Donc le cas actuel $n-m'>1$ est celui d'un point cyclique d'inflexion; ainsi la tangente en un pareil point doit être fixe.

En résumé, les conditions cherchées sont les suivantes :

1° *Les rebroussements des génératrices* G *à tangente non isotrope, à distance finie, et tels que* $m \geqq n+1$ (*en particulier le rebroussement ordinaire* $m=2$, $n=1$) *doivent décrire des lignes orthogonales à la génératrice mobile. Les autres rebroussements à distance finie, et particulièrement ceux à tangente isotrope, doivent rester fixes.*

2° *Les tangentes isotropes dont le point de contact à distance finie n'est pas de rebroussement, doivent rester fixes.*

3° *Si un point cyclique est d'inflexion, sa tangente doit rester fixe quand* G *varie.*

Il résulte de là cette conséquence, que toute tangente isotrope à la génératrice G doit rester fixe, sauf si son point de contact est cyclique et n'est pas un point d'inflexion, d'où, dans certains cas, la fixité des foyers de G.

Applications. — Ces conditions montrent aussitôt que tout *système de cercles* répond à la question; et c'est un cas où les tangentes isotropes sont mobiles, en général; un *système de coniques réelles* ne passant pas aux points cycliques, n'est solution que s'il est formé de *coniques homofocales*. Cherchons les solutions formées de *lignes du troisième ordre;* supposons-les d'abord de *quatrième classe :* si elles ne passent pas aux points cycliques, il suffit d'écrire que les tangentes isotropes sont fixes, d'où généralement huit conditions déterminant une seule cubique; mais *prenons les tangentes à la droite de l'infini,* il y aura en tout à exprimer sept conditions, d'où une solution; si elles passent aux points cycliques, mais que ces points ne soient point d'inflexion, il restera à exprimer la fixité de quatre tangentes isotropes, soit en tout six conditions, d'où un réseau dépendant de deux paramètres; si les deux points cycliques sont d'inflexion, les tangentes doivent y être fixes, d'où en tout six conditions; il reste encore à exprimer la fixité de deux autres tangentes isotropes, et la cubique est déterminée; ici la droite de l'infini, étant un axe d'inflexion, ne peut être tangente aux cubiques considérées.

Ainsi nous trouvons deux solutions :

1° *Les cubiques non circulaires tangentes à la droite de l'infini et à foyers fixes;*

2° *Les cubiques circulaires et à foyers fixes.*

Soit maintenant un système de cubiques de *troisième classe,* à un rebroussement. En ne considérant que des lignes réelles, nous aurons à examiner le seul cas du rebroussement à tangente non isotrope : il doit alors décrire une trajectoire orthogonale particulière; on peut se la donner arbitrairement, et le choix du rebroussement sur elle assujettit la cubique à trois conditions. Si la cubique ne passe pas aux points cycliques et admet six tangentes isotropes distinctes, leur fixité entraîne six conditions, celle relative au point de rebroussement, une septième (on ne se donne pas d'avance le lieu du rebroussement); la cubique est donc déterminée en général; en prenant des courbes tangentes à la droite de l'infini, il y aura une condition de moins; d'où une solution, mais qui dépend d'une relation *différentielle* entre les paramètres. Si la cubique passe aux points cycliques, ils ne peuvent être tous deux d'inflexion, il suffira d'exprimer que le foyer unique à distance finie est fixe, soit deux conditions; et en se donnant de plus la trajectoire du rebroussement, on aura une solution sous forme finie. Ainsi nous obtenons :

1° *Les cubiques non circulaires à rebroussement tangentes à la droite de l'infini, dont les foyers sont fixes et dont le rebroussement décrit une trajectoire orthogonale particulière;*

2° *Les cubiques circulaires, à foyer fixe, dont le rebroussement se déplace encore orthogonalement à la cubique.*

Cette dernière catégorie peut être déterminée par des opérations purement algébriques, aussi bien que les familles ci-dessus de cubiques sans rebroussement. C'est la condition d'orthogonalité relative aux rebroussements qui empêche d'obtenir, *par des opérations purement algébriques*, les systèmes généraux de courbes unicursales répondant à la question. Donc, *quand la génératrice sera la ligne générale d'ordre p, quel que soit p, on pourra obtenir sous forme finie la solution du problème.*

III.

ÉTUDE DES CONJUGUÉES D'UNE GÉNÉRATRICE RATIONNELLE MOBILE ET DES ASYMPTOTIQUES DE LA SURFACE ENGENDRÉE S.

§ 1. — Exposé de la méthode.

Nous suivrons dans cette étude la méthode générale précédente qui va présenter alors une simplification importante : les propriétés à étudier n'étant pas altérées par une transformation homographique quelconque de la surface S, on pourra toujours supposer le lieu $t = 0$ sur cette surface ramenée à distance finie, et décrit par un point de G, réel, ainsi que le trièdre naturel de G en ce point. Par conséquent, c'est ce trièdre que nous prendrons pour T, de sorte que l'on aura

$$X = t^m X_1, \qquad Y = t^{m+n} Y_1, \qquad Z = t^{m+n+n'} Z_1,$$

m, n, n' étant des entiers positifs au moins égaux à 1, et X, Y, Z étant $\neq 0$, pour $t = 0$.

De plus, les propriétés étudiées ici pourront être immédiatement transformées par polaires réciproques et appliquées à la surface enveloppe d'une développable rationnelle mobile; en supposant, ce que l'on peut toujours faire, que le plan tangent $t = 0$ à cette développable ne passe pas par l'origine des coordonnées, la signification des entiers m, n, n' est immédiate : m indique le nombre des plans tangents à la développable passant par un point quelconque de l'espace et confondus avec $t=0$, $m+n$ est le nombre de ces plans passant par un point de la génératrice rectiligne de la développable, $m+n+n'$ le nombre de ces plans confondus, parmi ceux qui passent par un point de l'arête de rebroussement.

Nous désignerons par $\Delta, \Delta', \Delta''$ les trois déterminants

$$\Delta = \left|\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right|, \qquad \Delta' = \left|\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial t}\right|, \qquad \Delta'' = \left|\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right|$$

(x, y, z, coordonnées absolues d'un point de S), et nous écrirons ainsi *les équations des asymptotiques de* S *et des conjuguées de* G

$$\text{(I)} \qquad \Delta\, dt^2 + 2\Delta' du\, dt + \Delta'' du^2 = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad \Delta\, dt + \Delta' du = 0.$$

Dans tout ce qui suit, nous désignerons généralement ces équations par (I) et (II).

Ceci posé, considérons le trièdre naturel U de G en chacun de ses points M (T est ce trièdre le long de $t=0$). Soient $\xi, 0, 0, p, 0, r$ ses translations et rotations quand $u=$ const., $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, p_1, q_1, r_1$ les mêmes quantités quand $t=$ const. On peut développer ces diverses quantités, finies et régulières pour $t=0$, puisque G est unicursale par rapport à t, suivant les puissances entières de t, les coefficients des développements étant des fonctions de u; d'autre part, on peut exprimer avec elles et leurs dérivées les trois coefficients Δ, Δ', Δ'', et par conséquent reconnaître l'*ordre infinitésimal* de ces coefficients par rapport à t; d'où l'on déduira les conditions que doit remplir G le long de $t=0$, pour que, après suppression du facteur t^α (α entier positif) commun aux coefficients de (I) ou (II), le premier coefficient, celui de dt^2, ne s'annule plus pour $t=0$. Le même procédé permet d'étudier, au préalable, les conditions *d'abaissement de la classe de la développable* Θ *circonscrite à* S, *le long de* G, *relativement au lieu* $t=0$, abaissement qui se manifeste par la présence d'un facteur t^α commun aux coordonnées du plan tangent.

§ 2. — Résultats.

Nous avons détaché du corps de ce travail les discussions qu'exigent ces recherches [1]. Nous en consignons seulement ici les résultats, après avoir observé : 1° que le facteur commun aux trois déterminants directeurs du plan tangent, tels que $\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t}$, est ξl, en désignant par l le produit des facteurs $t - t_0$ communs à η_1 et ζ_1 ; 2° que le coefficient Δ est égal à $-r\xi^2\zeta_1$; cela résulte de l'expression, obtenue par un calcul direct, des déterminants en question exprimés à l'aide des translations et rotations de U. Enfin, dans ce qui suit, nous désignerons par D le lieu $t = 0$ du point considéré de G correspondant aux exposants m, n, n' ; ce point peut d'ailleurs être fixe. Voici maintenant les résultats en question :

1° L'*abaissement de la classe de* Θ relatif au lieu D est *généralement* $m - 1$; il *dépasse* ce nombre quand D *est enveloppe* de G : *si cette enveloppe est une droite*, le nouvel abaissement est n ; si *elle est courbe*, il est généralement égal au plus petit des nombres m et n, et ne s'élève que si $m = n$, et si en même temps l'ordre du contact de l'enveloppe avec l'enveloppée s'élève lui-même ; d'une manière générale, si k est le nouvel *abaissement* (qui s'ajoute à $m - 1$) *relatif à une enveloppe droite ou courbe*, la distance de deux points de l'enveloppe et de l'enveloppée, infiniment voisins de $t = 0$, est d'ordre $m + k$ par rapport à t ; *si l'enveloppe* D *est un point*, le nouvel abaissement est généralement m ; il *dépasse* ce nombre de n si la *tangente aux génératrices* G du faisceau en ce *point fixe* D *est également fixe* et peut *s'élever* encore dès que l'*ordre* du contact de deux quelconques des génératrices du faisceau *s'élève* lui-même ; d'une façon générale, si k est le nouvel abaissement (qui s'ajoute à $m - 1$) relatif au point fixe, et que l'on coupe le faisceau par un plan voisin de $t = 0$, l'ordre par rapport à t de la distance de deux points infiniment voisins de $t = 0$ sur deux génératrices quelconques du faisceau infiniment voisines est k.

2° On vérifie aisément que les trois coefficients $\Delta, \Delta', \Delta''$ contiennent

(1) Elles font l'objet d'une Note complémentaire placée à la fin de notre thèse : *Sur les surfaces à génératrices rationnelles*; Gauthier-Villars et fils, 1894.

le facteur commun ξ ; posons

$$\Delta = \xi d, \qquad \Delta' = \xi d', \qquad \Delta'' = \xi d''.$$

Nous indiquerons les conditions dans lesquelles l'équation (II) des conjuguées, puis l'équation (I) des asymptotiques sont divisibles par la puissance de t de l'ordre de leur premier terme Δ. Dans le Tableau suivant, nous écrirons entre crochets, à la suite de chaque cas, l'exposant de la puissance qui disparaît ainsi *des trois coefficients* d, d', d'', *déjà débarrassés du facteur* ξ d'ordre $m-1$. Il ne faudra donc pas omettre ce facteur quand on calculera la réduction du degré $4q-6$ du premier coefficient des équations différentielles rendues entières (q degré de G), relativement au lieu D que décrit le point $t=0$ de la génératrice; ce degré se rapporte au coefficient $\Delta = r\xi^2\zeta_1 = \xi d$.

TABLEAU I. — Lignes conjuguées.

I. — D *n'est pas enveloppe de* G.	1° $N \neq 0$; le plan tangent le long de D n'est pas osculateur à G; si O est d'inflexion, la tangente à G en ce point doit décrire une développable le long de D [$m+n-2$].
	2° $N=0$; le plan tangent est le plan osculateur de G; il faut que la tangente à G en soit la caractéristique le long de D: cela suffit si le plan osculateur est ordinaire ($n'=1$): sinon, ce plan doit rester fixe. Cas impossible pour G plane [$m+n+n'-2$].
II. — D *ligne enveloppe de* G.	1° Le long de D, D et G n'ont pas même plan osculateur; il faut que $m=1$ [n].
	2° D et G ont même plan osculateur, mais D n'est pas plane. Si le point O est ordinaire ($m=n=n'=1$), il n'y a *généralement* pas d'autre condition [2], à moins que l'ordre k du contact de G et D ne s'élève et alors l'ordre α du premier terme doit être $\leqq 2k$ [α]. Dans le cas de G plane, il faut que $m=n$, avec d'autres conditions dès que $m>1$ [$4m-2$].
	3° D courbe plane dans le plan osculateur fixe de G : m ou n doit être égal à 1, avec une condition d'inégalité si $m=n$ [$n'+\mu$, μ étant le plus petit des nombres m et n].
	4° D droite autour de laquelle tourne le plan osculateur de G : il faut que m ou $n'=1$, avec une certaine inégalité si $m=n'=1$ [$m+2n-1$].
	5° D droite et plan osculateur de G fixe : aucune autre condition [$2m+2n+n'-3$].

III. — D *point*.

1° Le plan osculateur de G n'est pas tangent au cône C, lieu de OX, tangente à G : pas d'autre condition $[2m+n-2]$.

2° Le plan osculateur de G est tangent au cône C, non réduit à une droite : il faut que n ou $n'=1$, avec une certaine inégalité si $n=n'=1$ $[2m+2n-2]$.

