

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. C. KLUYVER

**L'évaluation des intégrales et des fonctions elliptiques au moyen
de la transformation du second degré**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 11 (1894), p. 37-73

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1894_3_11__37_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ÉVALUATION DES INTÉGRALES ET DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

AU MOYEN

DE LA TRANSFORMATION DU SECOND DEGRÉ,

PAR M. J.-C. KLUYVER.



A côté des méthodes usuelles d'évaluation fondées sur le développement en séries, il en existe une autre moins élégante mais plus élémentaire, simple et utile application de la transformation du second degré.

Dans une foule de cas, cités et exposés dans les Traités, une semblable transformation donne lieu à des calculs remarquablement rapides. Toutefois, les procédés et les formules sont toujours adaptés aux notations anciennes de Legendre et de Jacobi, de sorte qu'il y a quelque intérêt à étudier les changements qu'il faut y porter quand on fait usage des notations de M. Weierstrass. C'est ce qu'on se propose dans les pages qui suivent.

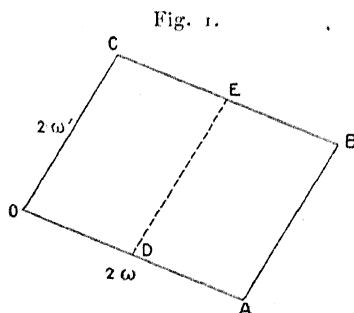
Nous considérons donc la fonction $p(u; \omega, \omega'; e_1, e_2, e_3)$, aux périodes $2\omega, 2\omega'$, aux racines e_1, e_2, e_3 , l'inversion de l'intégrale

$$u = \int_{pu}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{4(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)}} = \int_{pu}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2p - g_3}},$$

ensuite les fonctions ζu et σu qui remplacent les anciennes $E(u)$ et $\Pi(u, a)$. Quand ces fonctions sont introduites dans le calcul numérique, il est tout d'abord indispensable qu'on sache trouver les périodes $2\omega, 2\omega'$ et les quantités $\zeta\omega = \eta, \zeta\omega' = \eta'$, les racines étant données. En second lieu, il faut savoir calculer l'argument u , connaissant pu , et, inversement, savoir trouver $pu, \zeta u, \sigma u$, quand on se donne l'argument.

On va reconnaître que la transformation offre tous les moyens, et l'on s'y attend, pour effectuer ces calculs d'une manière facile et sûre, et avec une approximation voulue. Avant tout, il convient de rappeler succinctement en quoi consiste la transformation du second degré ⁽¹⁾. Or on sait qu'elle exige la solution du problème suivant : Si l'on considère une fonction elliptique F , on se propose de construire une fonction nouvelle F' qui a une période de commun avec F , tandis que l'autre est le double de la seconde période de F . Nous allons donc envisager ce problème pour la fonction $p(u; \omega, \omega'; e_1, e_2, e_3)$, dans la supposition qu'on veut multiplier par 2 la période $2\omega'$. Les données du problème seront les racines e_1, e_2, e_3 ainsi que ω et ω' ; les inconnues seront les racines e'_1, e'_2, e'_3 de la fonction nouvelle $p_{(1)}(u; \omega, 2\omega'; e'_1, e'_2, e'_3)$.

Soit $OABC$ (*fig. 1*) le parallélogramme des périodes primitives de $p u$, aux côtés $OA = 2\omega$, $OC = 2\omega'$; si l'on joint les milieux D et E



de OA et de BC , le parallélogramme $ODEC$ aura évidemment pour côtés les périodes primitives ω et $2\omega'$ de la fonction $p_{(1)} 2u$. En même temps $p_{(1)} 2u$ sera doublement périodique dans le parallélogramme $OABC$, qui renferme les deux pôles doubles $O(u = 0)$ et $D(u = \omega)$; d'après un théorème connu $p_{(1)} 2u$ peut donc être exprimé rationnellement par $p u$ et sa dérivée $p' u$. Or la fonction $p_{(1)} 2u$ étant paire et n'ayant que des pôles doubles, il est clair qu'on pourra poser

$$p_{(1)} 2u = A p u + B p(u + \omega) + C.$$

⁽¹⁾ TANNERY et MOLK, *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques*, p. 209.

Les coefficients A et B se déterminent en attribuant à u successivement les valeurs 0 et ω , ce qui donne $A = B = \frac{1}{4}$. Les trois demi-périodes de $p_{(1)}$ seront les quantités $\omega, \omega + 2\omega', 2\omega'$; en posant

$$p_{(1)}\omega = e'_1, \quad p_{(1)}(\omega + 2\omega') = e'_2, \quad p_{(1)}2\omega' = e'_3,$$

les substitutions successives $u = \frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2} + \omega', \omega'$ donnent

$$\begin{aligned} e'_1 &= \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} + C, \\ e'_2 &= \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} + C, \\ e'_3 &= \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}e_2 + C. \end{aligned}$$

En tenant compte de $e'_1 + e'_2 + e'_3 = 0$, on trouve $C = -\frac{1}{4}e_1$, et le problème est entièrement résolu.

Dans la suite, nous écrirons, pour abrégé,

$$\begin{aligned} \sqrt{e_2 - e_3} &= \alpha_0, & \sqrt{e_1 - e_3} &= \beta_0, & \sqrt{e_1 - e_2} &= \gamma_0, \\ \sqrt{e'_2 - e'_3} &= \alpha_1, & \sqrt{e'_1 - e'_3} &= \beta_1, & \sqrt{e'_1 - e'_2} &= \gamma_1, \end{aligned}$$

et les formules de transformation s'écrivent

$$(1) \quad \begin{cases} 4p_{(1)}2u = pu + p(u + \omega) - e_1, \\ 4e'_1 = e_1 + 2\gamma_1^2, & \alpha_1 = \frac{1}{2}(\beta_0 - \gamma_0), \\ 4e'_2 = e_1 - 2\gamma_1^2, & \beta_1 = \frac{1}{2}(\beta_0 + \gamma_0), \\ 4e'_3 = -2e_1, & \gamma_1 = \sqrt{\beta_0\gamma_0}. \end{cases}$$

A ces formules, qui seront d'un usage continuel, on pourrait encore ajouter la relation suivante, facile à vérifier,

$$pu = p_{(1)}u + p_{(1)}(u + 2\omega') - e'_3.$$

Remarquons qu'on ne saurait se prononcer sur les signes des radicaux qui figurent dans ces équations, ni sur leur réalité; pour cela, il faudrait connaître à fond la nature des quantités $e_1, e_2, e_3, \omega, \omega'$.

Dans la suite, il est nécessaire de ne pas perdre de vue la division des fonctions elliptiques en deux classes, selon le signe du discriminant. Par leurs propriétés, les fonctions à discriminant positif se rapprochent plus que les autres des fonctions anciennes; c'est un motif pour les considérer en premier lieu.

Discriminants positifs.

Les racines e_1, e_2, e_3 , rangées par ordre de grandeur, sont réelles, la demi-période ω est réelle et positive, l'autre ω' est purement imaginaire, $\frac{\omega'}{i}$ est positif, le parallélogramme des périodes est un rectangle. On a

$$p\omega = e_1, \quad p(\omega + \omega') = e_2, \quad p\omega' = e_3.$$

La fonction transformée $p_{(1)}$ est de la même classe, e'_1, e'_2, e'_3 sont réels et en ordre décroissant. Les formules (1) ont lieu sans changement aucun, tous les radicaux α, β, γ sont réels et doivent être pris positivement.

La fonction pu peut dégénérer en fonction circulaire ou bien exponentielle. La première circonstance a lieu quand e_2 tend vers e_3 . Dans le cas limite où e_2 et e_3 coïncident, on a

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \gamma_0, & \alpha_0^2 &= 0, \\ u &= \frac{1}{\beta_0} \operatorname{arc} \cot \frac{\sqrt{pu - e_1}}{\beta_0}, \\ pu &= e_1 + \beta_0^2 \cot^2(u\beta_0). \end{aligned}$$

Il en suit $\omega = \frac{\pi}{2\beta_0}$; quant à ω' , cette demi-période s'est accrue en dehors de toute limite. Comme l'on sait, l'application répétée de la transformation permet de ramener l'étude de la fonction pu à celle de sa dégénération (1) circulaire. En effet, par l'application des formules (1), on remplace en quelque sorte la fonction pu par la fonction $p_{(1)}u$, dont la période imaginaire est deux fois plus grande; à son tour $p_{(1)}u$ subit la transformation et est remplacé par $p_{(2)}u$ à la période $8\omega'$, et ainsi de suite. Il suffit généralement d'un petit nombre de transformations successives pour arriver à une fonction $p_{(n)}u$, dont la période $2^{n+1}\omega'$ est d'une si grande valeur absolue par rapport à celle de la période réelle, restée égale à 2ω , que cette fonction $p_{(n)}u$ peut être identifiée avec sa dégénération circulaire, qu'on appellera

(1) Nous prenons le terme *dégénération* au sens coneret de *fonction dégénérée*.

pour abrégier, la *cotangentielle* de pu . De cette manière on peut, dans le calcul numérique, substituer à pu une série de fonctions circulaires.

Semblablement, on pourrait faire usage de la dégénération exponentielle qu'on obtient en faisant tendre e_2 vers e_1 . Quand les deux racines vont coïncider, on aura

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \alpha_0, & \gamma_0^2 &= 0, \\ u &= \frac{1}{2\beta_0} \log \frac{\sqrt{pu - e_3} + \beta_0}{\sqrt{pu - e_3} - \beta_0}, \\ pu &= e_3 + \beta_0^2 \left(\frac{e^{u\beta_0} + e^{-u\beta_0}}{e^{u\beta_0} - e^{-u\beta_0}} \right)^2.\end{aligned}$$

Maintenant c'est la période 2ω qui est infinie, tandis qu'on a $\frac{\omega'}{i} = \frac{\pi}{2\beta_0}$. Si l'on emploie des formules de transformation analogues qui expriment la relation entre $p(u; \omega, \omega')$ et $p_{(1)}(u; 2\omega, \omega')$, il est clair qu'on pourrait substituer successivement à pu des fonctions dont les périodes réelles iraient toujours en croissant, de sorte que, finalement, pu serait exprimé par des fonctions $p_{(n)}$ ne différant plus sensiblement des exponentielles.

Il n'y a pas, d'ailleurs, une différence essentielle entre les deux modes de dégénération; on reconnaît, à l'aide de l'homogénéité

$$p(u; \omega, \omega'; e_1, e_2, e_3) = -\bar{p}\left(\frac{u}{i}; \frac{\omega'}{i}, \omega i; -e_3, -e_2, -e_1\right),$$

que la dégénération exponentielle de $-\bar{p}u$ est identique à la dégénération circulaire de pu . Si l'on se demande à quelle dégénération on arrive après le plus petit nombre de transformations, il est évident que c'est la cotangentielle dans le cas $e_1 - e_2 > e_2 - e_3$, $\omega < \frac{\omega'}{i}$, l'exponentielle dans le cas contraire $e_1 - e_2 < e_2 - e_3$, $\omega > \frac{\omega'}{i}$.

