

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

C. MALTÉZOS

## **Les enveloppes solides minces, les cloches**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 11 (1894), p. 325-375

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1894\\_3\\_11\\_\\_325\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1894_3_11__325_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LES ENVELOPPES SOLIDES MINCES.

## LES CLOCHES.

PAR M. C. MALTÉZOS.

---

### CHAPITRE I.

---

#### Théorie des plaques planes minces.

Il est nécessaire de faire une discussion succincte sur la théorie des plaques planes, car elle nous sera utile quand nous traiterons les enveloppes minces.

C'est Poisson qui a donné, le premier, la théorie de l'équilibre et du mouvement vibratoire des plaques planes, homogènes et isotropes, en admettant que les forces élastiques et les déformations sont développables en séries convergentes suivant les puissances croissantes de la variable qui donne la distance d'un point quelconque de la plaque à la couche moyenne; en gardant donc les deux premiers termes au plus de ces développements, on arrive aux vraies équations indéfinies.

De Saint-Venant a porté l'objection que cette manière de procéder n'est pas légitime, et que même elle est fautive quand on veut traiter le problème le plus général des plaques planes de contexture quelconque.

M. Basset (1) dit que cette objection ne doit pas arrêter, parce que alors il faudrait former la même objection pour la plupart des investi-

---

(1) *Philosophical Transactions of the R. Soc. of London*, Vol. CLXXXI, p. 435.

gations physiques. Et il est bien vrai qu'une quantité connue comme fonction de la position peut être développée par la formule de Taylor, excepté le cas de discontinuité quand on passe d'un point à l'autre. Mais M. Boussinesq avait, par avance, répondu à cette justification de la méthode de Poisson, que, s'il est parfaitement permis de développer les fonctions autour de chaque point, dans une *petite* partie de leur *champ total* de variation, qui est ici l'épaisseur de la plaque, il n'en est généralement plus de même quand il s'agit de ce champ tout entier.

Kirchhoff a proposé une autre méthode, qui consiste à admettre que chaque ligne droite, primitivement normale aux couches de la plaque, reste droite et normale sur ces couches après la déformation. Cela paraît suffisamment exact quand les plaques sont isotropes, ou encore quand les bases sont des plans de symétrie de contexture, mais elle est fautive quand la contexture de la plaque est quelconque. D'ailleurs, comme l'a montré M. Maurice Lévy, l'hypothèse de Kirchhoff est équivalente à celle de Poisson. M. Gerhing a essayé, sur l'indication de Kirchhoff, de traiter sans aucune hypothèse douteuse le problème, en s'appuyant sur des considérations cinématiques, qui, d'après M. Boussinesq, manquent de rigueur ou auraient tout au moins besoin d'être complétées.

Si l'on appelle les composantes des forces élastiques, exercées par unité de surface sur les éléments menés par un point  $(x, y, z)$  de la plaque,  $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ , et si la couche moyenne à l'état primitif, ou le plan tangent en ce point à la couche moyenne, après la déformation, est pris pour plan des  $xy$ , et la normale à cette couche comme axe des  $z$ , Poisson et Kirchhoff sont arrivés à poser séparément

$$(1) \quad (T_1, T_2) = 0, \quad N_3 = 0.$$

Mais de Saint-Venant, objectant que les *efforts tranchants*  $T_1, T_2$  ont un rôle souvent indispensable à considérer, a jugé désirable de prendre comme point de départ de la théorie des hypothèses moins étroites que ces relations (1). Cela n'empêche d'ailleurs nullement de poser celles-ci en première approximation seulement.

M. Boussinesq, de son côté, a donné en 1871 une théorie des plaques planes minces. Ces plaques sont formées de couches sensiblement

planes et parallèles, et dont la contexture constante ou assez lentement variable d'un point à l'autre d'une même couche pourra changer rapidement, et même avec discontinuité, d'une couche à ses voisines. Sans aucune hypothèse douteuse, il démontre effectivement les relations (1) en première approximation.

M. Boussinesq y est revenu dans un second Mémoire, paru en 1879. Il conçoit alors la plaque divisée en tronçons sensiblement prismatiques, dont chacun, limité par la surface même du corps et par deux couples de plans parallèles menés à peu près normalement à cette surface, a ses trois dimensions comparables entre elles. Se basant sur la lenteur de la variation de l'état physique dans le sens de grandes dimensions de la plaque, et sur ce que les équations de l'équilibre du tronçon donnent alors  $N_3$  très petit devant  $(T_1, T_2)$  et  $T_1, T_2$  très petits eux-mêmes devant  $N_1, N_2, T_3$ , il peut poser, à une seconde approximation,

$$(2) \quad \frac{d(T_1, T_2)}{(dx, dy)} = 0, \quad \frac{d^2(N_1, N_2, T_3)}{(dx^2, dx dy, dy^2)} = 0.$$

En supposant la contexture du prisme symétrique par rapport au plan  $xy$  (ce qui rend  $N_1, N_2, N_3, T_3$  fonctions linéaires des quatre déformations correspondantes  $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{xy}$ , et  $T_1, T_2$  fonctions linéaires des deux autres déformations  $g_{xz}, g_{yz}$ ), il trouve

$$(3) \quad \frac{d(g_{xz}, g_{yz})}{d(x, y)} = 0, \quad \frac{d^2(\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{xy})}{(dx^2, dx dy, dy^2)} = 0;$$

et il arrive ainsi aux expressions

$$(4) \quad \begin{cases} N_1 = C(\beta \partial_x + \beta' \partial_y + \beta'' g_{xy}), \\ N_2 = C(\beta_1 \partial_x + \beta'_1 \partial_y + \beta''_1 g_{xy}), \\ T_3 = C(\gamma \partial_x + \gamma' \partial_y + \gamma'' g_{xy}). \end{cases}$$

Il suppose la contexture telle que le coefficient positif d'élasticité  $C$  puisse seul varier d'un feuillet à l'autre, ou que les coefficients  $\beta, \beta', \dots, \gamma''$  soient indépendants de  $z$ ; et il déduit finalement des dernières relations (3), ainsi que de ces formules (4), d'une part, les expressions, linéaires en  $z$ , de  $\partial_x, \partial_y, g_{x,y}$ , et, d'autre part, les formules des tractions exercées sur les sections normales de la plaque et celles des couples de flexion ou de torsion qu'elles éprouvent.

*Conditions aux limites.* — Les conditions au contour ont été trouvées par Poisson et Cauchy au nombre de trois pour la flexion. Elles découlent des équations définies de l'élasticité qui sont trois.

Kirchhoff, en considérant l'expression du travail des forces élastiques, est arrivé à deux conditions aux limites, qui suffisent. Il était donc nécessaire de parvenir aux mêmes conditions par la méthode directe, sous peine de donner raison à M. Gerhing, avançant que l'emploi de la méthode de Kirchhoff est indispensable dans la théorie de l'élasticité. C'est ce qu'ont fait M. Boussinesq d'une part, et Sir W. Thomson et Tait (1) de l'autre, en se basant, indépendamment l'un des autres, sur les mêmes considérations géométriques.

Voici, en quelques mots, ce qu'a fait M. Boussinesq. Les plaques étant, par exemple, circulaires, sur chaque bande de longueur  $ds$  du cylindre contournant agissent les trois forces  $F_n ds$ ,  $F_s ds$ ,  $F_z ds$  suivant la normale  $dn$  à la bande, suivant sa base  $ds$  et suivant sa hauteur, plus deux couples,  $M_s ds$  normal à l'élément  $ds$  du contour et  $M_n ds$  parallèle à la bande même, le troisième couple étant négligeable de l'ordre de  $ds^2$ . Le couple  $M_n ds$  peut être supposé composé de deux forces  $M_n$ ,  $-M_n$  de sens contraires, appliquées le long de deux génératrices qui passent par les extrémités de l'élément  $ds$ . Si l'on conçoit une série de bandes contiguës du cylindre contournant séparées par des génératrices infiniment voisines, les couples tels que  $-M_n ds$  seront ainsi remplacés par deux forces  $-M_n$  et  $M_n + \frac{dM_n}{ds}$ , qui auront une résultante égale à  $\frac{dM_n}{ds}$ . Finalement, on aura, par unité de longueur, trois forces  $F_n$ ,  $F_s$ ,  $F_z + \frac{dM_n}{ds}$  et un couple  $M_s$ .

« Poisson, dit-il, ayant négligé de remplacer les couples parallèles au cylindre contournant par des forces dirigées suivant les génératrices...., les a regardés comme représentant un mode d'action distinct, exercé sur chaque bande, ce qui lui a donné une condition de trop. »

---

(1) *Treatise on natural Philosophy.*

## CHAPITRE II.

## Historique des théories des enveloppes solides, minces, et comparaison de la grandeur des vibrations longitudinales et transversales.

On rencontre quelques notions sur le mouvement vibratoire des enveloppes minces dans la *Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* de Lamé (1852).

Lamé examine les enveloppes cylindriques et sphériques et le timbre hémisphérique. Il finit en ces termes : « On remarquera que les vibrations des timbres sont longitudinales, tandis que celles des cordes, lames, tiges sont transversales. » Cela veut dire que dans les timbres les vibrations longitudinales prédominent. Nous verrons dans la suite que cette assertion est plus que discutable.

En 1874, Aron a appliqué la méthode de Gerhing, pour les plaques planes, à la question des enveloppes. M. A. Love dit que les changements d'axes, quand on passe d'un point à l'autre de la surface moyenne de l'enveloppe, ne sont pas pris en considération dans les calculs ; d'où il arrive que les résultats sont faux.

En 1881, Lord Rayleigh, dans un Mémoire intitulé : *On the infinitesimal Bending of surfaces of revolution* (1), a examiné brièvement la déformation d'une surface de révolution, en admettant qu'une ligne tracée sur cette surface a la même longueur avant et après la déformation. C'est une hypothèse non seulement loin d'être évidente, mais fautive quand il s'agit des régions près des bords libres où l'extension est sensible. Lord Rayleigh, en y revenant, admet qu'une déformation quelconque entraîne toujours l'extension sur les bases, mais qu'on peut supposer la surface moyenne de la cloche (ou feuillet moyen) inextensible.

En 1882, Émile Mathieu a publié un Mémoire *Sur le mouvement vibratoire des cloches* (*Journal de l'École Polytechnique*). C'est la pre-

(1) *Proceedings of the London Math. Soc.*, Vol. XIII.

*Ann. de l'Éc. Normale.* 3<sup>e</sup> Série. Tome XI. NOVEMBRE 1894.

mière théorie générale des cloches après celle d'Aron. Mathieu a fait les mêmes hypothèses que Poisson sur les plaques planes. Donc, tout ce qui a été dit à propos de la théorie de Poisson sur les plaques planes est en vigueur dans le cas actuel.

Les cloches de Mathieu ont une épaisseur variable, quand on s'avance du sommet vers le bord unique; elles sont de révolution, isotropes et homogènes. Comme il y a un potentiel, il applique, pour trouver les équations du mouvement vibratoire, la méthode de Kirchhoff, c'est-à-dire qu'il cherche l'expression du travail des forces élastiques, et il la trouve de la forme

$$- \mu(A\varepsilon + B\varepsilon^3).$$

Mathieu dit que, *quand une cloche vibre par les coups du battant, les vibrations tangentielles (longitudinales) sont, en général, du même ordre de grandeur que les vibrations normales*. Si donc on admet cela, on peut, comme a fait M. Mathieu, négliger le terme  $B\varepsilon^3$  devant le terme  $A\varepsilon$ . Nous reviendrons là-dessus dans la discussion de la théorie suivante de M. Love, car ce savant a répété la même chose et en a été vivement critiqué par Lord Rayleigh.

M. A. Love a publié, en 1888, dans les *Philosophical Transactions* (vol. CLXXIX, p. 491-546), un Mémoire sur le même sujet (1). Il y examine les enveloppes minces, homogènes, isotropes et d'épaisseur constante. La méthode dont il a fait usage est celle de Clebsch ou de Gerhing, et comme M. Boussinesq avait contesté les équations cinématiques de Gerhing, car on y avait négligé quelques dérivées et introduit d'autres du même ordre de grandeur que les négligées, M. Love a négligé toutes les autres dérivées du même ordre de grandeur. Il est ainsi arrivé pour les enveloppes à des équations incomplètes. Son travail est encore incomplet en ce qu'il ne tient pas compte, quand il passe de la surface moyenne à une couche voisine de l'enveloppe, de la variation de l'aire de l'élément de surface. Il arrive lui aussi, pour l'expression du travail, à la forme

$$- \mu(A'\varepsilon + B'\varepsilon^3),$$

---

(1) *The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell.*

$\epsilon$  étant l'épaisseur de l'enveloppe. Et comme il lui paraît que le terme  $B'\epsilon^3$  est infiniment petit du troisième ordre par rapport au terme  $A'\epsilon$ , il le néglige; ainsi il peut satisfaire aux conditions aux limites qui sont au nombre de quatre. Le coefficient  $A'$  est fonction des quantités qui donnent l'extension de la surface moyenne, tandis que  $B'$  est fonction non seulement de ces mêmes quantités, mais encore des quantités qui donnent le changement de courbure. M. Love, comme Mathieu, admet que les fonctions qui représentent les changements de courbure et celles qui donnent l'extension sont du même ordre de grandeur.

Cela entraînait une réponse de Lord Rayleigh, dans un Mémoire paru le 1<sup>er</sup> décembre de la même année (1888), sous le titre : *On the bending and vibration of thin elastic shells, especially of cylindrical form.* « Quand sur une feuille matérielle mince, dit l'auteur, agissent des pressions, la résistance qu'elle oppose à la flexion (*bending*) est très petite comparativement à celle qu'elle oppose à l'extension. Il est vrai que la flexion entraîne une extension (sauf sur la couche moyenne), mais très petite, et par conséquent on peut, pour la facilité, prendre la lame comme tout à fait inextensible. » Plus loin, Lord Rayleigh s'exprime en ces termes : « A première vue, il paraîtrait curieux comment, de deux termes qui entrent dans l'expression de l'énergie potentielle, l'un, proportionnel à  $\epsilon^3$ , est celui qu'il faut conserver, tandis qu'on néglige l'autre, le proportionnel à  $\epsilon$ . La cause est la grande énergie potentielle qui accompagne l'extension. La grandeur comparative du coefficient est contre-balancée par la petitesse de l'extension, au carré de laquelle l'énergie est proportionnelle. » C'est très bien exposé; mais qu'on me permette de dire qu'il ne prouve pas encore que le terme  $A\epsilon$  est négligeable devant le terme  $B\epsilon^3$ . Cela peut seulement prouver que les deux termes sont du même ordre de grandeur. En effet, si la flexion est infiniment petite du premier ordre et l'extension du second,  $B$  sera de l'ordre de  $\epsilon^2$  et  $A$  de l'ordre de  $\epsilon^4$ ; donc les deux termes de l'énergie potentielle seront de l'ordre de  $\epsilon^5$ . Ou si l'extension est infiniment petite du premier ordre, tandis que la flexion est finie,  $A$  sera de l'ordre de  $\epsilon^2$ , et l'énergie sera proportionnelle à  $\epsilon^3$ . Cette discussion a lieu pour les parties éloignées du bord libre, car tout près de celui-ci les vibrations longitudinales peuvent devenir



comparables aux vibrations transversales; mais elle ne nous a pas encore permis de choisir entre  $A\varepsilon$  et  $B\varepsilon^3$  le terme qu'il faut négliger. Pour pouvoir décider, il fallait recourir à l'expérience. Et d'abord la longue durée de la persistance du son des cloches et enveloppes en général nous apprend, sans aucune autre expérience, que les plus importantes des vibrations sont les transversales. Mais on peut faire des expériences sur diverses cloches. En voici deux (1) : versons dans un verre une quantité d'un liquide quelconque, et faisons vibrer le verre par un coup d'archet ou de battant; on voit alors des gouttelettes se précipitant hors de la masse liquide; cette précipitation des gouttelettes, qui était connue de Lamé lui-même, est due aux vibrations normales à la surface de la cloche, ou quasi normales. La surface liquide sera divisée en quatre parties en mouvement, que sépare un espace en croix presque en repos, quand le son rendu par le verre est le son fondamental.

Voici une seconde expérience. Tapissons la face intérieure du verre avec du sable fin et donnons un coup d'archet ou de battant; alors on voit les particules sablonneuses qui étaient massées à la partie inférieure sauter presque verticalement, ce qui montre que les particules de la surface vibrent normalement.

De toute cette discussion résulte que les vibrations longitudinales des enveloppes sont très petites devant les transversales; mais il n'en résulte pas que le terme  $A\varepsilon$  soit négligeable devant  $B\varepsilon^3$ . Il est très probable qu'il en est ainsi la plupart du temps; mais cela n'empêche pas qu'il pourrait exister des cas où le terme  $A\varepsilon$  est comparable à  $B\varepsilon^3$ , et d'autres encore où  $B\varepsilon^3$  est négligeable devant  $A\varepsilon$  (2).

Pour ces raisons, dans les calculs que je ferai plus loin, je considère  $A\varepsilon$  comparable à  $B\varepsilon^3$  et je conserve, par conséquent, les deux termes. Et si, dans les applications, l'extension est du même ordre de grandeur

(1) Exécutées par l'éminent savant M. Cornu et moi; elles ont révélé un autre fait très important, le déplacement des lignes nodales, que je discute au Chapitre relatif aux battements des cloches. Ces expériences sont très connues, mais je les décris à cause du déplacement des lignes nodales.

(2) Par exemple, si  $\varepsilon$  augmente, tout en restant petit (pour que la théorie y soit applicable), la résistance à la flexion va en augmentant et il peut arriver que pour une épaisseur convenable  $A\varepsilon$  soit comparable à  $B\varepsilon^3$ .

que la flexion, on négligera les termes multipliés par  $\varepsilon^3$  et on aura des équations plus simples qui seront appelées *équations extensionnelles*.

Revenons maintenant, pour en finir, à l'historique des théories des enveloppes minces.

En 1890, M. A. Basset a fait paraître dans les *Philosophical Transactions* (Vol. CLXXXI) un Mémoire sous le titre : *On the extension and flexure of cylindrical and spherical thin elastic shells*. Comme on voit, il n'a traité que la sphère et le cylindre de révolution. En appelant  $\varepsilon'$  la distance d'un point de l'enveloppe à la surface moyenne, et s'appuyant sur ce qu'on peut toujours exprimer une fonction de  $\varepsilon'$  par la formule de Taylor, il trouve

$$N'_3 = A + A_1 \varepsilon' + \frac{A_2}{2} \varepsilon'^2.$$

Pour déterminer les coefficients  $A$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ , il fait l'hypothèse suivante : « Quand les faces de l'enveloppe n'obéissent pas à des forces superficielles, c'est-à-dire à des pressions ou des tractions,  $N'_3$ ,  $T'_1$ ,  $T'_2$ , dans l'intervalle où elles dépendent de  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ , sont capables de s'exprimer par la forme  $u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + \dots$  ( $u_n$  étant une fonction homogène et de degré  $n$  par rapport à  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ ). » C'est donc l'hypothèse de Poisson modifiée.