3° La tangente à G est fixe, le plan osculateur mobile : pas d'autre condition $[2m+2n-2]$.

4° Le plan osculateur de G est fixe, la tangente mobile : pas d'autres conditions $[2m+n+n'-2]$.

5° Le plan osculateur et la tangente sont fixes : pas d'autres conditions *en général* $[2m+2n+n'-2]$, à moins que l'ordre du contact k de deux génératrices ne s'élève; et alors si $m=n=n'=1$, il faut que l'ordre $\alpha+3$ du premier terme Δ de l'équation *ne dépasse* pas $2(k+1)$.

Pour dresser le Tableau relatif aux lignes asymptotiques, nous conserverons les divisions du Tableau précédent, avec le même numérotage, et nous y indiquerons seulement les conditions *nouvelles* qui ne figurent pas dans le précédent.

TABLEAU II. — Lignes asymptotiques.

I. — D *non enveloppe*.

1° Si $n=1$, $m=2$, le plan osculateur de D doit rester tangent à G; si $n=1$, $m=3$, D doit être une droite, et cela peut ne pas suffire si $m>3$; si $n>1$, D doit être plane et, dès que $m=3$, une droite; si n et m dépassent 3, il peut y avoir d'autres conditions.

2° Il faut que le plan osculateur de G soit fixe, ce qui suffit si m et n sont $\leqq 2$.

II. — D *ligne enveloppe*.

1° Dès que $n>2$, D doit être plane.

2° G gauche et O point ordinaire, pas de nouvelles conditions; G plane : $m=n=1$.

3° $m=1$.

4° $m \leqq 2n+1$.

5° Aucune nouvelle condition.

III. — D *point*.

1° Dès que $n>2$, il faut que OX décrive un plan fixe.

2° $n=1$.

3°, 4°, 5° : pas de conditions nouvelles.

§ 3. — Étude des conjuguées et des asymptotiques en coordonnées tangentielles.

Les Tableaux précédents se transforment immédiatement par polaires réciproques et permettent alors de faire l'étude des équations différentielles des conjuguées d'une famille de développables rationnelles et des asymptotiques de leur surface enveloppe.

D'autre part, on sait que *la transformation de Laplace conserve les conjuguées;* de sorte que l'étude de l'équation des conjuguées des génératrices G ou de celle des conjuguées des développables Γ formées par les plans osculateurs des génératrices G doit conduire aux mêmes résultats; on le vérifie aisément en remarquant que les exposants m_1, n_1, n'_1, relatifs au plan osculateur de G en O (m, n, n'), ont pour valeur $m_1 = n'$, $n_1 = n$, $m = n'_1$.

§ 4. — Décomposition du premier coefficient et du discriminant de (I) en facteurs; relation avec la développable circonscrite Θ.

Désignons par ρ le produit (à un facteur près fonction de u seul) des binomes $t - t_0$ qui s'annulent aux points d'inflexion de G, en les prenant chacun avec sa multiplicité dans la rotation r du trièdre U; par s le produit des facteurs de *rebroussement* de G; par l le produit des facteurs communs aux translations η_1 et ζ_1 ou facteurs *enveloppes;* par g le produit des facteurs de ζ_1 non contenus dans η_1; soient enfin ρ_1, s_1, l_1, g_1 les produits analogues relatifs à la développable circonscrite Θ, le long de G.

Appelons $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ les coordonnées homogènes d'un point de S, exprimées par quatre polynomes en t premiers entre eux; soit v_i les coordonnées du plan tangent à S, exprimées de même. Je désignerai maintenant par Δ, Δ', Δ'' les trois polynomes entiers

$$\Delta = \left| x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right|, \qquad \Delta' = \left| x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial t} \right|, \qquad \Delta'' = \left| x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \right|$$

et par Δ_1, Δ'_1, Δ''_1 les suivants

$$\Delta_1 = \left| v \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right|, \qquad \Delta'_1 = \left| v \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial_1^2 v}{\partial t\, \partial u} \right|, \qquad \Delta''_1 = \left| v \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} \right|,$$

de sorte que l'on a

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta'_1}{\Delta'} = \frac{\Delta''_1}{\Delta''};$$

d'autre part, on a aussi

$$(\omega) \qquad \left| x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{(2,3,4)} = \lambda \varphi_1, \qquad \left| \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{(2,3,4)} = \lambda_1 x_1$$

et trois autres couples analogues, en permutation d'indices, les polynomes entiers λ et λ_1 restant d'ailleurs les mêmes. Multiplions membre à membre les égalités (ω), en tenant compte des relations

$$\Delta = -\lambda \sum \varphi \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \lambda \sum \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial t}, \qquad \Delta' = \lambda \sum \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \Delta'' = \lambda \sum \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u},$$

et nous obtiendrons l'identité

$$\Delta'^2 - \Delta\Delta'' = \lambda^3 \lambda_1.$$

Un calcul semblable donnerait

$$\Delta'^2_1 - \Delta_1 \Delta''_1 = \lambda_1^3 \lambda.$$

Mais $\dfrac{\Delta'^2 - \Delta\Delta''}{\Delta'^2_1 - \Delta_1\Delta''_1} = \dfrac{\Delta^2}{\Delta^2_1}$; donc on a

$$\lambda \Delta_1 = \pm \lambda_1 \Delta.$$

D'autre part, à un facteur près fonction de u seul, on peut écrire, d'après ce que nous avons observé précédemment,

$$\lambda = sl, \qquad \lambda_1 = s_1 l_1, \qquad \Delta = \rho s^2 l g, \qquad \Delta_1 = \rho_1 s_1^2 l_1 g_1;$$

par suite, on aura $\rho s g = \rho_1 s_1 g_1$ (à un facteur près fonction de u).

Ces relations permettent d'étudier le discriminant $\Delta'^2 - \Delta\Delta''$, suivant les conditions du déplacement de G, de Θ et leurs singularités; nous aurons souvent à en faire usage.

§ 5. — Application à un point ordinaire.

Soit un point ordinaire de G ($m = n = n' = 1$) qui décrit D ou $t = 0$; le long de D on a $\rho s \neq 0$; les discussions générales que nous avons faites donnent alors les résultats suivants :

1° Si $t=0$ n'est pas une *enveloppe* de $G(l\neq 0)$, il peut annuler g et par suite Δ; le plan tangent à S le long de D est alors le plan osculateur de G, et t est facteur simple de g; pour qu'il disparaisse de l'équation des conjuguées, il faut que la tangente OX à G décrive une développable le long de D, c'est-à-dire que la développable Γ d'arête G admette pour enveloppe la développable $t=0$ des plans tangents le long de D, et pour qu'il disparaisse de (I) il faut, de plus, que cette dernière développable se réduise à un plan, ou que le plan osculateur de G soit fixe. Ce cas ne se présente jamais si G est plane.

2° Si D est une *ligne* enveloppe de G, ayant en chaque point un plan osculateur distinct de celui de G, ou bien est un *point fixe*, tel qu'en ce point la tangente OX à G est mobile, et le plan osculateur de G non tangent au lieu de OX, cette enveloppe abaisse d'*une unité* la classe de Θ; $t=0$ n'annule pas g; t est un facteur *simple de* Δ qui disparaît complètement de l'équation (I).

3° Si D est une *ligne* enveloppe de G avec coïncidence des plans osculateurs, mais sans osculation de G et de D (en particulier, D peut être une *droite*), ou bien est un *point fixe* à tangente variable, le plan osculateur de G étant tangent au lieu de OX (en particulier, si le plan *osculateur* de G est *fixe*), t est simple dans l, simple dans g; donc D abaisse la classe de Θ d'*une* unité, et disparaît comme facteur *double* de l'équation (I).

4° Si D est une *ligne courbe enveloppe* avec laquelle G a un contact d'ordre $k>1$, t est de multiplicité k dans l et n'annule *généralement* pas g, de sorte que D abaisse de k l'ordre de Θ et disparaît de l'équation (I) comme facteur d'*ordre* k; cependant, il peut arriver que g s'annule aussi, sans que l'ordre du contact s'élève, et alors il faut, pour qu'on puisse débarrasser les équations (I) et (II) du facteur t^α du premier terme, que $\alpha\leqq 2k$. Si D est un point fixe de G, avec tangente fixe et plan osculateur mobile, t est un facteur *double* dans l et n'annule pas g, de sorte que D abaisse la classe de Θ de *deux* unités et disparaît de (I) comme facteur *double*.

5° Si D est un point fixe de G, avec tangente et plan osculateur fixes, et de telle sorte que deux génératrices quelconques G du faisceau ne soient pas osculatrices, t est *double* dans l, *au moins simple* dans g; s'il est simple dans g, D abaisse la classe de Θ de *deux* unités et disparaît de (I) comme facteur *triple;* mais il peut être multiple dans g : pour disparaître alors de (I) et de (II) avec l'ordre qu'il a dans Δ, il faut qu'il soit au plus *double* dans g, et il disparaît alors des équations avec l'ordre 4. Si, au contraire, deux génératrices quelconques du faisceau ont un contact d'ordre $k > 1$, t est un facteur d'ordre $k+1$ de l, et généralement g est $\neq 0$, de sorte que D abaisse la classe de Θ de $k+1$ unités et disparaît de (I) comme facteur d'ordre $k+1$; mais il peut se faire que g soit aussi annulé sans que l'ordre du contact s'élève, et pour que le facteur t^α de Δ disparaisse alors des équations (I) et (II), il faut que $\alpha \leqq 2(k+1)$.

§ 6. — Solutions singulières de (I).

Supposons d d'ordre α, d' et d'' au moins du même ordre. Si $t=0$ est solution singulière de (I), débarrassée du facteur t^α, il faut qu'elle vérifie l'équation différentielle et annule son discriminant; donc, en posant $d = t^\alpha d_1$, $d' = t^\alpha d'_1$, $d'' = t^\alpha d''_1$, on devra avoir, pour $t=0$,

$$d'^2_1 - d_1 d''_1 = 0, \qquad d''_1 = 0;$$

il faut, par conséquent, que d' et d'' soient d'ordre au moins égal à $\alpha+1$; de plus, si l'ordre de d'' dépasse encore celui de d' d'au moins une unité, $t=0$ devient racine *multiple* du discriminant.

En recherchant, d'après la discussion faite, les cas où ces conditions sont réalisées, on trouve les résultats suivants :

1° Le plan osculateur de G n'est pas tangent à D; si $m=1$, $n \leqq 2$, *le plan tangent doit être fixe,* ce qui a lieu si l'équation (I) est débarrassée des facteurs du premier terme; si $m=2$, $n=1$ ou 2, *le plan tangent doit être fixe et* D *doit être une droite,* et alors $t=0$ est racine *multiple* du discriminant; *il en est de même* si $m=1$, lorsque D est ainsi une droite avec plan tangent fixe.

2° Le plan tangent est le plan *osculateur* de G; si $m=n=1$, il faut et il suffit que *ce plan soit fixe,* ce qui a lieu si l'équation (I) est débarrassée du facteur du premier terme.

3° *Si* D *est une ligne enveloppe,* il faut qu'elle soit *une droite* le long de laquelle *le plan osculateur de* G *est fixe,* et alors $t=0$ est racine *multiple* du discriminant.

4° Si D *est un point,* avec *tangente* OX *à* G *mobile,* il faut que le plan osculateur de G ne soit pas tangent au lieu de OX; cela suffit si $n = 1$, et si n *est* > 1; *le lieu de* OX doit, de plus, être *un plan, alors* $t = 0$ *devient racine multiple du discriminant.*

5° Si G a *un point et la tangente en ce point fixes* pour $t = 0$, $t = 0$ est racine *multiple* du discriminant; il en est de même si le plan *osculateur* est également *fixe,* pourvu que, dans le cas du point ordinaire ($m = n = n' = 1$), l'ordre α du premier terme Δ soit inférieur à $2(k+1)$, k étant l'ordre du contact de deux génératrices quelconques du faisceau.

6° Si, pour $t = 0$, *le point et le plan osculateur de* G *sont fixes,* mais la tangente *mobile,* $t = 0$ est encore racine multiple du discriminant (¹).

§ 7. — Racines multiples du discriminant de (I) supposée normale.