Calcul des demi-périodes. — Supposons d'abord ω plus petit que $\frac{\omega'}{i}$, ou tout au plus égal à $\frac{\omega'}{i}$, la fonction $p_{(1)}u$ et mieux encore $p_{(2)}u$ montrera déjà une ressemblance plus ou moins marquée avec la cotan-

gentielle, et, approximativement, on pourrait prendre cette ressemblance pour l'identité.

Cela revient à admettre qu'on a

$$4p_{(1)} 2u = pu + p(u + \omega) - e_1 = \frac{2\pi^2}{3\omega^2} + \frac{\pi^2}{\omega^2} \cot^2\left(\frac{\pi u}{\omega}\right),$$

ou bien

$$\begin{aligned} 16p_{(2)} 4u &= pu + p\left(u + \frac{\omega}{2}\right) + p(u + \omega) + p\left(u + \frac{3\omega}{2}\right) - 2e'_1 - 4e'_2 \\ &= \frac{8\pi^2}{3\omega^2} + \frac{4\pi^2}{\omega^2} \cot^2\left(\frac{2\pi u}{\omega}\right). \end{aligned}$$

Développons dans ces deux équations les deux membres, suivant les puissances ascendantes de u , c'est-à-dire substituons

$$\begin{aligned} pu &= \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \dots, \\ p\left(u + \frac{\omega}{2}\right) &= p\frac{\omega}{2} + p'\frac{\omega}{2} u + \frac{1}{2} p''\frac{\omega}{2} u^2 + \dots, \\ p(u + \omega) &= e_1 + \frac{1}{2} p''\omega u^2 + \dots, \\ p\left(u + \frac{3\omega}{2}\right) &= p\frac{3\omega}{2} + p'\frac{3\omega}{2} u + \frac{1}{2} p''\frac{3\omega}{2} u^2 + \dots, \\ \cot\left(\frac{\pi u}{\omega}\right) &= \frac{\omega}{\pi u} - \frac{1}{3} \frac{\pi u}{\omega} + \dots, \\ \cot\left(\frac{2\pi u}{\omega}\right) &= \frac{\omega}{2\pi u} - \frac{1}{3} \frac{2\pi u}{\omega} + \dots \end{aligned}$$

On trouvera, en égalant les coefficients des termes en u^2 dans la première équation,

$$(2) \quad \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^4 = -3g_2 + 45e_1^2;$$

dans la seconde,

$$(33) \quad \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^4 = -\frac{23}{16} g_2 + \frac{393}{16} e_1^2 + \frac{1}{4} e_1 20\gamma_0.$$

Le degré d'approximation de ces formules suffit déjà dans un grand nombre de cas. Prenons, par exemple, les intégrales

$$u = \int_{pu}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{4p^2 - 1}}, \quad u = \int_{pu}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{4p^2 - 60p - 88}},$$

pour lesquelles on a

$$\omega = \frac{\omega'}{i} = 1,854075, \quad \omega = \frac{\omega'}{i\sqrt{3}} = 0,6071627.$$

Les formules donnent

$$\left. \begin{array}{l} (2) \quad \omega = 1,854 \\ (3) \quad \omega = 1,854075 \end{array} \right\} \omega = 0,6071627.$$

Il va de soi que ces formules ne sont plus applicables quand on a $\omega > \frac{\omega'}{i}$, mais évidemment le simple changement de ω, e_1, e_2, e_3 en $\frac{\omega'}{i}, -e_3, -e_2, -e_1$ suffit pour en faire usage pour le calcul de $\frac{\omega'}{i}$.

Toutefois les résultats ainsi obtenus sont toujours un peu incertains. Par l'emploi de l'algorithme, indiqué par Gauss, il est aisé d'obtenir autant d'approximation qu'on pourra le désirer. D'après cette méthode, on calcule successivement pour toutes les fonctions transformées $p_{(1)}, p_{(2)}, p_{(3)}, \dots$, les racines e_1, e_2, e_3 ou plutôt leurs différences. Les formules (1) indiquent le chemin à suivre. Elles montrent qu'on aura

$$\begin{array}{ll} \beta_1 = \frac{1}{2}(\beta_0 + \gamma_0), & \gamma_1 = \sqrt{\beta_0 \gamma_0}, \\ \beta_2 = \frac{1}{2}(\beta_1 + \gamma_1), & \gamma_2 = \sqrt{\beta_1 \gamma_1}, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \end{array}$$

C'est en prenant continuellement la moyenne arithmétique β_k et la moyenne géométrique γ_k , qu'on parvient à connaître les racines des fonctions transformées. Si l'on procède ainsi, la différence $\beta_k - \gamma_k$ diminuant de plus en plus, bientôt ne sera plus sensible, et $\beta_n - \gamma_n$ pourra être négligé.

Cela comporte qu'on admette $\alpha_n^2 = 0$ et qu'on identifie $p_n u$ avec la cotangentielle. Alors les quantités β_n et γ_n ont acquis une valeur limite qu'on appelle *la moyenne arithmético-géométrique* de β_0 et γ_0 , et l'on aura

$$\omega = \frac{\pi}{2\beta_n} = \frac{\pi}{2\gamma_n}.$$

De cette manière, l'approximation peut être poussée aussi loin qu'on le désire.

Pareillement, on parvient à calculer $\frac{\omega'}{i}$, pourvu qu'on considère maintenant la fonction $p\left(\frac{u}{i}; \frac{\omega'}{i}, \omega i; -e_3, -e_2, -e_1\right)$. Les quantités α, β, γ doivent être remplacées par

$$C = \sqrt{e_1 - e_2}, \quad B = \sqrt{e_1 - e_3}, \quad A = \sqrt{e_2 - e_3},$$

et les relations (1) par

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{2} (A_0 + B_0), & A_1 &= \sqrt{A_0 B_0}, \\ B_2 &= \frac{1}{2} (A_1 + B_1), & A_2 &= \sqrt{A_1 B_1}, \\ &\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Si l'on arrive à la cotangentielle après n transformations successives, c'est-à-dire si la différence $B_n - A_n$ est négligeable, on doit admettre $C_n^2 = 0$, et il s'ensuit

$$\frac{\omega'}{i} = \frac{\pi}{2B_n} = \frac{\pi}{2A_n}.$$

Évidemment la recherche des quantités A_k, B_k, C_k n'est autre chose que le calcul des quantités $\alpha_{-k}, \beta_{-k}, \gamma_{-k}$ à indice négatif. Sans peine, on établit les relations

$$\frac{\alpha_{-k}}{A_k} = \frac{\beta_{-k}}{B_k} = \frac{\gamma_{-k}}{C_k} = 2^k.$$

Inutile de rappeler que, dans le cas $\omega < \frac{\omega'}{i}$, c'est le calcul de ω , et que, dans le cas contraire, $\omega > \frac{\omega'}{i}$, c'est celui de ω' qui va le plus vite. Ordinairement, même dans le cas le moins favorable $\omega = \frac{\omega'}{i}$, il suffit de faire trois transformations successives. C'est ce que montrent les exemples suivants :

$$\begin{aligned} \omega &= \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - p}}, & \omega &= \int_{1+2\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - 60p - 88}}, \\ \beta_0 &= 1, & \gamma_0 &= 0,7071068, & \beta_0 &= 2,632148, & \gamma_0 &= 2,542460, \\ \beta_1 &= 0,8535534, & \gamma_1 &= 0,8408963, & \beta_1 &= 2,587304, & \gamma_1 &= 2,586916, \\ \beta_2 &= 0,8472249, & \gamma_2 &= 0,8472014, & \beta_2 &= 2,587110 = \gamma_2, \\ \beta_3 &= 0,8472132 = \gamma_3, & & & & & \\ \omega &= \frac{\pi}{2\beta_3} = 1,854074, & & & \omega &= \frac{\pi}{2\beta_2} = 0,6071627. \end{aligned}$$

Calcul de la quantité $q = e^{-\frac{\omega'\pi}{\omega i}}$. — En général, on a besoin de connaître en même temps les deux périodes, et c'est une circonstance fâcheuse qu'à cet effet il faudrait calculer deux systèmes de quantités auxiliaires, à savoir les quantités β , γ et aussi les A, B. Legendre a montré qu'il est possible d'éviter ce double calcul, et qu'il suffit de connaître ω et les quantités β , γ pour en déduire la valeur de ω' . En effet, Legendre a établi une relation entre le module k et la quantité $q = e^{-\frac{\omega'\pi}{\omega i}}$. Nous allons conformer ses formules aux notations actuelles.

Soit $\omega < \frac{\omega'}{i}$, supposons que $\beta_n - \gamma_n$ soit négligeable ainsi que α_n^2 , la fonction $p_{(n)}u$ s'identifie avec la cotangentielle, et nous aurons

$$4e_1^{(n)} + 4\gamma_n^2 \cot^2\left(\frac{u\pi}{\omega}\right) = p_{(n-1)}u + p_{(n-1)}(u + \omega) - e_1^{(n-1)}.$$

La fonction $p_{(n-1)}u$ a la demi-période imaginaire $\Omega' = 2^{n-1}\omega'$; substituons $u = \frac{\Omega'}{2}$; en tenant compte de

$$4e_1^{(n)} = e_1^{(n-1)} + 2\gamma_n^2,$$

et de

$$p_{(n-1)}\frac{\Omega'}{2} + p_{(n-1)}\left(\frac{\Omega'}{2} + \omega\right) = 2e_3^{(n-1)},$$

on trouve

$$\cot^2\left(\frac{2^{n-2}\omega'\pi}{\omega}\right) = -\frac{\beta_{n-1}^2 + \gamma_n^2}{2\gamma_n^2} = -\frac{\beta_n}{\gamma_{n-1}}.$$

La quantité $\frac{\omega'}{i}$ étant réelle et positive, on conclut toujours en négligeant α_n^2 [non pas α_n , quantité égale à $\frac{1}{2}(\beta_{n-1} - \gamma_{n-1})$],

$$e^{-\frac{2^{n-1}\omega'\pi}{i\omega}} = q^{2^{n-1}} = \frac{\alpha_n}{4\beta_n},$$

$$q = \sqrt[2^{n-1}]{\frac{\alpha_n}{4\beta_n}}.$$

A vrai dire, cette relation ne subsiste que dans la supposition que α_n^2 est négligeable; on obtient donc, puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^2 = 0$, une expres-

sion de q absolument exacte, en faisant infini le nombre n des transformations successives. Transformons dans ce but l'expression de q , à l'aide des équations suivantes, faciles à vérifier,

$$\frac{\alpha_n}{4} = \frac{1}{\beta_n} \left(\frac{\alpha_{n-1}}{4} \right)^2, \quad \frac{\alpha_n}{4} = \left(\frac{\alpha_1}{4} \right)^{2^{n-1}} \frac{1}{\beta_n \beta_{n-1}^2 \beta_{n-2}^4 \dots \beta_2^{2^{n-2}}},$$

et il viendra

$$q = \frac{\alpha_1}{4} \frac{1}{\beta_2^{\frac{1}{2}} \beta_3^{\frac{1}{4}} \beta_4^{\frac{1}{8}} \dots \beta_n^{\frac{1}{2^{n-2}}}}.$$

Maintenant, faisons n s'accroître indéfiniment, il en résulte la formule dont il s'agissait

$$(4) \quad q = \frac{\beta_0 - \gamma_0}{8} \frac{1}{\beta_2^{\frac{1}{2}} \beta_3^{\frac{1}{4}} \beta_4^{\frac{1}{8}} \dots},$$

où q est exprimé par un produit infini.