Le travail de M. Basset a un grand mérite. C'est lui qui le premier a introduit dans le calcul la notion de la variation de l'aire de l'élément de surface, quand on passe de la surface moyenne à une autre.

Peu de temps après, M. le professeur Lamb a publié un Mémoire intitulé : *On the deformation of an elastic shell* (1). Je citerai à sa place le dernier travail de M. Love, qui est le plus complet fait jusqu'à présent sur les enveloppes, et qui résume celui du professeur Lamb et de M. Basset. M. Love, il y a quelques mois, a publié un *Traité de théorie mathématique de l'élasticité* (2), dont les Chapitres XXI et XXII du Volume II sont consacrés à la théorie générale des enveloppes minces et à ses applications. La méthode suivie est la Cinématique (Gerhing) et les enveloppes traitées sont *isotropes, homogènes et d'épaisseur constante*.

(1) *London Math. Soc. Proc.*, Vol. XXI; 1890.

(2) *A Treatise on the mathematical theory of elasticity*; 1893.

On voit, par tout ce qui précède, que le problème des enveloppes quelconques d'épaisseur variable n'a pas été touché. Il est vrai que Mathieu en a fait la théorie pour les cloches de révolution, mais encore les équations qu'il a posées sont les extensionnelles. D'ailleurs la seule de ces théories qui n'est pas basée sur une hypothèse douteuse est la Cinématique, par laquelle n'a été examiné que le cas de l'enveloppe d'épaisseur constante, homogène et isotrope.

Dans ce travail, nous avons voulu donner la théorie des enveloppes solides, minces sans hypothèse douteuse, et nous sommes guidé à cela par la théorie pour les plaques planes de M. Boussinesq.

Nous traitons le problème le plus général possible des enveloppes solides minces, d'épaisseur variable d'une manière continue d'un point à l'autre. Nos enveloppes se constitueront d'une infinité d'enveloppes couches, dont la moyenne à laquelle tout sera rapporté s'appellera la *couche moyenne*; chaque couche sera homogène, mais la densité variera continûment d'une couche à la couche contiguë.

Des équations générales auxquelles nous parviendrons, on pourra aisément tirer les équations pour les enveloppes homogènes, isotropes, d'épaisseur variable ou constante.

---

### CHAPITRE III.

---

#### Équations générales d'élasticité en coordonnées curvilignes. Cas particuliers des enveloppes solides.

Avant d'exposer la théorie de l'équilibre élastique et du mouvement vibratoire des enveloppes, il nous faut trouver les équations générales de l'élasticité en coordonnées curvilignes qui, pour la première fois, ont été données par Lamé (<sup>1</sup>). Nous pourrions les poser comme con-

---

(<sup>1</sup>) *Sur les surfaces isostatiques dans les corps solides homogènes en équilibre d'élasticité* (*Journal de Liouville*, t. VI; 1841).

Lamé admettait l'hypothèse de Poisson et posait  $\lambda = \mu = \varepsilon$ ; c'est ce qu'il appelait le

nues, mais il faut les trouver, d'ailleurs très brièvement, par la méthode analytique en suivant une autre marche que celle de Lamé, car les formules que nous rencontrerons nous seront ailleurs nécessaires. Après, nous supposerons l'origine mobile sur la surface moyenne de l'enveloppe et nous formerons ainsi les équations générales spéciales au cas de l'enveloppe, non connues, je pense, en toute leur généralité.

*Notions des coordonnées curvilignes, etc.* — Considérons un triple système de surfaces orthogonales et soient

$$(1) \quad f(x, y, z) = \rho, \quad f_1(x, y, z) = \rho_1, \quad f_2(x, y, z) = \rho_2$$

les équations de ces surfaces,  $\rho, \rho_1, \rho_2$  désignant des paramètres variables. Tout point de l'espace défini par les coordonnées  $x, y, z$  peut être aussi défini par  $\rho, \rho_1, \rho_2$  qui s'appellent ses *coordonnées curvilignes*. Soient  $s$  l'arc suivant lequel se coupent deux surfaces  $\rho_1, \rho_2$ ; de même,  $s_1$  l'arc d'intersection de deux surfaces  $\rho, \rho_2$ , enfin  $s_2$  celui d'intersection de deux surfaces  $\rho, \rho_1$  qui passent par un point de l'espace P.

En posant

$$(2) \quad \sum \left( \frac{d\rho}{dx} \right)^2 = h^2 = \frac{1}{H^2}, \quad \sum \left( \frac{d\rho_1}{dx} \right)^2 = h_1^2 = \frac{1}{H_1^2}, \quad \sum \left( \frac{d\rho_2}{dx} \right)^2 = h_2^2 = \frac{1}{H_2^2},$$

on a

$$(3) \quad ds = \frac{d\rho}{h} = H d\rho, \quad ds_1 = \frac{d\rho_1}{h_1} = H_1 d\rho_1, \quad ds_2 = \frac{d\rho_2}{h_2} = H_2 d\rho_2;$$

et, si  $r_{kl}$  désigne le rayon de courbure principale de la surface  $\rho_l$  suivant l'arc  $s_k$  (où  $k$  et  $l$  sont deux des nombres 0, 1, 2 pris inégaux), on trouve

$$(4) \quad \frac{1}{r_{kl}} = \frac{h_l}{h_k} \frac{dh_k}{d\rho_l} = - \frac{1}{H_k H_l} \frac{dH_k}{d\rho_l} = \frac{1}{h_k} \frac{dh_k}{ds_l} = - \frac{1}{H_k} \frac{dH_k}{ds_l}.$$

Le rayon de courbure est dirigé dans le sens où  $\rho$  et  $s$  augmentent.

*coefficient d'élasticité*, tandis qu'on désigne maintenant par ce nom l'expression

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu};$$

$\mu$  mesure l'élasticité de forme et on le désigne par le nom de *coefficient de rigidité*; et  $\lambda$  mesure la résistance au changement de volume et prend le nom de *coefficient de fluidité*.



*Équations indéfinies d'équilibre d'élasticité en coordonnées curvilignes.* — Elles sont, en coordonnées rectilignes,

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + DA = 0, \\ \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} + DB = 0, \\ \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} + DC = 0. \end{cases}$$

Pour les transformer en coordonnées curvilignes, on a

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{d}{d\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} + \frac{d}{d\rho_2} \frac{d\rho_2}{dx},$$

formule qui, par les relations concentrées,

$$\frac{d\rho}{d(x, y, z)} = (\alpha, \beta, \gamma)h, \quad \frac{d\rho_1}{d(x, y, z)} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)h_1, \quad \frac{d\rho_2}{d(x, y, z)} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)h_2,$$

devient la première des suivantes

$$(11) \quad \frac{d}{d(x, y, z)} = (\alpha, \beta, \gamma)h \frac{d}{d\rho} + (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)h_1 \frac{d}{d\rho_1} + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)h_2 \frac{d}{d\rho_2}.$$

Les quantités  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  sont les cosinus des angles que font les axes mobiles  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  (tangents aux arcs  $s$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ ) avec les axes fixes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Si les projections des forces extérieures sur les axes de  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  sont  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ , on aura

$$(12) \quad \begin{cases} A = \alpha F + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2, \\ B = \beta F + \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2, \\ C = \gamma F + \gamma_1 F_1 + \gamma_2 F_2. \end{cases}$$

Les composantes  $N$ ,  $T$  seront exprimées en fonctions de nouvelles  $N'$ ,  $T'$  par les formules de transformation

$$3) \quad \begin{cases} N_1 = \alpha^2 N'_1 + \alpha_1^2 N'_2 + \alpha_2^2 N'_3 + 2\alpha\alpha_1 T'_3 + 2\alpha\alpha_2 T'_2 + 2\alpha_1\alpha_2 T'_1, \\ N_2 = \beta^2 N'_1 + \beta_1^2 N'_2 + \beta_2^2 N'_3 + 2\beta\beta_1 T'_3 + 2\beta\beta_2 T'_2 + 2\beta_1\beta_2 T'_1, \\ N_3 = \gamma^2 N'_1 + \gamma_1^2 N'_2 + \gamma_2^2 N'_3 + 2\gamma\gamma_1 T'_3 + 2\gamma\gamma_2 T'_2 + 2\gamma_1\gamma_2 T'_1, \\ T_1 = \beta\gamma N'_1 + \beta_1\gamma_1 N'_2 + \beta_2\gamma_2 N'_3 + (\beta\gamma_1 + \beta_1\gamma) T'_3 + (\beta\gamma_2 + \beta_2\gamma) T'_2 + (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) T'_1, \\ T_2 = \alpha\gamma N'_1 + \alpha_1\gamma_1 N'_2 + \alpha_2\gamma_2 N'_3 + (\alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma) T'_3 + (\alpha\gamma_2 + \alpha_2\gamma) T'_2 + (\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) T'_1, \\ T_3 = \alpha\beta N'_1 + \alpha_1\beta_1 N'_2 + \alpha_2\beta_2 N'_3 + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta) T'_3 + (\alpha\beta_2 + \alpha_2\beta) T'_2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) T'_1. \end{cases}$$

En multipliant les équations (10) respectivement par  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et les ajoutant,

et en tenant compte des relations (11), (12) et (13) et des formules bien connues

$$(13 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, & \dots, \\ \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0, & \dots, \end{cases}$$

on arrive à l'équation suivante

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & h \frac{dN'_1}{d\rho} + h_1 \frac{dT'_3}{d\rho_1} + h_2 \frac{dT'_2}{d\rho_2} - N'_1 \left[ h_1 \left( \alpha \frac{d\alpha_1}{d\rho_1} + \beta \frac{d\beta_1}{d\rho_1} + \gamma \frac{d\gamma_1}{d\rho_1} \right) + h_2 \left( \alpha \frac{d\alpha_2}{d\rho_2} + \beta \frac{d\beta_2}{d\rho_2} + \gamma \frac{d\gamma_2}{d\rho_2} \right) \right] \\ & - N'_2 h_1 \left( \alpha_1 \frac{d\alpha}{d\rho_1} + \beta_1 \frac{d\beta}{d\rho_1} + \gamma_1 \frac{d\gamma}{d\rho_1} \right) - N'_3 h_2 \left( \alpha_2 \frac{d\alpha}{d\rho} + \beta_2 \frac{d\beta}{d\rho} + \gamma_2 \frac{d\gamma}{d\rho} \right) \\ & - T'_1 \left[ h_1 \left( \alpha_2 \frac{d\alpha}{d\rho_1} + \beta_2 \frac{d\beta}{d\rho_1} + \gamma_2 \frac{d\gamma}{d\rho_1} \right) + h_2 \left( \alpha_1 \frac{d\alpha}{d\rho_2} + \beta_1 \frac{d\beta}{d\rho_2} + \gamma_1 \frac{d\gamma}{d\rho_2} \right) \right] \\ & - T'_2 \left[ 2h \left( \alpha_2 \frac{d\alpha}{d\rho} + \beta_2 \frac{d\beta}{d\rho} + \gamma_2 \frac{d\gamma}{d\rho} \right) + h_1 \left( \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{d\rho_1} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{d\rho_1} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{d\rho_1} \right) \right] \\ & - T'_3 \left[ 2h \left( \alpha_1 \frac{d\alpha}{d\rho} + \beta_1 \frac{d\beta}{d\rho} + \gamma_1 \frac{d\gamma}{d\rho} \right) + h_2 \left( \alpha_1 \frac{d\alpha_2}{d\rho_2} + \beta_1 \frac{d\beta_2}{d\rho_2} + \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{d\rho_2} \right) \right] + DF = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous avons un système triplorthogonal de surfaces qui se rencontrent en P. Donnons au paramètre  $\rho$  un accroissement  $d\rho$ ; alors la courbe  $Ps_1$  viendra en  $P's'_1$ ; supposons que les deux tangentes  $P'y'$ ,  $P'y''$ , qui sont normales à la surface  $\rho_1$  aux points P et P', se rencontrent en un point O. La différence entre OP et OP', est infiniment petite d'ordre supérieur à 1. Projetons les trois côtés du triangle ainsi obtenu POP' sur l'axe des  $x$ , et écrivons leur somme égale à zéro. On aura ainsi

$$(15) \quad (\alpha_1 - \alpha'_1)r_{01} - \alpha ds = 0;$$

or

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + \frac{d\alpha_1}{ds} ds;$$

donc la relation (15) devient

$$\alpha ds + r_{01} \frac{d\alpha_1}{ds} ds = 0$$

ou la première des suivantes

$$(16) \quad \alpha = -r_{01} \frac{d\alpha_1}{ds}, \quad \beta = -r_{01} \frac{d\beta_1}{ds}, \quad \gamma = -r_{01} \frac{d\gamma_1}{ds},$$

et d'autres analogues.

Pour établir la relation (15), nous avons admis que les deux perpendiculaires  $P'y'$ ,  $P'y''$  à la surface  $\rho_1$  se rencontrent en un point O. Pour le démontrer, on sait que, dans un système triplorthogonal, les intersections d'une surface d'un quelconque des trois systèmes par les surfaces de deux autres sont les lignes de courbure de cette surface.

Or les perpendiculaires élevées des points de chaque ligne de courbure d'une surface constituent une surface développable. Donc les deux perpendiculaires se rencontrent en un point.

Il y a exception quand l'arête de rebroussement est rejetée à l'infini, c'est-à-dire quand la surface développable est cylindrique. Dans ce cas  $\alpha_1$  ne varie pas d'une normale à l'autre et  $\frac{d\alpha_1}{ds} = 0$ ; d'autre part, pour que cela arrive, il faut ou que la ligne  $s$  soit une ligne droite et alors  $r_{01} = \infty$ , ou que cette ligne  $s$  n'est pas droite et alors la surface  $\rho_1$  doit être un plan, et dans ce cas encore  $r_{01} = \infty$ ; donc, dans les deux cas, l'équation (15) ou les relations (16) sont satisfaites identiquement.

Les relations (16) nous donnent

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{ll} h \frac{d(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}{d\rho} = -\frac{\alpha, \beta, \gamma}{r_{01}}, & h \frac{d(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)}{d\rho} = -\frac{\alpha, \beta, \gamma}{r_{02}}, \\ h_1 \frac{d(\alpha, \beta, \gamma)}{d\rho_1} = -\frac{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1}{r_{10}}, & h_1 \frac{d(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)}{d\rho_1} = -\frac{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1}{r_{12}}, \\ h_2 \frac{d(\alpha, \beta, \gamma)}{d\rho_2} = -\frac{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2}{r_{20}}, & h_2 \frac{d(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}{d\rho_2} = -\frac{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2}{r_{21}}. \end{array} \right.$$

D'autre part, une des relations (13 bis) nous donne

$$h \left( \alpha \frac{d\alpha}{d\rho} + \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{d\rho} + \alpha_2 \frac{d\alpha_2}{d\rho} \right) = 0,$$

et, en y substituant les valeurs de  $h \frac{d\alpha_1}{d\rho}$ ,  $h \frac{d\alpha_2}{d\rho}$ , on a la première des suivantes

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} h \frac{d(\alpha, \beta, \gamma)}{d\rho} = \frac{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1}{r_{01}} + \frac{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2}{r_{02}}, \\ h_1 \frac{d(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}{d\rho_1} = \frac{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2}{r_{12}} + \frac{\alpha, \beta, \gamma}{r_{10}}, \\ h_2 \frac{d(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)}{d\rho_2} = \frac{\alpha, \beta, \gamma}{r_{20}} + \frac{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1}{r_{21}}. \end{array} \right.$$

En substituant ces valeurs à l'équation (14), on trouve la première des suivantes

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} h \frac{dN'_1}{d\rho} + h_1 \frac{dT'_3}{d\rho_1} + h_2 \frac{dT'_2}{d\rho_2} - \left( \frac{1}{r_{10}} + \frac{1}{r_{20}} \right) N'_1 + \frac{N'_2}{r_{10}} + \frac{N'_3}{r_{20}} - \left( \frac{2}{r_{02}} + \frac{1}{r_{12}} \right) T'_2 - \left( \frac{2}{r_{01}} + \frac{1}{r_{21}} \right) T'_3 + \\ h \frac{dT'_3}{d\rho} + h_1 \frac{dN'_2}{d\rho_1} + h_2 \frac{dT'_1}{d\rho_2} + \frac{N'_1}{r_{01}} - \left( \frac{1}{r_{01}} + \frac{1}{r_{21}} \right) N'_2 + \frac{N'_3}{r_{21}} - \left( \frac{1}{r_{02}} + \frac{2}{r_{12}} \right) T'_1 - \left( \frac{2}{r_{10}} + \frac{1}{r_{20}} \right) T'_3 + \\ h \frac{dT'_2}{d\rho} + h_1 \frac{dT'_1}{d\rho_1} + h_2 \frac{dN'_3}{d\rho_2} + \frac{N'_1}{r_{02}} + \frac{N'_2}{r_{12}} - \left( \frac{1}{r_{02}} + \frac{1}{r_{12}} \right) N'_3 - \left( \frac{1}{r_{01}} + \frac{2}{r_{21}} \right) T'_1 - \left( \frac{1}{r_{10}} + \frac{2}{r_{20}} \right) T'_2 + \end{array} \right.$$



qui sont les équations d'équilibre d'élasticité en coordonnées curvilignes. Les équations du mouvement vibratoire s'obtiennent de ces équations en remplaçant  $DF$ ,  $DF_1$ ,  $DF_2$  par

$$-D \frac{d^2 R}{dt^2}, \quad -D \frac{d^2 R_1}{dt^2}, \quad -D \frac{d^2 R_2}{dt^2}.$$

*Cas d'une enveloppe solide mince.* — Les équations (19) impliquent que l'origine mobile des coordonnées peut se mouvoir dans tout le volume du corps.

Soit maintenant, comme corps solide, une enveloppe mince, constituée par des feuillet appartenant à la famille des surfaces  $\rho_2$ ; les deux faces seront données par les équations

$$\rho_2 = -\eta', \quad \rho_2 = \eta'' \quad \text{avec} \quad \eta' + \eta'' = 2\eta,$$

$\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\eta''$  étant des constantes, et supposons que l'origine ne puisse pas sortir de la surface moyenne. Pour cette surface ( $\rho_2 = 0$ ), les deux lignes de courbure sont désignées par  $s^0$  et  $s_1^0$ , et  $h$  et  $h_1$  se réduisent à  $h^0$  et  $h_1^0$ . Si nous choisissons l'enveloppe telle que chaque point du feuillet moyen se trouve à égale distance (en arc  $s_2$ ) de deux faces de l'enveloppe et si les feuillet, qui remplissent l'espace entre chaque face et la surface moyenne ainsi définie, sont disposés de façon que, quand on passe de l'un à l'autre,  $\rho_2$  change uniformément, alors  $\frac{d\rho_2}{ds_2} = h_2$  sera indépendant de  $\rho_2$  (comme cas particulier on peut citer celui de la matière homogène). Les courbures de la surface moyenne et de deux autres surfaces qui passent perpendiculairement à l'un de ses points, pris au point même, seront désignées par  $a_{hl}$  (1).