Nous venons de signaler quelques cas particuliers, où il existe de pareilles racines; on peut étudier plus complètement la question, à l'aide des formules que nous avons établies. Supposons l'équation (I) normale, de sorte que, en désignant par Δ, Δ', Δ'' ses coefficients *rendus entiers* en t, on peut poser $\Delta' = e\Delta$, $\Delta'' = f\Delta$ (e, f entiers en t), d'où

$$\Delta\Delta'' - \Delta'^2 = (f - e^2)\,\Delta^2.$$

Les formules du § 4 nous donnent alors, en désignant le discriminant $f - e^2$ par H,

$$\rho^2 s g^2 \mathrm{H} = l\lambda_1, \qquad \rho s g = \rho_1 s_1 g_1,$$

qui permettront d'étudier, relativement à la développable Θ, la signification d'une racine multiple de H. Par exemple, supposons que $t = 0$ étant une pareille racine, le long de $\mathrm{D}(t = 0)$, on ait $\rho s \neq 0$ ($m = n = 1$) et aussi $g \neq 0$: 1° Si l est $\neq 0$ (D non enveloppe), il faut que t soit facteur double de λ_1, et que $\rho_1 s_1 g_1 \neq 0$; donc, pour la développable Θ,

(¹) On obtiendrait, de même, les cas où $t = 0$ est solution particulière de l'équation de Riccati, qui détermine les conjuguées; citons notamment le cas d'une inflexion ordinaire ($m = 1$, $n = 2$), qui ne décrit pas une enveloppe de G, ou celui d'un point ou d'un plan tangent fixe, *en général.*

$t=0$ doit être un plan tangent ordinaire $\rho_1 s_1 \neq 0$, et, d'après le § 5, Θ doit être osculatrice à l'enveloppe de ce plan, du moins en général (cas particulier : D droite avec plan tangent fixe). 2° Soit $l=0$ (D enveloppe); si t est facteur simple dans l, il devra être simple dans λ_1 : ce sera un facteur enveloppe ordinaire de Θ, qui roule ainsi sur la développable des plans tangents (maintenant bien déterminés) à S le long de D. Si t est facteur double dans l, et alors G sera généralement osculatrice à D, il sera sûrement facteur double de H. On voit, par ces simples exemples, les applications qu'on peut tirer des formules du § 4.

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATIONS.

Nous allons appliquer les résultats précédents : 1° au cas où G est une ligne plane; 2° à celui où elle est une cubique gauche; dans ces deux cas, nous chercherons d'abord à déterminer la ligne G, de façon qu'elle soit divisée homographiquement par ses conjuguées, puis, lorsqu'il en est ainsi, à reconnaître quand l'équation des asymptotiques est normale, et à en trouver alors des cas d'intégration.

I.

LIGNES PLANES DIVISÉES HOMOGRAPHIQUEMENT PAR LEURS CONJUGUÉES.

§ 1. — Conditions imposées à la génératrice G.

1. Le Tableau I donne immédiatement, pour une génératrice plane, les résultats suivants :

1° *Toute tangente d'inflexion de* G *doit décrire une développable;*

2° *Tout point de* G *situé sur la caractéristique* C *du plan mobile de cette ligne doit décrire une ligne enveloppe de* G, *ou rester fixe*. Si ce point est *mobile* et *non situé sur l'arête de rebroussement* A enveloppée par C, ou *sur* C *supposée fixe*, il ne doit *pas* être de *rebroussement* ($m=1$); *s'il est situé sur* A, on doit avoir $m=n$ en ce point, et, dès que ces *nombres dépassent* 1, *de nouvelles conditions* deviennent nécessaires (*voir* la discussion générale). *Si ce point est fixe*, il faut seulement que, *dans le cas où la tangente à* G *en ce point est la caractéristique* C *supposée mobile*, il ne soit pas d'*inflexion* ($n=1$).

2. *Conditions pour que l'équation des asymptotiques soit normale.* — Les conditions, qui doivent alors s'ajouter aux précédentes, s'obtiennent aisément par la considération du Tableau correspondant, résultant de la discussion générale.

Énonçons ces conditions supplémentaires *seulement dans le cas usuel* de m et $n \leqq 2$; il faut et il suffit alors, en plus des conditions précédentes : 1° que *tout rebroussement non inflexionnel* ($m=2$, $n=1$) *non situé* sur C décrive une *asymptotique particulière* (tangente du rebroussement dans le plan osculateur de la trajectoire D); 2° que toute *tangente inflexionnelle dont le point de contact n'est pas sur* C décrive *un plan;* 3° que tout *point de* G situé sur l'*arête de rebroussement* (courbe) A soit *ordinaire* ($m=n=1$).

3. *Solutions singulières de* (I) (cas usuel de $m, n \leqq 2$). — 1° Un point de G, *non situé sur la caractéristique* C, ne décrit une solution singulière que si le *plan tangent* le long de cette ligne *est fixe;* cela suffit si le *point* n'est pas de *rebroussement;* si $m=2$, il faut de plus que la *trajectoire* du *rebroussement* soit *droite,* et le discriminant prend une racine *double* correspondante (qui existe déjà dans les mêmes conditions dès que $m=1$); 2° un *point mobile* de G *situé sur* C ne décrit *jamais* une pareille solution ; 3° à un point *fixe* de G, à *tangente mobile non confondue avec* C, en correspond *toujours* une si $n=1$; si $n=2$, il faut que la *tangente inflexionnelle* décrive un *plan;* il n'en correspond jamais une, si la *caractéristique* C *mobile* est la *tangente* à G; si la *tangente* et *le point de* G sont fixes, on a une racine double au discriminant. Ces résultats se tirent immédiatement du § 6 de la seconde Partie [(I) est, bien entendu, supposée normale].

Enfin les racines multiples du discriminant seront étudiées dans chaque cas particulier à l'aide des formules du § 7 de la seconde Partie.

§ 2. — Applications simples.

1° *Si* G *est une conique,* on aura deux cas possibles : ou bien elle est sécante à la caractéristique C, ou elle lui est tangente. Dans le premier cas, les deux points de rencontre doivent décrire deux enveloppes (pouvant se réduire à des points fixes); le polynome l est annulé en ces deux points, et g y est différent de o; la développable circonscrite Θ est de seconde classe, c'est un cône. Le discriminant H est donné par l'équation

$$\rho^2 s g^2 \mathrm{H} = l\lambda_1 \qquad \text{ou} \qquad \rho g \rho_1 g_1 \mathrm{H} = l l_1 \qquad (\rho,\ g,\ \rho_1,\ g_1,\ \text{indépendants de } t);$$

il n'aura deux racines doubles que si l et l_1 ont les mêmes racines, c'est-à-dire si Θ roule sur les deux développables $l = 0$ des plans tangents le long des enveloppes de G, ou, si ce sont des points, lorsque le plan tangent y est fixe; une solution singulière de (I) correspondra *nécessairement* à un point ou à un plan tangent fixe; ainsi on retrouve immédiatement des résultats connus [1]. La seconde classe de coniques divisées homographiquement par leurs conjuguées est formée par celles qui sont tangentes à la caractéristique C de leur plan, qui peut être une droite fixe; alors elles sont tangentes à l'arête de rebroussement A enveloppe de C, ou ont un point fixe; si elles ne sont pas osculatrices à A, ou n'admettent pas un point avec tangentes fixes, la développable Θ sera de troisième classe. Dans le cas contraire, elle est de deuxième, les surfaces peuvent être considérées comme cas limite des précédentes.

Supposons Θ de troisième classe; l'équation (I) sera normale, son discriminant sera étudié par les formules trouvées ci-dessus; l'enveloppe annule l et g comme facteur simple; de plus, $\rho_1 s_1$ est indépendant de t, puisque Θ est de troisième classe (et ne peut être un cône, car $\rho_1 s_1 g_1$ serait alors du second degré au moins, et son égal $\rho s g$ n'est

(1) *Voir* Blutel, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1890.

que du premier), donc g_1 est identique à g et divise l_1, et H est égal [à un facteur $\varphi(u)$ près] au quotient $h_1 = \frac{l_1}{g_1}$; H aura deux racines doubles, s'il en est ainsi de h_1, c'est-à-dire quand la développable Θ sera osculatrice à deux développables fixes, ou, comme cas particulier, contiendra deux droites avec plans tangents fixes. Une solution singulière de (I) correspondra nécessairement à un plan tangent fixe. D'où, par exemple, par quadratures, les lignes *asymptotiques* de la surface *algébrique* engendrée par une *conique qui reste tangente à une droite et à quatre plans fixes* [1].

2° *Si le degré de* G *dépasse deux,* les solutions ne peuvent plus s'obtenir immédiatement. Cependant, on peut réaliser géométriquement de nombreux cas particuliers; l'un des cas les plus intéressants est celui *où la caractéristique* C *est fixe;* on sait qu'alors les conjuguées des génératrices G sont les lignes de contact de la surface S avec les cônes circonscrits dont les sommets décrivent C; il en résulte évidemment qu'on peut ici déterminer par le calcul, *sans intégration*, toutes les familles de génératrices divisées homographiquement par leurs conjuguées. Considérons, en particulier, le cas d'une *génératrice cubique :* 1° Pour qu'elle soit divisée homographiquement par ses conjuguées, il faut et il suffit que les points (ordinaires ou non) où elle rencontre C, sans lui être tangente, soient fixes, que ses tangentes d'inflexion, dont le contact n'est pas sur C, rencontrent cette droite en des points fixes et qu'un rebroussement situé sur C soit fixe; 2° pour que l'équation (I) soit alors normale, il faut de plus que les tangentes inflexionnelles ayant leur contact hors de la caractéristique décrivent des plans [solutions singulières de (I)] et qu'un rebroussement situé hors de C décrive une asymptotique particulière; si l'on donne les points fixes situés sur C, les plans fixes décrits par les tangentes d'inflexion, et, s'il y a lieu, l'asymptotique particulière lieu du rebroussement, on constate facilement qu'il en résulte, pour déterminer G dans son plan, des conditions qui ne sont pas surabondantes; ces données peuvent d'ailleurs être liées entre elles; par exemple, on sait qu'il y a une relation entre

(1) On forme facilement l'équation de cette surface, qui est du quatrième degré, et qui admet la droite enveloppe des coniques comme droite double; c'est aussi une enveloppe de quadriques dépendant d'un paramètre.

les points de rencontre de C avec G et avec ses trois tangentes d'inflexion, ou avec ses tangentes d'inflexion et de rebroussement; de sorte que, si G a un rebroussement et que C la rencontre, ainsi que sa tangente d'inflexion, en quatre points *distincts* fixes, il en sera de même du point d'intersection de C avec la tangente de rebroussement, et, par conséquent, si l'équation (I) est normale, le rebroussement restera alors dans un plan fixe. On arrive donc au résultat suivant : *On peut, lorsque* G *est une cubique dont le plan tourne autour d'une droite fixe, construire géométriquement, sans intégration, toutes les familles de génératrices telles que* (I) *soit normale*. De plus, on formera facilement des cas où cette équation sera immédiatement intégrable par quadratures, les points et plans tangents fixes correspondant déjà à des solutions singulières ou à des racines multiples du discriminant. Exemples : G admet C pour tangente *inflexionnelle*, les deux autres *inflexions* décrivent deux *droites* sur deux plans *tangents fixes* (le discriminant est carré parfait). — C est encore *tangente inflexionnelle*, les *deux* autres tangentes d'inflexion décrivent *deux plans fixes*, et la cubique reste *tangente* à *deux autres plans*. — G *est tangente à* C, la coupe en un *point fixe d'inflexion*, et les *trois tangentes d'inflexion* décrivent trois *plans fixes* (deux solutions singulières, une racine double au discriminant). — G a un rebroussement et est *tangente à* C, la coupe en *un point fixe*, la tangente *d'inflexion* décrit *un plan*, la *tangente de rebroussement aussi*, et le *rebroussement* une *droite* (id.). — Le *rebroussement est fixe*, ainsi que l'*autre point d'intersection* de G avec C; la *tangente d'inflexion* décrit *un plan*, et la cubique est *tangente à un plan fixe* (quatre solutions singulières), etc. Du reste, voici comment on peut faire l'étude analytique de la question, G étant quelconque, dans ce cas particulier où la caractéristique C est fixe.

§ 3. — Cas où le plan de la génératrice tourne autour d'une droite fixe.