C'est par cette équation que la valeur de $\frac{\omega'}{i}$ s'obtient pourvu qu'on connaisse celles de ω et des quantités β , γ . L'erreur à craindre dépendra, pour la plus grande part, de celle commise dans la détermination de $\beta_0 - \gamma_0$. Ordinairement, il suffit de prendre

$$q = \frac{\beta_0 - \gamma_0}{8} \frac{1}{\beta_2^{\frac{1}{2}} \beta_3^{\frac{1}{4}}}.$$

Naturellement, dans le cas $\omega > \frac{\omega'}{i}$, il y a avantage à chercher, en premier lieu, les quantités Λ , B et la demi-période ω' , et à calculer, après, la demi-période ω , au moyen de la relation analogue

$$(5) \quad q' = e^{-\frac{i\omega\pi}{\omega'}} = \frac{B_0 - \Lambda_0}{8} \frac{1}{B_2^{\frac{1}{2}} B_3^{\frac{1}{4}} B_4^{\frac{1}{8}} \dots}.$$

Les quantités β , γ exprimées par q . — La formule que nous venons d'établir se prête à éclaircir la véritable nature des quantités β , γ et de mettre au jour leurs rapports avec les demi-périodes. Considérons une fonction pu qui dégénère après cinq transformations successives.

On aura, en remplaçant $\beta_0 - \gamma_0$ par la quantité égale $2(\beta_0 - \beta_1)$,

$$\beta_0 - \beta_1 = 4q \beta_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \beta_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \beta_{\frac{5}{2}}^{\frac{1}{2}} \beta_{\frac{7}{2}}^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on observe que, pour les fonctions intermédiaires $p_{(1)}$, $p_{(2)}$, $p_{(3)}$, $p_{(4)}$, la quantité analogue à q est devenue q^2 , q^4 , q^8 , q^{16} , on aura de même

$$\beta_1 - \beta_2 = 4q^2 \beta_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \beta_{\frac{5}{2}}^{\frac{1}{2}} \beta_{\frac{7}{2}}^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta_2 - \beta_3 = 4q^4 \beta_{\frac{5}{2}}^{\frac{1}{2}} \beta_{\frac{7}{2}}^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta_3 - \beta_4 = 4q^8 \beta_{\frac{7}{2}}^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta_4 - \beta_5 = 4q^{16} \beta_{\frac{7}{2}}^{\frac{1}{2}}.$$

Dans ces équations, on peut regarder $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ comme les inconnues, dont les valeurs exprimées en β_5 et q se déterminent facilement, si l'on observe qu'il faut négliger toutes les puissances de q dont l'exposant surpasse 31 , puisqu'on a

$$\beta_5 - \beta_6 = 4q^{32} \beta_6 = 0;$$

on trouve

$$(6) \left\{ \begin{array}{lll} \sqrt{\frac{\beta_4}{\beta_5}} = 1 + 2q^{16}, & \sqrt{\frac{\gamma_4}{\gamma_5}} = 1 - 2q^{16}, & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_4}{\beta_5}} = q^4, \\ \sqrt{\frac{\beta_3}{\beta_5}} = 1 + 2q^8, & \sqrt{\frac{\gamma_3}{\gamma_5}} = 1 - 2q^8, & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_3}{\beta_5}} = q^2 + q^{18}, \\ \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_5}} = 1 + 2q^4 + 2q^{16}, & \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_5}} = 1 - 2q^4 + 2q^{16}, & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\beta_5}} = q + q^9 + q^{25}, \\ \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_5}} = 1 + 2q^2 + 2q^8 + 2q^{18}, & \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_5}} = 1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18}, & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_5}} = q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{9}{2}} + q^{\frac{25}{2}} + q^{\frac{49}{2}}, \\ \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_5}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{25}, & \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_5}} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{25}, & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_5}} = q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + q^{\frac{49}{4}} + q^{\frac{121}{4}}. \end{array} \right.$$

Des expressions des quantités β , on déduit immédiatement les expressions ci-jointes des quantités α, γ .

Il suffit de substituer $\beta_5 = \frac{\pi}{2\omega}$ dans les trois dernières équations pour reconnaître les premiers termes des séries de Jacobi. Le changement de $\omega, q, \beta_0, \gamma_0, \alpha_0$ en $\frac{\omega'}{i}, q', B_0, A_0, C_0$ donne encore trois équations

tions analogues. C'est à l'aide de ces six équations

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \sqrt[4]{e_2 - e_3} = 2 \left(q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + q^{\frac{49}{4}} + q^{\frac{121}{4}} \right), \\ \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_3} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25}, \\ \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_2} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - 2q^{25}, \\ \sqrt{\frac{2\omega'}{i\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_2} = 2 \left(q'^{\frac{1}{4}} + q'^{\frac{9}{4}} + q'^{\frac{25}{4}} + q'^{\frac{49}{4}} + q'^{\frac{121}{4}} \right), \\ \sqrt{\frac{2\omega'}{i\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_3} = 1 + 2q' + 2q'^4 + 2q'^9 + 2q'^{16} + 2q'^{25}, \\ \sqrt{\frac{2\omega'}{i\pi}} \sqrt[4]{e_2 - e_3} = 1 - 2q' + 2q'^4 - 2q'^9 + 2q'^{16} - 2q'^{25}, \end{array} \right.$$

qu'on parvient à calculer les racines, quand on se donne les deux périodes. Il va de soi que le nombre des termes dans ces équations s'augmente quand le nombre n des transformations nécessaires pour arriver à la cotangentielle devient plus grand.

Calcul de u , connaissant pu . — Quand on connaît la valeur de pu , l'argument n'est pas encore complètement déterminé. Pour éviter toute ambiguïté, il suffit de supposer, comme nous le ferons dans la suite, que le point u , représentant u sur le plan complexe, se trouve toujours sur le contour ou bien à l'intérieur du rectangle qui a pour sommets les points 0 , ω , ω'' , ω' .

Prenons d'abord pu réel et plus grand que e_1 , l'argument u sera réel, positif et moindre que ω ; pour le trouver, nous n'avons qu'à changer légèrement les formules usuelles de la substitution de Landen. La formule (1)

$$4p_{(1)2}u = pu + p(u + \omega) - e_1$$

peut être écrite de la manière suivante :

$$4(p_{(1)2}u - e_1) = \frac{(pu - e_1 - \gamma_1^2)^2}{pu - e_1}.$$

Posons

$$\cot \varphi_0 = \frac{\sqrt{p u - e_1}}{\gamma_1}, \quad \cot \varphi_1 = \frac{\sqrt{p_{(1)}^2 u - e_1'}}{\gamma_2},$$

il viendra

$$(8) \quad \cot \varphi_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cot 2 \varphi_0.$$

Il convient de prendre $\sqrt{p u - e_1}$ positivement; alors φ_0 pourra être pris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

On conclut de la relation

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi} = \frac{2 \gamma_1}{\gamma_2} \frac{\sin^2 \varphi_1}{\sin^2 2 \varphi_0},$$

que φ_0 et φ_1 varient dans le même sens. Si l'on faisait varier l'argument u de zéro vers ω , 2ω , 3ω , ..., les angles φ_0 et φ_1 s'accroîtraient aussi et prendraient simultanément les valeurs 0, 0; $\frac{\pi}{2}$, π ; π , 2π ; Quelle que soit donc la valeur de φ_0 , par la relation (8), l'angle φ_1 se trouve parfaitement déterminé.

Quant aux fonctions intermédiaires, nous posons

$$\frac{\sqrt{p_{(2)}^4 u - e_1''}}{\gamma_3} = \cot \varphi_2, \quad \frac{\sqrt{p_{(3)}^8 u - e_1'''}}{\gamma_4} = \cot \varphi_3, \quad \dots,$$

ce qui entraîne les relations

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cot \varphi_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \cot 2 \varphi_1, \\ \cot \varphi_3 = \frac{\gamma_3}{\gamma_4} \cot 2 \varphi_2, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

à l'aide desquelles les angles φ_2 , φ_3 , ... peuvent être trouvés facilement, les relations entre φ_1 et φ_2 , φ_2 et φ_3 , ... étant tout à fait analogues à celle entre φ_0 et φ_1 .

Supposons qu'on néglige α_n^2 et que $p_n u$ ne diffère plus de la cotangentielle, on aura

$$u = \frac{\varphi_n}{2^n \gamma_n}$$

ou bien, puisqu'on a $\cot \varphi_n = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \cot 2\varphi_{n-1}$, $\gamma_n = \gamma_{n+1}$,

$$(10) \quad u = \frac{\varphi_{n-1}}{2^{n-1} \gamma_n}.$$

On le voit, ce calcul ne diffère presque en rien de celui qui sert à évaluer l'intégrale

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

l'amplitude φ étant connue. Remarquons qu'on peut calculer en sens inverse et trouver la valeur de pu pour un argument réel donné.

Passons au calcul de l'argument imaginaire v ; la valeur donnée de pu est alors réelle et moindre que e_3 . Si l'on veut éviter l'emploi des quantités auxiliaires A, B et se servir seulement des quantités β , γ , il suffit de poser

$$\frac{\sqrt{e_1 - p^2 v}}{\gamma_1} = \cot \varphi_0, \quad \frac{\sqrt{e_1 - p^{(1)2} v}}{\gamma_1} = \cot \varphi_1, \quad \frac{\sqrt{e_1 - p^{(2)4} v}}{\gamma_2} = \cot \varphi_2, \quad \dots,$$

ce qui revient à changer partout dans les formules (9) $\cot \varphi$ en $\frac{1}{i} \cot \varphi$. Par ce changement, les relations entre deux angles consécutifs deviennent

$$(11) \quad \begin{cases} \tan \varphi_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sin 2\varphi_0, \\ \tan \varphi_2 = \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \sin 2\varphi_1, \\ \dots \end{cases}$$

et, au lieu de (10), nous aurons

$$(12) \quad \frac{v}{i} = \frac{1}{2^n \gamma_n} \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \varphi_{n-1} \right).$$

On remarquera que, φ_0 étant pris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, tous les angles φ , en vertu des équations (11), seront également moindres que $\frac{\pi}{2}$, de sorte qu'il n'y a pas d'erreur possible dans leur détermination.