Prenons maintenant le point P sur la surface moyenne et construisons-y un parallélépipède curviligne de base ( $ds^0$ ,  $ds_1^0$ ) et de hauteur  $s_2$

---

(1) On ne peut pas toujours trouver deux systèmes ( $\rho$  et  $\rho_1$ ) de surfaces orthogonaux entre eux et au système  $\rho_2$ . Mais alors on peut tracer les lignes de courbure  $s^0$  et  $s_1^0$  sur la surface moyenne et mener les normales à cette surface qui, vu la petitesse du champ d'existence de ces surfaces, peuvent être censées normales à ces surfaces; alors les axes seront les deux tangentes aux arcs  $s_0$  et  $s_1^0$  ( $x'$ ,  $y'$ ) et la petite normale ( $z'$ ). Quand l'épaisseur n'est pas trop faible, on peut préférer une autre manière de procéder. On tracera les lignes de courbure  $s$  et  $s_1$  et les trajectoires orthogonales des surfaces  $\rho_2$ ; les tangentes en chaque point à ces trois lignes seront les axes ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ).

(qui est très petite). Du point Q menons l'arc parallèle à PP' et du point P' l'arc parallèle à PQ; on aura

$$QQ' - PP' = QQ' - QN = M'Q'$$

à un infiniment petit d'ordre supérieur.

Or les triangles curvilignes M'P'Q' et HP'M sont semblables, comme rectangles en Q' et M, et l'on a

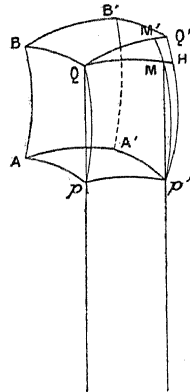
$$\frac{M'Q'}{MH} = \frac{P'Q'}{P'M} = \frac{P'Q'}{PQ},$$

d'où

$$ds_1 - ds_1^0 = MH \frac{P'Q'}{PQ}.$$

En menant les cordes QP et MP' (*fig. 1*), dont les différences avec

Fig. 1.



les arcs correspondants sont des infiniment petits du troisième ordre par rapport à l'arc, on trouve

$$MH = - ds_1^0 s_2 a_{12} \quad \text{et de même} \quad \frac{P'Q'}{PQ} = 1 - a_{21} ds_1^0.$$

Donc, finalement,

$$(20) \quad ds_1 = ds_1^0 (1 - a_{12} s_2),$$

et, de même,

$$(21) \quad ds = ds^0 (1 - a_{02} s_2).$$

Si donc on veut ramener les forces agissant sur des faces infiniment petites  $ds_1 ds_2$ ,  $ds_1 ds_2$  aux faces agissant sur  $ds^0 ds_2$ ,  $ds_1^0 ds_2$ , il faut multiplier les forces suivant l'axe des  $x'$  par  $(1 - a_{12} s_2)$ , celles suivant l'axe de  $y'$  par  $(1 - a_{02} s_2)$  et celles suivant l'axe de  $z'$  par l'unité.

Les équations ainsi obtenues, multipliées par  $d\rho_2$  et intégrées de  $-\eta'$  à  $\rho_2$ , sont

$$(22) \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{ds^0} \int_{-\eta'}^{\rho_2} N'_1(1 - a_{12} s_2) d\rho_2 + \frac{d}{ds_1^0} \int_{-\eta'}^{\rho_2} T'_3(1 - a_{02} s_2) d\rho_2 \\ & + \int_{-\eta'}^{\rho_2} [-(a_{10} + a_{20}) N'_1(1 - a_{12} s_2) + a_{10} N'_2(1 - a_{02} s_2) \\ & \quad + a_{20} N'_3 - a_{02} T'_2(1 - a_{12} s_2) \\ & \quad - (a_{12} + a_{02}) T'_2 - a_{01} T'_3(1 - a_{12} s_2) \\ & \quad - (a_{01} + a_{21}) T'_3(1 - a_{02} s_2) + DF] d\rho_2 = -T'_2 h_2, \\ & \frac{d}{ds^0} \int_{-\eta'}^{\rho_2} T'_3(1 - a_{12} s_2) d\rho_2 + \frac{d}{ds_1^0} \int_{-\eta'}^{\rho_2} N'_2(1 - a_{02} s_2) d\rho_2 \\ & + \int_{-\eta'}^{\rho_2} [a_{01} N'_1(1 - a_{12} s_2) - (a_{01} + a_{21}) N'_2(1 - a_{02} s_2) \\ & \quad + a_{21} N'_3 - (a_{10} + a_{20}) T'_3(1 - a_{12} s_2) \\ & \quad - a_{10} T'_3(1 - a_{02} s_2) - a_{12} T'_1(1 - a_{02} s_2) \\ & \quad - (a_{02} + a_{12}) T'_1 + DF_1] d\rho_2 = -T'_1 h_2, \\ & \frac{d}{ds^0} \int_{-\eta'}^{\rho_2} T'_2(1 - a_{12} s_2) d\rho_2 + \frac{d}{ds_1^0} \int_{-\eta'}^{\rho_2} T'_1(1 - a_{02} s_2) d\rho_2 \\ & + \int_{-\eta'}^{\rho_2} [a_{02} N'_1(1 - a_{12} s_2) + a_{12} N'_2(1 - a_{02} s_2) \\ & \quad - (a_{02} + a_{12}) N'_3 - a_{21} T'_1 - (a_{21} + a_{01}) T'_1(1 - s_2 a_{02}) \\ & \quad - (a_{10} + a_{20}) T'_2(1 - a_{12} s_2) - a_{20} T'_2 + DF_2] d\rho_2 = -N'_3 h_2. \end{aligned} \right.$$

Si l'on intègre la formule  $ds_2 = \frac{d\rho_2}{h_2}$  depuis  $\rho_2 = 0$  à  $\rho_2$ , comme  $h_2$  est indépendant de  $\rho_2$ , on aura

$$(23) \quad s_2 = \frac{\rho_2}{h_2},$$

qu'il faut introduire dans les équations (22). Les courbures qui y entrent ne peuvent pas devenir infinies; d'autre part, les dérivées en  $s^0$  et  $s_1^0$  des  $N'_1$ ,  $N'_2$ ,  $T'_3$  et les termes  $DF$ ,  $DF_1$ ,  $DF_2$  sont du même ordre de grandeur que  $N'_1$ ,  $N'_2$ ,  $T'_3$ , tandis que les dérivées de  $T'_1$ ,  $T'_2$  sont comparables à  $T'_1$ ,  $T'_2$ . D'où il résulte que, vu la petitesse des limites de l'intégration,  $T'_1$ ,  $T'_2$ ,  $N'_3$  sont très

petits par rapport à  $N'_1, N'_2, T'_3$ . On peut donc poser, en première approximation,

$$(24) \quad (T'_1, T'_2, N'_3) = 0.$$

Il est à remarquer que, dans le cas des enveloppes courbes,  $T'_1, T'_2, N'_3$  sont du même ordre de petitesse, tandis que, dans les plaques planes,  $N'_3$  était infiniment petit d'ordre plus élevé que  $T'_1, T'_2$ .

*Méthode géométrique.* — Nous allons retrouver les équations élastiques en supposant l'origine mobile sur la surface moyenne, par une marche géométrique qui est plus simple et claire.

En prenant, dans la figure ci-dessus, toutes les dimensions comparables (c'est-à-dire  $ds_2$  au lieu de  $s_2$ ), on aura

$$\begin{aligned} \text{aire AA'BB'} &= d\sigma'_{12} = d\sigma_{12} [1 - (a_{10} + a_{20}) ds^0], \\ \text{aire A'B'Q'P'} &= d\sigma'_{02} = d\sigma_{02} [1 - (a_{01} + a_{21}) ds^0_1], \\ \text{aire BB'QQ'} &= d\sigma'_{01} = d\sigma_{01} [1 - (a_{02} + a_{12}) ds_2]. \end{aligned}$$

Les forces élastiques suivant une bande limitée par les deux faces de l'enveloppe dont les équations, comme on a vu, sont  $\rho_2 = -\eta'$ ,  $\rho_2 = \eta''$ , sur les faces  $d\sigma_{12}, d\sigma_{02}$  et  $d\sigma_{01}$  et suivant les axes de  $x', y', z'$ , sont

$$(25) \quad P_1 = \int_{-\eta'}^{\eta''} N'_1 (1 - a_{12} s_2) d\rho_2, \quad Q_1 = \int_{-\eta'}^{\eta''} T'_3 (1 - a_{12} s_2) d\rho_2, \quad V_1 = \int_{-\eta'}^{\eta''} T'_2 (1 - a_{12} s_2) d\rho_2,$$

$$(25 \text{ bis}) \quad Q_2 = \int_{-\eta'}^{\eta''} T'_3 (1 - a_{02} s_2) d\rho_2, \quad P_2 = \int_{-\eta'}^{\eta''} N'_2 (1 - a_{02} s_2) d\rho_2, \quad V_2 = \int_{-\eta'}^{\eta''} T'_1 (1 - a_{02} s_2) d\rho_2,$$

$$(25 \text{ ter}) \quad \int_{-\eta'}^{\eta''} T'_2 d\rho_2, \quad \int_{-\eta'}^{\eta''} T'_1 d\rho_2, \quad \int_{-\eta'}^{\eta''} N'_3 d\rho_2.$$

Pour former les équations d'équilibre élastique, il faut égaler à zéro séparément les projections de toutes les forces élastiques sollicitant le parallélépipède curviligne suivant les axes des  $x', y', z'$ . Les faces correspondant à  $d\sigma_{12}$  et  $d\sigma'_{12}$  donnent sur l'axe des  $x'$

$$(26) \quad \left( P_1 + \frac{dP_1}{ds^0} ds^0 \right) d\sigma'_{12} - P_1 d\sigma_{12} + \left[ Q_1 \frac{\cos(s'_1{}^0, s^0)}{ds^0} + V_1 \frac{\cos(s'_2, s^0)}{ds^0} \right] ds^0 ds^0_1 ds_2,$$

les faces  $d\sigma_{02}$  et  $d\sigma'_{02}$

$$(26 \text{ bis}) \quad \left( Q_2 + \frac{dQ_2}{ds^0_1} ds^0_1 \right) d\sigma'_{02} - Q_2 d\sigma_{02} + \left[ P_2 \frac{\cos(s'_1{}^0, s^0)}{ds^0_1} + V_2 \frac{\cos(s'_2, s^0)}{ds^0_1} \right] ds^0 ds^0_1 ds_2.$$

Enfin, les faces  $d\sigma_{01}$ ,  $d\sigma'_{01}$  sont situées sur les deux faces mêmes de l'enveloppe; elles donnent, par conséquent, zéro par hypothèse ou, plus généralement, sur l'une des faces la pression est nulle et sur l'autre  $\pi_x$ ,  $\pi_y$ ,  $\pi_z$ . D'autre part,  $\cos(s'_1, s)$  est le cosinus de l'angle que fait la tangente à l'arc  $s$ , ou  $P_x$ , avec la tangente à l'arc  $s'_1$ ; or, les cosinus directeurs de  $P_x$ , par rapport aux axes fixes, sont  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , et ceux de la tangente à l'arc  $s'_1$  sont  $\alpha_1 + \frac{d\alpha_1}{ds} ds$ ,  $\beta_1 + \frac{d\beta_1}{ds} ds$ ,  $\gamma_1 + \frac{d\gamma_1}{ds} ds$ . On obtient de la sorte

$$(27) \quad \frac{\cos(s'_1, s)}{ds} = \alpha \frac{d\alpha_1}{ds} + \beta \frac{d\beta_1}{ds} + \gamma \frac{d\gamma_1}{ds}$$

ou, en vertu des relations (17) et (18), la première des équations suivantes :

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos(s'_1, s)}{ds} = -\frac{1}{r_{01}}, \quad \frac{\cos(s'_2, s)}{ds} = -\frac{1}{r_{02}}, \quad \frac{\cos(s'_1, s_2)}{ds_2} = -\frac{1}{r_{21}}, \\ \frac{\cos(s'_1, s)}{ds_1} = \frac{1}{r_{10}}, \quad \frac{\cos(s'_2, s)}{ds_2} = \frac{1}{r_{20}}, \quad \frac{\cos(s'_1, s_2)}{ds_1} = \frac{1}{r_{12}}, \\ \frac{\cos(s'_2, s)}{ds_1} = \frac{\cos(s'_1, s)}{ds_2} = \frac{\cos(s'_1, s_2)}{ds} = 0. \end{array} \right.$$

En prenant la dérivée de la formule

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0,$$

par rapport à  $s$  et en tenant compte de (27), on trouve

$$\frac{\cos(s'_1, s)}{ds} = -\frac{\cos(s', s_1)}{ds}.$$

D'où la formule générale

$$\cos(s'_k, s_l) + \cos(s'_l, s_k) = 0.$$

Si l'on substitue dans les expressions (26) et (26 bis), elles deviennent

$$\left[ \frac{dP_1}{ds^0} - (a_{10} + a_{20})P_1 - a_{01}Q_1 - a_{02}V_1 \right] ds^0 ds_1^0 ds_2,$$

$$\left[ \frac{dQ_2}{ds_1^0} - (a_{21} + a_{01})Q_2 + a_{10}P_2 \right] ds^0 ds_1^0 ds_2.$$

On aura donc la première des équations suivantes

$$(29) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_1}{ds^0} + \frac{dQ_2}{ds^1} - (a_{10} + a_{20})P_1 + a_{10}P_2 - a_{01}Q_1 - (a_{01} + a_{21})Q_2 \\ \qquad \qquad \qquad - a_{02}V_1 + \pi_{x'} + \int_{-\tau_1}^{\tau_1''} DF \, d\varphi_2 = 0, \\ \frac{dQ_1}{ds^0} + \frac{dP_2}{ds^1} + a_{01}P_1 - (a_{01} + a_{21})P_2 - (a_{10} + a_{20})Q_1 - a_{10}Q_2 \\ \qquad \qquad \qquad - a_{12}V_2 + \pi_{y'} + \int_{-\tau_1}^{\tau_1''} DF_1 \, d\varphi_2 = 0, \\ \frac{dV_1}{ds^0} + \frac{dV_2}{ds^1} - (a_{10} + a_{20})V_1 - (a_{01} + a_{21})V_2 + a_{02}P_1 \\ \qquad \qquad \qquad + a_{12}P_2 + \pi_{z'} + \int_{-\tau_1}^{\tau_1''} DF_2 \, d\varphi_2 = 0, \end{array} \right.$$

qui sont les équations (22), où la limite supérieure  $\rho_2$  des intégrales est remplacée par  $\eta''$ .

#### CHAPITRE IV.

Équations exprimant l'équilibre élastique et le mouvement vibratoire d'une enveloppe solide mince en fonction des déplacements des points de la surface moyenne, quand lesdits déplacements sont très petits.

J'admettrai que, avant la déformation, l'enveloppe n'est soumise qu'à la pression atmosphérique dont on peut faire abstraction. Pendant la déformation, nous supposons, pour le moment, que l'une des faces est exempte de toute pression, l'autre obéissant à des pressions quelconques, ainsi que les bords. L'épaisseur de l'enveloppe est égale à  $2\varepsilon$ , qui sera fonction de  $\rho$  et  $\rho_1$  (1).

$\mathfrak{F}$  étant une fonction de  $z'$ , finie et continue, ainsi que ses deux premières dérivées dans l'espace  $-\varepsilon \leq z' \leq \varepsilon$ , on aura, si la troisième

(1) D'après ce que nous avons vu au Chapitre précédent, on peut prendre  $\tau_1'' = \tau_1' = \tau_1$ . C'est ce que nous ferons dans la suite.

dérivée est finie et bien déterminée,

$$\int_0^{z'} \frac{dF}{dz'} dz' = F - F_0 = z' \frac{dF}{dz'} - \frac{z'^2}{2} \frac{d^2F}{dz'^2} + \frac{1}{2} \int_0^{z'} z'^2 \frac{d^3F}{dz'^3} dz',$$

$$\int_0^{z'} \frac{d^2F}{dz'^2} dz' = \frac{dF}{dz'} - \left( \frac{dF}{dz'} \right)_0 = z' \frac{d^2F}{dz'^2} + \int_0^{z'} z' \frac{d^3F}{dz'^3} dz',$$

$$\int_0^{z'} \frac{d^3F}{dz'^3} dz' = \frac{d^2F}{dz'^2} - \left( \frac{d^2F}{dz'^2} \right)_0.$$

En substituant, on tire

$$F = F_0 + z' \left( \frac{dF}{dz'} \right)_0 + \frac{z'^2}{2} \left( \frac{d^2F}{dz'^2} \right)_0 + z'^3 R';$$

et, si  $R'$  est comparable à  $\left( \frac{dF}{dz'} \right)_0$  ou à  $\left( \frac{d^2F}{dz'^2} \right)_0$ , comme  $z'$  est infiniment petit du premier ordre, on peut prendre

$$(1) \quad F = F_0 + z' \left( \frac{dF}{dz} \right)_0 + \frac{z'^2}{2} \left( \frac{d^2F}{dz'^2} \right)_0.$$

Cela posé, si l'on fait  $F = R$  ou  $R_1$  ou  $R_2$  et  $z' = \rho_2 = s_2 h_2$ ,  $h_2$  n'étant pas fonction de  $\rho_2$ , on aura

$$R = R^0 + s_2 \left( \frac{dR}{ds_2} \right)^0 + \frac{s_2^2}{2} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dR}{ds_2} \right)^0 + \frac{s_2^3}{b} A,$$

$$R_1 = R_1^0 + s_2 \left( \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 + \frac{s_2^2}{2} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 + \frac{s_2^3}{b} B,$$

$$R_2 = R_2^0 + s_2 \left( \frac{dR_2}{ds_2} \right)^0 + \frac{s_2^2}{2} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dR_2}{ds_2} \right)^0 + \frac{s_2^3}{b} C.$$

Or les relations (7III, 8III, 9III) et d'autres régissant les rotations moyennes nous montrent que  $\left( \frac{dR}{ds_2} \right)^0$ ,  $\left( \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0$  sont des éléments dépendant des glissements et rotations moyennes de la surface moyenne, c'est-à-dire du changement de courbure, tandis que  $\left( \frac{dR_2}{ds_2} \right)^0$  ne dépend que de la dilatation ou extension de la surface moyenne. Les dérivées

supérieures de  $R, R_1, R_2$  par rapport à  $s_2$  dépendent linéairement de l'extension et du changement de courbure; donc A et B sont comparables à

$\left(\frac{dR}{ds_2}\right)_0$ , et C à  $\left(\frac{d\frac{dR_2}{ds_2}}{ds_2}\right)_0$ , et l'on peut les négliger. On trouve ainsi

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} R = R^0 + s_2 \left(\frac{dR}{ds_2}\right)^0 + \frac{s_2^2}{2} \left(\frac{d\frac{dR}{ds_2}}{ds_2}\right)^0, \\ R_1 = R_1^0 + s_2 \left(\frac{dR_1}{ds_2}\right)^0 + \frac{s_2^2}{2} \left(\frac{d\frac{dR_1}{ds_2}}{ds_2}\right)^0, \\ R_2 = R_2^0 + s_2 \left(\frac{dR_2}{ds_2}\right)^0 + \frac{s_2^2}{2} \left(\frac{d\frac{dR_2}{ds_2}}{ds_2}\right)^0. \end{array} \right.$$

*Remarque.* — On remarquera d'abord que les expressions (2) seraient les mêmes si nous admettions l'hypothèse de Poisson et si nous développons les forces élastiques suivant la plus petite ordonnée en s'arrêtant au second terme. En effet,  $R, R_1, R_2$  ayant cette forme,  $\partial_{x'}, \partial_{y'}, g_{x'y'}$  auront la même forme et  $\partial_{z'}, g_{x'z'}, g_{y'z'}$  aussi avec deux termes seulement, et comme N et T sont fonctions linéaires et homogènes des trois dilatations et trois glissements, N et T seront de la même forme avec deux termes seulement.