1. Désignons, en général, par (x) un point de coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4. Soient (a), (b) deux points fixes à coordonnées constantes de la caractéristique C, (ξ) un point mobile à coordonnées fonctions de u du plan de G; pour que G soit rapportée à ses conjuguées $t = \text{const.}$, il faut et il suffit que le point de rencontre de sa tangente

en un point avec C soit fonction de t seul. Donc, on pourra prendre pour coordonnées de cette tangente rapportée au triangle (a, b, ξ) dans le plan de G, les quantités $1, \varphi, H, \varphi$ dépendant de t seul, H de t et de u; si G est rationnelle et divisée homographiquement par ses conjuguées, φ et H seront des fonctions rationnelles de t, qu'on choisira, une fois la classe de G donnée, de manière qu'elle soit aussi d'un degré donné. Les coordonnées du point de G par rapport au même triangle seront exprimées par

$$\varphi \frac{\partial H}{\partial t} - H \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

(qui peuvent avoir un facteur commun) et par suite, dans l'espace, leur expression générale (qu'on applique successivement aux quatre coordonnées, à l'aide des quatre indices 1, 2, 3, 4) sera

$$x = a\left(\varphi \frac{\partial H}{\partial t} - H \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - b \frac{\partial H}{\partial t} + \xi \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

En résumé, si p, q, r sont les trois polynomes en t premiers entre eux, coordonnées de la tangente par rapport à (a, b, ξ), il faut et il suffit, pour avoir toutes les *génératrices* G *divisées homographiquement par leurs conjuguées,* que le rapport $\frac{q}{p} = \varphi$ soit à coefficients constants, indépendants de u; *et l'on peut former, par des opérations algébriques, toutes les solutions de la question.*

2. Le plan tangent à la surface S doit contenir le point $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)$:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a\left(\varphi \frac{\partial^2 H}{\partial u\, \partial t} - \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - b \frac{\partial^2 H}{\partial u\, dt} + \xi' \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \qquad \left(\xi' = \frac{\partial \xi}{\partial u}\right);$$

donc ses coordonnées, par rapport au tétraèdre (a, b, ξ, ξ'), sont

$$1, \quad \varphi, \quad H, \quad \frac{\partial H}{\partial u},$$

de sorte que ses coordonnées homogènes (v) seront déterminées par les équations

$$\Sigma a v = 1, \qquad \Sigma b v = \varphi, \qquad \Sigma \xi v = H, \qquad \Sigma \xi' v = \frac{\partial H}{\partial u},$$

d'où l'on déduit facilement la condition suivante pour que la surface S admette un cône circonscrit le long de G : H doit vérifier une équation de la forme

$$m\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u} + n\mathrm{H} + p\varphi + q = 0,$$

à coefficients m, n, p, q fonctions arbitraires de u; d'où

$$\mathrm{H} = \mathrm{K}\varphi + \mathrm{L}\psi + \mathrm{M},$$

K, L, M étant des fonctions de u, et ψ une fonction arbitraire de t.

3. L'équation des lignes asymptotiques se forme en calculant les déterminants

$$\mathrm{D} = \left| v \frac{\partial v}{\partial u}\, \frac{\partial v}{\partial t}\, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right|, \qquad \mathrm{D}'' = \left| v \frac{\partial v}{\partial u}\, \frac{\partial v}{\partial t}\, \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} \right|$$

à l'aide des relations suivantes, tirées de celles qui précèdent :

$$\begin{array}{llll}
\sum a\dfrac{\partial v}{\partial u} = 0, & \sum b\dfrac{\partial v}{\partial u} = 0, & \sum \xi\dfrac{\partial v}{\partial u} = 0, & \sum \xi'\dfrac{\partial v}{\partial u} = \Theta, \\
\sum a\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0, & \sum b\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}, & \sum \xi\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}, & \sum \xi'\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial u\,\partial t}, \\
\sum a\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, & \sum b\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, & \sum \xi\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial t^2}, & \sum \xi'\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^3 \mathrm{H}}{\partial u\,\partial t^2}, \\
\sum a\dfrac{\partial^2 v}{\partial u^2} = 0, & \sum b\dfrac{\partial^2 v}{\partial u^2} = 0, & \sum \xi\dfrac{\partial^2 v}{\partial u^2} = -\Theta, & \sum \xi'\dfrac{\partial^2 v}{\partial u^2} = \Theta_1.
\end{array}$$

Θ s'obtient aisément, c'est le quotient du déterminant dont la première ligne est

$$1, \quad \varphi, \quad \mathrm{H}, \quad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial u^2},$$

et dont les quatre dernières lignes sont formées avec les quantités a, b, ξ, ξ', ξ'', affectées de quatre indices successifs, par le déterminant $|a\ b\ \xi\ \xi'|$; il résulte de là que l'équation des asymptotiques est

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial t^2} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) dt^2 - \Theta\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,du^2 = 0,$$

qui peut servir à rechercher des cas d'intégration.

§ 4. — Détermination de toutes les génératrices rationnelles planes de classe donnée divisées homographiquement par leurs conjuguées.

Laissant de côté le cas particulier précédent, nous allons montrer qu'*on peut toujours obtenir, par des opérations purement algébriques, les génératrices rationnelles les plus générales de classe m divisées homographiquement par leurs conjuguées*. La génératrice la plus générale de classe m n'a pas d'inflexions; ses points de rencontre avec la caractéristique C décriront généralement $2(m-1)$ enveloppes qu'on ne peut donner arbitrairement sur la développable engendrée par le plan de G, car, dès que m dépasse 3, on a ainsi un nombre de conditions surabondant pour déterminer G. La solution repose sur la remarque suivante : C n'étant pas une droite fixe, les tangentes à G le long d'une de ses conjuguées engendrent une développable tracée sur l'enveloppe Γ du plan de G; réciproquement, si l'on trace sur Γ une famille quelconque de lignes, les enveloppes de leurs tangentes en tous les points d'une même génératrice rectiligne envelopperont, dans chaque plan tangent à Γ, une ligne plane, dont on connaît immédiatement les conjuguées quand son plan varie : si les génératrices rectilignes de Γ sont définies par $u=$ const., les lignes tracées sur elles par $t=$ const., les génératrices G correspondront aussi à $u=$const., leurs conjuguées à $t=$const. Cela va nous permettre, d'abord, de *former l'expression générale des coordonnées d'un point et du plan tangent d'une surface, rapportée à un système de sections planes et à leurs conjuguées,* ensuite de résoudre la question particulière que nous nous sommes proposée. Nous distinguerons deux cas, suivant que la développable Γ n'est pas un cône, ou en est un.

1. Γ n'est pas un cône. Désignons par (ξ), fonctions de u seul, les coordonnées homogènes d'un point de l'arête de rebroussement A de Γ et par F une fonction arbitraire de u et t; nous pourrons exprimer ainsi les coordonnées d'un point de Γ :

$$y=\xi F'-\xi' F$$

(les accents indiquent la dérivation par rapport à u).

Une tangente à G sera déterminée par les points (y), $\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)$, et on a

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \xi F'' - \xi'' F;$$

donc, si l'on rapporte G au triangle (ξ, ξ', ξ'') de son plan, les coordonnées de la tangente à cette ligne pourront être exprimées par F, F′, F″ et, par suite, celles du point de contact par

$$F' \frac{\partial F''}{\partial t} - F'' \frac{\partial F'}{\partial t}, \quad F'' \frac{\partial F}{\partial t} - F \frac{\partial F''}{\partial t}, \quad F \frac{\partial F'}{\partial t} - F' \frac{\partial F}{\partial t}$$

(qui peuvent avoir un facteur commun). Par conséquent, si l'on désigne, d'une manière générale, par $|\alpha, \beta, \gamma|$ le déterminant des trois quantités α, β, γ et de leurs dérivées successives par rapport à u, l'expression des *coordonnées d'un point d'une surface* S *rapportée à un système de sections planes* $u =$ const. *et au système conjugué sera*

$$x = \left| \xi F \frac{\partial F}{\partial t} \right|$$

(F fonction arbitraire de u et de t).

2. Le plan tangent à la surface S est déterminé par les trois points (y), $\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)$; or, on a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \xi F''' + \xi' F'' - \xi'' F' - \xi''' F;$$

donc les coordonnées de ce plan, par rapport au tétraèdre $(\xi, \xi', \xi'', \xi''')$ pourront s'exprimer par F, F′, F″, F‴. Par suite, ses coordonnées homogènes (v) seront déterminées par les équations

$$\Sigma \xi v = F, \qquad \Sigma \xi' v = F', \qquad \Sigma \xi'' v = F'', \qquad \Sigma \xi''' v = F''',$$

d'où l'on déduit que, si la surface admet un cône circonscrit le long de chaque génératrice G, F doit vérifier une équation linéaire, la variable étant u, c'est-à-dire être de la forme

$$F = \Sigma \varphi_i(u) \Psi_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

On déduit également de là l'équation des asymptotiques de S, par un calcul absolument semblable à celui qui a été fait dans le cas de la caractéristique fixe. On trouve ainsi l'équation

$$\left|F \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right| |\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4| dt^2 + \left|F \frac{\partial F}{\partial t}\right| |\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 F| du^2 = 0.$$

3. Supposons maintenant que G *doive être rationnelle et divisée homographiquement par ses conjuguées, il suffit evidemment pour cela que le rapport* $\frac{F'}{F}$ *soit rationnel,* de façon que les coordonnées de la tangente à G soient proportionnelles à trois polynomes entiers en t et l'on a ainsi toutes les solutions de la question. Il reste à montrer qu'on peut choisir, *sans intégration,* ce rapport de façon que G soit de *classe donnée* m. Soient p, q, r trois polynomes entiers en t premiers entre eux, de degré m, qui expriment les coordonnées de la tangente à G dans son plan, par rapport au triangle (ξ, ξ', ξ''). On aura donc, ρ étant une fonction convenablement choisie,

$$F = \rho p, \qquad F' = \rho q, \qquad F'' = \rho r,$$

d'où, entre p, q, r, la condition nécessaire et suffisante

$$\frac{p' - q}{p} = \frac{q' - r}{q},$$

d'où l'on tirera r, p et q étant supposés donnés, de façon que $\frac{(p' - q)q}{p}$ soit entier. Appelons g le plus grand commun diviseur à p et q, de degré $m' \leqq m$, de sorte que $p = p_1 g$, $q = q_1 g$, p_1 et q_1 étant premiers entre eux; la condition revient à celle-ci : p_1 doit diviser $g(p'_1 - q_1)$; soit k le plus grand commun diviseur de degré $m'' \leqq m'$ à g et p_1, de sorte que $g = g_1 k, p_1 = p_2 k$ (g_1 et p_2 premiers entre eux); il faut alors que $p'_2 k - q_1$ soit divisible par p_2. Ainsi, h étant un autre polynome entier en t, on a l'identité

$$q_1 = k p'_2 + h p_2,$$

d'où les expressions suivantes de p, q, r :

$$p = p_2 g_1 k^2, \qquad q = q_1 g_1 k, \qquad r = g_1[k q'_1 - (k' - h) q_1];$$

comme p, q, r sont supposés premiers entre eux, g_1 doit donc être de degré o, c'est-à-dire que $m'' = m'$. Donc la génératrice de classe m sera déterminée par les coordonnées tangentielles suivantes :

$$p = Qk^2, \qquad q = q_1 k, \qquad r = kq'_1 - (k' - h)q_1 \qquad \text{avec} \qquad q_1 = kQ' + hQ,$$

k étant un polynome entier arbitraire de degré $m' \leqq \frac{m}{2}$, h un autre de même degré, et Q un troisième de degré $m - 2m'$ $\left(\text{de sorte que } m' \leqq \frac{m}{2}\right)$; il faut d'ailleurs qu'il n'y ait de racines communes, ni à Q et Q′, ni à Q et k, ni à k et h, ni enfin à k et $k' - h$. Ainsi, *le théorème énonce est démontré*.

4. La condition que Q′ et Q soient premiers entre eux revient à dire que Q n'a ni racines constantes, ni racines multiples; car une racine $\alpha(u)$ de Q satisfait à l'identité $\alpha' \frac{\partial Q}{\partial t} + Q' = 0$. On a d'ailleurs

$$\frac{q}{p} = \frac{F'}{F} = \frac{Q'}{Q} + \frac{h}{k};$$

et la forme des coordonnées montre qu'on peut toujours altérer F d'un facteur fonction de u; par suite, il en sera de même de Q et l'on pourra également supposer h de degré inférieur à k. On a

$$F = Q\, e^{\int \frac{h}{k} du} = QG;$$

donc

$$G' = \frac{h}{k} G, \qquad G'' = \frac{h_1}{k^2} G, \qquad G''' = \frac{h_2}{k^3} G,$$

h_1, h_2 étant de nouveaux polynomes entiers; d'où

$$F' = G\left(Q' + \frac{h}{k} Q\right), \quad F'' = G\left(Q'' + \frac{2h}{k} Q' + \frac{h_1}{k^2} Q\right), \quad F''' = G\left(Q''' + \frac{3h}{k} Q'' + \ldots\right).$$

On déduit de là une autre forme des expressions p, q, r et les coordonnées du plan tangent sous forme entière : ces dernières seront donc d'ordre $m + m'$, et premières entre elles si $\frac{h_2}{k^3}$ est irréductible; ainsi la classe de la développable circonscrite est généralement $m + m'$.