Nous avons désigné par v un argument purement imaginaire entre

o et ω' , il est nécessaire de restreindre davantage le champ de cet argument. En effet, en prenant par exemple $p\nu = e_3$, les formules précédentes ne pourraient servir à calculer ν qui devrait se trouver égal à ω' . Cela serait incompatible avec la supposition selon laquelle $2^n \frac{\omega'}{i}$ est infiniment grand par rapport à ω . Aussi trouve-t-on pour $p\nu = e_3$

$$\varphi_{n-1} = \frac{\pi}{4}, \quad 2^n \frac{\omega'}{i} = \infty,$$

comme cela doit être. Pour des arguments ν très voisins de ω' , le dernier angle auxiliaire φ_{n-1} se rapproche encore très sensiblement de $\frac{\pi}{4}$ et l'usage de la formule (12) n'est pas commode. Comme nous allons le voir, l'emploi de cette formule n'offre plus de difficultés et l'on obtient un résultat méritant de la confiance, quand on a $\nu = \frac{\omega'}{2}$; il suffit donc pour remédier aux inconvénients indiqués de ne considérer que des arguments imaginaires entre o et $\frac{\omega'}{2}$. Le calcul d'un argument ν qui dépasse $\frac{\omega'}{2}$ doit être remplacé par la détermination de $\omega' - \nu$, ce qui n'exige que la connaissance de la valeur de $p(\omega' - \nu)$, facile à déduire de celle de $p\nu$. Il reste à se convaincre de ce que la formule subsiste pour $\nu = \frac{\omega'}{2}$. Faisons actuellement cette substitution; en négligeant α_n^2 , on aura

$$p_{(n-1)} 2^{n-1} \nu = e_3^{(n-1)} - \alpha_{n-1} \beta_{n-1}, \quad \cot \varphi_{n-1} = \sqrt{\frac{\beta_{n-2}}{\beta_{n-1}}},$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} - \varphi_{n-1}\right) = \frac{\alpha_{n-1}}{(\sqrt{\beta_{n-2}} + \sqrt{\beta_{n-1}})^2}, \quad \cot^2\left(\frac{\pi}{4} - \varphi_{n-1}\right) = \frac{\alpha_n}{4\beta_n} = q^{2^{n-1}},$$

d'où il suit

$$\frac{\omega'}{2i} = \frac{1}{2^n \gamma_n} \log \cot\left(\frac{\pi}{4} - \varphi_{n-1}\right),$$

ce qui justifie l'assertion que nous venons d'énoncer.

En faisant maintenant l'argument suivre le contour du rectangle aux sommets o, ω , ω'' , ω' , il prend des valeurs complexes de la forme $u + \omega'$ ou $\nu + \omega$, les valeurs de $p(u + \omega')$ et de $p(\nu + \omega)$ étant tou-

jours réelles. Ces cas sont immédiatement réduits aux cas déjà considérés, quand on diminue l'argument d'une demi-période.

Le cas où le point représentant l'argument est situé à l'intérieur du rectangle des demi-périodes est un peu plus compliqué. L'argument est complexe de la forme $u + v$, où nous prenons u réel et positif. Prenons soin auparavant que v ne surpasse pas $\frac{\omega'}{2}$, ce qui, toujours en admettant pour $\frac{v}{i}$ des valeurs négatives, est facile à réaliser par l'addition ou la soustraction convenable d'une demi-période.

La valeur donnée de $p(u + v)$ est complexe; il est donc tout indiqué, eu égard aux cas précédents, de poser

$$\frac{\sqrt{p(u + v) - e_1}}{\gamma_1} = \cot \varphi_0 e^{-i\theta_0}, \quad \frac{\sqrt{p_{(1)2}(u + v) - e_1'}}{\gamma_2} = \cot \varphi_1 e^{-i\theta_1}.$$

Dans la première équation, on peut prendre $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$, θ_0 est également moindre que $\frac{\pi}{2}$ et a le signe de $\frac{v}{i}$. Les angles φ_1 , θ_1 seront liés à φ_0 , θ_0 par

$$\cot \varphi_1 e^{-i\theta_1} = \frac{\cot^2 \varphi_0 e^{-2i\theta_0} - 1}{2 \cot \varphi_0 e^{-i\theta_0}} \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

ce qui entraîne les deux égalités

$$(13) \quad \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cot \varphi_1 \cos \theta_1 = \cos \theta_0 \cot 2\varphi_0, \quad \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cot \varphi_1 \sin \theta_1 = \sin \theta_0 \frac{1}{\sin 2\varphi_0},$$

d'où il suit, en outre,

$$(14) \quad \cot \theta_1 = \cot \theta_0 \cos 2\varphi_0.$$

La dernière équation détermine θ_1 comme un angle positif ou négatif en valeur absolue moindre que $\frac{\pi}{2}$. De l'une ou de l'autre des premières équations, il résulte une valeur de φ_1 parfaitement déterminée si l'on se rend compte seulement que, v tendant vers zéro ainsi que θ_0 et θ_1 , les angles φ_0 et φ_1 tendent à devenir les angles auxiliaires d'un argument réel.

Le passage aux fonctions intermédiaires $p_{(2)}$, $p_{(3)}$, ... se fait de la

même manière. En posant

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{p^{(2)}4(u+v) - e_1^n}}{\gamma_3} &= \cot \varphi_2 e^{-i\theta_2}, \\ \frac{\sqrt{p^{(3)}8(u+v) - e_1^m}}{\gamma_4} &= \cot \varphi_3 e^{-i\theta_3}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

nous aurons

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \cot \varphi_2 \cos \theta_2 = \cos \theta_1 \cot 2\varphi_1, & \cot \theta_2 = \cot \theta_1 \cos 2\varphi_1, \\ \frac{\gamma_4}{\gamma_3} \cot \varphi_3 \cos \theta_3 = \cos \theta_2 \cot 2\varphi_2, & \cot \theta_3 = \cot \theta_2 \cos 2\varphi_2, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Admettons que la fonction $p_{(n)}$ dégénère, il s'ensuivra

$$2^{n-1}(u+v)\gamma_n = \text{arc cot}(\cot \varphi_{n-1} e^{-i\theta_{n-1}}).$$

La séparation en quantités réelles et imaginaires donne enfin

$$(16) \quad \begin{cases} u = \frac{1}{2^n \gamma_n} \text{arc tang}(\text{tang } 2\varphi_{n-1} \cos \theta_{n-1}), \\ \frac{v}{i} = \frac{1}{2^{n+1} \gamma_n} \log \frac{1 + \sin 2\varphi_{n-1} \sin \theta_{n-1}}{1 - \sin 2\varphi_{n-1} \sin \theta_{n-1}}. \end{cases}$$

Il faut prendre ici la valeur réelle du logarithme; quant à l'arc de la première égalité, il faut choisir cette valeur qui tend vers $2\varphi_{n-1}$ quand θ_{n-1} s'évanouit.

Comme dans les applications, les arguments réels et imaginaires interviennent ordinairement en même temps, le calcul que nous venons d'exposer n'est pas sans quelque utilité; d'ailleurs, comme on le verra, les angles φ , θ se présentent dans le calcul des fonctions σ .

Pour avoir un exemple de calcul numérique, considérons de nouveau la fonction $p(u, \omega, \omega', \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$, l'inversion de l'intégrale

$$u = \int_{p^u}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - p}};$$

prenons $p u = 3 \frac{1}{2}$, $p v = -3 \frac{1}{2}$ et par là $p(u + v) = -\frac{12}{7}i$. On aura

Calcul de u.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{\gamma_1} &= \cot \varphi_0, & \varphi_0 &= 25^\circ 53' 46'' 3, \\ & & \varphi_1 &= 52. 0. 0, 8, \\ & & \varphi_2 &= 104. 0. 0, 9. \\ (10) \quad u &= \frac{\varphi_2}{4\gamma_3} = 0,535623. \end{aligned}$$

Calcul de v.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{4}}{\gamma_1} &= \cot \varphi_0, & \varphi_0 &= 22^\circ 48' 15'' 2, \\ & & \varphi_1 &= 35. 45. 5, \\ & & \varphi_2 &= 43. 28. 53, 5, \\ (12) \quad \frac{v}{i} &= \frac{1}{8\gamma_3} \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \varphi_2 \right) = 0,535623. \end{aligned}$$

Calcul de u + v.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{-\frac{12}{7}i - \frac{1}{2}}}{\gamma_1} &= \cot \varphi_0 e^{-i\theta_0}, & \varphi_0 &= 32^\circ 10' 51'' 4, & \theta_0 &= 53^\circ 7' 48'' 4, \\ & & \varphi_1 &= 47. 12. 3, 6, & \theta_1 &= 72. 1. 15, 6, \\ & & \varphi_2 &= 133. 39. 33, 9, & \theta_2 &= -88. 34. 23, 5, \\ (16) \quad \begin{cases} u &= \frac{1}{8\gamma_3} \arctan(\tan 2\varphi_2 \cos \theta_2) = 0,535622, \\ \frac{v}{i} &= \frac{1}{16\gamma_3} \log \frac{1 + \sin 2\varphi_2 \sin \theta_2}{1 - \sin 2\varphi_2 \sin \theta_2} = 0,535622. \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction ζu . — Les intégrales de la seconde espèce de Jacobi sont remplacées par la fonction ζu , qu'on pourrait définir par les égalités

$$\frac{d\zeta u}{du} = -p u, \quad \lim_{u=0} \left(\zeta u - \frac{1}{u} \right) = 0.$$

Pour pouvoir s'en servir dans le calcul numérique, il nous faut d'abord connaître les quantités $\zeta \omega = \eta$, $\zeta \omega' = \eta'$, liées par

$$(17) \quad \omega' \eta - \omega \eta' = \frac{i\pi}{2},$$

si l'on prend $\frac{\omega'}{i}$ positivement.