On remarquera ensuite que, sans nous en douter, nous avons fait une hypothèse qui consiste à admettre que les fonctions  $R, R_1, R_2$  sont finies et continues, ainsi que leurs deux premières dérivées, dans l'espace  $-\varepsilon \leq s_2 \leq \varepsilon$ ; voici comment on peut la justifier: quand on passe d'une couche à la couche contiguë, comme la densité varie d'une manière continue, les déplacements des deux couches-enveloppes de part et d'autre de la surface idéale de séparation sont presque les mêmes, ainsi que les dilatations et les glissements. De plus, nous avons supposé que la troisième dérivée par rapport à  $s_2$  est finie et bien déterminée; pour nous convaincre sur ce point, il suffira de remarquer que les troisièmes dérivées seront, comme on le verra par la suite, fonctions des premières et secondes dérivées par rapport à  $s, s_1$  et  $s_2$  et des troisièmes par rapport à  $s$  et  $s_1$ .

D'ailleurs toutes les hypothèses sur les plaques ou sur les cloches



[Poisson, Kirchhoff, (*Cinématique*), Boussinesq] contiennent implicitement ce que nous avons exposé et admis.

*Première approximation. Équations extensionnelles.* — En première approximation nous poserons

$$(3) \quad (T'_1, T'_2, N'_3) = 0;$$

et nous retiendrons dans les développements (2) les deux premiers termes.

On peut admettre que les coefficients qui entrent dans les expressions de  $N'_1, N'_2, T'_3$  sont proportionnels à une fonction  $k$  positive de  $\rho_2$ , et l'on aura

$$(4) \quad \begin{cases} N'_1 = k \left[ \zeta \left( \frac{dR}{ds} - \frac{R_1}{r_{01}} - \frac{R_2}{r_{02}} \right) + \zeta' \left( \frac{dR_1}{ds_1} - \frac{R_2}{r_{12}} - \frac{R}{r_{10}} \right) + \zeta'' \left( \frac{dR}{ds_1} + \frac{dR_1}{ds} + \frac{R_1}{r_{10}} + \frac{R}{r_{01}} \right) \right], \\ N'_2 = k \left[ \zeta \left( \frac{dR}{ds} - \frac{R_1}{r_{01}} - \frac{R_2}{r_{02}} \right) + \zeta'_1 \left( \frac{dR_1}{ds_1} - \frac{R_2}{r_{12}} - \frac{R}{r_{10}} \right) + \zeta''_1 \left( \frac{dR}{ds_1} + \frac{dR_1}{ds} + \frac{R_1}{r_{10}} + \frac{R}{r_{01}} \right) \right], \\ T'_3 = k \left[ \zeta \left( \frac{dR}{ds} - \frac{R_1}{r_{01}} - \frac{R_2}{r_{02}} \right) + \zeta' \left( \frac{dR_1}{ds_1} - \frac{R_2}{r_{12}} - \frac{R}{r_{10}} \right) + \zeta'' \left( \frac{dR}{ds_1} + \frac{dR_1}{ds} + \frac{R_1}{r_{10}} + \frac{R}{r_{01}} \right) \right]. \end{cases}$$

En désignant par  $k_1$  la valeur moyenne de  $k$  suivant une ligne normale  $s_2$  dont les deux extrémités aboutissent aux faces de l'enveloppe et dont la longueur est égale à  $2\varepsilon$ , on aura

$$(5) \quad \int_{-\eta}^{\eta} k d\rho_2 = 2k_1\eta.$$

En assimilant cette normale à une ligne matérielle de densité linéaire  $k$ , les centres de gravité de toutes ces lignes constituent la surface moyenne.

On a de même

$$(6) \quad \int_{-\eta}^{\eta} k\rho_2 d\rho_2 = 0,$$

car le centre de gravité est au point  $\rho_2 = 0$  (sur la surface moyenne). On rencontrera dans la suite

$$(7) \quad \int_{-\eta}^{\eta} k\rho_2^2 d\rho_2 = \frac{2k_1\eta^3}{3}$$

et les suivantes

$$(8) \quad \varphi(\rho_2) = \int_{-\eta}^{\rho_2} k \, d\rho_2, \quad \varphi_1(\rho_2) = \int_{-\eta}^{\rho_2} k \rho_2 \, d\rho_2,$$

qui s'annulent pour  $\rho_2 = -\eta$  et dont la première devient, pour  $\rho_2 = \eta$ , égale à  $2k_1\eta$  et la seconde à zéro.

Les surfaces coordonnées étant connues par leurs équations,  $h$  et  $h_1$  seront fonctions de  $\rho_2$  finies et continues, et comme  $h_2$  n'est fonction que de  $\rho$  et  $\rho_1$ , on pourra mettre

$$h = h^0 + \frac{\rho_2}{h_2} \left( h_2 \frac{dh}{d\rho_2} \right)^0 + \frac{\rho_2^2}{2} \left( h_2^2 \frac{d^2h}{d\rho_2^2} \right)^0 + \dots$$

ou

$$h = h^0 + s_2 \left( \frac{dh}{ds_2} \right)^0 + \frac{s_2^2}{2} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dh}{ds_2} \right)^0 + \dots$$

et

$$h_1 = h_1^0 + s_2 \left( \frac{dh_1}{ds_2} \right)^0 + \frac{s_2^2}{2} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dh_1}{ds_2} \right)^0 + \dots,$$

et comme, d'après les formules (4, III),

$$\begin{aligned} \frac{dh}{ds_2} &= \frac{h}{r_{02}}, & \frac{dh_1}{ds_2} &= \frac{h_1}{r_{02}}, \\ \frac{d}{ds_2} \frac{dh}{ds_2} &= h \left( \frac{d}{ds_2} \frac{1}{r_{02}} + \frac{1}{r_{02}^2} \right), & \frac{d}{ds_2} \frac{dh_1}{ds_2} &= h_1 \left( \frac{d}{ds_2} \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{12}^2} \right); \end{aligned}$$

et si l'on pose

$$(9) \quad \left( \frac{1}{r_{kl}} \right)^0 = a_{kl}, \quad \left( \frac{d}{ds_2} \frac{1}{r_{kl}} \right)^0 = b_{kl}, \quad \left( \frac{d}{ds_2} \frac{d}{ds_2} \frac{1}{r_{kl}} \right)^0 = c_{kl},$$

on aura

$$(10) \quad \begin{cases} h = h^0 \left[ 1 + a_{02}s_2 + (a_{02}^2 + b_{02}) \frac{s_2^2}{2} \right], \\ h_1 = h_1^0 \left[ 1 + a_{12}s_2 + (a_{12}^2 + b_{12}) \frac{s_2^2}{2} \right]. \end{cases}$$

De (4, III) et de (10), on tire

$$(11) \quad \frac{1}{r_{kl}} = a_{kl} + s_2 b_{kl} + \frac{s_2^2}{2} c_{kl} + \dots$$

Nous verrons plus loin comment on peut exprimer  $b_{kl}$ ,  $c_{kl}$  en fonction des  $a_{kl}$ .

En intégrant la formule  $ds_2 = \frac{d\rho_2}{h_2}$ , de  $-\eta$  à  $+\eta$  par rapport à  $d\rho_2$  et de  $-\varepsilon$  à  $+\varepsilon$  en  $ds_2$ , on trouve rigoureusement

$$(12) \quad h_2 = \frac{\eta}{\varepsilon}.$$

Maintenant, posons

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} (\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3) &= (\zeta, \zeta_1, \xi) \left( \frac{dR^0}{ds^0} - a_{01} R_1^0 - a_{02} R_2^0 \right) \\ &+ (\zeta', \zeta'_1, \xi') \left( \frac{dR_1^0}{ds_1^0} - a_{12} R_2^0 - a_{10} R^0 \right) \\ &+ (\zeta'', \zeta''_1, \xi'') \left( \frac{dR^0}{ds_1^0} + \frac{dR_1^0}{ds_0} + a_{10} R_1^0 + a_{01} R^0 \right), \\ \\ (n_1, n_2, t_3) &= (\zeta, \zeta_1, \xi) \left[ \frac{d}{ds^0} \left( \frac{dR}{ds_2} \right)^0 + a_{02} \frac{dR^0}{ds^0} - a_{20} \left( \frac{dR}{ds_2} \right)^0 - b_{01} R_1^0 \right. \\ &\quad \left. - a_{01} \left( \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 - b_{02} R_2^0 - a_{02} \left( \frac{dR_2}{ds_2} \right)^0 \right] \\ &+ (\zeta', \zeta'_1, \xi') \left[ \frac{d}{ds_1^0} \left( \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 + a_{12} \frac{dR_1^0}{ds_1^0} - a_{21} \left( \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 - b_{12} R_2^0 \right. \\ &\quad \left. - a_{12} \left( \frac{dR_2}{ds_2} \right)^0 - b_{10} R^0 - a_{10} \left( \frac{dR}{ds_2} \right)^0 \right] \\ &+ (\zeta'', \zeta''_1, \xi'') \left[ \frac{d}{ds_1^0} \left( \frac{dR}{ds_2} \right)^0 + a_{12} \frac{dR^0}{ds_1^0} - a_{21} \left( \frac{dR}{ds_2} \right)^0 + \frac{d}{ds_0} \left( \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 \right. \\ &\quad \left. + a_{02} \frac{dR_1^0}{ds^0} - a_{20} \left( \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 + b_{10} R_1^0 \right. \\ &\quad \left. + a_{10} \left( \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 + b_{01} R^0 + a_{01} \left( \frac{dR}{ds_2} \right)^0 \right]. \end{aligned} \right.$$

Alors les équations (4) deviennent

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} N'_1 &= k \mathfrak{T}_1 + k \frac{n_1}{h_2} \rho_2, \\ N'_2 &= k \mathfrak{T}_2 + k \frac{n_2}{h_2} \rho_2, \\ T'_3 &= k \mathfrak{T}_3 + k \frac{t_3}{h_2} \rho_2. \end{aligned} \right.$$

En première approximation, les binômes, multipliant les forces  $N'$ ,  $T'$  dans les équations (22, III), se réduisent à l'unité.

En multipliant donc les équations (14) par  $d\rho_2$  et les intégrant,

$$\begin{aligned} \int_{-\eta}^{\rho_2} N'_1 d\rho_2 &= \varphi(\rho_2) \mathfrak{U}_1 + \varphi_1(\rho_2) \frac{n_1}{h_2}, \\ \int_{-\eta}^{\rho_2} N'_2 d\rho_2 &= \varphi(\rho_2) \mathfrak{U}_2 + \varphi_1(\rho_2) \frac{n_2}{h_2}, \\ \int_{-\eta}^{\rho_2} T'_3 d\rho_2 &= \varphi(\rho_2) \mathfrak{C}_3 + \varphi_1(\rho_2) \frac{t_3}{h_2}; \end{aligned}$$

et, comme  $\mathfrak{U}_1$ ,  $\mathfrak{U}_2$ ,  $\mathfrak{C}_3$  ne contiennent que les extensions de la surface moyenne, on peut, dans ce qui va suivre, les négliger devant  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $t_3$  dans un même coefficient d'une fonction de  $\rho_2$ .

En négligeant, dans (22, III),  $T'_1$ ,  $T'_2$ ,  $N'_3$ , et intégrant, on trouve

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} -T'_2 &= \frac{\varphi(\rho_2)}{h_2} \left[ \frac{d\mathfrak{U}_1}{ds^0} + \frac{d\mathfrak{C}_3}{ds_1^0} - (a_{10} + a_{20}) \mathfrak{U}_1 + a_{10} \mathfrak{U}_2 - (2a_{01} + a_{21}) \mathfrak{C}_3 \right] \\ &+ \frac{\varphi_1(\rho_2)}{h_2^2} \left[ \frac{dn_1}{ds_0} + \frac{dt_3}{ds_1^0} - (a_{10} + 2a_{20}) n_1 + a_{10} n_2 - 2(a_{01} + a_{21}) t_3 \right] + \frac{1}{h_2} \int_{-\eta}^{\rho_2} \mathbf{DF} d\rho_2, \\ -T'_1 &= \frac{\varphi(\rho_2)}{h_2} \left[ \frac{d\mathfrak{C}_3}{ds_0} + \frac{d\mathfrak{U}_2}{ds_1^0} + a_{01} \mathfrak{U}_1 - (a_{01} + a_{21}) \mathfrak{U}_2 - (2a_{10} + a_{20}) \mathfrak{C}_3 \right] \\ &+ \frac{\varphi_1(\rho_2)}{h_2^2} \left[ \frac{dt_3}{ds^0} + \frac{dn_2}{ds_1^0} + a_{01} n_1 - (a_{01} + 2a_{21}) n_2 - 2(a_{10} + a_{20}) t_3 \right] + \frac{1}{h_2} \int_{-\eta}^{\rho_2} \mathbf{DF}_1 d\rho_2, \\ -N'_3 &= \frac{\varphi(\rho_2)}{h_2} (a_{02} \mathfrak{U}_1 + a_{12} \mathfrak{U}_2) + \frac{\varphi_1(\rho_2)}{h_2^2} (a_{02} n_1 + a_{12} n_2) + \frac{1}{h_2} \int_{-\eta}^{\rho_2} \mathbf{DF}_2 d\rho_2. \end{aligned} \right.$$

Faisons dans ces relations  $\rho_2 = \eta$ , et rappelons que, pour  $\rho_2 = \eta$ ,  $T'_1$ ,  $T'_2$ ,  $N'_3$  deviennent égales à des forces données  $\xi_{x'}$ ,  $\xi_{y'}$ ,  $\xi_{z'}$ ; nous trouverons ainsi les équations extensionnelles de l'équilibre élastique

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathfrak{U}_1}{ds^0} + \frac{d\mathfrak{C}_3}{ds_1^0} - (a_{10} + a_{20}) \mathfrak{U}_1 + a_{10} \mathfrak{U}_2 - (2a_{01} + a_{21}) \mathfrak{C}_3 + \frac{\xi_{x'}}{2k_1 \varepsilon} + \frac{1}{2k_1 \eta} \int_{-\eta}^{\eta} \mathbf{DF} d\rho_2 &= 0, \\ \frac{d\mathfrak{C}_3}{ds^0} + \frac{d\mathfrak{U}_2}{ds_1^0} + a_{01} \mathfrak{U}_1 - (a_{01} + a_{21}) \mathfrak{U}_2 - (2a_{10} + a_{20}) \mathfrak{C}_3 + \frac{\xi_{y'}}{2k_1 \varepsilon} + \frac{1}{2k_1 \eta} \int_{-\eta}^{\eta} \mathbf{DF}_1 d\rho_2 &= 0, \\ a_{02} \mathfrak{U}_1 + a_{12} \mathfrak{U}_2 + \frac{\xi_{z'}}{2k_1 \varepsilon} + \frac{1}{2k_1 \eta} \int_{-\eta}^{\eta} \mathbf{DF}_2 d\rho_2 &= 0; \end{aligned} \right.$$

et les relations (15) deviennent

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{T}'_2 = \frac{\varphi_1(\rho_2)}{h_2^2} \left[ \frac{dn_1}{ds^0} + \frac{dt_3}{ds^1} - (a_{10} + 2a_{20})n_1 + a_{10}n_2 - 2(a_{01} + a_{21})t_3 \right] \\ \quad - \varphi(\rho_2) \frac{\xi_{x'}}{2k_1\eta} + \frac{1}{h_2} \left[ \int_{-\eta}^{\rho_2} \mathbf{DF} d\rho_2 - \frac{\varphi(\rho_2)}{2k_1\eta} \int_{-\eta}^{\eta} \mathbf{DF} d\rho_2 \right], \\ -\mathbf{T}'_1 = \frac{\varphi_1(\rho_2)}{h_2^2} \left[ \frac{dn_2}{ds^0} + \frac{dt_3}{ds^1} + a_{01}n_1 - (a_{01} + 2a_{21})n_2 - 2(a_{10} + a_{20})t_3 \right] \\ \quad - \varphi(\rho_2) \frac{\xi_{y'}}{2k_1\eta} + \frac{1}{h_2} \left[ \int_{-\eta}^{\rho_2} \mathbf{DF}_1 d\rho_2 - \frac{\varphi(\rho_2)}{2k_1\eta} \int_{-\eta}^{\eta} \mathbf{DF} d\rho_2 \right], \\ -\mathbf{N}'_3 = \frac{\varphi_1(\rho_2)}{h_2^2} (a_{02}n_1 + a_{12}n_2) \\ \quad - \varphi(\rho_2) \frac{\xi_{z'}}{2k_1\eta} + \frac{1}{h_2} \left[ \int_{-\eta}^{\rho_2} \mathbf{DF}_2 d\rho_2 - \frac{\varphi(\rho_2)}{2k_1\eta} \int_{-\eta}^{\eta} \mathbf{DF}_2 d\rho_2 \right]. \end{array} \right.$$

On obtiendra les équations du mouvement vibratoire, en remplaçant  $\mathbf{F}, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  par  $-\frac{d^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)}{dt^2}$  dans les équations (16).