5. Le polynome k égalé à o détermine les points de contact de la génératrice avec la caractéristique C; on peut vérifier qu'ils sont tou-

jours sur l'arête de rebroussement, en remplaçant k par $(t-a)^{\omega}k_1$, dans les expressions $q\frac{\partial r}{\partial t}-r\frac{\partial q}{\partial t}, \cdots$ qui déterminent le point de contact. On constate alors que, si $\omega=1$, le point est ordinaire et que, si $\omega>1$, il y a d'abord un abaissement $\omega-1$ du degré de la génératrice, et il reste un point de rebroussement inflexionnel $m=n=\omega$, ce qui est conforme aux résultats déjà obtenus. En particulier, si k est une constante, F se réduit au polynome entier Q, et *on a alors toutes les génératrices non tangentes à l'arête de rebroussement.*

II. La développable Γ est un cône; soit (a) les coordonnées constantes de son sommet, (ξ) un point variable avec u sur la génératrice C du cône. Représentons un point de Γ par

$$y=\xi-a\mathrm{F}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial y}{\partial u}=\xi'-a\mathrm{F}', \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}=\xi''-a\mathrm{F}''.$$

Donc, la tangente à G sera déterminée, relativement au triangle de son plan (a, ξ, ξ'), par les coordonnées $1, \mathrm{F}, \mathrm{F}'$, et le plan tangent à la surface S, relativement au tétraèdre (a, ξ, ξ', ξ''), par les coordonnées $1, \mathrm{F}, \mathrm{F}', \mathrm{F}''$; d'où l'expression générale des coordonnées d'un point de S rapportée au système conjugué (t, u), et l'équation de ses asymptotiques, absolument comme dans le cas précédent. Pour que G *soit rationnelle et divisée homographiquement par ses conjuguées*, il faut et il suffit que F *soit une fonction rationnelle de t et on a ainsi, sans intégration, toutes les solutions de la question.* Montrons qu'on peut choisir F, sans intégration, de façon à avoir toutes les génératrices de *classe donnée m.* Soient p, q, r les trois polynomes en t, premiers entre eux, coordonnées de la tangente. On aura donc

$$\mathrm{F}=\frac{q}{p}, \qquad \mathrm{F}'=\frac{r}{p};$$

d'où

$$r=q'-\frac{qp'}{p}.$$

Il faut choisir q et p de façon que r soit entier et premier avec eux. Soit d le plus grand commun diviseur à p' et p (les racines communes à ces deux polynomes sont les racines multiples ou constantes de p). Posons $p=p_1 d, p'=p_2 d, p_1$ et p_2 étant premiers entre eux; q devra être divisible par p_1, soit $q = q_1 p_1$; on aura donc les expressions suivantes des coordonnées

$$p = p_1 d, \qquad q = q_1 p_1, \qquad r = q' - q_1 p_2 = q'_1 p_1 + q_1(p'_1 - p_2),$$

d désignant le plus grand commun diviseur à p et p'. D'ailleurs il est facile de voir que p ne peut avoir une racine simple variable, sans qu'elle soit commune aux trois coordonnées, de sorte que p_1 divisera d; d'autre part, q_1 doit être premier avec d, car une racine commune à ces deux polynomes, ou est racine multiple de p, par suite appartient à p_1 ou à r, ou bien est constante, et annule q'_1, par conséquent r; il doit l'être aussi avec p_1. Ainsi, pour former les génératrices de classe m, on prendra d'abord p à racines constantes ou multiples, on en déduira d puis p_1 et on choisira q_1 arbitrairement, pourvu qu'il soit premier avec d. On pourra toujours choisir p sous la forme $p_1^2 d_1$, p_1 étant de degré m' tel que $m \geqq 2m'$, et n'ayant que des racines simples variables. — $p_1 = 0$ détermine les points où G est tangente à C; comme ils correspondent à des racines multiples de p, et simples de q, ils annulent les deux coordonnées $p\frac{dq}{dt} - q\frac{dp}{dt}$, $r\frac{dp}{dt} - p\frac{dr}{dt}$ sans annuler la troisième, c'est-à-dire qu'ils sont confondus avec le point fixe, ce qui est conforme aux résultats déjà obtenus. Enfin, les coordonnées du plan tangent seront proportionnelles à $p, q, r, r' - \frac{p'}{p} r$, c'est-à-dire à $p, q, r, r' - \frac{p_2}{p_1} r$ et, comme p_1 n'a pas de racine commune avec p_2 ou r, les coordonnées, rendues entières, seront premières entre elles, d'ordre $m + m'$, qui est la classe de la développable circonscrite.

§ 5. — Génératrices rationnelles planes de degré donné divisées homographiquement par leurs conjuguées.

1. Soient p, q, r les coordonnées entières de degré m, premières entre elles, de la tangente à G, déterminées dans le plan de la courbe par la méthode précédente; G sera généralement de degré $2m - 2$, sans inflexion, et les coordonnées d'un de ses points s'exprimeront par

$$q\frac{\partial r}{\partial t} - r\frac{\partial q}{\partial t}, \qquad r\frac{\partial p}{\partial t} - p\frac{\partial r}{\partial t}, \qquad p\frac{\partial q}{\partial t} - q\frac{\partial p}{\partial t};$$

pour qu'il y ait abaissement du degré, il faut que ces polynomes aient un facteur commun; 1° si ce facteur appartient à p, on voit aussitôt qu'il doit annuler aussi $\frac{\partial p}{\partial t}$, puis $q\frac{\partial r}{\partial t} - r\frac{\partial q}{\partial t}$; 2° s'il n'est pas dans p, posons

$$\frac{q}{p} = \varphi, \qquad \frac{r}{p} = \varphi_1,$$

et nous voyons que le facteur doit être commun à $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ et $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$. Reprenons alors les deux cas précédents.

I. Γ n'est pas un cône; toute racine multiple de p annule k, par suite q; donc, pour qu'elle produise un abaissement du degré, il faut qu'elle annule $\frac{\partial q}{\partial t}$, c'est-à-dire qu'elle soit multiple dans k; d'autre part, on a, dans ce cas, $\varphi_1 = \varphi^2 + \varphi'$; par suite les racines communes à $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$ sont les racines constantes ou multiples de $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Ainsi, pour exprimer un abaissement donné du degré, on devra choisir k avec des racines multiples, ou exprimer que $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ a des racines constantes ou multiples; comme $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ dépend des polynomes k, Q et de *leurs dérivées par rapport à u*, ces dernières conditions seront *différentielles*.

II. Γ est un cône; une racine multiple de p annule p_1, par suite q, donc $\frac{\partial q}{\partial t}$, c'est-à-dire qu'elle doit appartenir à q_1 (toutes les racines de p_1 simples), par suite à r; on aura donc à exprimer seulement que p a des racines multiples constantes, et p étant ainsi choisi, qu'elles annulent $q\frac{\partial r}{\partial t} - r\frac{\partial q}{\partial t}$, d'où des conditions *différentielles* entre les polynomes p, q_1 arbitrairement choisis; d'autre part, on a, dans ce cas, $\varphi_1 = \varphi'$; il y aura donc encore à exprimer que $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ a des racines constantes ou multiples, d'où des conditions où ne figurent pas les dérivées des coefficients.

Par conséquent, *nous n'obtenons pas, en général, les solutions d'un degré donné sans intégration*.

2. Ces considérations sont applicables aux *cubiques de troisième et de quatrième classe*, divisées homographiquement par leurs conjuguées. La méthode que nous venons d'exposer fournit aisément les premières

en rapportant la surface engendrée au système conjugué; du reste, on aurait pu aussi les obtenir directement en se donnant la développable Γ, avec les enveloppes de G et de la tangente d'inflexion tracées sur Γ; dans le cas le plus général où G a trois lignes enveloppes, distinctes entre elles et de l'enveloppe de la tangente inflexionnelle, ces données ont entre elles une relation qu'un calcul direct donne facilement. Pour les cubiques de quatrième classe, la méthode précédente se complique dans certains cas, par suite des conditions d'abaissement du degré; mais alors la donnée des enveloppes de G et de ses tangentes d'inflexion permet encore la détermination directe de la cubique par le calcul. En résumé, les résultats qui précèdent permettent *d'obtenir*, dans tous les cas, *les familles de cubiques planes divisées homographiquement par leurs conjuguées;* ils facilitent également l'étude des lignes asymptotiques de la surface S correspondante, et la recherche de cas particuliers d'intégration.

§ 6. — Détermination de nouvelles familles de génératrices rationnelles divisées homographiquement par leurs conjuguées.

La méthode employée pour déterminer les génératrices planes de classe donnée, possédant la propriété en question, peut être regardée comme une application de la transformation connue de Laplace, qui permet de passer d'une nappe à l'autre de la surface focale d'une congruence de droites. Cette transformation conserve les systèmes conjugués, et est rationnelle par rapport aux coordonnées des points de la surface transformée. Donc elle permet de déduire, des familles de génératrices rationnelles planes que nous venons de former, une suite indéfinie de nouvelles familles possédant la même propriété relativement à leurs conjuguées. On peut, en suivant un procédé indiqué par M. Darboux (¹), obtenir, à l'égard de ces familles, des systèmes de formules tout à fait analogues à ceux que nous obtenons quand la génératrice est plane (²); nous nous proposons de revenir ailleurs sur ce sujet.

(¹) Darboux, *Leçons de Géométrie*, 2ᵉ partie, 1ᵉʳ fascicule, Chapitre VI.

(²) Voir *Comptes rendus*, décembre 1889.

II.

DES CUBIQUES GAUCHES DIVISÉES HOMOGRAPHIQUEMENT PAR LEURS CONJUGUÉES.

Soient G une cubique gauche, Γ la développable de troisième classe, formée par ses plans osculateurs; *les seuls facteurs communs aux trois déterminants* Δ, Δ', Δ'' *ne peuvent provenir que d'enveloppes de* G *ou de* Γ. D'ailleurs, au point de vue des conjuguées, il y a, comme on sait, réciprocité entre G et Γ; cette réciprocité ne se conserve plus pour les asymptotiques, et notamment on a vu qu'un facteur simple de Δ, correspondant à une enveloppe de Γ, ne disparaît du premier terme de l'équation des asymptotiques de la surface S engendrée par G, que si cette enveloppe se réduit à un plan osculateur fixe. Nous allons chercher d'abord *quelles enveloppes peuvent et doivent avoir* G *et* Γ *pour être divisées homographiquement par leurs conjuguées*. Nous désignerons par Θ la développable circonscrite à S le long de G, par Σ l'enveloppe des développables Γ (correspondant à S par la transformation de Laplace), par T la ligne de contact (correspondant à Θ) de Γ avec Σ.

§ 1. — Formules préliminaires.

1. Nous représenterons ainsi la coordonnée homogène générale d'un point de G, rendue homogène par l'introduction de la variable z, qu'on pourra toujours supposer égale à 1,

$$x = at^3 + 3btz^2 + 3ctz^2 + dz^3$$

(les quatre coordonnées se distinguant toujours par quatre indices successifs 1, 2, 3, 4). Les coefficients (a, b, c, d) sont seize fonctions de u dont on peut supposer le déterminant $|\, a, b, c, d \,|$ égal à 1; la cubique dépend en réalité de douze arbitraires, la transformation générale homographique pouvant être effectuée sur t. Le plan osculateur sera déterminé par la coordonnée générale

$$w = Dt^3 + 3Bt^2z + 3Czt^2 + Az^3,$$

les seize quantités A, B, C, D étant déterminées en fonction de a, b, c, d, par les relations

$$\begin{array}{llll}
\Sigma A a = 1, & \Sigma A b = 0, & \Sigma A c = 0, & \Sigma A d = 0, \\
\Sigma B a = 0, & \Sigma B b = -\frac{1}{3}, & \Sigma B c = 0, & \Sigma B d = 0, \\
\Sigma C a = 0, & \Sigma C b = 0, & \Sigma C c = \frac{1}{3}, & \Sigma C d = 0, \\
\Sigma D a = 0, & \Sigma D b = 0, & \Sigma D c = 0, & \Sigma D d = 1,
\end{array}$$

de sorte que $| A, B, C, D | = -\frac{1}{9}$.