Dans ce but, intégrons la formule fondamentale

$$4 \wp_{(1)} 2u = \wp u + \wp(u + \omega) - e_1;$$

il viendra

$$(18) \quad - 2 \zeta_{(1)} 2u = - \zeta u - \zeta(u + \omega) - e_1 u + C.$$

Faisant tendre u vers zéro, on trouve $C = \eta$, de sorte que nous aurons

$$2 \zeta_{(1)} 2u = \zeta u + \zeta(u + \omega) - \eta + e_1 u,$$

ce qui donne pour $u = \frac{\omega}{2}$ après une légère réduction

$$(19) \quad 2 \eta_{(1)} = \eta + e_1 \frac{\omega}{2}.$$

A cause de cette égalité et des égalités analogues

$$2 \eta_{(2)} = \eta_{(1)} + e_1' \frac{\omega}{2},$$

$$2 \eta_{(3)} = \eta_{(2)} + e_1'' \frac{\omega}{2},$$

.....,

le calcul de η se réduit à la détermination de $\eta_{(n)}$, quantité analogue appartenant à la cotangentielle. On trouve, en effet,

$$\eta - \frac{1}{2} \omega e_1 = 2^n (\eta_{(n)} - \frac{1}{2} \omega e_1^{(n)}) - \omega (\alpha_1^2 + 2 \alpha_2^2 + 2^2 \alpha_3^2 + \dots + 2^{n-2} \alpha_{n-1}^2).$$

Quant à $\eta_{(n)}$, puisqu'on a

$$\wp_{(n)} u = e_1^{(n)} + \beta_n^2 \cot^2(u \beta_n),$$

$$\zeta_{(n)} u = \frac{1}{3} \beta_n^2 u + \beta_n \cot(u \beta_n),$$

on obtient

$$\eta_{(n)} = \frac{1}{3} \beta_n^2 \omega = \frac{1}{2} \omega e_1^{(n)}.$$

Il en résulte

$$\frac{\eta}{\omega} := \frac{1}{2} e_1 - (\alpha_1^2 + 2 \alpha_2^2 + 2^2 \alpha_3^2 + \dots + 2^{n-2} \alpha_{n-1}^2).$$

Toutefois, l'usage de cette formule exigerait les connaissances des quantités α ; il est préférable de n'employer que les quantités β , γ , que

le calcul de ω a déjà fait connaître. Quelques simples réductions suffisent pour obtenir

$$(20) \quad \frac{\eta}{\omega} = 2^{n-2} \beta_{n-1}^2 - (e_1 + \gamma_1^2 + 2\gamma_2^2 + 4\gamma_3^2 + \dots + 2^{n-3} \gamma_{n-2}^2).$$

Même dans le cas le moins favorable $\omega = \frac{\omega'}{2}$, il suffit ordinairement de prendre $n = 3$, ce qui donne la formule très simple

$$\frac{\eta}{\omega} = -e_1 - \gamma_1^2 + 2\beta_2^2.$$

La quantité η une fois connue, la relation (17) donne immédiatement la valeur de η' . Si l'on avait $\omega > \frac{\omega'}{2}$, il serait préférable de faire intervenir les quantités auxiliaires A, B et la demi-période ω' , pour calculer d'abord η' , et d'en déduire ensuite la valeur de η .

Maintenant, nous sommes en état d'évaluer la fonction ζu pour un argument donné, qu'on suppose réel ou bien imaginaire. A cause du théorème d'addition, il n'y a pas d'intérêt à supposer l'argument complexe.

Reprenons les équations (18) et (19)

$$2\zeta_{(1)} 2u = \zeta u + \zeta(u + \omega) - \eta + e_1 u,$$

$$2\eta_{(1)} = \eta + e_1 \frac{\omega}{2}.$$

On en déduit

$$(21) \quad \left(\zeta_{(1)} 2u - \frac{\eta_{(1)} \cdot 2u}{\omega} \right) = \left(\zeta u - \frac{\eta u}{\omega} \right) + \frac{1}{4} \frac{p' u}{p u - e_1},$$

ce que nous écrivons

$$\left(\zeta_{(1)} 2u - \frac{\eta_{(1)} \cdot 2u}{\omega} \right) = \left(\zeta u - \frac{\eta u}{\omega} \right) - \mathcal{F}_0.$$

Pour les fonctions $\zeta_{(2)}, \zeta_{(3)}, \dots, \zeta_{(n)}$, on établit des équations semblables. En les additionnant, il vient

$$\zeta u - \frac{\eta u}{\omega} = \left(\zeta_{(n)} 2^n u - \frac{\eta_{(n)} \cdot 2^n u}{\omega} \right) + (\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1 + \dots + \mathcal{F}_{n-1}).$$

Prenons d'abord l'argument réel, identifions $p_{(n)}$ avec la cotangentielle, on aura, en faisant usage des angles auxiliaires $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ (qu'on doit supposer connus, puisque, dans les applications, l'argument u est toujours donné par la valeur de $p u$)

$$(22) \quad \zeta_{(n)} 2^n u - \frac{\eta_{(n)} \cdot 2^n u}{\omega} = \gamma_n \cot \varphi_n,$$

et par là

$$\zeta u - \frac{\eta u}{\omega} = \gamma_n \cot \varphi_n + (\tilde{f}_0 + \tilde{f}_1 + \dots + \tilde{f}_{n-1}).$$

Dans cette formule, on ne connaît pas encore les quantités \tilde{f} : on les trouve de la manière suivante. De la formule fondamentale (1), on déduit

$$2 \frac{p'_{(1)} 2 u}{p_{(1)} 2 u - e'_1} = \frac{p' u}{p u - e_1} \times \frac{p u - e_1 + \gamma_1^2}{p u - e_1 - \gamma_1^2}$$

ou bien

$$\tilde{f}_0 = 2 \tilde{f}_1 \cos 2 \varphi_0.$$

Pareillement, on aura

$$\tilde{f}_1 = 2 \tilde{f}_2 \cos 2 \varphi_1,$$

$$\tilde{f}_2 = 2 \tilde{f}_3 \cos 2 \varphi_2,$$

.....,

et le calcul des quantités \tilde{f} se trouve réduit à l'évaluation de la quantité de \tilde{f}_n , pour laquelle on trouve immédiatement

$$\tilde{f}_n = \frac{\gamma_n}{\sin 2 \varphi_n}.$$

On peut encore simplifier légèrement l'expression trouvée pour ζu , de sorte que, finalement, le calcul de cette fonction se fait par les équations suivantes :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta u - \frac{\eta u}{\omega} = \gamma_n \cot \varphi_{n-1} + (\tilde{f}_0 + \tilde{f}_1 + \dots + \tilde{f}_{n-2}), \\ \tilde{f}_0 = 2 \tilde{f}_1 \cos 2 \varphi_0, \\ \tilde{f}_1 = 2 \tilde{f}_2 \cos 2 \varphi_1, \\ \dots\dots\dots, \\ \tilde{f}_{n-1} = \frac{\gamma_n}{\sin 2 \varphi_{n-1}}. \end{array} \right.$$

L'emploi de ces formules est assez commode, parce que le nombre des termes ne dépassera jamais 3. Cependant, en se servant de ces formules, on n'aperçoit pas de terme principal. Dans ce but, il convient de transformer encore l'expression trouvée. Nous ne reproduisons pas les calculs par lesquels on y parvient, et nous nous bornons à établir ici le résultat. On trouve

$$4) \left\{ \begin{aligned} \zeta u - \frac{\eta u}{\omega} &= \gamma_1 \cot \varphi_0 + (\beta_1 - \gamma_1) \sin 2\varphi_0 \\ &+ (\beta_2 - \gamma_2) \sin 2\varphi_1 (1 + 2 \cos 2\varphi_0) \\ &+ (\beta_3 - \gamma_3) \sin 2\varphi_2 (1 + 2 \cos 2\varphi_1 + 4 \cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_0) \\ &+ (\beta_4 - \gamma_4) \sin 2\varphi_3 (1 + 2 \cos 2\varphi_2 + 4 \cos 2\varphi_2 \cos 2\varphi_1 \\ &\quad + 8 \cos 2\varphi_2 \cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_0) \\ &+ \dots \end{aligned} \right.$$

La formation des termes successifs est évidente; on reconnaît $\gamma_1 \cot \varphi_0$ comme le terme principal. L'usage de cette formule se recommande surtout lorsqu'on a $n \geq 3$.

Il est inutile de répéter en entier ces raisonnements pour le cas d'un argument imaginaire v , qui doit être compris entre 0 et $\frac{\omega'}{2}$. On n'a qu'à changer partout dans les formules $\cot \varphi$ en $\frac{1}{i} \cot \varphi$, pour introduire les angles auxiliaires d'un argument imaginaire.

De cette manière, la formule (24) devient, en prenant $n = 3$,

$$(25) \zeta v - \frac{\eta v}{\omega} = -i\gamma_1 \cot \varphi_0 + (\beta_1 - \gamma_1) i \operatorname{tang} 2\varphi_0 + (\beta_2 - \gamma_2) i \operatorname{tang} 2\varphi_1 \left(1 + \frac{2}{\cos 2\varphi_0} \right).$$

Il est bon d'observer que l'erreur à craindre en employant cette formule dépend, pour une grande part, de celle commise en calculant les différences $\beta_1 - \gamma_1$ et $\beta_2 - \gamma_2$. En effet, il se peut que les angles $2\varphi_0$ et $2\varphi_1$ ne diffèrent que très peu de $\frac{\pi}{2}$; alors les deux derniers termes influencent très sensiblement le résultat.

Pour avoir un exemple de calcul numérique, reprenons la fonction $p(u; \omega, \omega'; \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ et les arguments u et v pour lesquels les angles auxiliaires sont déjà calculés.

Calcul de η .

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{1}{2}, & \omega &= 1,8540745, \\
 & & \gamma_1^2 &= 0,7071068, \\
 & & \beta_2^2 &= 0,7177900, \\
 (20) \quad \frac{\eta}{\omega} &= -e_1 - \gamma_1^2 + 2\beta_2^2 = 0,2284732, \\
 & \eta &= 0,4236067, \\
 & \eta\omega &= \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Calcul de ζu .

$$\begin{aligned}
 u &= 0,535623, \\
 \wp u &= 3\frac{1}{2}, & \varphi_0 &= 25^\circ 53' 46'', 3, \\
 & & \varphi_1 &= 52^\circ 0' 0'', 8, \\
 & & \beta_1 - \gamma_1 &= 0,0126571, \\
 & & \beta_2 - \gamma_2 &= 0,0000235, \\
 (23) \quad \zeta u - \frac{\eta u}{\omega} &= \gamma_1 \cot \varphi_0 + (\beta_1 - \gamma_1) \sin 2\varphi_0 + (\beta_2 - \gamma_2) \sin 2\varphi_1 (1 + \cos 2\varphi_0), \\
 & \zeta u &= 1,864423.
 \end{aligned}$$

Calcul de ζv .

$$\begin{aligned}
 \frac{v}{i} &= 0,535623, \\
 \wp v &= -3\frac{1}{2}, & \varphi_0 &= 22^\circ 48' 15'', 2, \\
 & & \varphi_1 &= 35^\circ 45' 5'', \\
 (25) \quad \zeta v - \frac{\eta v}{\omega} &= -i\gamma_1 \cot \varphi_0 + (\beta_1 - \gamma_1) i \operatorname{tang} 2\varphi_0 + (\beta_2 - \gamma_2) i \operatorname{tang} 2\varphi_1 \left(1 + \frac{2}{\cos 2\varphi_0}\right), \\
 & \zeta v &= -i \times 1,864424.
 \end{aligned}$$

La fonction σu . — On pourrait définir la fonction σu par les égalités

$$\frac{d \log \sigma u}{du} = \zeta u, \quad \lim_{u=0} \frac{\sigma u}{u} = 1.$$

L'emploi de cette fonction n'introduit pas de nouvelles constantes dans le calcul. En effet, on sait que $\sigma\omega$, $\sigma\omega''$, $\sigma\omega'$ s'expriment par les racines e_1 , e_2 , e_3 , les périodes et les quantités η et η' . En commençant

par l'évaluation de σu quand le point u est situé sur le contour du rectangle $o\omega\omega''\omega'$, nous remarquons d'abord que les théorèmes connus sur l'addition d'une demi-période permettent de ne s'occuper que des deux cas où l'argument est réel ou bien purement imaginaire.