Par la seconde des relations (8), on a

$$\varphi_1(\rho_2) = \left| k \int_{-\eta}^{\rho_2} \rho_2 d\rho_2 \right|^{\rho_2} - \dots = \frac{k\rho_2^2 - k_1\eta^2}{2} \text{ à peu près,}$$

ou encore

$$(18) \quad \varphi_1(\rho_2) = k \frac{\rho_2^2 - \eta^2}{2};$$

et, de même,

$$\varphi(\rho_2) = k_1(\rho_2 + \eta) \text{ plus quelque chose de négligeable,}$$

$$\int_{-\eta}^{\rho_2} \mathbf{DF} d\rho_2 = (\rho_2 + \eta)(\mathbf{DF})_0 + \left( \frac{d\mathbf{DF}}{ds_2} \right)^0 \frac{\rho_2^2 - \eta^2}{2h_2} + \dots,$$

$$\int_{-\eta}^{\eta} \mathbf{DF} d\rho_2 = 2\eta(\mathbf{DF})_0 + \text{infinitement petit d'ordre supérieur à 2.}$$

On aura donc finalement

$$\mathbf{T}'_2 = \frac{1}{2} \frac{\rho_2 + \eta}{\eta} \xi_{x'} + k \frac{\rho_2^2 - \eta^2}{2h_2^2} \tau_2'',$$

$$\mathbf{T}'_1 = \frac{1}{2} \frac{\rho_2 + \eta}{\eta} \xi_{y'} + k \frac{\rho_2^2 - \eta^2}{2h_2^2} \tau_1'',$$

$$\mathbf{N}'_3 = \frac{1}{2} \frac{\rho_2 + \eta}{\eta} \xi_{z'} + k \frac{\rho_2^2 - \eta^2}{2h_2^2} \nu_2'',$$

avec

$$(19) \quad \begin{cases} \tau_2'' = - \left[ \frac{dn_1}{ds_0} + \frac{dt_3}{ds_1^0} - (a_{10} + 2a_{20})n_1 + a_{10}n_2 - 2(a_{01} + a_{21})t_3 + \left(\frac{dDF}{ds_2}\right)^0 \right], \\ \tau_1'' = - \left[ \frac{dt_3}{ds_0} + \frac{dn_2}{ds_1^0} + a_{01}n_1 - (a_{01} + 2a_{21})n_2 - 2(a_{10} + a_{20})t_3 + \left(\frac{dDF_1}{ds_2}\right)^0 \right], \\ \nu_3'' = - \left[ a_{02}n_1 + a_{12}n_2 + \left(\frac{dDF_2}{ds_2}\right)^0 \right]. \end{cases}$$

Dans ce qui va suivre, nous supposons les forces  $\xi_{x'}$ ,  $\xi_{y'}$ ,  $\xi_{z'}$  nulles (ou des infiniment petits du troisième ordre) <sup>(1)</sup>, et l'on aura

$$(20) \quad \begin{cases} T_2' = k \frac{\rho_2^2 - \eta^2}{2h_2^2} \tau_2'', \\ T_1' = k \frac{\rho_2^2 - \eta^2}{2h_2^2} \tau_1'', \\ N_3' = k \frac{\rho_2^2 - \eta^2}{2h_2^2} \nu_3''. \end{cases}$$

M. Love a admis, dans le cas de l'enveloppe isotrope, homogène et d'épaisseur constante,  $N_3'$  proportionnelle à  $\varepsilon'^2$  (la petite ordonnée), mais il n'a pas réussi à trouver les expressions correspondantes à (19) dans ce cas particulier.

Avant de passer à la seconde approximation, il est bon de voir ce que deviennent les équations extensionnelles, quand l'enveloppe est isotrope, homogène, de révolution et d'épaisseur variable suivant la latitude seulement (Cloches).

A cause de l'isotropie,  $k$ ,  $k_1$  vaudront l'unité,

$$(21) \quad \begin{cases} \zeta = \zeta_1 = 2\mu(1 + E), & \zeta' = \zeta_1 = 2\mu E, \\ \zeta'' = \zeta_1'' = \zeta = \zeta' = 0, & \zeta'' = \mu. \end{cases}$$

Les coordonnées seront  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ , et avec les notations de Mathieu on aura

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{1}{r_{12}} = -\frac{1}{n}, & \frac{1}{r_{10}} = \frac{\text{tang}\varphi}{n}, & \frac{1}{r_{02}} = -\frac{1}{r}, & \frac{1}{r_{20}} = \frac{1}{r'}, & \frac{1}{r_{01}} = \frac{1}{r_{21}} = 0, \\ ds^0 = r^0 d\varphi, & ds_1^0 = n^0 \cos\varphi_0 d\psi, & h^0 = 1, & h_1^0 = \frac{1}{n_0 \cos\varphi_0}. \end{cases}$$

<sup>(1)</sup> D'ailleurs il est nécessaire de poser

$$\xi_{x'}, \xi_{y'}, \xi_{z'} = 0,$$

pour la légitimité même des équations (3).

Dans ce cas,  $\varepsilon$  n'est fonction que de  $\rho$ , donc

$$(22 \text{ bis}) \quad \frac{\varepsilon}{n} \frac{d\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)}{d\rho} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\rho} = -\frac{1}{r'_0},$$

et

$$\frac{1}{n \cos \varphi} \frac{d(n \cos \varphi)}{rd\varphi} = -\frac{1}{r_{10}} = -\frac{\operatorname{tang} \varphi}{n};$$

en posant  $\mathfrak{T}_1 = \mu V$ ,  $\mathfrak{T}_2 = \mu W$ ,  $\mathfrak{C}_3 = \mu U$ , et en remplaçant ces quantités dans les équations du mouvement vibratoire qui dérivent des (16), et en effaçant les indices communs 0, on a

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon r} \frac{d(V \varepsilon n \cos \varphi)}{d\varphi} + \frac{dU}{d\psi} + W \sin \varphi - n \cos \varphi \frac{D}{\mu} \frac{d^2 R}{dt^2} = 0, \\ \frac{1}{\varepsilon r} \frac{d(U \varepsilon n \cos \varphi)}{d\varphi} + \frac{dW}{d\psi} - U \sin \varphi - n \cos \varphi \frac{D}{\mu} \frac{d^2 R_1}{dt^2} = 0, \\ \frac{V}{r} + \frac{W}{n} + \frac{D}{\mu} \frac{d^2 R_2}{dt^2} = 0, \end{cases}$$

qui sont les équations ( $f$ ) de Mathieu (*Mémoire sur les Cloches*).

Si l'enveloppe homogène isotrope n'est pas de révolution, mais qu'elle soit d'épaisseur constante,  $h_2$  est constante, et l'on aura

$$\frac{1}{r_{21}} = \frac{1}{r_{20}} = 0;$$

et les équations du mouvement vibratoire

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{d\mathfrak{T}_1}{ds^0} + \frac{d\mathfrak{C}_3}{ds^0_1} - a_{10}(\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2) - 2a_{01}\mathfrak{C}_3 = D \frac{d^2 R^0}{dt^2}, \\ \frac{d\mathfrak{C}_3}{ds^0} + \frac{d\mathfrak{T}_2}{ds^0_1} + a_{01}(\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2) - 2a_{10}\mathfrak{C}_3 = D \frac{d^2 R^0_1}{dt^2}, \\ a_{02}\mathfrak{T}_1 + a_{12}\mathfrak{T}_2 = D \frac{d^2 R^0_2}{dt^2}, \end{cases}$$

qui sont les mêmes que les équations (36) de M. Love.

*Seconde approximation.* — Nous prendrons maintenant pour  $T'_2$ ,  $T'_1$ ,  $N'_3$  les valeurs (20), et nous retiendrons les trois termes (2); alors,

au lieu des formules (4), on aura

$$(25) \quad \begin{cases} N'_1 = k \left[ \zeta \partial'_x + \zeta' \partial'_y + \zeta'' g'_{x'y} + (\alpha \tau''_1 + \alpha' \tau''_2 + \alpha'' \nu''_3) \frac{s_2^2}{2} \right], \\ N'_2 = k \left[ \zeta_1 \partial'_x + \zeta'_1 \partial'_y + \zeta''_1 g'_{x'y} + (\alpha_1 \tau''_1 + \alpha'_1 \tau''_2 + \alpha''_1 \nu''_3) \frac{s_2^2}{2} \right], \\ T'_3 = k \left[ \xi \partial'_x + \xi' \partial'_y + \xi'' g'_{x'y} + (\beta \tau''_2 + \beta' \tau''_2 + \beta'' \nu''_3) \frac{s_2^2}{2} \right], \end{cases}$$

les  $\alpha$  et  $\beta$  étant en général fonctions de  $\rho, \rho_1, \rho_2$ .

Dans les corps isotropes,  $\alpha = \alpha' = \alpha_1 = \alpha'_1 = \beta = \beta' = \beta'' = 0$ ,  
 $\alpha'' = \alpha''_1 = 2E$ . Posons

$$(26) \quad \left. \begin{aligned} (\nu_1, \nu_2, \tau_3) = (\zeta, \zeta_1, \xi) & \left[ \frac{d}{ds_0} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dR}{ds_2} \right)^0 - 2a_{20} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dR}{ds_2} \right)^0 + 2a_{02} \frac{d}{ds^0} \left( \frac{dR}{ds_2} \right)^0 \right. \\ & - 2a_{02} a_{20} \left( \frac{dR}{ds_2} \right)^0 + (\alpha_{02}^2 + b_{02}) \frac{dR^0}{ds^0} - c_{01} R_1^0 - 2b_{01} \left( \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 \\ & \left. - a_{01} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 - c_{02} R_2^0 - 2b_{02} \left( \frac{dR_2}{ds_2} \right)^0 - a_{02} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dR_2}{ds_2} \right)^0 \right] \\ & + (\zeta', \zeta'_1, \xi') \left[ \frac{d}{ds_1^0} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 - 2a_{21} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 + 2a_{12} \frac{d}{ds_1^0} \left( \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 \right. \\ & - 2a_{12} a_{21} \left( \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 + (\alpha_{12}^2 + b_{12}) \left( \frac{dR_1^0}{ds_1^0} \right) - c_{12} R_2^0 - 2b_{12} \left( \frac{dR_2}{ds_2} \right)^0 \\ & \left. - a_{12} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dR_2}{ds_2} \right)^0 - c_{10} R^0 - 2b_{10} \left( \frac{dR}{ds_2} \right)^0 - a_{10} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 \right] \\ & + (\zeta'', \zeta''_1, \xi'') \left[ \frac{d}{ds_1^0} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dR}{ds_2} \right)^0 - 2a_{21} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dR}{ds_2} \right)^0 + 2a_{12} \frac{d}{ds_1^0} \left( \frac{dR}{ds_2} \right)^0 \right. \\ & - 2a_{12} a_{21} \left( \frac{dR}{ds_2} \right)^0 + (\alpha_{12}^2 + b_{12}) \frac{dR^0}{ds_1^0} + \frac{d}{ds^0} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 \\ & - 2a_{20} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 + 2a_{02} \frac{d}{ds^0} \left( \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 \\ & - 2a_{02} a_{20} \left( \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 + (\alpha_{02}^2 + b_{02}) \frac{dR_1^0}{ds^0} + c_{10} R_1^0 + 2b_{10} \left( \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 \\ & \left. + a_{10} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 + c_{01} R_1^0 + 2b_{01} \left( \frac{dR}{ds_2} \right)^0 + a_{01} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 \right]. \end{aligned} \right\}$$



Par les relations (13), (13 bis) et (26), les formules (25) deviennent

$$(27) \quad \begin{cases} N'_1 = k \mathfrak{C}_1 + kn_1 \frac{\rho_2}{h_2} + \frac{k \rho_2^2}{2h_2^2} (\nu_1 + \alpha \tau'_1 + \alpha' \tau''_2 + \alpha'' \nu''_3), \\ N'_2 = k \mathfrak{C}_2 + kn_2 \frac{\rho_2}{h_2} + \frac{k \rho_2^2}{2h_2^2} (\nu_2 + \alpha_1 \tau'_1 + \alpha'_2 \tau''_2 + \alpha''_1 \nu''_3), \\ T'_3 = k \mathfrak{C}_3 + kt_3 \frac{\rho_2}{h_2} + \frac{k \rho_2^2}{2h_2^2} (\tau_3 + \beta \tau'_1 + \beta' \tau''_2 + \beta'' \nu''_3). \end{cases}$$

En remplaçant les valeurs (20) et (27) dans les expressions (25, Ch. III) et (25 bis, Ch. III),

$$(28) \quad \begin{cases} P_1 = 2k_1 \eta \mathfrak{C}_1 + \frac{k_1 \eta^3}{2h_2^2} (\nu_1 - 2a_{12} n_1) \\ \quad + \frac{1}{2h_2^2} \int_{-\eta}^{\eta} k (\alpha \tau'_1 + \alpha' \tau''_2 + \alpha'' \nu''_3) \rho_2^2 d\rho_2, \\ P_2 = 2k_1 \eta \mathfrak{C}_2 + \frac{k_1 \eta^3}{2h_2^2} (\nu_2 - 2a_{02} n_2) \\ \quad + \frac{1}{2h_2^2} \int_{-\eta}^{\eta} k (\alpha_1 \tau'_1 + \alpha'_1 \tau''_2 + \alpha''_1 \nu''_3) \rho_2^2 d\rho_2, \\ Q_1 = 2k_1 \eta \mathfrak{C}_3 + \frac{k_1 \eta^3}{3h_2^2} (\tau_3 - 2a_{12} t_3) \\ \quad + \frac{1}{2h_2^2} \int_{-\eta}^{\eta} k (\beta \tau'_1 + \beta' \tau''_2 + \beta'' \nu''_3) \rho_2^2 d\rho_2, \\ Q_2 = 2k_1 \eta \mathfrak{C}_3 + \frac{k_1 \eta^3}{3h_2^2} (\tau_3 - 2a_{02} t_3) \\ \quad + \frac{1}{2h_2^2} \int_{-\eta}^{\eta} k (\beta \tau'_1 + \beta' \tau''_2 + \beta'' \nu''_3) \rho_2^2 d\rho_2, \\ V_1 = \frac{2k_1 \eta^3}{3h_2^2} \left[ \frac{dn_1}{ds_0} + \frac{dt_3}{ds_1^0} - (a_{10} + 2a_{20}) n_1 \right. \\ \quad \left. + a_{10} n_2 - 2(a_{01} + a_{21}) t_3 + \left( \frac{dDF}{ds_2} \right)^0 \right], \\ V_2 = \frac{2k_1 \eta^3}{3h_2^2} \left[ \frac{dt_3}{ds_0} + \frac{dn_2}{ds_1^0} + a_{01} n_1 \right. \\ \quad \left. - (a_{01} + 2a_{21}) n_2 - 2(a_{10} + a_{20}) t_3 + \left( \frac{dDF_1}{ds_2} \right)^0 \right]. \end{cases}$$

En remplaçant ces expressions dans les équations (29, Ch. III), nous trouvons les équations générales de l'équilibre élastique d'une

enveloppe mince, quand  $(\pi'_x, \pi'_y, \pi'_z) = 0$  :

$$\begin{aligned}
 & 2k_1\eta \left[ \frac{d\mathfrak{G}_1}{ds_0} + \frac{d\mathfrak{C}_3}{ds_1^0} - (a_{10} + a_{20})\mathfrak{G}_1 + a_{10}\mathfrak{G}_2 - (2a_{01} + a_{21})\mathfrak{C}_3 \right] \\
 & + \frac{k_1\eta^3}{3h_2^2} \left\{ \frac{d(\nu_1 - 2a_{12}n_1)}{ds^0} + \frac{d(\tau_3 - 2a_{02}t_3)}{ds_1^0} - (a_{10} + 3a_{20})(\nu_1 - 2a_{12}n_1) \right. \\
 & \quad + a_{10}(\nu_2 - 2a_{02}n_2) - a_{01}(\tau_3 - 2a_{12}t_3) - (a_{01} + 3a_{21})(\tau_3 - 2a_{02}t_3) \\
 & \quad \left. - 2a_{02} \left[ \frac{dn_1}{ds^0} + \frac{dt_3}{ds_1^0} - (a_{10} + 2a_{20})n_1 + a_{10}n_2 - 2(a_{01} + a_{21})t_3 + \left( \frac{dDF}{ds_2} \right)^0 \right] \right\} \\
 & + \frac{1}{2h_2^2} \int_{-\eta}^{\eta} k \left[ \frac{d(\alpha\tau_1'' + \alpha'\tau_2'' + \alpha''\nu_3'')}{ds^0} + \frac{d(\beta\tau_1'' + \beta'\tau_2'' + \beta''\nu_3'')}{ds_1^0} \right. \\
 & \quad - (a_{10} + 3a_{20})(\alpha\tau_1'' + \alpha'\tau_2'' + \alpha''\nu_3'') + a_{10}(\alpha_1\tau_1'' + \alpha_1'\tau_2'' + \alpha_1''\nu_3'') \\
 & \quad \left. - (2a_{01} + 3a_{21})(\beta\tau_1'' + \beta'\tau_2'' + \beta''\nu_3'') \right] \rho_2^2 d\rho_2 + \int_{-\eta}^{\eta} DF d\rho_2 = 0, \\
 & 2k_1\eta \left[ \frac{d\mathfrak{C}_3}{ds^0} + \frac{d\mathfrak{G}_2}{ds_1^0} + a_{01}\mathfrak{G}_1 - (a_{01} + a_{21})\mathfrak{G}_2 - (2a_{10} + a_{20})\mathfrak{C}_3 \right] \\
 & + \frac{k_1\eta^3}{3h_2^2} \left\{ \frac{d(\tau_3 - 2a_{12}t_3)}{ds^0} + \frac{d(\nu_2 - 2a_{02}n_2)}{ds_1^0} + a_{01}(\nu_1 - 2a_{12}n_1) \right. \\
 & \quad - (a_{01} + 3a_{21})(\nu_2 - 2a_{02}n_2) - (a_{10} + 3a_{20})(\tau_3 - 2a_{12}t_3) - a_{10}(\tau_3 - 2a_{02}t_3) \\
 & \quad \left. - 2a_{12} \left[ \frac{dt_3}{ds^0} + \frac{dn_2}{ds_1^0} + a_{01}n_1 - (a_{01} + 2a_{21})n_2 - 2(a_{10} + a_{20})t_3 + \left( \frac{dDF_1}{ds_2} \right)^0 \right] \right\} \\
 & + \frac{1}{2h_2^2} \int_{-\eta}^{\eta} k \left[ \frac{d(\beta\tau_1'' + \beta'\tau_2'' + \beta''\nu_3'')}{ds^0} + \frac{d(\alpha_1\tau_1'' + \alpha_1'\tau_2'' + \alpha_1''\nu_3'')}{ds_1^0} \right. \\
 & \quad + a_{01}(\alpha\tau_1'' + \alpha'\tau_2'' + \alpha''\nu_3'') \\
 & \quad \left. - (a_{01} + 3a_{21})(\alpha_1\tau_1'' + \alpha_1'\tau_2'' + \alpha_1''\nu_3'') \right. \\
 & \quad \left. - (2a_{10} + 3a_{20})(\beta\tau_1'' + \beta'\tau_2'' + \beta''\nu_3'') \right] \rho_2^2 d\rho_2 + \int_{-\eta}^{\eta} DF_1 d\rho_2 = 0, \\
 & 2k_1\eta(a_{02}\mathfrak{G}_1 + a_{12}\mathfrak{G}_2) + \frac{k_1\eta^3}{3h_2^2} \left\{ a_{02}(\nu_1 - 2a_{12}n_1) + a_{12}(\nu_2 - 2a_{02}n_2) \right. \\
 & \quad \left. + 2 \frac{d}{ds^0} \left[ \frac{dn_1}{ds^0} + \frac{dt_3}{ds_1^0} - (a_{10} + 2a_{20})n_1 - 2(a_{01} + a_{21})t_3 + a_{10}n_2 + \left( \frac{dDF}{ds_2} \right)^0 \right] \right\} \\
 & + 2 \frac{d}{ds_1^0} \left[ \frac{dt_3}{ds^0} + \frac{dn_2}{ds_1^0} - 2(a_{10} + a_{20})t_3 - (a_{01} + 2a_{21})n_2 + a_{01}n_1 + \left( \frac{dDF_1}{ds_2} \right)^0 \right] \\
 & - 2(a_{10} + 3a_{20}) \left[ \frac{dn_1}{ds^0} + \frac{dt_3}{ds_1^0} - (a_{10} + 2a_{20})n_1 + a_{10}n_2 - 2(a_{01} + a_{21})t_3 + \left( \frac{dDF}{ds_2} \right)^0 \right] \\
 & - 2(a_{01} + 3a_{21}) \left[ \frac{dt_3}{ds^0} + \frac{dn_2}{ds_1^0} + a_{01}n_1 - (a_{01} + 2a_{21})n_2 - 2(a_{10} + a_{20})t_3 + \left( \frac{dDF_1}{ds_2} \right)^0 \right] \\
 & + \frac{1}{2h_2^2} \int_{-\eta}^{\eta} k \left[ a_{02}(\alpha\tau_1'' + \alpha'\tau_2'' + \alpha''\nu_3'') + a_{12}(\alpha_1\tau_1'' + \alpha_1'\tau_2'' + \alpha_1''\nu_3'') \right] \rho_2^2 d\rho_2 + \int_{-\eta}^{\eta} DF_2 d\rho_2 = 0.
 \end{aligned}$$

Telles sont les équations de l'équilibre élastique les plus générales en fonction des déplacements de la surface moyenne; les équations extensionnelles (16) s'en déduisent en négligeant les termes en  $\eta^3$ , et en négligeant les termes en  $\eta$  devant ceux en  $\eta^3$ ; les équations qui en résultent peuvent être appelées *équations flexionnelles*.