Le point de coordonnées a_1, a_2, a_3, a_4 ou (a) est le point $t = \infty$ de la cubique, (d) le point $t = 0$, (b) un point de la tangente en (a), (c) un point du plan osculateur, et aussi de la tangente en (d); de sorte que, si l'on rapporte la cubique au tétraèdre de sommets (a), (b), (c), (d) formé par les plans osculateurs aux points (a), (d) et les plans tangents menés par chacun de ces points et la tangente qui contient l'autre, on pourra prendre comme coordonnées du point de la cubique par rapport à ce tétraèdre : $\xi = t^3$, $\eta = -t^2 z$, $\zeta = t z^2$, $\tau = -z^3$, et les coordonnées correspondantes du plan osculateur seront z^3, $-tz^2$, $t^2 z$, $-t^3$; en désignant par X les coordonnées courantes par rapport au tétraèdre primitif de coordonnées, on a d'ailleurs

$$\xi = \Sigma AX, \qquad \eta = \Sigma BX, \qquad \zeta = \Sigma CX, \qquad \tau = \Sigma DX.$$

2. Si l'on désigne par H et K deux polynomes entiers en t à déterminer, la coordonnée φ du plan tangent à S sera de la forme

$$\varphi = \frac{1}{3}\left(K \frac{\partial w}{\partial t} - H \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Déterminons K, H par la condition que ce plan contienne le point $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)$, soit $\Sigma \varphi \frac{\partial x}{\partial u} = 0$. Nous introduisons ainsi les dérivées a', b', c', d', par rapport à u, des seize coefficients a, b, c, d, à l'aide de seize fonctions de u, M_i, N_i, P_i, Q_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, définies par les équations linéaires de la forme suivante :

$$\begin{array}{ll}
a' = M_1 a - 3 M_2 b + 3 M_3 c - M_4 d, & b' = N_1 a - 3 N_2 b + 3 N_3 c - N_4 d, \\
c' = P_1 a - 3 P_2 b + 3 P_3 c - P_4 d, & d' = Q_1 a - 3 Q_2 b + 3 Q_3 c - Q_4 d,
\end{array}$$

ou par celles-ci,

$$A' = -M_1 A + 3N_1 B - 3P_1 C + Q_1 D, \qquad B' = -M_2 A + \ldots,$$
$$C' = -M_3 A + \ldots, \qquad D' = -M_4 A + \ldots,$$

de sorte que, quand les seize fonctions M, N, P, Q sont données, la cubique G, ou Γ, sont déterminées par un système d'équations différentielles linéaires. On a alors

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a G_1 - 3b G_2 + 3c G_3 - d G_4,$$

en posant généralement

$$G = M t^3 + 3N t z^2 + 3P t z^2 + Q z^2;$$

de sorte que les quatre polynomes G sont les coordonnées du point $\frac{\partial x}{\partial u}$ dans le système (ξ, η, ζ, τ). De même,

$$\frac{\partial w}{\partial u} = -A\Gamma_1 + 3B\Gamma_2 - 3C\Gamma_3 + D\Gamma_4,$$

en posant

$$\Gamma_1 = M_1 t^3 + 3M_3 t z^2 + 3M_3 t z^2 + M_4 z^3, \qquad \Gamma_2 = N_1 t^3 + 3N_2 t z^2 + 3N_3 t z_2 + N_4 z^3,$$
$$\Gamma_3 = P_1 t^3 + \ldots, \qquad \Gamma_4 = Q_1 t^3 + \ldots$$

La condition $\sum v \frac{\partial x}{\partial u} = 0$ permet alors de prendre pour H et K les polynomes

$$H = G_4 t^2 + 2G_3 t z + G_2 z^2, \qquad K = G_3 t^2 + 2G_2 t z + G_1 z^2,$$

qui sont du cinquième degré; donc Θ sera généralement de *septième* classe, et un abaissement de cette classe proviendra des facteurs communs à H et K. Dans le système de coordonnées (ξ, η, ζ, τ), l'équation du plan tangent est

$$K \frac{\partial F}{\partial t} - H \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

en appelant F le premier membre de l'équation du plan osculateur

$$F = \tau t^3 + 3\zeta t^2 z + 3\eta t z^2 + \xi z^3.$$

Si Θ est un cône, on aura, en désignant par $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \tau_0$, ce que deviennent ξ, η, ζ, τ, quand on y remplace les coordonnées courantes X par celles du sommet du cône,

$$K\frac{\partial F_0}{\partial t} - H\frac{\partial F_0}{\partial z} = 0;$$

de sorte que, si K_1 et H_1 sont les quotients premiers entre eux de K et H par leur plus grand commun diviseur, Θ est conique quand ces quotients sont proportionnels aux deux dérivées partielles d'un polynome du troisième degré en t et z; par suite, H_1, K_1 seront au plus du second degré.

3. Les mêmes calculs, effectués pour la développable Γ, donnent l'équation du point de contact du plan osculateur avec son enveloppe

$$S\frac{\partial F_1}{\partial t} - R\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0,$$

en désignant par F_1 le premier membre de l'équation tangentielle du point G et par R et S les deux polynomes

$$R = \Gamma_1 t^2 + 2\Gamma_2 t + \Gamma_3, \qquad S = \Gamma_2 t^2 + 2\Gamma_3 t + \Gamma_4,$$

d'où la condition, analogue à la précédente, qui exprime que T est plane. Les facteurs communs à R et S déterminent l'abaissement du degré de Γ.

4. Formons l'équation des conjuguées à l'aide de ces *fonctions fondamentales* H, K, R, S. On a

$$\Delta = \frac{1}{z^2}\sum \varphi \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -2(Ht + Kz).$$

Pour calculer $\Delta' = \frac{1}{z^2}\sum \varphi \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial t}$, introduisons les deux dérivées partielles des polynomes G, et formons-en les polynomes

$$3f = t^2\frac{\partial G_4}{\partial t} + 2tz\frac{\partial G_3}{\partial t} + z^2\frac{\partial G_2}{\partial t}, \qquad 3f_1 = t^2\frac{\partial G_4}{\partial z} + 2tz\frac{\partial G_3}{\partial z} + z^2\frac{\partial G_2}{\partial z},$$

$$3g = t^2\frac{\partial G_3}{\partial t} + 2tz\frac{\partial G_2}{\partial t} + z^2\frac{\partial G_1}{\partial t}, \qquad 3g_1 = t^2\frac{\partial G_3}{\partial z} + 2tz\frac{\partial G_2}{\partial z} + z^2\frac{\partial G_1}{\partial z},$$

et nous aurons identiquement

$$H = ft + f_1 z, \qquad K = gt + g_1 z, \qquad R = ft + gz, \qquad S = f_1 t + g_1 z,$$
$$\Delta' = 3(fg_1 - gf_1).$$

5. Les quatre fonctions (H, K), (R, S) sont d'ailleurs liées par les identités suivantes, qui déterminent l'un des couples, connaissant l'autre,

$$-6(R+H) = \frac{\partial\Delta}{\partial t}, \qquad -6(S+K) = \frac{\partial\Delta}{\partial z}$$

et

$$Rt + Sz = Ht + Kz = -\frac{\Delta}{2}.$$

6. *Désignons par* E_α^β *une enveloppe* $t = 0$ *qui abaisse de* α *unités la classe de* Θ, *de* β *unités l'ordre de* T (*un de ces nombres pouvant être nul*) [1]. Les formules précédentes montrent : 1° que, si $\alpha \neq \beta$, Δ est, par rapport à l'enveloppe, de l'ordre du plus grand des deux nombres, qui surpasse nécessairement l'autre d'*une* unité; 2° que, si $\alpha = \beta$, Δ est au moins d'ordre $\alpha + 1$, mais peut être d'ordre supérieur; 3° que, si l'on exprime qu'une enveloppe abaisse, par exemple, la classe de Θ de α unités, elle abaissera, sans nouvelle condition, l'ordre de T de $\alpha - 1$ unités; une condition de plus s'introduit, si ce dernier abaissement est α; de sorte que, dans les deux cas, l'existence d'une enveloppe E_α^β équivaut généralement à $\alpha + \beta$ conditions imposées à la cubique; ce nombre ne s'élève que si α étant égal à β, Δ doit être d'ordre supérieur à $\alpha + 1$.

§ 2. — Condition pour que les conjuguées dépendent d'une équation de Riccati.

1. Il faut et il suffit pour cela que $Ht + Kz$ divise $fg_1 - gf_1$, d'où six conditions entre les M, N, P, Q. Or, on a identiquement, d'après les relations ci-dessus,

$$z(fg_1 - gf_1) = fK - gH, \qquad t(fg_1 - gf_1) = g_1 H - f_1 K;$$

(1) La signification géométrique des nombres α et β résulte des discussions faites dans la seconde Partie, et résumées pour le cas d'un point ordinaire, au § 6 de cette seconde Partie.

donc, si ρ désigne le quotient entier de $fg_1 - gf_1$ par $Ht + Kz$, on devra avoir

$$H(g + \rho z t) = K(f - \rho z^2), \qquad K(f_1 + \rho z t) = H(g_1 - \rho t^2).$$

Soit D le plus grand commun diviseur à H et K, de sorte qu'on a

$$H = H_1 D, \qquad K = K_1 D.$$

Des égalités précédentes résulte qu'on devra avoir les identités suivantes, où λ et μ désignent deux polynomes entiers en t,

$$f - \rho z^2 = \lambda H_1, \qquad g + \rho z t = \lambda K_1, \qquad g_1 - \rho t^2 = \mu K_1, \qquad f_1 + \rho z t = \mu H_1,$$

d'où

$$ft + gz = R = \lambda(H_1 t + K_1 z), \qquad f_1 t + g_1 z = S = \mu(H_1 t + K_1 z).$$

Le polynome $H_1 t + K_1 z$ est le quotient de $Ht + Kz$ par D; nous le désignerons par δ, de sorte qu'on a

$$\Delta = -2 D \delta.$$

On voit donc que, pour que les conjuguées dépendent d'une équation de Riccati, *il faut que* R *et* S *soient divisibles par* δ. (Nous écartons, bien entendu, le cas spécial où Δ est identique à o, c'est-à-dire où les cubiques G forment un système d'asymptotiques de S.) Montrons que cette condition est suffisante; supposons vérifiées les identités

$$ft + gz = \lambda(H_1 t + K_1 z), \qquad f_1 t + g_1 z = \mu(H_1 t + K_1 z) \qquad (\lambda, \mu, \text{ entiers en } t).$$

On en déduit, ρ_1 étant un autre polynome entier,

$$f = \lambda H_1 + \rho_1 z, \qquad g = \lambda K_1 - \rho_1 t,$$

d'où

$$f_1 z = H - ft = H_1(D - \lambda t) - \rho_1 z t, \qquad g_1 z = K - gt = K_1(D - \lambda t) + \rho_1 t^2;$$

par conséquent,

$$z(f_1 t + g_1 z) = \delta(D - \lambda t),$$

d'où, d'après l'hypothèse $f_1 t + g_1 z = \mu\delta$, l'identité

$$D = \lambda t + \mu z,$$

qui entraîne celle-ci,

$$f_1 = \mu H_1 - \rho_1 t, \qquad g_1 z = K_1 \mu z + \rho_1 t^2,$$

de sorte que ρ_1 doit être divisible par z : $\rho_1 = \rho z$; par suite, on a

$$f = \lambda H_1 + \rho z^2, \qquad g = \lambda K_1 - \rho z t$$

et

$$fK - gH = z\rho(Kz + Ht) = z(fg_1 - gf_1),$$

et la condition est suffisante.

Ainsi, *il faut et il suffit que* R *et* S *soient divisibles par* δ; et l'on peut évidemment remplacer cet énoncé par le suivant : *il faut et il suffit* que H *et* K *soient divisibles par* d, en désignant par d le quotient du polynome $Rt + Sz$ par le plus grand commun diviseur à R et S.

Il résulte de là que *toute enveloppe à indices inégaux* E_α^β *disparaîtra comme facteur commun du premier terme de l'équation différentielle des conjuguées*, et que, *pour qu'il en soit de même d'une enveloppe à indices égaux* E_α^α, il faut que Δ *soit au plus d'ordre* 2α. Ces résultats sont conformes aux conditions énoncées dans le § 6 de la seconde Partie.

2. Il faut maintenant rechercher quelles enveloppes doit et peut avoir l'ensemble GΓ pour être divisé homographiquement par ses conjuguées. Pour cela, nous allons d'abord montrer comment on doit former les polynomes H, K, R, S pour que la condition ci-dessus soit remplie. Les relations fondamentales qui les lient nous donnent, en remplaçant $Ht + Kz$ par $D\delta$,

$$3R = \delta \frac{\partial D}{\partial t} + D \frac{\partial \delta}{\partial t} - 3H_1 D, \qquad 3S = \delta \frac{\partial D}{\partial z} + D \frac{\partial \delta}{\partial z} - 3K_1 D.$$

Donc, il faut et il suffit que $D\left(\frac{\partial \delta}{\partial t} - 3H_1\right)$, $D\left(\frac{\partial \delta}{\partial z} - 3K_1\right)$ soient divisibles par δ, ou bien soient identiquement nuls; dans ce dernier cas, on aura

$$t\frac{\partial \delta}{\partial t} + z\frac{\partial \delta}{\partial z} = 3\delta;$$

donc δ est du troisième degré, par suite aussi D et on a généralement trois E_1^0, trois E_0^1, la classe et l'ordre de Θ et T étant égaux à 3. Sauf dans ce cas, δ et D auront nécessairement un facteur commun et par conséquent G et Γ auront au moins une enveloppe commune; soit V le plus grand commun diviseur à D et δ, de sorte qu'on a

$$D = VD_1, \qquad \delta = V\delta_1;$$

laissons de côté le cas exceptionnel où le degré q de $V = 0$; alors, si n est le degré de D, $p = 6 - n$ celui de δ, q étant $\geqq 1$, il en est de même de n et p, et q ne dépasse pas d'ailleurs le plus petit des nombres n et p. Les conditions précédentes se ramènent maintenant à celles-ci : $V\dfrac{\partial\delta_1}{\partial t} - 3H_1$ et $V\dfrac{\partial\delta_1}{\partial z} - 3K_1$ doivent être divisibles par δ_1; donc, si l'on appelle α et β deux polynomes entiers en t, on devra avoir identiquement

$$V\frac{\partial\delta_1}{\partial t} - 3H_1 = \alpha\delta_1, \qquad V\frac{\partial\delta_1}{\partial z} - 3K_1 = \beta\delta_1 \qquad (\text{avec } H_1 t + K_1 z = V\delta_1);$$

d'où il suit aussitôt que α et β doivent être de la forme

$$\alpha = \frac{p-q-3}{q}\frac{\partial V}{\partial t} - Uz, \qquad \beta = \frac{p-q-3}{q}\frac{\partial V}{\partial z} + Ut,$$