Supposons premièrement u réel, l'intégration des deux membres de l'équation (21) donne

$$(26) \quad \frac{1}{2} \left(\log \sigma_{(1)}^2 2u - \frac{\eta_{(1)} 2^2 u^2}{\omega} \right) = \left(\log \sigma^2 u - \frac{\eta u^2}{\omega} \right) + \frac{1}{2} \log(pu - e_1) + C.$$

En faisant tendre u vers zéro, on trouve pour la constante C la valeur $\log 2$. Après l'avoir introduite en même temps que l'angle auxiliaire φ_0 , l'équation devient

$$(27) \quad \frac{1}{2} \left(\log \sigma_{(1)}^2 2u - \frac{\eta_{(1)} \cdot 2^2 u^2}{\omega} \right) = \left(\log \sigma^2 u - \frac{\eta u^2}{\omega} \right) + \frac{1}{2} \log(2\gamma_1 \cot \varphi_0)^2.$$

Les transformations successives donnent lieu à n équations semblables à l'aide desquelles on obtient

$$\begin{aligned} \left(\log \sigma^2 u - \frac{\eta u^2}{\omega} \right) &= \frac{1}{2^n} \left(\log \sigma_{(n)}^2 2^n u - \frac{\eta_{(n)} \cdot 2^{2n} u^2}{\omega} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2^n} \log(2\gamma_1 \cot \varphi_0)^{2^n} (2\gamma_2 \cot \varphi_1)^{2^{n-1}} (2\gamma_3 \cot \varphi_2)^{2^{n-2}} \dots (2\gamma_n \cot \varphi_{n-1})^2. \end{aligned}$$

Nous supposons que la fonction $\sigma_{(n)} u$ dégénère, il est donc facile d'exprimer le premier terme du second membre par les fonctions circulaires. En effet, de la formule (22) il résulte immédiatement

$$\log \sigma_{(n)}^2 2^n u - \frac{\eta_{(n)} \cdot 2^{2n} u^2}{\omega} = \log \frac{\sin^2 \varphi_n}{\gamma_n^2};$$

par conséquent, en tenant compte de ce qu'on peut changer φ_n en $2\varphi_{n-1}$, nous aurons

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \log \sigma^2 u - \frac{\eta u^2}{\omega} &= \frac{1}{2^{n-1}} \log \left(\frac{\sin \varphi_{n-1}}{\gamma_n} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2^{n-1}} \log(2\gamma_1 \cot \varphi_0)^{2^{n-1}} (2\gamma_2 \cot \varphi_1)^{2^{n-2}} \dots (2\gamma_{n-1} \cot \varphi_{n-2})^2, \end{aligned} \right.$$

formule d'un usage très commode.

Inutile de dire qu'il faut prendre toujours la valeur réelle des logarithmes, et que σu étant positif pour $u < \omega$, on peut remplacer $\log \sigma^2 u$ par $2 \log \sigma u$.

Examinons les changements à faire dans cette formule lorsque l'argument donné est imaginaire.

Maintenant $\sigma_{(k)} 2^k \nu$ est purement imaginaire, $-\sigma_{(k)}^2 2^k \nu$ est réel et positif. L'équation (27) s'écrit

$$\frac{1}{2} \left[\log(-\sigma_{(1)}^2 2 \nu) - \frac{\eta_{(1)} \cdot 2^2 \nu^2}{\omega} \right] = \left[\log(-\sigma^2 \nu) - \frac{\eta \nu^2}{\omega} \right] + \frac{1}{2} \log(2\gamma_1 \cot \varphi_0)^2,$$

où φ_0 est l'angle auxiliaire d'un argument imaginaire.

De même, on trouve pour la fonction dégénérée $\sigma_n 2^n \nu$

$$\log(-\sigma_{(n)}^2 2^n \nu) - \frac{\eta_{(n)} \cdot 2^{2n} \nu^2}{\omega} = \log \frac{\text{tang}^2 2 \varphi_{n-1}}{\gamma_n^2},$$

de sorte qu'on trouve finalement

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \log(-\sigma^2 \nu) - \frac{\eta \nu^2}{\omega} &= \frac{1}{2^n} \log \left(\frac{\text{tang} 2 \varphi_{n-1}}{2\gamma_n \cot \varphi_{n-1}} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2^{n-1}} \log(2\gamma_1 \cot \varphi_0)^{2^{n-1}} (2\gamma_2 \cot \varphi_1)^{2^{n-2}} \dots (2\gamma_{n-1} \cot \varphi_{n-2})^2. \end{aligned} \right.$$

Il faut prendre la valeur réelle des logarithmes.

Pour la fonction σu , il n'existe pas un véritable théorème d'addition comme les fonctions $p u$ et ζu en possèdent; il est donc nécessaire qu'on sache évaluer $\sigma(u + \nu)$, l'argument étant complexe. Effectivement, ce cas se présente assez fréquemment dans les applications. Dans la supposition u réel, ν imaginaire, les quantités $\sigma(u + \nu)$ et $\sigma(u - \nu)$ sont des complexes conjugués. Or, comme on a

$$\frac{\sigma(u + \nu) \sigma(u - \nu)}{\sigma^2 u \sigma^2 \nu} = p \nu - p u,$$

le module de $\sigma(u + \nu)$ est donné par l'équation

$$|\sigma(u + \nu)| = \sqrt{-\sigma^2 \nu \sigma^2 u (p u - p \nu)};$$

on peut donc se contenter d'évaluer $\log \frac{\sigma(u + \nu)}{\sigma(u - \nu)}$.

Dans ce but, nous remplaçons u dans l'équation (26) une fois par $u + v$ et après par $u - v$; on en déduit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[2 \log \frac{\sigma_{(1)} 2(u+v)}{\sigma_{(1)} 2(u-v)} - \frac{\eta_{(1)} \cdot 2^2 \cdot 4uv}{\omega} \right] \\ &= \left[2 \log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} - \frac{4\eta uv}{\omega} \right] + \log \frac{\sqrt{p(u+v) - e_1}}{\sqrt{p(u-v) - e_1}}, \end{aligned}$$

en prenant pour chacune des fonctions logarithmiques cette branche particulière qui s'annule quand v s'évanouit.

Ici interviennent les angles auxiliaires φ , θ de l'argument complexe que nous avons introduits dans le calcul en posant

$$\frac{\sqrt{p(u+v) - e_1}}{\gamma_1} = \cot \varphi_0 e^{-i\theta_0}.$$

A leur aide l'équation précédente s'écrit

$$\frac{1}{2} \left[2 \log \frac{\sigma_{(1)} 2(u+v)}{\sigma_{(1)} 2(u-v)} - \frac{\eta_{(1)} \cdot 2^2 \cdot 4uv}{\omega} \right] = \left[2 \log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} - \frac{4\eta uv}{\omega} \right] - 2i\theta_0.$$

Sans peine, on établit les équations analogues pour les fonctions $\sigma_{(2)}$, $\sigma_{(3)}$, ..., $\sigma_{(n)}$, qui fournissent l'égalité

$$\begin{aligned} 2 \log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} - \frac{4\eta uv}{\omega} &= \frac{1}{2^n} \left[2 \log \frac{\sigma_{(n)} 2^n(u+v)}{\sigma_{(n)} 2^n(u-v)} - \frac{\eta_{(n)} \cdot 2^{2n} \cdot 4uv}{\omega} \right] \\ &+ \frac{i}{2^{n-2}} (2^{n-1}\theta_0 + 2^{n-2}\theta_1 + \dots + \theta_{n-1}). \end{aligned}$$

Dans la supposition que $\sigma_n 2^n(u+v)$ est une fonction dégénérée, on trouve facilement pour le premier terme du second membre l'expression

$$\frac{1}{2^{n-1}} \log \frac{\sin [2^n(u+v)\gamma_n]}{\sin [2^n(u-v)\gamma_n]}.$$

Les arguments u et v s'expriment par les angles auxiliaires φ , θ . En effet, nous avons trouvé

$$(16) \quad \begin{cases} u = \frac{1}{2^n \gamma_n} \text{arc tang} (\text{tang } 2\varphi_{n-1} \cos \theta_{n-1}), \\ \frac{v}{i} = \frac{1}{2^{n+1} \gamma_n} \log \frac{1 + \sin 2\varphi_{n-1} \sin \theta_{n-1}}{1 - \sin 2\varphi_{n-1} \sin \theta_{n-1}}. \end{cases}$$

Il s'ensuit après quelques réductions

$$\frac{1}{2^{n-1}} \log \frac{\sin [2^n (u + v) \gamma_n]}{\sin [2^n (u - v) \gamma_n]} = \frac{i}{2^{n-2}} \operatorname{arc tang} (\cos 2 \varphi_{n-1} \operatorname{tang} \theta_{n-1});$$

conséquemment nous aurons

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} 2 \log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} - \frac{4\eta uv}{\omega} &= \frac{i}{2^{n-2}} \operatorname{arc tang} (\cos 2 \varphi_{n-1} \operatorname{tang} \theta_{n-1}) \\ &+ \frac{i}{2^{n-1}} (2^{n-1} \theta_0 + 2^{n-2} \theta_1 + \dots + \theta_{n-1}). \end{aligned} \right.$$