Mais toutes les expressions qui y entrent ne sont pas encore parfaitement déterminées. Il nous reste à déterminer, d'une part,  $\left(\frac{dR, R_1, R_2}{ds_2}\right)^0$ ,  $\left[\frac{d}{ds_2}\left(\frac{dR}{ds_2}, \frac{dR_1}{ds_2}, \frac{dR_2}{ds_2}\right)\right]^0$ , en fonction des  $R^0, R_1^0, R_2^0$  et de leurs dérivées par rapport à  $s^0$  et  $s_1^0$ , et, d'autre part, les  $b_{kl}, c_{kl}$ , en fonction des  $a_{kl}$ .

*Calcul des*  $\left(\frac{dR, R_1, R_2}{ds_2}\right)^0$ . — Les relations (5, Ch. III) donnent, en coordonnées curvilignes,

$$\left. \begin{aligned} f_3 \frac{dR}{ds_2} + e_3 \frac{dR_1}{ds_2} + c_3 \frac{dR_2}{ds_2} &= -a_3 \left( \frac{dR}{ds} - \frac{R_1}{r_{01}} - \frac{R_2}{r_{02}} \right) - k_3 \left( \frac{dR}{ds_1} + \frac{dR_1}{ds} + \frac{R}{r_{01}} + \frac{R_1}{r_{10}} \right) \\ &\quad - b_3 \left( \frac{dR_1}{ds_1} - \frac{R_2}{r_{12}} - \frac{R}{r_{10}} \right) - f_3 \left( \frac{dR_2}{ds} + \frac{R}{r_{02}} + \frac{R_2}{r_{20}} \right) \\ &\quad - e_3 \left( \frac{dR_2}{ds_1} + \frac{R_1}{r_{12}} + \frac{R_1}{r_{21}} \right) + c_3 \left( \frac{R}{r_{20}} + \frac{R_1}{r_{21}} \right) + \frac{k\tau'_1 s_2^2}{2}, \\ f_4 \frac{dR}{ds_2} + f_3 \frac{dR_1}{ds_2} + f_2 \frac{dR_2}{ds_2} &= -f \left( \frac{dR}{ds} - \frac{R_1}{r_{01}} - \frac{R_2}{r_{02}} \right) - f_5 \left( \frac{dR}{ds_1} + \frac{dR_1}{ds} + \frac{R}{r_{01}} + \frac{R_1}{r_{10}} \right) \\ &\quad - f_1 \left( \frac{dR_1}{ds_1} - \frac{R}{r_{10}} - \frac{R_2}{r_{12}} \right) - f_4 \left( \frac{dR_2}{ds} + \frac{R}{r_{02}} + \frac{R_2}{r_{20}} \right) \\ &\quad - f_3 \left( \frac{dR_2}{ds_1} + \frac{R_1}{r_{12}} + \frac{R_2}{r_{21}} \right) + f_2 \left( \frac{R}{r_{20}} + \frac{R_1}{r_{21}} \right) + \frac{k\tau'_2 s_2^2}{2}, \\ f_2 \frac{dR}{ds} + c_3 \frac{dR_1}{ds_2} + c_2 \frac{dR_2}{ds_2} &= -c \left( \frac{dR}{ds} - \frac{R_1}{r_{01}} - \frac{R_2}{r_{02}} \right) - k_2 \left( \frac{dR}{ds_1} + \frac{dR_1}{ds} + \frac{R}{r_{01}} + \frac{R_1}{r_{10}} \right) \\ &\quad - c_1 \left( \frac{dR_1}{ds_1} - \frac{R_2}{r_{12}} - \frac{R}{r_{10}} \right) - f_2 \left( \frac{dR_2}{ds} + \frac{R}{r_{02}} + \frac{R_2}{r_{20}} \right) \\ &\quad - c_3 \left( \frac{dR_2}{ds_1} + \frac{R_1}{r_{12}} + \frac{R_2}{r_{21}} \right) + c_2 \left( \frac{R}{r_{20}} + \frac{R_1}{r_{21}} \right) + \frac{k s_2^2 \nu'_3}{2}. \end{aligned} \right\}$$

Dans ces équations, les inconnues cherchées sont  $\frac{dR}{ds_2}, \frac{dR_1}{ds_2}, \frac{dR_2}{ds_2}$ , et l'on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_3 & e_3 & c_3 \\ f_4 & f_3 & f_2 \\ f_2 & c_3 & e_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

On trouve, en effectuant l'élimination,

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dR}{ds_2} &= -A \partial_{x'} - B g_{x'y'} - C \partial_{y'} - \frac{dR_2}{ds} \\ &\quad - \frac{R}{r_{02}} - \frac{R_2}{r_{20}} + K(\omega \tau'_1 + \omega' \tau'_2 + \omega'' \nu'_3) \frac{s_2^2}{2}, \\ \frac{dR_1}{ds_2} &= -A' \partial_{x'} - B' g_{x'y'} - C' \partial_{y'} - \frac{dR_2}{ds_1} \\ &\quad - \frac{R_1}{r_{12}} - \frac{R_2}{r_{21}} + K(\omega_1 \tau'_1 + \omega'_1 \tau'_2 + \omega''_1 \nu'_3) \frac{s_2^2}{2}, \\ \frac{dR_2}{ds_2} &= -A'' \partial_{x'} - B'' g_{x'y'} - C'' \partial_{y'} + \frac{R}{r_{20}} \\ &\quad + \frac{R_1}{r_{21}} + K(\omega_2 \tau'_1 + \omega'_2 \tau'_2 + \omega''_2 \nu'_3) \frac{s_2^2}{2}. \end{aligned} \right.$$

En y faisant  $\rho_2 = 0$ , les coefficients A, B, ..., C'' prennent les valeurs  $A_0, B_0, \dots, C''_0$ , et l'on aura

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \left( \frac{dR}{ds_2} \right)^0 &= -A_0 \partial_{x'}^0 - B_0 g_{x'y'}^0 - C_0 \partial_{y'}^0 - \frac{dR_2^0}{ds^0} - a_{02} R^0 - a_{20} R_2^0, \\ \left( \frac{dR_1}{ds_2} \right)^0 &= -A'_0 \partial_{x'}^0 - B'_0 g_{x'y'}^0 - C'_0 \partial_{y'}^0 - \frac{dR_2^0}{ds_1^0} - a_{12} R_1^0 - a_{21} R_2^0, \\ \left( \frac{dR_2}{ds_2} \right)^0 &= -A''_0 \partial_{x'}^0 - B''_0 g_{x'y'}^0 - C''_0 \partial_{y'}^0 + a_{20} R^0 - a_{21} R_1^0. \end{aligned} \right.$$

Calcul des dérivées  $\left[ \frac{d}{ds_2} \left( \frac{dR}{ds_2}, \frac{dR_1}{ds_2}, \frac{dR_2}{ds_2} \right) \right]^0$ . — En se rappelant la formule (4, III), on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds_2} \left( \frac{dR}{ds} \right) &= h h_2 \frac{d^2 R}{d\rho d\rho_2} + \frac{1}{r_{02}} \frac{dR}{ds}, \\ \frac{d}{ds} \left( \frac{dR}{ds_2} \right) &= h h_2 \frac{d^2 R}{d\rho d\rho_2} + \frac{1}{r_{20}} \frac{dR}{ds_2}; \end{aligned}$$

d'où la première de ces six relations

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds_2} \left[ \frac{d(R, R_1, R_2)}{ds} \right] &= \frac{d}{ds} \left[ \frac{d(R, R_1, R_2)}{ds_2} \right] + \frac{1}{r_{02}} \frac{d(R, R_1, R_2)}{ds} - \frac{1}{r_{20}} \frac{d(R, R_1, R_2)}{ds_2}, \\ \frac{d}{ds_2} \left[ \frac{d(R, R_1, R_2)}{ds_1} \right] &= \frac{d}{ds_1} \left[ \frac{d(R, R_1, R_2)}{ds_2} \right] + \frac{1}{r_{12}} \frac{d(R, R_1, R_2)}{ds_1} - \frac{1}{r_{21}} \frac{d(R, R_1, R_2)}{ds_2}. \end{aligned} \right\}$$

Posons

$$(34) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{ds^0} \left( \frac{d\mathbf{R}}{ds_2} \right)^0 + a_{02} \frac{d\mathbf{R}^0}{ds^0} - a_{20} \left( \frac{d\mathbf{R}}{ds_2} \right)^0 - a_{01} \left( \frac{d\mathbf{R}_1}{ds_2} \right)^0 \\ \quad - b_{01} \mathbf{R}_1^0 - a_{02} (a_{20} \mathbf{R}^0 + a_{21} \mathbf{R}_1^0) - b_{02} \mathbf{R}_2^0 = \mathbf{L}, \\ \frac{d}{ds_1^0} \left( \frac{d\mathbf{R}}{ds_2} \right)^0 + a_{12} \frac{d\mathbf{R}^0}{ds_1^0} - a_{21} \left( \frac{d\mathbf{R}}{ds_2} \right)^0 + \frac{d}{ds^0} \left( \frac{d\mathbf{R}_1}{ds_2} \right)^0 + a_{02} \frac{d\mathbf{R}_1^0}{ds^0} \\ \quad - a_{20} \left( \frac{d\mathbf{R}_1}{ds_2} \right)^0 + a_{01} \left( \frac{d\mathbf{R}}{ds_2} \right)^0 + b_{01} \mathbf{R}_0 + a_{10} \left( \frac{d\mathbf{R}_1}{ds_2} \right)^0 + b_{10} \mathbf{R}_1^0 = \mathbf{L}_1, \\ \frac{d}{ds_1^0} \left( \frac{d\mathbf{R}_1}{ds_2} \right)^0 + a_{12} \frac{d\mathbf{R}_1^0}{ds_1^0} - a_{21} \left( \frac{d\mathbf{R}_1}{ds_2} \right)^0 - a_{10} \left( \frac{d\mathbf{R}}{ds_2} \right)^0 \\ \quad - b_{10} \mathbf{R}^0 - a_{12} (a_{20} \mathbf{R}_0 + a_{21} \mathbf{R}_1^0) - b_{12} \mathbf{R}_2^0 = \mathbf{L}_2, \end{array} \right.$$

qui ne contiennent pas les secondes dérivées en  $s_2$ .

Prenons les dérivées des formules (31) par rapport à  $s_2$  et faisons tout de suite  $\rho_2 = 0$ ; en négligeant les termes  $\partial_{x'}^0$ ,  $\partial_{y'}^0$ ,  $g_{x'y'}^0$  et leurs dérivées par rapport à  $s^0$  et  $s_1^0$ , on trouve

$$(35) \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{d}{ds_2} \frac{d\mathbf{R}}{ds_2} \right)^0 = -\mathbf{A}_0 \mathbf{L} - \mathbf{B}_0 \mathbf{L}_1 - \mathbf{C}_0 \mathbf{L}_2 - \frac{d}{ds^0} (a_{20} \mathbf{R}^0 + a_{21} \mathbf{R}_1^0) - a_{02} \frac{d\mathbf{R}_2^0}{ds_0^0} \\ \quad + a_{02} \left( \frac{d\mathbf{R}_2^0}{ds^0} + a_{02} \mathbf{R}^0 + a_{20} \mathbf{R}_2^0 \right) - b_{02} \mathbf{R}^0 - b_{20} \mathbf{R}_2^0, \\ \left( \frac{d}{ds_2} \frac{d\mathbf{R}_1}{ds_2} \right)^0 = -\mathbf{A}'_0 \mathbf{L} - \mathbf{B}'_0 \mathbf{L}_1 - \mathbf{C}'_0 \mathbf{L}_2 - \frac{d}{ds_1^0} (a_{20} \mathbf{R}^0 + a_{21} \mathbf{R}_1^0) - a_{12} \frac{d\mathbf{R}_2^0}{ds_1^0} \\ \quad + a_{12} \left( \frac{d\mathbf{R}_2^0}{ds_1^0} + a_{12} \mathbf{R}_1^0 + a_{21} \mathbf{R}_2^0 \right) - b_{12} \mathbf{R}_1^0 - b_{21} \mathbf{R}_2^0, \\ \left( \frac{d}{ds_2} \frac{d\mathbf{R}_2}{ds_2} \right)^0 = -\mathbf{A}''_0 \mathbf{L} - \mathbf{B}''_0 \mathbf{L}_1 - \mathbf{C}''_0 \mathbf{L}_2 - a_{20} \left( \frac{d\mathbf{R}_2}{ds_0} + a_{02} \mathbf{R}^0 + a_{20} \mathbf{R}_2^0 \right) \\ \quad + b_{20} \mathbf{R}^0 - a_{21} \left( \frac{d\mathbf{R}_2^0}{ds_1^0} + a_{12} \mathbf{R}_1^0 + a_{21} \mathbf{R}_2^0 \right) + b_{21} \mathbf{R}_1^0. \end{array} \right.$$

Or, dans ces expressions figurent les quantités  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{A}'_0$ , ...,  $\mathbf{C}''_0$ , qui sont fonctions, en général, de  $s^0$  et  $s_1^0$ . En effet, on a les formules con-

centrées

$$(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0) = \frac{1}{\Delta_0} \begin{vmatrix} (a_3, k_3, b_3)^0 & e_3^0 & c_3^0 \\ (f, f_5, f_1)^0 & f_3^0 & f_2^0 \\ (c, k_2, c_1)^0 & c_3^0 & c_2^0 \end{vmatrix},$$

$$(\mathbf{A}'_0, \mathbf{B}'_0, \mathbf{C}'_0) = \frac{1}{\Delta_0} \begin{vmatrix} f_3^0 & (a_3, k_3, b_3)^0 & c_3^0 \\ f_4^0 & (f, f_5, f_1)^0 & f_2^0 \\ f_2^0 & (c, k_2, c_1)^0 & c_2^0 \end{vmatrix},$$

$$(\mathbf{A}''_0, \mathbf{B}''_0, \mathbf{C}''_0) = \frac{1}{\Delta_0} \begin{vmatrix} f_3^0 & e_3^0 & (a_3, k_3, b_3)^0 \\ f_4^0 & f_3^0 & (f, f_5, f_1)^0 \\ f_2^0 & c_3^0 & (c, k_2, c_1)^0 \end{vmatrix}.$$

*Cas particuliers.* — 1° Prenons le cas d'un axe d'isotropie dans l'enveloppe homogène; alors on trouve aisément

$$(36) \quad \begin{cases} \Delta = -\mu'^2 \nu, & (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{B}'') = 0, \\ & \mathbf{A}'' = \mathbf{C}'' = \frac{\lambda'}{\nu}; \end{cases}$$

2° Dans le cas d'une enveloppe homogène et isotrope

$$(37) \quad \begin{cases} \Delta = -\mu^2 (\lambda + 2\mu), & \mathbf{A}, \dots, \mathbf{B}'' = 0, \\ & \mathbf{A}'' = \mathbf{C}'' = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = \mathbf{E} \text{ (const.)}; \end{cases}$$

3° Enfin, supposons que chaque couche de l'enveloppe est homogène et *isotrope*, mais que la densité et les coefficients élastiques changent d'une manière continue d'une couche à la couche voisine. Les coefficients élastiques ne seront fonctions que de  $\rho_2$ , et si l'on désigne par  $\lambda_0$  et  $\mu$  les  $\lambda$  et  $\mu$  de la couche moyenne, on trouve

$$(38) \quad \begin{cases} \Delta_0 = -\mu_0^2 (\lambda_0 + 2\mu_0) & (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{B}'')_0 = 0, \\ & \mathbf{A}''_0 = \mathbf{C}''_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} = \mathbf{E}_0 \text{ (const.)}. \end{cases}$$