U étant un polynome de degré $q-2$. *Ainsi, en résumé, pour former les polynomes* H, K, R, S, *satisfaisant aux conditions imposées, on procédera de la façon suivante : On choisira l'entier n de* 1 *à* 5, *d'où* $p = 6 - n$, *puis un polynome* V *de degré* $q \geqq 1$ *mais au plus égal au plus petit des nombres n et p, et un polynome* U *de degré* $q-2$ (*si* $q < 2$, U *est* $= 0$) *et on calculera* α, β *par les formules*

$$\alpha = \frac{p-q-3}{q}\frac{\partial V}{\partial t} - Uz, \qquad \beta = \frac{p-q-3}{q}\frac{\partial V}{\partial z} + Ut;$$

on prendra ensuite un polynome arbitraire δ_1, *de degré* $p-q$ *et on formera avec lui* H_1 *et* K_1

$$H_1 = V\frac{\partial\delta_1}{\partial t} - \alpha\delta_1, \qquad K_1 = V\frac{\partial\delta_1}{\partial z} - \beta\delta_1$$

(δ_1 *doit être choisi de façon que* H_1 *et* K_1 *soient premiers entre eux; en particulier, il est premier avec* V). *Enfin, on prendra arbitrairement* D_1 *de degré* $n-q$ *et l'on aura*

$$H = H_1 VD_1, \qquad K = K_1 VD_1.$$

On obtient alors, toutes simplifications faites,

$$3R = \delta\left[D_1\left(2\frac{\partial V}{\partial t} + \alpha\right) + V\frac{\partial D_1}{\partial t}\right], \qquad 3S = \delta\left[D_1\left(2\frac{\partial V}{\partial z} + \beta\right) + V\frac{\partial D_1}{\partial z}\right],$$

de sorte que, généralement, δ est le plus grand commun diviseur à R et S. Quant au premier coefficient Δ, il est égal à $-2D_1\delta_1V^2$.

On pourrait évidemment procéder en sens inverse et former d'abord R et S au lieu de H et K; il y a correspondance par polaires réciproques entre les cas possibles, de sorte que l'ordre de T et la classe de Θ s'échangent entre deux cas correspondants.

§ 3. — Classification des ensembles GΓ divisés homographiquement par leurs conjuguées.

Les formules que nous venons d'établir vont nous permettre de déterminer les enveloppes, dans chacun des cas qui *peuvent* se présenter; ensuite nous prouverons que, réciproquement, on peut assujettir l'ensemble variable GΓ à posséder les enveloppes trouvées, et qu'il est alors divisé homographiquement par ses conjuguées. *Nous allons indiquer la classification en faisant varier n seulement de 5 à 3; les autres solutions du problème seront polaires réciproques de celles-là.*

1^er^ Groupe : $n = 5$; Θ *est un cône de seconde classe.* — Les surfaces S correspondantes (à génératrices G) sont polaires réciproques des surfaces engendrées par une conique, lorsque la développable circonscrite est de troisième classe. Nous aurons $p = 1, q = 1, \frac{p-q-3}{q} = -3$, $U = 0$, $\delta_1 = l$ (const.), et nous pouvons supposer $V = t$, d'où $\alpha = -3$, $\beta = 0$, $H_1 = l$, $K_1 = 0$ et

$$D = tD_1, \qquad 3R = lt\left(-D_1 + t\frac{\partial D_1}{\partial t}\right), \qquad 3S = lt^2\frac{\partial D_1}{\partial z}.$$

Si D_1 n'admet ni la racine $t = 0$, ni racines multiples, T *est du sixième degré, jamais plane;* l'ensemble GΓ possède une E_1^1, quatre E_1^0 distinctes.

Le degré de T *s'abaisse :* 1° Si $t=0$ est racine de D_1; on a alors, en posant $D_1 = tD_2$,

$$3R = lt^3 \frac{\partial D_2}{\partial t}, \qquad 3S = lt^3 \frac{\partial D_2}{\partial z};$$

donc si D_2 n'a pas de racines multiples, T *est du quatrième degré et c'est une ligne plane,* d'après la condition trouvée plus haut (§ 1, 2, 3) pour qu'il en soit ainsi; cette solution est donc comprise parmi celles qu'on obtient en appliquant la transformation de Laplace aux lignes planes de troisième classe et du quatrième degré, divisées homographiquement par leurs conjuguées; les enveloppes sont ici une E_2^3, trois E_1^0. Le *degré de* T *s'abaisse encore d'une unité* si D_2 a une racine double, d'où, si elle n'est pas $t=0$, une E_2^3, une E_2^1, une E_1^0, et *de deux unités* si D_2 a une racine triple, qui supposée $\neq 0$, correspond à une E_2^3, une E_3^2 : dans ce cas, T *est du second degré;* si la racine double ou triple de D_2 est $t=0$, on a d'autres combinaisons qui n'altèrent pas le degré de T et peuvent être considérés comme des cas limites des précédents. 2° Le degré de T s'abaisse encore si D_1 a des racines multiples, soit d'abord une double; si les deux autres sont distinctes, T *est du cinquième degré* et on a une E_1^1, une E_2^1, deux E_1^0; si elles sont confondues, T *est du quatrième degré* et on a une E_1^1, deux E_2^1; enfin, si les quatre racines de T sont égales, T *est du troisième degré,* on a une E_1^1, une E_4^3. On constate dans *tous ces cas* que R *et* S *ne peuvent satisfaire à la condition nécessaire pour que* T *soit plane.*

Réciproquement, *l'un quelconque de ces cas est réalisable en assujettissant* GΓ *à posséder les enveloppes correspondantes, qui disparaissent de l'équation des conjuguées : on le constate, toujours de la même façon, en comptant le nombre des conditions imposées à* G (§ 1, 6), *et appliquant les résultats généraux* (§ 6, IIe Partie).

Deuxième groupe, $n=4$; Θ *est de troisième classe.* — On a $p=2$, $q=1$ ou 2.

1° $p=2$, $q=1$. On prendra $V=t$, $U=0$, d'où $\alpha=-2$, $\beta=0$, puis $\delta_1 = z$, d'où

$$3H_1 = 2z, \qquad 3K_1 = t,$$

de sorte que $3H_1 t$, $3K_1 t$ sont les dérivées partielles de $t^2 z$: *donc* Θ *est un cône;* les surfaces S correspondantes sont parmi les polaires réciproques de celles qui sont engendrées par une cubique plane de troisième classe. On trouve d'ailleurs

$$3R = \delta V \frac{\partial D_1}{\partial t}, \qquad 3S = \delta V \frac{\partial D_1}{\partial z} \qquad (D = tD_1, \delta = zt);$$

donc T *est plane et du quatrième degré,* si D_1 n'a pas de racines multiples; on a alors les enveloppes suivantes : une E_1^2, une E_0^1, trois E_1^0; si D_1 a une racine double, supposée différente de $z = 0$ et $t = 0$, T *est du troisième degré,* on a une E_1^2, une E_0^1, une E_2^1, une E_1^0; si D_1 a une racine triple, T *est du second degré,* et l'ensemble $G\Gamma$ est polaire réciproque d'un ensemble du groupe précédent.

2° $p = 2$, $q = 2$, V *ayant une racine double,* soit $V = t^2$; on prendra $\delta_1 = 1$, $U = 3l$ (const.), d'où

$$D\delta = t^3 D_1 \delta_1, \qquad H_1 = t + lz, \qquad K_1 = -lt,$$

$$3R = \delta\left[D_1(t - 3lz) + t^2 \frac{\partial D_1}{\partial t}\right], \qquad 3S = \delta t\left(3lD_1 + t\frac{\partial D_1}{\partial z}\right).$$

Θ *n'est jamais un cône;* T *est du cinquième degré,* si D_1 n'admet ni la racine $t = 0$, ni racines multiples; on a alors : une E_2^2 *d'ordre* 4 *dans* Δ, deux E_1^0; si D_1 admet la racine $t = 0$, son autre racine étant distincte de celle-là, T *est du quatrième degré, non plane;* on a une E_3^3 *d'ordre* 5 *dans* Δ, une E_1^0; si D_1 a une racine double $\neq 0$, T *est également du quatrième degré,* on a une E_2^2 (d'ordre 4), une E_2^1; enfin, si D_1 a une racine double $t = 0$, T *est du troisième degré, non plane,* on a une E_4^4 *d'ordre* 6 *dans* Δ.

3° $p = 2$, $q = 2$, V *ayant deux racines distinctes,* soient $z = 0$, $t = 0$; on prendra $V = tz$, $\delta_1 = 1$, $U = \frac{3l}{2}$ (const.), d'où

$$H_1 = \frac{z}{2}(l + 1), \qquad K_1 = \frac{t}{2}(1 - l),$$

$$3R = \delta z\left[\frac{D_1(1 - 3l)}{2} + t\frac{\partial D_1}{\partial t}\right], \qquad 3S = \delta t\left[D_1\frac{1 + 3l}{2} + z\frac{\partial D_1}{\partial z}\right].$$

Θ ne devient un cône que si l'ensemble $G\Gamma$ rentre dans une des catégories précédentes. Si D_1 n'a ni racines z ou $t = 0$, ni racines multiples, T *est du cinquième degré;* on a deux E_1^1, deux E_1^0; si D_1 admet une seule des racines z ou $t = 0$, T *est du quatrième degré, non plane;* on a alors : une E_1^1, une E_2^2, une E_1^0; si D_1 admet les deux racines $z = 0$, $t = 0$, T *est du troisième degré, non plane,* on a deux E_2^2; si D_1 a deux racines égales différentes de $z = 0$ et $t = 0$, T *est du quatrième degré,* on a deux E_1^1, une E_2^1.

3e GROUPE. — $n = 3$; Θ est de quatrième classe, T sera au plus du quatrième degré, et il est inutile d'examiner les cas d'abaissement de ce degré qui correspondent à des solutions réciproques des précédentes. On a, dans ce cas,

$$3H_1 = \frac{\partial}{\partial t}(V\partial_1) + U\partial_1 z, \qquad 3K_1 = \frac{\partial}{\partial z}(V\partial_1) - U\partial_1 t,$$

$$3R = \partial\left[\frac{\partial}{\partial t}(VD_1) - UD_1 z\right], \qquad 3S = \partial\left[\frac{\partial}{\partial z}(VD_1) + UD_1 t\right],$$

de sorte qu'il y a réciprocité complète entre G et Γ; Θ et T deviennent en même temps, l'un un cône, l'autre une ligne plane, sous la condition $U = 0$; q peut prendre, dans ce cas, les valeurs 0, 1, 2, 3; U est nul seulement pour $q = 0$ ou 1. Dans le cas exceptionnel de $q = 0$, on a trois E_1^0, trois E_0^1, et l'on constate que les autres valeurs de q donnent des *combinaisons d'enveloppes* qui peuvent être regardées comme *cas limites de celle-là,* une E_1^0 et une E_0^1 se superposant en une E_1^1, deux E_1^1 en une E_2^2, ..., et qui sont : $2E_1^1$, $1E_1^0$, $1E_0^1$; $1E_2^2$, $1E_1^0$, $1E_0^1$; $3E_1^1$, $1E_2^2$, $1E_1^1$; une E_3^3; *mais les enveloppes* E_2^2 *et* E_3^3 *sont dans le cas exceptionnel d'un abaissement de* Δ *égal à 4 ou 6 unités;* Θ *n'est un cône et* T *une ligne plane* que si l'on attribue à U la valeur 0; et l'*ensemble cherché* $G\Gamma$ doit alors être donné par *la transformation de Laplace appliquée aux lignes planes de troisième classe divisées homographiquement* par *leurs conjuguées* et telles que *la développable circonscrite à la surface qu'elles engendrent soit de même classe.*

Réciproquement, une quelconque des combinaisons d'enveloppes que nous venons de reconnaître comme seules possibles est effectivement réalisable et correspond à un ensemble $G\Gamma$ *divisé homographiquement par ses conjugués, car le nombre des conditions imposées à* $G\Gamma$ *ne dépasse jamais*

10, *comme on le vérifie facilement, et les facteurs enveloppes satisfont aux conditions d'après lesquelles ils disparaissent du premier terme* Δ *de l'équation des conjuguées* (II^e Partie, § 6).

§ 4. — Détermination de quelques solutions.

1° Quand Θ est un cône du second degré, les surfaces S sont polaires réciproques de celles qu'engendre une conique tangente à une ligne enveloppe dans son plan osculateur, ou dont le plan passe par un point fixe, la tangente à la conique étant la caractéristique du plan; elles sont donc déjà connues en général. Mais il reste à déterminer celles de ces surfaces S pour lesquelles le degré de T s'abaisse.