Remarquons que nous avons supposé $0 < u < \omega$, $0 < v < \frac{\omega'}{2}$, que la fonction logarithmique s'annule en même temps que v , et que, v tendant vers zéro, tous les angles $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$, aussi bien que la fonction $\operatorname{arc tang} (\cos 2 \varphi_{n-1} \operatorname{tang} \theta_{n-1})$, s'évanouissent. Lorsque l'argument réel u s'annule, tous les angles $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ ainsi que la fonction $\operatorname{arc tang} (\cos 2 \varphi_{n-1} \operatorname{tang} \theta_{n-1})$ tendent vers $\frac{\pi}{2}$, et on trouve $\left(0 < v < \frac{\omega'}{2}\right)$

$$2 \log \frac{\sigma(+v)}{\sigma(-v)} = + 2 i \pi.$$

Pour avoir un exemple de calcul numérique, la fonction

$$p(u; \omega, \omega'; \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$$

va encore nous servir. Prenons l'argument $u + v$ pour lequel les angles auxiliaires sont déjà calculés. A cause de $v = iu$, $\omega' = i\omega$, nous devons trouver $2 \log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} = i\pi$. Actuellement nous avons :

$$\text{Calcul de } 2 \log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}.$$

$$p(u+v) = -\frac{1^2}{4} i, \quad \varphi_0 = 32^\circ.10'.51''.4, \quad \theta_0 = 53^\circ.7'.48''.4, \\ \varphi_1 = 47.12.3.6, \quad \theta_1 = 72.1.15.6, \\ \varphi_2 = 133.39.33.9, \quad \theta_2 = -88.34.23.5,$$

$$u = 0,535622, \quad \frac{4u^2\eta}{\omega} = 15^\circ 1' 20'', 2, \quad \operatorname{arc tang} (\cos 2 \varphi_2 \operatorname{tang} \theta_2) = 61^\circ 57' 59'', 9,$$

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} 2 \log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} &= \frac{4u^2\eta}{\omega} i + \frac{i}{2} \operatorname{arc tang} (\cos 2 \varphi_2 \operatorname{tang} \theta_2) \\ &+ \frac{i}{2} (4 \theta_0 + 2 \theta_1 + \theta_2) = i \times 180^\circ 0' 0'', 8. \end{aligned} \right.$$

Application. — Pour montrer l'emploi qu'on peut faire de nos formules dans les applications, envisageons le problème suivant : Calculer la distance géodésique s de deux points A et B, situés de part et d'autre à égale distance de l'équateur sur une ellipsoïde de révolution d'un faible aplatissement. Le rayon de l'équateur est pris pour unité, la distance du centre au pôle sera désignée par $\sqrt{1-x}$, la latitude réduite de A est égale à λ , la différence de longitude des points A et B est ψ .

Soit $\cos h$ le rayon du parallèle auquel la ligne géodésique AB est tangente, les fonctions elliptiques s'introduisent au moyen des formules (1)

$$\begin{aligned} e_1 - p\nu &= 1, & e_1 - pu &= 1 - x \cos^2 \lambda, & \gamma_0^2 &= e_1 - e_2 = 1 - x, \\ e_2 - p\nu &= x, & e_2 - pu &= x \sin^2 \lambda, & \alpha_0^2 &= e_2 - e_3 = x \sin^2 h, \\ e_3 - p\nu &= x \cos^2 \lambda, & e_3 - pu &= x (\cos^2 h - \cos^2 \lambda), & \beta_0^2 &= e_1 - e_3 = 1 - x \cos^2 h. \end{aligned}$$

L'argument constant ν est imaginaire; l'argument u , affixe du point A, est entre ω'' et ω' ; l'argument, affixe du point B, dont la latitude réduite est $-\lambda$, est représenté par $2\omega'' - u$. Il faut résoudre le problème à l'aide des deux équations suivantes, déduites des équations d'Halphen,

$$\begin{aligned} 2i\psi &= \log \frac{\sigma(u - \nu) \sigma(2\omega'' - u + \nu)}{\sigma(u + \nu) \sigma(2\omega'' - u - \nu)} + 2[\eta - \zeta(\nu + \omega)](2\omega'' - 2u), \\ s &= (2\omega'' - 2u)e_1 + \zeta(2\omega'' - u) - \zeta u. \end{aligned}$$

Dans ces équations, nous introduisons deux arguments nouveaux, l'un $x = u - \omega'$ réel et moindre que ω , l'autre $y = \omega' - \nu$ purement imaginaire et moindre que $\frac{\omega'}{2}$.

En désignant par α l'azimut de la ligne géodésique au point A, déterminé par

$$\sin \alpha = \frac{\cos h}{\cos \lambda},$$

ces arguments x et y seront donnés par les relations

$$e_2 - py = \tan^2 h, \quad px - e_1 = \frac{(1 - x \cos^2 h)}{\cos^2 x} \tan^2 \lambda.$$

(1) HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 286.

L'introduction de x et y donne

$$(31) \quad i\psi = \log \frac{\sigma(x+y)}{\sigma(x-y)} + 2y\eta + 2(x-\omega) \left(\zeta y + \frac{1}{2} \frac{p'y}{py-e_2} \right),$$

$$(32) \quad s = 2(\omega-x)e_1 + 2\eta - 2\zeta x - \frac{p'x}{px-e_3}.$$

Dans la première équation, la fonction logarithmique s'annule pour $y = 0$, les points A et B étant alors sur le même méridien.

Il s'agit maintenant d'introduire dans (31) les angles auxiliaires des arguments x , y et $x+y$. Posons

$$(33) \quad \frac{\sqrt{px-e_1}}{\gamma_1} = \cot \varphi_0'', \quad \frac{\sqrt{e_1-py}}{\gamma_1} = \cot \varphi_0', \quad \frac{\sqrt{p(x+y)-e_1}}{\gamma_1} = \cot \varphi_0 e^{-i\theta_0}.$$

A cause de la petitesse de x , nous pouvons provisoirement négliger x^2 , ce qui entraîne $\beta_1 = \gamma_1$. L'équation (31) devient, après quelques réductions,

$$\psi = \arctang(\cos 2\varphi_0 \tan \theta_0) + \theta_0 - \frac{\pi - 2\varphi_0''}{\gamma_1} \left(\gamma_1 \cot \varphi_0' - \frac{1}{2i} \frac{p'y}{py-e_2} \right).$$

En négligeant toujours les termes en x^2 , on vérifie facilement les relations suivantes :

$$\varphi_0'' = \arccot \left[\frac{\tan \lambda}{\cos \alpha} \left(1 + \frac{1}{4} x \sin^2 h \right) \right], \quad \frac{1}{\gamma_1} \left(\gamma_1 \cot \varphi_0' - \frac{1}{2i} \frac{p'y}{py-e_2} \right) = \frac{1}{2} x \cos h,$$

$$\theta_0 = \arctang \left[\frac{\tan \alpha}{\sin \lambda} \left(1 - \frac{1}{2} x \cos^2 h \right) \right], \quad \cot^2 \varphi_0 = \frac{\tan^2 \lambda + \sin^2 \alpha (1-x)}{1 - \frac{1}{2} x (1 + \cos^2 h)},$$

d'où il suit, après quelques réductions,

$$\theta_0 + \arctang(\cos 2\varphi_0 \tan \theta_0) = 2 \arctang(\tan \alpha \sin \lambda),$$

$$\frac{\pi - 2\varphi_0''}{\gamma_1} \left(\gamma_1 \cot \varphi_0' - \frac{1}{2i} \frac{p'y}{py-e_2} \right) = x \cos h \times \arccot(\cos \alpha \cos \lambda)$$

et, par conséquent,

$$\psi = 2 \arctang(\tan \alpha \sin \lambda) - x \cos h \times \arccot(\cos \alpha \cos \lambda).$$

Considérons maintenant sur la sphère deux points A' et B' de latitude, λ et $-\lambda$ ayant une différence de longitude ψ' , choisie de manière que le grand cercle AB est tangent à un parallèle de rayon $\cos h$. L'azimut

de ce cercle au point A' sera α . Désignons par s' la longueur de l'arc A'B', et nous aurons

$$\psi = \psi' - \frac{1}{2} s' \kappa \cos h.$$

Cette équation (1) va nous servir à déterminer les premières approximations de h . Prenons un triangle sphérique P'A'B' aux côtés P'A' = $\frac{\pi}{2} - \lambda$, P'B' = $\frac{\pi}{2} + \lambda$ avec l'angle compris A'P'B' = ψ .

On calcule le troisième côté s'_0 et la hauteur h_0 qui sont évidemment des approximations premières de s' et de h . De l'égalité

$$\psi'_0 = \psi + \frac{1}{2} s'_0 \kappa \cos h_0,$$

on déduit la première approximation ψ'_0 , et le triangle sphérique aux côtés $\frac{\pi}{2} - \lambda$ et $\frac{\pi}{2} + \lambda$ maintenant avec l'angle compris A'P'B' = ψ'_0 , nous fournit par la valeur h_1 de sa hauteur la seconde approximation de h .

Pour trouver des valeurs de h encore plus exactes, reprenons (31) et introduisons-y de nouveau les angles auxiliaires (33) φ'' , φ' et φ , θ , en retenant maintenant les termes en κ , κ^2 , κ^3 et en négligeant les termes en κ^4 , c'est-à-dire en supposant $\beta_2 = \gamma_2$.

On obtient ainsi

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \frac{1}{2} \text{arc tang}(\cos 2\varphi_1 \text{ tang } \theta_1) + \frac{1}{2} \theta_1 + \theta_0 \\ - \frac{\pi - \varphi''_1}{\gamma_2} \left[\gamma_1 \cot \varphi'_0 - (\beta_1 - \gamma_1) \text{ tang } 2\varphi'_0 - \frac{1}{2i} \frac{\rho' \gamma}{\rho \gamma - e_2} \right]. \end{array} \right.$$

On calcule les angles auxiliaires à l'aide des relations

$$\begin{aligned} \cot \varphi''_0 &= \frac{\text{tang } \lambda}{\gamma_1 \cos \alpha} \sqrt{1 - \kappa \cos^2 h}, & \cot \varphi'_0 &= \frac{\sqrt{1 - \kappa \cos^2 h}}{\gamma_1 \cos h}, \\ \cot^2 \varphi_0 &= \frac{1}{\gamma_1^2} [\text{tang}^2 \lambda + (1 - \kappa) \sin^2 \alpha], & \text{tang } \theta_0 &= \frac{\text{tang } \alpha}{\sin \lambda} \sqrt{1 - \kappa \cos^2 \lambda}. \end{aligned}$$

Cela se fait, ainsi que le calcul des quantités β , γ , à l'aide de la va-

(1) Cette formule se trouve chez Halphen, II, p. 298, (33). Incompatible avec elle est la formule (44) : $\psi = \psi' - \frac{1}{2} s' k \cos h$, établie p. 302.

leur h_1 , après quoi l'équation (34) nous donne une certaine valeur ψ_1 de ψ . La correction première de h se déduit de la différence $\psi - \psi_1$, quantité du même ordre que x^2 , en posant

$$\frac{dh_1}{d\psi_1} = -\frac{1}{2} \sin^2 h_1 \cos \frac{\psi_1}{2} \cot \lambda,$$

ce qui est exact, à des quantités près du même ordre que x .