*Calcul des  $b_{kl}$  et  $c_{kl}$  en fonction des  $a_{kl}$ .* — Les quantités qu'on a besoin de connaître sont  $b_{kl}$  et  $c_{01}, c_{10}, c_{02}, c_{12}$ . Dans les leçons sur les

coordonnées curvilignes de Lamé, on rencontre les quatre équations

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \mathbf{H}}{d\rho_1 d\rho_2} &= \frac{1}{\mathbf{H}_1} \frac{d\mathbf{H}}{d\rho_1} \frac{d\mathbf{H}_1}{d\rho_2} + \frac{1}{\mathbf{H}_2} \frac{d\mathbf{H}}{d\rho_2} \frac{d\mathbf{H}_2}{d\rho_1}, \\ \frac{d^2 \mathbf{H}_1}{d\rho_2 d\rho} &= \frac{1}{\mathbf{H}_2} \frac{d\mathbf{H}_1}{d\rho_2} \frac{d\mathbf{H}_2}{d\rho} + \frac{1}{\mathbf{H}} \frac{d\mathbf{H}_1}{d\rho} \frac{d\mathbf{H}}{d\rho_2}, \\ \frac{d}{d\rho_2} \left( \frac{1}{\mathbf{H}_2} \frac{d\mathbf{H}}{d\rho_2} \right) + \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{\mathbf{H}} \frac{d\mathbf{H}_2}{d\rho} \right) + \frac{1}{\mathbf{H}_1^2} \frac{d\mathbf{H}_2}{d\rho_1} \frac{d\mathbf{H}}{d\rho_1} &= 0, \\ \frac{d}{d\rho_2} \left( \frac{1}{\mathbf{H}_2} \frac{d\mathbf{H}_1}{d\rho_2} \right) + \frac{d}{d\rho_1} \left( \frac{1}{\mathbf{H}_1} \frac{d\mathbf{H}_2}{d\rho_1} \right) + \frac{1}{\mathbf{H}^2} \frac{d\mathbf{H}_1}{d\rho} \frac{d\mathbf{H}_2}{d\rho} &= 0.\end{aligned}$$

Par les relations (4, III), elles deviennent

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{ds_2} \frac{1}{r_{02}} &= \frac{1}{r_{02}} \left( \frac{1}{r_{01}} - \frac{1}{r_{21}} \right), \\ \frac{d}{ds_2} \frac{1}{r_{10}} &= \frac{1}{r_{12}} \left( \frac{1}{r_{10}} - \frac{1}{r_{20}} \right), \\ \frac{d}{ds_2} \frac{1}{r_{02}} + \frac{d}{ds} \frac{1}{r_{20}} &= \frac{1}{r_{20}^2} + \frac{1}{r_{02}^2} + \frac{1}{r_{01}} \frac{1}{r_{21}}, \\ \frac{d}{ds_2} \frac{1}{r_{12}} + \frac{d}{ds_1} \frac{1}{r_{21}} &= \frac{1}{r_{12}^2} + \frac{1}{r_{21}^2} + \frac{1}{r_{10}} \frac{1}{r_{20}}. \end{aligned} \right.$$

On aura donc

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} b_{01} &= a_{02}(a_{01} - a_{21}), \\ b_{10} &= a_{12}(a_{10} - a_{20}), \\ b_{02} &= a_{20}^2 + a_{02}^2 + a_{21}a_{01} - \frac{da_{20}}{ds_0}, \\ b_{12} &= a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{10}a_{20} - \frac{da_{21}}{ds_1^0}, \\ c_{01} &= b_{02}(a_{01} - a_{21}) + a_{02}(b_{01} - b_{21}), \\ c_{10} &= b_{12}(a_{10} - a_{20}) + a_{12}(b_{10} - b_{20}), \\ c_{02} &= 2a_{20}b_{20} + 2a_{02}b_{02} + a_{21}b_{01} + b_{21}a_{01} - \frac{db_{20}}{ds^0}, \\ c_{12} &= 2a_{12}b_{12} + 2a_{21}b_{21} + a_{10}b_{20} + b_{10}a_{20} - \frac{db_{21}}{ds^0}. \end{aligned} \right.$$

Il reste à déterminer  $b_{20}$  et  $b_{21}$ . Pour cela, on a

$$\frac{d}{ds_2} \frac{1}{r_{20}} = \frac{dh}{ds_2} \frac{1}{h_2} \frac{dh_2}{d\rho} = \frac{1}{h} \frac{dh}{ds_2} \frac{1}{h_2} \frac{dh_2}{ds} = \frac{1}{r_{20}} \frac{1}{r_{02}};$$

d'où la première des deux suivantes :

$$(41) \quad \begin{cases} b_{20} = a_{20} a_{02}, \\ b_{21} = a_{21} a_{12}. \end{cases}$$

CONDITIONS AUX LIMITES.

Les équations définies rapportées aux axes  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  sont

$$(42) \quad \begin{cases} f_{x'} = N'_1 \cos \varphi' + T'_3 \cos \gamma' + T'_2 \cos \psi', \\ f_{y'} = T'_3 \cos \varphi' + N'_2 \cos \gamma' + T'_1 \cos \psi', \\ f_{z'} = T'_2 \cos \varphi' + T'_1 \cos \gamma' + N'_3 \cos \psi'. \end{cases}$$

Le contour peut être quelconque; mais nous imaginerons la surface au paramètre  $\rho$  la plus proche à ce contour et intérieure au corps, et nous la prendrons, pour simplifier, comme formant le contour. D'ailleurs, nous donnerons ensuite les conditions pour un contour quelconque. Sur cette surface  $\rho$  considérons le réseau des courbes formées par les intersections des familles  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . Nous aurons ainsi sur le bord des rectangles curvilignes de côtés  $ds_1$  et  $ds_2$ . Si d'un point quelconque M pris sur le bord, on fait passer les trois axes rectangulaires  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  tangents respectivement aux courbes  $s$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  qui y passent, l'axe  $x'$  sera normal à la surface-bord et l'on aura  $\varphi' = 0$ ,  $\gamma' = \psi' = \frac{\pi}{2}$ ; les conditions (42) se réduisent à

$$(43) \quad \begin{cases} f_{x'} = N'_1, \\ f_{y'} = T'_3, \\ f_{z'} = T'_2. \end{cases}$$

Avant d'aller plus loin, remarquons que Mathieu a trouvé pour ses cloches, en première approximation, par la méthode de Kirchhoff, les deux premières (43) et  $f_{z'} = 0$ ; ce qui revient bien à la troisième, vu que  $T'_2$  est, comme nous avons remarqué, d'un ordre de petitesse supérieure à  $N'_1$ ,  $T'_3$ .



Si maintenant nous voulons que l'origine des coordonnées se meuve sur la surface moyenne ou, ici, sur la ligne moyenne, les conditions (43) deviennent

$$(44) \quad \begin{cases} f_{x'} = N'_1(1 - a_{12}s_2), \\ f_{y'} = T'_3(1 - a_{12}s_2), \\ f_{z'} = T'_2(1 - a_{12}s_2). \end{cases}$$

Pour trouver l'action extérieure exercée sur une bande de côtés  $ds_1$  et  $2\varepsilon$ , nous aurons à considérer les trois forces  $F_{x'}$ ,  $F_{y'}$ ,  $F_{z'}$  et les couples  $M_{x'}$ ,  $M_{y'}$ .

Posons les couples

$$\begin{aligned} S_1 &= - \int_{-\eta}^{\eta} T'_3 s_2 (1 - a_{12}s_2) d\rho_2 = - \frac{2k_1 \eta \varepsilon^2}{3} t_3, \\ S_2 &= \int_{-\eta}^{\eta} T'_3 s_2 (1 - a_{02}s_2) d\rho_2 = \frac{2k_1 \eta \varepsilon^2}{3} t_3, \\ M_1 &= \int_{-\eta}^{\eta} N'_1 s_2 (1 - a_{12}s_2) d\rho_2 = \frac{2k_1 \varepsilon^2 \eta}{3} n_1, \\ M_2 &= \int_{-\eta}^{\eta} N'_2 s_2 (1 - a_{02}s_2) d\rho_2 = - \frac{2k_1 \varepsilon^2 \eta}{3} n_2. \end{aligned}$$

*Remarque.* — Il semble au premier abord que ces expressions sont absurdes, car on ne peut pas concevoir des couples dont le bras de levier est curviligne ( $s_2$ ).

En réalité, au lieu de  $s_2$ , il fallait mettre la distance des forces très voisines mesurée sur la tangente  $z'$ ; mais  $z'$  est la projection de l'arc très petit  $s_2$  sur la tangente, et l'on sait la relation

$$z' - s_2 = \Lambda s_2^3 + \text{infiniment petit d'ordre supérieur à 3};$$

et, comme sous l'intégrale, le terme  $\Lambda s_2^3$  introduit des termes d'ordre supérieur de ce qu'on retient, on peut poser  $z' = s_2$ .

Cela posé, on aura les conditions

$$(45) \quad \begin{cases} F_{x'} = F_N = P_1, \\ F_{y'} = F_{s_1} = Q_1, \\ F_{z'} = U_1, \\ M_{x'} = M_N = S_1, \\ M_{y'} = M_{s_1} = M_1. \end{cases}$$

Ce système peut être remplacé par un autre statiquement équivalent. Le couple de torsion  $M_{x'}$  donne, suivant la ligne  $s_1$ , une force égale à  $a_{12} M_{x'}$  et suivant  $s_2$  la force  $-\frac{dM_{x'}}{ds_1}$ ; on aura donc pour conditions

$$(46) \quad \begin{cases} F_N = P_1 = F_{x'}, \\ F_{S_1} + a_{12} M_N = Q_1 + a_{12} S_1 = F_{y'} + a_{12} M_x, \\ F_z - \frac{dM_u}{ds_1^0} = V_1 - \frac{dS_1}{ds_1^0} = F_z - \frac{dM_{x'}}{ds_1^0}, \\ M_{S_1} = M_1 = M_{y'}. \end{cases}$$

Cherchons maintenant les conditions quand le bord est quelconque. Si l'on désigne par  $F_N, F_S, F_u, M_N, M_S$  les forces et les couples extérieurs appliqués au bord et si  $P'_1, Q'_1, V'_1$  désignent les résultantes de forces élastiques en un point de la ligne suivant laquelle la surface moyenne rencontre la surface-bord, et  $H'$  et  $G'$  les couples de torsion et de flexion, le couple de torsion donnera deux forces; et si  $\rho'_2$  désigne le rayon de courbure de la surface moyenne suivant la section normale passant par le point considéré de la ligne-bord, on aura les conditions

$$(47) \quad \begin{cases} P'_1 = F_N, \\ Q'_1 + \frac{H'}{\rho'_2} = F_S + \frac{M_N}{\rho'_2}, \\ V'_1 - \frac{dH'}{dS} = F_u - \frac{dM_N}{dS}, \\ G' = M_S. \end{cases}$$

Ces conditions ont été données par M. Basset et le professeur Lamb pour le cas d'une enveloppe d'épaisseur constante, mais elles sont générales. Cherchons les valeurs des forces et couples qui y figurent; la normale (N) à la surface-bord faisant des angles, dont les cosinus avec les axes  $x', y', z'$  passant par les mêmes points, sont  $\cos \varphi', \cos \chi', \cos \psi'$ , si l'on appelle les cosinus directeurs de la tangente à la ligne-bord (S),  $\cos \varphi'_1, \cos \chi'_1, \cos \psi'_1$  et ceux de la normale élevée sur le plan de (N, S)  $\cos \varphi'_2, \cos \chi'_2, \cos \psi'_2$ , en multipliant les équations (42) respectivement par  $\cos \varphi', \cos \chi', \cos \psi'$  et ajoutant membre à membre, on trouve

$$(48) \quad \begin{cases} f_N = f_{x'} \cos \varphi' + f_{y'} \cos \chi' + f_z \cos \psi' \\ = N'_1 \cos^2 \varphi' + N'_2 \cos^2 \chi' + N'_3 \cos^2 \psi' + 2T'_3 \cos \varphi' \cos \chi' \\ \quad \quad \quad + 2T'_2 \cos \varphi' \cos \psi' + 2T'_1 \cos \psi' \cos \chi' = P_N; \end{cases}$$

on aura de même

$$(49) \left\{ \begin{aligned} f_s &= f_x' \cos \varphi_1' + f_y' \cos \chi_1' + f_z' \cos \psi_1' \\ &= N_1' \cos \varphi' \cos \varphi_1' + N_2' \cos \chi' \cos \chi_1' + N_3' \cos \psi' \cos \psi_1' \\ &\quad + T_3' (\cos \chi' \cos \varphi_1' + \cos \varphi' \cos \chi_1') + T_2' (\cos \psi' \cos \varphi_1' + \cos \varphi' \cos \psi_1') \\ &\quad \quad \quad + T_1' (\cos \psi' \cos \chi_1' + \cos \chi' \cos \psi_1') = P_s, \end{aligned} \right.$$

$$(50) \left\{ \begin{aligned} f_u &= f_x' \cos \varphi_2' + f_y' \cos \chi_2' + f_z' \cos \psi_2' \\ &= N_1' \cos \varphi' \cos \varphi_2' + \dots + T_1' (\cos \psi' \cos \chi_2' + \cos \chi' \cos \psi_2') = P_u. \end{aligned} \right.$$

Si  $\rho_2''$  désigne le rayon de courbure de la surface moyenne suivant la ligne-bord, on trouve

$$(51) \left\{ \begin{aligned} P_1' &= \int_{-\eta}^{\eta} P_N \left( 1 - \frac{s_2}{\rho_2} \right) d\rho_2, \\ Q_1' &= \int_{-\eta}^{\eta} P_S \left( 1 - \frac{s_2}{\rho_2} \right) d\rho_2, \\ V_1' &= \int_{-\eta}^{\eta} P_u \left( 1 - \frac{s_2}{\rho_2} \right) d\rho_2, \\ H' &= - \int_{-\eta}^{\eta} P_S s_2 \left( 1 - \frac{s_2}{\rho_2} \right) d\rho_2, \\ G' &= - \int_{-\eta}^{\eta} P_N s_2 \left( 1 - \frac{s_2}{\rho_2} \right) d\rho_2. \end{aligned} \right.$$

Ainsi les conditions aux limites se compliquent énormément.

Mais on peut imaginer un cas particulier beaucoup plus général que le cas que nous avons traité en premier lieu : c'est le cas où la ligne S est la section de la surface moyenne par une surface contour-nante ou limite simplement normale au feuillet moyen. Alors  $\psi' = 0$ , et si l'on pose

$$\cos \varphi' = \cos \theta, \quad \cos \chi' = \sin \theta,$$

on trouve

$$\cos \varphi_1' = -\sin \theta, \quad \cos \chi_1' = \cos \theta, \quad \cos \psi_1' = 0,$$

$$\cos \varphi_2' = \cos \chi_2' = 0, \quad \cos \psi_2' = 1,$$

$$(52) \quad \rho_2'' = \rho_2'.$$

Les équations (48), (49), (50) deviennent

$$(53) \quad \begin{cases} P_N = N'_1 \cos^2 \theta + N'_2 \sin^2 \theta + T'_3 \sin 2\theta, \\ P_S = \sin \theta \cos \theta (N'_2 - N'_1) + T'_3 \cos 2\theta, \\ P_u = T'_2 \cos \theta + T'_1 \sin \theta = P_z, \end{cases}$$

et les expressions (51) où, au lieu de  $\rho_2''$ , on a mis  $\rho_2'$ , qui est donnée par la formule

$$\frac{1}{\rho_2'} = a_{12} \cos^2 \theta + a_{02} \sin^2 \theta.$$

Au lieu de donner les équations (46) ou (47), on peut se donner les valeurs des déplacements de la surface moyenne et de la dérivée du déplacement transversal par rapport à la normale N sur le bord, et l'on aura

$$(54) \quad R^0 = A, \quad R_1^0 = B, \quad R_2^0 = C, \quad \frac{dR_2^0}{dN} = D.$$

---

## CHAPITRE V.

---

### I. — Les cloches.

Les cloches que nous examinerons sont des enveloppes de révolution, homogènes, isotropes et d'épaisseur variable suivant la latitude.

Les plans méridiens seront la famille au paramètre  $\rho_1$ , et si l'on mène les trajectoires orthogonales des courbes méridiennes de la cloche, la surface engendrée par la révolution complète d'une de ces courbes, autour de l'axe de révolution, appartient à la famille au paramètre  $\rho$ .

Nous supposerons avec Mathieu que le petit bord de la cloche fait partie d'une de ces dernières surfaces.

$\psi$  étant l'angle que fait un quelconque de plans méridiens avec un méridien fixe, et  $\varphi$  la colatitude,  $r_0$  le rayon d'un parallèle de la surface moyenne, en vertu des relations (22, IV), les équations du mouvement vibratoire sont

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{1}{r_0} \frac{dP_1}{d\varphi} + \frac{1}{n_0 \cos \varphi} \frac{dQ_2}{d\psi} - \left( \frac{\tan \varphi}{n_0} + \frac{1}{r'_0} \right) P_1 + \frac{\tan \varphi}{n_0} P_2 + \frac{V_1}{r_0} = D \int_{-\eta}^{+\eta} \frac{d^2 R}{dt^2} d\rho_2, \\ \frac{1}{r_0} \frac{dQ_1}{d\varphi} + \frac{1}{n_0 \cos \varphi} \frac{dP_2}{d\psi} - \left( \frac{\tan \varphi}{n_0} + \frac{1}{r'_0} \right) Q_1 - \frac{\tan \varphi}{n_0} Q_2 + \frac{V_2}{n_0} = D \int_{-\eta}^{+\eta} \frac{d^2 R_1}{dt^2} d\rho_2, \\ \frac{1}{r_0} \frac{dV_1}{d\varphi} + \frac{1}{n_0 \cos \varphi} \frac{dV_2}{d\psi} - \left( \frac{\tan \varphi}{n_0} + \frac{1}{r'_0} \right) V_1 - \frac{P_1}{r_0} - \frac{P_2}{n_0} = D \int_{-\eta}^{+\eta} \frac{d^2 R_2}{dt^2} d\rho_2. \end{cases}$$

On aura des solutions simples, en posant

$$\begin{aligned} R^0 &= U (\cos \alpha \psi \quad \text{ou} \quad \sin \alpha \psi) e^{i p t}, \\ R_1^0 &= V (-\alpha \sin \alpha \psi \quad \text{ou} \quad \alpha \cos \alpha \psi) e^{i p t}, \\ R_2^0 &= W (\cos \alpha \psi \quad \text{ou} \quad \sin \alpha \psi) e^{i p t}, \end{aligned}$$

où  $U, V, W$  ne sont fonctions que de  $\varphi$ .

On pourra donc prendre, en effaçant les indices 0,

$$(2) \quad \begin{cases} R = C_{\alpha} V e^{i(\alpha \psi + p t)}, \\ R_1 = i \alpha C_{\alpha, 1} V e^{i(\alpha \psi + p t)}, \\ R_2 = C_{\alpha, 2} W e^{i(\alpha \psi + p t)}, \end{cases}$$

on aura

$$(3) \quad \begin{cases} \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3 = (\mathfrak{C}'_1, \mathfrak{C}'_2, i \alpha \mathfrak{C}'_3) e^{i(\alpha \psi + p t)}, \\ n_1, n_2, t_3 = (n'_1, n'_2, i \alpha t'_3) e^{i(\alpha \psi + p t)}, \\ \nu_1, \nu_2, \tau_3 = (\nu'_1, \nu'_2, i \alpha \tau'_3) e^{i(\alpha \psi + p t)}, \end{cases}$$

les expressions accentuées étant des fonctions linéaires connues de  $U, V, W$  et de leurs dérivées par rapport à  $\varphi$ .