2° Quand T est une ligne plane, nécessairement de troisième classe au plus, les surfaces S correspondantes s'obtiennent par l'application de la transformation de Laplace aux lignes planes de cette classe divisées homographiquement par leurs conjuguées, et telles que la *développable circonscrite* correspondante soit de *même classe;* cette dernière condition exclut certaines de ces lignes, mais le choix est facile par les méthodes que nous avons indiquées au Chapitre précédent; par exemple, si le plan de T n'a pas de point fixe, on trouve que la fonction F (Chap. I, § 3) doit être de la forme $a_0 t^3 + 3a_1 t^2 + 3a_2 t + a_3$; si elle a une racine double, le degré de T s'abaisse à 3; si elle a une racine triple, à 2; l'application deux fois répétée de la transformation de Laplace fournit le cône circonscrit Θ, qui est généralement de quatrième classe, mais peut être de troisième ou de deuxième.

3° En dehors de ces deux cas spéciaux, il est difficile d'obtenir en général les solutions dont nous avons montré l'existence; dans la plupart des cas, on ne peut se donner arbitrairement les enveloppes correspondantes parce qu'on assujettirait ainsi la cubique G à plus de conditions qu'il n'en faut pour la déterminer. Cependant, on peut obtenir de cette manière bien des cas particuliers qui se construisent ainsi sans intégration, en réduisant certaines des enveloppes à des points, droites ou plans, à savoir : une E_1^0 à un point fixe (dont la donnée assujettit la cubique à deux conditions), une E_0^1 à un plan osculateur fixe (deux conditions), une E_1^1 à une tangente fixe (trois conditions) ou à un plan osculateur avec son point de contact fixes (quatre conditions), une E_2^1 à une tangente avec point de contact fixes (quatre conditions), une E_2^2 à un point, tangente et plan osculateur fixes (cinq conditions), et généralement aussi une E_α^β, α et β étant $\geqq 2$; l'augmentation des nombres α et β correspond, comme on l'a vu, à celle de l'ordre du contact de deux lignes quelconques G ou de deux développables quelconques Γ du faisceau; si un des deux nombres augmente d'une unité, l'autre restant fixe, il en résulte une seule condition nouvelle, de sorte que la donnée d'un point fixe comme enveloppe E_α^β équivaut à $\alpha + \beta + 1$ conditions, sauf si, dans le cas de $\alpha = \beta$, l'ordre du premier coefficient Δ de l'équation des conjuguées s'élève au-dessus de $\alpha + 1$, jusqu'à 2α, sans que α varie; chaque élévation d'une unité pour l'ordre de Δ introduit alors une nouvelle condition. Plus généralement une *ligne* enveloppe E_1^0 de G ou une *développable* enveloppe de Γ, E_0^1 étant données, assujettissent l'ensemble tangent en un point donné ou suivant un plan donné à quatre conditions, une E_1^1 (coïncidence des plans osculateurs) à cinq, une E_2^1 (contact du second ordre entre G et l'enveloppe) à six, et généralement une ligne E_α^β à $\alpha + \beta + 3$ conditions, sauf dans le cas de $\alpha = \beta$, et de l'élévation de l'ordre de Δ (1). Voici quelques solutions qu'on peut obtenir algébriquement d'après ces indications :

1er GROUPE. — Θ est un cône du second degré; il suffit de rechercher les cas où le degré de T s'abaisse; on cherchera naturellement à déterminer Θ : soit le cas d'une enveloppe quelconque E_1^1 d'un point, tangente et plan osculateur fixes E_3^2 et d'une E_1^0; donnons-nous d'abord E_1^1 et E_3^2; toutes les cubiques doivent avoir même rayon de première courbure au point fixe; en se donnant ce rayon, le cône Θ sera déterminé pour chaque position de son sommet sur la courbe E_1^1; l'enveloppe de ce cône mobile sera la surface S cherchée, et la caractéristique G de ce cône possédera nécessairement une troisième enveloppe E_1^0, en plus de celles qu'on s'était données d'abord; T est, dans ce cas, du quatrième degré; soit encore donnée une tangente fixe E_1^1, un point, tan-

(1) Nous avons montré (Thèse, Note complémentaire) que l'expression de ces conditions pouvait toujours se faire sous forme finie.

gente et plan osculateur fixes E_4^3; la cubique G est ainsi assujettie à onze conditions et peut être déterminée algébriquement : T est du troisième degré.

2ᵉ groupe. — Indiquons des cas où T n'est pas une ligne plane : donnons-nous une ligne enveloppe arbitraire E_2^2 (d'ordre 4 dans Δ), et deux E_1^0 (points fixes); la cubique G tangente en un point déterminé de E_2^2 est assujettie à $7 + 1 + 4 = 12$ conditions qui la déterminent, d'où une solution *obtenue algébriquement* avec deux fonctions arbitraires; réduisons l'enveloppe $E_2^2(4)$ à un point, tangente et plan osculateur fixes, une E_1^0 étant un point, l'autre une ligne quelconque : nous avons une solution avec trois fonctions arbitraires; si on réduit la seconde E_1^0 à un point, on a une solution avec une fonction arbitraire; T est alors du cinquième degré; elle s'abaisse au quatrième, lorsqu'on a une $E_3^3(5)$, une E_1^0 : on a des solutions en réduisant à un point successivement chacune d'elles; T est du troisième degré, si l'on prend des cubiques ayant une ligne enveloppe arbitraire $E_4^4(6)$: la cubique tangente en chacun des points de l'enveloppe est assujettie à douze conditions. Enfin, voici des exemples pris dans la dernière subdivision de ce groupe : une tangente fixe E_1^1, une enveloppe courbe arbitraire E_1^1, deux points fixes E_1^0 (T est du cinquième degré); ou deux points avec tangente et plan osculateur fixes (deux E_2^2) (T est du troisième degré); ou une courbe enveloppe arbitraire E_1^1, un point avec tangente et plan osculateur fixes E_2^2, un point fixe E_1^0 (T est du quatrième degré); dans le premier et le troisième exemple on peut remplacer la courbe E_1^1 par une tangente fixe.

On remarque que la *transformation de Laplace* appliquée au deuxième exemple (deux points fixes E_2^2) fournit une autre solution de même catégorie; par conséquent, *tous les ensembles* $G\Gamma$ *divisés homographiquement par leurs conjuguées ne peuvent être obtenus par l'application répétée de cette transformation*, effectuée d'abord en partant d'une génératrice plane.

3ᵉ groupe. — En voici quelques exemples qu'on peut réaliser géométriquement : deux tangentes fixes E_1^1, un point fixe E_1^0, un plan osculateur fixe E_0^1; ou un point, avec tangente et plan osculateur fixes E_2^2, mais apparaissant comme facteur *quadruple* dans Δ, un point fixe E_1^0 un plan osculateur fixe E_0^1; ou une enveloppe arbitraire E_1^1, et deux tangentes fixes E_1^1 : en particulier, trois tangentes fixes E_1^1; un point, tangente et plan osculateur fixes E_3^3, avec contact du second ordre entre deux cubiques, et aussi entre deux développables Γ du faisceau, le facteur correspondant *étant de multiplicité* 6 dans Δ, etc.

4° La méthode générale de détermination des solutions est naturellement l'intégration de l'un des systèmes simultanés de la forme déjà indiquée :

$$(1) \qquad \begin{cases} a' = M_1 a - 3M_2 b + 3M_3 c - M_4 d, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} A' = -M_1 A + 3N_1 B - 3P_1 C + Q_1 C, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dont les coefficients M, N, P, Q sont liés par les conditions du problème; cette intégration peut se faire dans des cas particuliers, par exemple le suivant : *l'ensemble admet une enveloppe* E_1^1, *et deux tangentes avec points de contact fixes* E_2^1. Supposons que ces points fixes soient $t = 0$, $z = 0$; alors a_1, a_2, a_3, a_4 sont proportionnels à des constantes, d_1, d_2, d_3, d_4 aussi; on peut d'ailleurs supposer effectuée préalablement sur t une transformation homographique $t = \lambda t_1$, qui ramène les coordonnées (a) à être constantes, le déterminant $|abcd|$ restant toujours égal à 1, ce qui entraîne la condition

$$M_1 - 3N_2 + 3P_3 - Q_4 = 0;$$

l'existence des deux points avec tangentes fixes exige que

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = N_3 = N_4 = P_1 = P_2 = Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0,$$

de sorte que les équations du système (1) se réduisent à

$$a' = 0, \qquad b' = N_1 a - 3N_2 b, \qquad c' = 3P_3 c - P_4 d, \qquad d' = Q_4 d,$$

et la condition $M_1 - 3N_2 + 3P_3 - Q_4 = 0$ entraîne $Q_4 = 0$. Il reste à exprimer l'existence d'une enveloppe E_1^1 : on forme pour cela les polynomes H et K, on exprime qu'ils ont la racine commune $t = \alpha z$, et qu'elle est double dans le polynome $\mathrm{H}t + \mathrm{K}z$; on arrive ainsi au système simultané suivant :

$$a' = 0, \qquad b' = \mathrm{P}_4(a\alpha^2 - b\alpha), \qquad c' = \mathrm{P}_4(c\alpha - d), \qquad d' = 0$$

(P_4 est une fonction arbitraire de u). On l'intègre facilement et, en appelant β une fonction arbitraire de u qui remplace P_4, on trouve

$$x_1 = t^3 + \frac{3t^2z}{\beta}\int \alpha\beta'\,du, \quad x_2 = \frac{3t^2z}{\beta}, \quad x_3 = 3\beta tz^2, \quad x_4 = -3\beta tz^2 \int \frac{\beta'\,du}{\alpha\beta^2} + z^3.$$

Nous ne savions réaliser géométriquement ce cas que quand l'enveloppe E_1^1 était une droite.

On peut étudier l'intégration des systèmes (1) ou (2), dans des cas plus généraux, par un procédé que nous avons indiqué ailleurs [1]. Nous nous proposons de revenir sur ce sujet, et d'étudier particulièrement les solutions telles que la cubique G *soit la caractéristique d'une quadrique mobile de raccordement d'une surface réglée.*

§ 5. — Des lignes asymptotiques de la surface S engendrée par la cubique G.

L'application des résultats généraux de la deuxième Partie montre que l'*équation* différentielle de ces lignes est *normale, sans nouvelle condition, sauf lorsqu'il existe des enveloppes* E_0^1; *elles doivent alors se réduire, comme nous l'avons vu, à des plans osculateurs fixes*. Les solutions trouvées ci-dessus permettent de rechercher des cas d'intégration, les points ou plans osculateurs fixes donnant déjà, en général, des solutions singulières. Dans le cas particulier où Θ est un cône du second degré, la question a déjà été étudiée (III^e Partie, Chap. I, *Applications aux coniques*), et les cas polaires réciproques des cas d'intégration signalés alors donnent des solutions du problème actuel; rappelons notamment que le discriminant de l'équation des asymptotiques est carré parfait quand la développable de troisième classe circonscrite à

(1) *Comptes rendus*, 6 novembre 1893.

la surface lieu de la conique génératrice admet des enveloppes doubles; il en sera donc ainsi, dans le cas actuel, lorsque le polynome désigné par D_1 lors de la classification (§ 3) a deux racines doubles ou une racine quadruple (cas correspondants signalés de l'abaissement du degré de T); *un exemple nouveau de ce cas* est celui de *la surface que nous venons d'obtenir ci-dessus* par l'intégration du système (1), les enveloppes étant : deux tangentes avec contacts fixes E_2^1, et une enveloppe *courbe* E_1^1; les deux tangentes E_2^1 correspondent chacune à une racine double du discriminant et l'équation des asymptotiques se décompose en *deux équations de Riccati*.

Un autre exemple est fourni par le cas d'une tangente fixe E_1^1, d'un point avec tangente et plan osculateur fixes E_2^2 et d'un point fixe E_1^0 (Θ est de quatrième classe, T du troisième degré). Au point fixe E_2^2 correspond une racine *double* du discriminant, à l'autre point fixe E_1^0 une solution singulière; la cubique dépend encore de deux paramètres arbitraires qu'on peut lier *algébriquement* par une relation exprimant qu'elle reste *tangente à un plan fixe*, nouvelle solution singulière. Soient $t = 0$ le point E_2^2, $z = 0$ le point E_1^0; en choisissant convenablement le tétraèdre de référence, on a les coordonnées sous la forme suivante :

$$x_1 = at^3, \qquad x_2 = 3bt^2z, \qquad x_3 = (3nb + 2ma)t^2z - matz^2, \qquad x_4 = (t - z)^2,$$

m, n étant des constantes dépendant de la tangente fixe; en reliant les paramètres a et b par la condition de contact de la cubique avec un plan tangent fixe, on obtient une relation algébrique entre les paramètres a et b qui détermine une *surface* S *algébrique* dont les asymptotiques dépendront d'équations de Riccati.

Enfin un *dernier exemple* très simple est celui de l'ensemble ayant deux points E_2^2 avec tangente et plan osculateur fixes; à ces points correspondent deux racines doubles du discriminant qui est alors carré parfait: tous ces résultats découlent immédiatement de nos discussions générales.