Si l'on substitue, les équations (1) qui étaient à dérivées partielles deviennent trois équations différentielles linéaires simultanées à coefficients variables et sans second membre; la première est du troisième ordre, la seconde du deuxième, et la troisième du quatrième.

*Équations générales.* — Si l'on substitue les solutions (2) aux équations (1), elles deviennent

$$(4) \left\{ \begin{aligned} & A \frac{d^3 U}{d\varphi^3} + B \frac{d^2 U}{d\varphi^2} + C \frac{dU}{d\varphi} + DU + C_1 \frac{dV}{d\varphi} \\ & \qquad \qquad \qquad + D_1 V + A_2 \frac{d^3 W}{d\varphi^3} + B_2 \frac{d^2 W}{d\varphi^2} + C_2 \frac{dW}{d\varphi} + D_2 W = 0, \\ & B' \frac{d^2 U}{d\varphi^2} + C' \frac{dU}{d\varphi} + D' V + B'_1 \frac{d^2 V}{d\varphi^2} + C'_1 \frac{dV}{d\varphi} \\ & \qquad \qquad \qquad + D'_1 V + B'_2 \frac{d^2 W}{d\varphi^2} + C'_2 \frac{dW}{d\varphi} + D'_2 W = 0, \\ & A'' \frac{d^3 U}{d\varphi^3} + B'' \frac{d^2 U}{d\varphi^2} + C'' \frac{dU}{d\varphi} + D'' U + B''_1 \frac{d^2 V}{d\varphi^2} + C''_1 \frac{dV}{d\varphi} \\ & \qquad \qquad \qquad + D''_1 V + M_2 \frac{d^4 W}{d\varphi^4} + A''_2 \frac{d^3 W}{d\varphi^3} + B''_2 \frac{d^2 W}{d\varphi^2} + C''_2 \frac{dW}{d\varphi} + D''_2 W = 0. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients s'obtiennent sans difficulté, ayant pour facteur une des quantités  $C_\alpha$ ,  $C_{\alpha,1}$ ,  $C_{\alpha,2}$ . La valeur de  $v_3''$ , qui y entre, est

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & v_3'' = \frac{n_1}{r} + \frac{n_2}{n} - D p^2 e^{i(\alpha\psi + \rho t)} \\ & \times \left[ \frac{C_\alpha U}{r'} - E \left( \frac{C_\alpha}{r} \frac{dU}{d\varphi} + \frac{C_{\alpha,2}}{r} W - \alpha^2 C_{\alpha,1} V - C_\alpha \frac{\tan \varphi}{n} U + \frac{C_{\alpha,2}}{n} W \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

En éliminant V et ses dérivées entre (4), on trouve

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & \alpha_{00} \frac{d^4 U}{d\varphi^4} + \beta_{00} \frac{d^3 U}{d\varphi^3} + \gamma_{00} \frac{d^2 U}{d\varphi^2} + \delta_{00} \frac{dU}{d\varphi} + \varepsilon_{00} U + \alpha_{20} \frac{d^4 W}{d\varphi^4} \\ & \qquad \qquad \qquad + \beta_{20} \frac{d^3 W}{d\varphi^3} + \gamma_{20} \frac{d^2 W}{d\varphi^2} + \delta_{20} \frac{dW}{d\varphi} + \varepsilon_{20} W = 0, \\ & \alpha'_{00} \frac{d^5 U}{d\varphi^5} + \beta'_{00} \frac{d^4 U}{d\varphi^4} + \gamma'_{00} \frac{d^3 U}{d\varphi^3} + \delta'_{00} \frac{d^2 U}{d\varphi^2} + \varepsilon'_{00} \frac{dU}{d\varphi} \\ & \qquad \qquad \qquad + \zeta'_{00} U + \alpha'_{20} \frac{d^5 W}{d\varphi^5} + \beta'_{20} \frac{d^4 W}{d\varphi^4} \\ & \qquad \qquad \qquad + \gamma'_{20} \frac{d^3 W}{d\varphi^3} + \delta'_{20} \frac{d^2 W}{d\varphi^2} + \varepsilon'_{20} \frac{dW}{d\varphi} + \zeta'_{20} W = 0. \end{aligned} \right.$$

En posant

$$\alpha_{00} \frac{d^4 U}{d\varphi^4} + \beta_{00} \frac{d^3 U}{d\varphi^3} + \gamma_{00} \frac{d^2 U}{d\varphi^2} + \delta_{00} \frac{dU}{d\varphi} + \varepsilon_{00} U = P_{40}(U),$$

$$\alpha'_{00} \frac{d^5 U}{d\varphi^5} + \beta'_{00} \frac{d^4 U}{d\varphi^4} + \dots + \zeta'_{00} U = P'_{50}(U),$$

et de même pour W, et éliminant U entre (6), on a finalement l'équation

$$(7) \quad \theta = 0 = \begin{vmatrix} \alpha_{05} & \beta_{05} & \gamma_{05} & \delta_{05} & \varepsilon_{05} & \zeta_{05} & \eta_{05} & \theta_{05} & i_{05} & k_{05} & P_{95}(W) \\ 0 & \alpha_{04} & \beta_{04} & \gamma_{04} & \delta_{04} & \varepsilon_{04} & \zeta_{04} & \eta_{04} & \theta_{04} & i_{04} & P_{84}(W) \\ 0 & 0 & \alpha_{03} & \beta_{03} & \gamma_{03} & \delta_{03} & \varepsilon_{03} & \zeta_{03} & \eta_{03} & \theta_{03} & P_{73}(W) \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{02} & \beta_{02} & \gamma_{02} & \delta_{02} & \varepsilon_{02} & \zeta_{02} & \eta_{02} & P_{62}(W) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{01} & \beta_{01} & \gamma_{01} & \delta_{01} & \varepsilon_{01} & \zeta_{01} & P_{51}(W) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{00} & \beta_{00} & \gamma_{00} & \delta_{00} & \varepsilon_{00} & P_{40}(W) \\ \alpha'_{04} & \beta'_{04} & \gamma'_{04} & \delta'_{04} & \varepsilon'_{04} & \zeta'_{04} & \eta'_{04} & \theta'_{04} & i'_{04} & k'_{04} & P'_{94}(W) \\ 0 & \alpha'_{03} & \beta'_{03} & \gamma'_{03} & \delta'_{03} & \varepsilon'_{03} & \zeta'_{03} & \eta'_{03} & \theta'_{03} & i'_{03} & P'_{83}(W) \\ 0 & 0 & \alpha'_{02} & \beta'_{02} & \gamma'_{02} & \delta'_{02} & \varepsilon'_{02} & \zeta'_{02} & \eta'_{02} & \theta'_{02} & P'_{72}(W) \\ 0 & 0 & 0 & \alpha'_{01} & \beta'_{01} & \gamma'_{01} & \delta'_{01} & \varepsilon'_{01} & \zeta'_{01} & \eta'_{01} & P'_{61}(W) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha'_{00} & \beta'_{00} & \gamma'_{00} & \delta'_{00} & \varepsilon'_{00} & \zeta'_{00} & P'_{50}(W) \end{vmatrix},$$

où

$$\alpha_{05} = \alpha_{04} = \alpha_{03} = \alpha_{02} = \alpha_{01} = \alpha_{00},$$

$$\alpha'_{04} = \alpha'_{03} = \alpha'_{02} = \alpha'_{01} = \alpha'_{00}.$$

Chaque terme du rectangle formé par les dix colonnes verticales et les six premières lignes horizontales s'obtient en prenant la dérivée par rapport à  $\varphi$  du terme au-dessous et en y ajoutant le terme qui suit de la même ligne au-dessous. Par exemple,  $\beta_{05} = \frac{d\alpha_{04}}{d\varphi} + \beta_{04}$ ,  $\beta_{04} = \frac{d\alpha_{03}}{d\varphi} + \beta_{03}$  et ainsi de suite. La même loi s'applique à la formation des termes contenus dans le rectangle formé par les dix premières colonnes et les cinq dernières lignes.

On remarquera donc qu'en particulier

$$k_{05} = \frac{di_{04}}{d\varphi}, \quad i_{04} = \frac{d\theta_{03}}{d\varphi}, \quad \dots, \quad \zeta_{01} = \frac{d\varepsilon_{00}}{d\varphi}, \quad k'_{04} = \frac{di'_{03}}{d\varphi}, \quad \dots, \quad \eta'_{01} = \frac{d\zeta'_{00}}{d\varphi}.$$

L'équation (7) est linéaire du neuvième ordre à coefficients variables.

Si l'on éliminait  $W$  entre (6), on arriverait à une équation semblable à  $\Theta = 0$ , avec la différence que le premier chiffre 0 des indices des coefficients serait remplacé par 2, et les  $P_{i,j}(W)$  et  $P'_{i,j-1}(W)$  seraient remplacés par  $P_{i,j}(U)$  et  $P_{i,j-1}(U)$ .

Quant à  $V$ , il s'obtiendra par la première des (4), qui, après la détermination de  $U$  et  $W$ , prend la forme

$$(8) \quad C_1 \frac{dV}{d\varphi} + D.V = f(\varphi),$$

qu'on sait intégrer.

*Conditions aux limites.* — Les cloches ont un bord unique qui appartient à la famille  $\rho$ . Les équations (46, IV) sont donc applicables. Quand le bord est libre, les quatre équations de condition prendront la forme

$$\left. \begin{aligned} & C_{\alpha} A_1 \frac{d^2 U}{d\rho^2} + C_{\alpha} A_2 \frac{dU}{d\varphi} + C_{\alpha} A_3 U + C_{\alpha,1} \alpha^2 A_4 V + C_{\alpha,2} A_5 \frac{d^2 W}{d\varphi^2} + C_{\alpha,2} A_6 \frac{dW}{d\varphi} + C_{\alpha,2} A_7 W = 0, \\ & C_{\alpha} B_1 \frac{dU}{d\varphi} + C_{\alpha} B_2 U + C_{\alpha,1} B_3 \frac{dV}{d\varphi} + C_{\alpha,1} B_4 V + C_{\alpha,2} B_5 \frac{dW}{d\varphi} + C_{\alpha,2} B_6 W = 0, \\ & C_{\alpha} C_1 \frac{dU}{d\varphi} + C_{\alpha} C_2 U + C_{\alpha,1} C_3 \frac{dV}{d\varphi} + C_{\alpha,1} C_4 V + C_{\alpha,2} C_5 \frac{d^2 W}{d\varphi^2} + C_{\alpha,2} C_6 \frac{dW}{d\varphi} + C_{\alpha,2} C_7 W = 0, \\ & C_{\alpha,2} D_1 \frac{d^2 W}{d\varphi^2} + C_{\alpha,2} D_2 \frac{dW}{d\varphi} + C_{\alpha,2} D_3 W + C_{\alpha} D_4 \frac{dU}{d\varphi} + C_{\alpha} D_5 U + C_{\alpha,1} D_6 V = 0. \end{aligned} \right\}$$

Les trois premières équations détermineront les rapports  $\frac{C_{\alpha}}{C_{\alpha,2}}, \frac{C_{\alpha,1}}{C_{\alpha,2}}$ ,

si

$$\Theta_1 = \begin{vmatrix} A_1 \frac{d^2 U}{d\varphi} + A_2 \frac{dU}{d\varphi} + A_3 U & \alpha^2 A_4 V & A_5 \frac{d^2 W}{d\varphi^2} + A_6 \frac{dW}{d\varphi} + A_7 W \\ B_1 \frac{dU}{d\varphi} + B_2 U & B_3 \frac{dV}{d\varphi} + B_4 V & B_5 \frac{dW}{d\varphi} + B_6 W \\ C_1 \frac{dU}{d\varphi} + C_2 U & C_3 \frac{dV}{d\varphi} + C_4 V & C_5 \frac{d^2 W}{d\varphi^2} + C_6 \frac{dW}{d\varphi} + C_7 W \end{vmatrix} = 0,$$

pour  $\varphi = \varphi_0$ . Cette équation  $\Theta_1 = 0$  déterminera  $p^2$ . Il nous reste encore une condition, savoir la quatrième (9). Comme l'équation (7) est du



neuvième ordre, nous aurons besoin de huit conditions pour déterminer à une près ses constantes. Une des conditions est celle qui reste des conditions aux limites (9). On trouvera une seconde, en exprimant que l'intégrale générale de (7) ne devient pas infinie au pôle. Les six autres conditions s'obtiendront ainsi dans les deux cas suivants :

1° *Cloche libre.* — Dans ce cas, on peut exprimer que le mouvement du centre de gravité et les rotations de la cloche autour de ce centre sont nulles (car on tiendrait compte à part de ces mouvements d'ensemble par les équations relatives aux corps rigides); alors l'impulsion totale sera nulle et le mouvement d'ensemble aussi et l'on écrira le théorème des quantités de mouvement et de moments (en les égalant à zéro).

2° *Cloche immobilisée par le sommet.* — On écrira que, pour le pôle ( $\varphi = 0$ ), les trois déplacements et par conséquent  $u$ ,  $v$ ,  $w$  sont nulles; de même, que le plan tangent en ce point ( $\varphi = 0$ ) ne bouge pas; enfin qu'une ligne particulière assignée de la surface moyenne, qui passe par le pôle, est immobile.

Le son fondamental s'obtient toujours quand les lignes nodales méridiennes sont au nombre de deux et rectangulaires entre elles; il correspond donc à  $\alpha = 2$ .

Si l'on choisit comme deuxième méridien origine ( $\psi = 0$ ) le demi-méridien qui est pincé ou frappé par le battant ou l'archet, on voit que la cloche rend le son fondamental quand les lignes ventrales sont les demi-méridiens

$$\psi = 0, \quad \psi = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \pi \quad \text{et} \quad \psi = \frac{3\pi}{2}.$$

Par contre, les demi-méridiens

$$\psi = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4}, \quad \frac{7\pi}{4}$$

sont les lignes nodales.

Le premier harmonique s'obtient pour  $\alpha = 3$ , et alors les lignes

ventrales correspondent à

$$\psi = 0, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \pi, \quad \frac{4\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{3},$$

ce qui a été confirmé par l'expérience.

Les expériences ne nous ont pas donné des lignes nodales parallèles, mais rien n'assure qu'elles ne puissent pas exister.

## II. — Battements.

On remarquera que  $p^2$  est toujours multiplié par  $\frac{D}{\mu}$ , tandis que les autres termes ne contiennent pas  $D$ , ni  $\mu$  explicitement;  $p$  sera donc proportionnel à  $\sqrt{\frac{\mu}{D}}$ ; d'où la loi suivante :

*La hauteur du son est proportionnelle à sa vitesse de propagation dans la matière de la cloche.*

On peut démontrer cette loi pour tous les corps homogènes et isotropes de la nature, très facilement.

Supposons maintenant que par le coup d'archet ou du battant la cloche subisse un élargissement dans une partie; elle subira du même coup un rétrécissement dans la direction perpendiculaire à la première, et la section normale, qui était un cercle, devient une ellipse temporaire. En réalité, une cloche n'est jamais de révolution; le rayon, qui était constant dans un même parallèle, dépend de  $\psi$  et de deux axes de l'ellipse, par conséquent, la hauteur du son en dépendra aussi. A cause de la petitesse de la déformation, on pourra traiter les cloches comme étant de révolution. Et, comme on l'a vu (Chap. II), la résistance à la flexion et la torsion est très petite; il faut donc nous attendre à des flexions et des torsions de la cloche *finies* par le coup d'archet. A cause de l'ellipticité de la section normale, il est probable qu'il y ait des sons à deux périodes très voisines, rendus par les deux molécules de la cloche.

Transportons-nous au domaine de l'expérience et cherchons ce qu'elle

nous montre. Si l'on tapisse de sable la surface intérieure d'une cloche, dont l'axe est horizontal et la tige du verre bien encastrée de façon à ne pas pouvoir se mouvoir, on voit le sable sauter, et, si l'on frappe la cloche sur le demi-méridien diamétralement opposé, en bas se trouve la ligne ventrale  $\psi = \pi$ . *On voit que cette ligne, au lieu de rester immobile, se déplace lentement et exécute une série d'oscillations autour de sa position d'équilibre.* Chaque point de cette ligne paraît tourner autour de l'axe de la cloche; ces oscillations suivent les battements de la cloche. Si l'on tourne la cloche de façon à faire coïncider tous ses méridiens avec le plan vertical, et si l'on répète la même expérience, on rencontre deux plans méridiens de la cloche perpendiculaires entre eux pour lesquels la ligne ventrale n'oscille pas. Alors les battements sont très amoindris. Il est clair que ces deux méridiens sont les sections de deux plans de symétrie de la cloche et leurs intersections avec un autre plan perpendiculaire à l'axe de la cloche seront les deux axes de la section elliptique. Si donc on frappe sur l'un des deux plans de symétrie, tout est symétrique de part et d'autre du point frappé et les sons rendus sont simples.

En résumé, à côté des vibrations infiniment petites dans les cloches, il y a des vibrations à longue période, et les battements proviennent de l'ellipticité.

Ces considérations m'ont amené naturellement à penser que tous les autres corps minces, étant en vibration, présentent des battements. En effet, en expérimentant sur des plaques planes et d'épaisseur constante, j'ai reconnu non seulement que les battements existent, mais encore que dans la plaque circulaire les lignes nodales subissent un déplacement circulaire, autour du centre de la plaque, quand l'intensité du son est grande. Par exemple, une plaque circulaire métallique me donnait des sons durant soixante-quatorze secondes et plus avec des battements, mais le déplacement circulaire des lignes droites nodales ne se présentait que pendant les trois premières secondes. On conçoit sans peine que ce mouvement *périphérique* de la plaque est difficile à se produire, et il faut pour cela que l'énergie ait une valeur notable. La seule déformation facile de la plaque est la flexion, qui donne des courbures à ses feuilletts; mais la plaque ne se courbe pas de la même façon partout, de manière qu'il y ait bien une symé-

trie complète. En effet, la partie qui subit le coup d'archet est plus recourbée et l'amplitude de l'oscillation à longue période est plus grande que dans toute autre région.

Les plaques m'ont donné un autre phénomène. En rapprochant mon oreille aussi près que possible de la plaque vibrante, les battements cessaient d'avoir lieu et on entendait un son plein. En examinant de près ce phénomène, j'ai reconnu qu'il se manifeste seulement quand les sons rendus sont faibles et peu perceptibles par l'oreille dès qu'il est éloigné de la plaque de quelques décimètres. La cause en est, peut-être, à ce que les vibrations à longue période n'ayant plus lieu, la vibration est devenue simple.