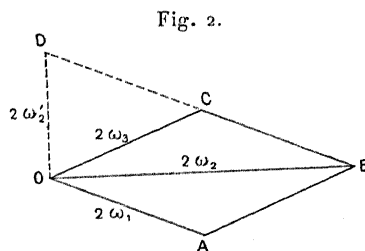
La valeur h_2 ainsi obtenue sera exacte à des quantités près du même ordre que x^3 ; en répétant ce calcul, on trouve enfin la valeur h_3 , et l'erreur commise sera comparable à x^4 . C'est en employant cette valeur de h qu'on calcule ensuite la distance géodésique s au moyen de l'équation (32), qui s'écrit, après l'introduction des angles auxiliaires (33),

$$s = \frac{\pi - \varphi_1''}{\gamma_2} \beta_1^2 - 2\gamma_1 \cot \varphi_0'' - 2(\beta_1 - \gamma_1) \sin 2\varphi_0'' - \frac{p'x}{p'x - e_3}.$$

Discriminants négatifs.

En considérant les fonctions elliptiques à discriminant négatif, nous examinerons d'abord la manière suivant laquelle il faut maintenant effectuer la transformation.

Le parallélogramme des périodes primitives de pu n'est plus un rectangle, c'est maintenant un losange OABC (*fig. 2*), dont la diagonale OB coïncide avec l'axe des quantités réelles.



Avec une modification inévitable de la notation, on a

$$\begin{aligned} OA &= 2\omega_1, & OB &= 2\omega_2, & OC &= 2\omega_3, \\ p\omega_1 &= e_1, & p\omega_2 &= e_2, & p\omega_3 &= e_3. \end{aligned}$$

La racine e_2 est réelle ainsi que la période $2\omega_2$, les deux autres racines e_1 et e_3 sont, comme les périodes correspondantes, des complexes conjugués. Il y a, en outre, une période purement imaginaire

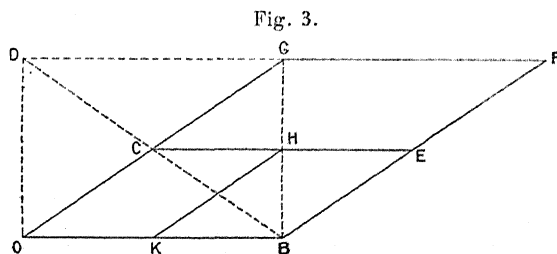
$$2\omega'_2 = OD = 2\omega_3 - 2\omega_1,$$

$p\omega'_2$ étant égal à e_2 , mais OB et OD ne peuvent pas être considérés comme une paire de périodes primitives.

Avant d'effectuer une transformation du second degré, des trois quantités $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$, il nous faut en choisir une, qui sera une des périodes de la fonction transformée $p_{(1)}u$.

Si l'on choisit $2\omega_1$, ou bien $2\omega_3$, le parallélogramme des périodes de $p_{(1)}u$ ne serait ni un rectangle, ni un losange, par conséquent les nouvelles racines e'_1 , e'_2 , e'_3 , toutes les trois seraient complexes. C'est ce qu'on doit éviter dans les calculs pratiques : il faut donc transformer pu de manière que $2\omega_2$, et en même temps $2\omega'_2$, devienne une des périodes de la fonction $p_{(1)}u$.

Au lieu du losange, prenons OBEC (*fig. 3*) pour parallélogramme



des périodes de la fonction $p(u; \omega_2, \omega_3; e_1, e_2, e_3)$, et considérons la fonction $p_{(1)}(u; \omega_2, 2\omega_3; e'_1, e'_2, e'_3)$ dont le parallélogramme des périodes est OBGF, aux côtés $OB = 2\omega_2$, $OG = 4\omega_3$.

En suivant les raisonnements antérieurs, on reconnaît OKHC comme le parallélogramme des périodes de la fonction $p_{(1)}2u$, et l'on trouve, en tenant compte des deux pôles doubles que cette fonction possède à l'intérieur de OBEC,

$$(35) \quad 4p_{(1)}2u = pu + p(u + \omega_2) - e_2.$$

Évidemment, il est loisible de regarder le rectangle OBGD, au lieu

de OBF \bar{G} , comme le parallélogramme des périodes de la fonction transformée. Autrement dit, la multiplication par 2 de la période $2\omega_3$ n'a pas eu d'autre effet que de changer $p u$ à discriminant négatif en une fonction $p_{(1)} u$ à discriminant positif, qui a pour périodes primitives les quantités $2\omega_2$ et $2\omega'_2$, et qu'on peut par conséquent désigner par

$$p_{(1)}(u; \omega_2, \omega'_2; e'_1, e'_2, e'_3).$$

Pour déterminer les racines e'_1, e'_2, e'_3 , liées aux périodes par les relations

$$e'_1 = p_{(1)}\omega_2, \quad e'_2 = p_{(1)}(\omega_2 + \omega'_2), \quad e'_3 = p_{(2)}\omega'_2,$$

on attribue à u dans (35) successivement les valeurs $\frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_2 + \omega'_2}{2}, \frac{\omega'_2}{2}$, et l'on trouve

$$(36) \quad \begin{cases} 4e'_1 = e_2 + 2\sqrt{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}, \\ 4e'_2 = -2e_2, \\ 4e'_3 = e_2 - 2\sqrt{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}, \end{cases}$$

ou bien, en posant

$$(37) \quad \begin{cases} 4f(p) = 4p^3 - g_2p - g_3, \\ \begin{cases} 4\alpha_1^2 = -3e_2 + 2\sqrt{f'(e_2)}, \\ 4\beta_1^2 = 4\sqrt{f'(e_2)}, \\ 4\gamma_1^2 = 3e_2 + 2\sqrt{f'(e_2)}. \end{cases} \end{cases}$$

On passe maintenant de $p_{(1)}$ aux fonctions transformées suivantes $p_{(2)}, p_{(3)}, \dots, p_{(n)}$, qui seront toutes à discriminant positif comme nous l'avons exposé dans la première partie de ce Mémoire; c'est seulement le passage de $p u$ à $p_{(4)} u$ qui nécessite dans nos formules les quelques changements que nous allons sommairement indiquer.

Calcul des périodes $2\omega_2$ et $2\omega'_2$. — D'après les formules (37), on fait l'évaluation des quantités $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, après quoi, si l'on a $\alpha_1 < \gamma_1$, on calcule β_n la moyenne arithmético-géométrique de β_1 et γ_1 . La demi-période réelle se trouve égale à $\frac{\pi}{2\beta_n}$.

Si l'on a, au contraire, $\alpha_1 > \gamma_1$, et par conséquent $\omega_2 > \frac{\omega'_2}{i}$, nous

désignons les quantités $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ par A_i, B_i, C_i , et nous cherchons la moyenne arithmético-géométrique B_n de A_i et B_i .

C'est alors la demi-période imaginaire qui est donnée par l'égalité

$$\frac{\omega'_2}{i} = \frac{\pi}{2B_n}.$$

En désignant ensuite par $q_{(1)}$ et $q'_{(1)}$ les quantités $e^{-\frac{\omega'_2 \pi}{i \omega_2}}$ et $e^{-\frac{i \omega_2 \pi}{\omega'_2}}$, on aura

$$(38) \quad \begin{cases} q_1 = \frac{\beta_1 - \gamma_1}{8} \frac{1}{\beta_3^{\frac{1}{2}} \beta_4^{\frac{1}{4}} \beta_5^{\frac{1}{8}} \dots}, \\ q'_{(1)} = \frac{B_1 - A_1}{8} \frac{1}{B_3^{\frac{1}{2}} B_4^{\frac{1}{4}} B_5^{\frac{1}{8}} \dots}. \end{cases}$$

Calcul de u connaissant $p u$. — Supposons d'abord u réel moindre que ω_2 , il convient maintenant de poser

$$\frac{\sqrt{p u - e_2}}{\beta_1} = \cot \varphi_0, \quad \frac{\sqrt{p_{(1)} 2 u - e'_1}}{\gamma_2} = \cot \varphi_1, \quad \frac{\sqrt{p_{(2)} 4 u - e''_1}}{\gamma_1} = \cot \varphi_2, \quad \dots,$$

et l'on aura

$$(39) \quad \cot \varphi_1 = \frac{\beta_1}{\gamma_2} \cot 2 \varphi_0, \quad \cot \varphi_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \cot 2 \varphi_1, \quad \dots, \quad u = \frac{\varphi_{n-1}}{2^{n-1} \gamma_n}.$$

Pour l'argument imaginaire v , que nous supposerons tout au plus égal à $\frac{\omega'_2}{4}$, afin que, après la première transformation, l'argument $2v$ soit moindre que $\frac{\omega'_2}{2}$, nous aurons de même

$$\frac{\sqrt{e_2 - p v}}{\gamma_1} = \cot \varphi_0, \quad \frac{\sqrt{e'_1 - p_{(1)} 2 v}}{\gamma_2} = \cot \varphi_1, \quad \frac{\sqrt{e''_1 - p_{(2)} 4 v}}{\gamma_3} = \cot \varphi_2, \quad \dots,$$

$$(40) \quad \begin{cases} \text{tang } \varphi_1 = \frac{\gamma_2}{\beta_1} \sin 2 \varphi_0, \\ \text{tang } \varphi_2 = \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \sin 2 \varphi_1, \\ \dots, \\ \frac{v}{i} = \frac{1}{2^n \gamma_n} \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \varphi_{n-1} \right). \end{cases}$$

Enfin, dans le cas de l'argument complexe $u + \nu$ ($\nu \leq \frac{\omega'_2}{4}$), on pose

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{p(u + \nu) - e_2}}{\beta_1} &= \cot \varphi_0 e^{-i\theta_0}, \\ \frac{\sqrt{p_{(1)} 2(u + \nu) - e'_1}}{\gamma_2} &= \cot \varphi_1 e^{-i\theta_1}, \\ \frac{\sqrt{p_{(2)} 4(u + \nu) - e''_1}}{\gamma_3} &= \cot \varphi_2 e^{-i\theta_2}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et l'on trouve

$$(41) \left\{ \begin{aligned} \frac{\gamma_2}{\beta_1} \cot \varphi_1 \cos \theta_1 &= \cos \theta_0 \cot 2 \varphi_0, & \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \cot \varphi_2 \cos \theta_2 &= \cos \theta_1 \cot 2 \varphi_1, & \dots, \\ \cot \theta_1 &= \cos \theta_0 \cos 2 \varphi_0, & \cot \theta_2 &= \cos \theta_1 \cos 2 \varphi_1, & \dots, \\ u &= \frac{1}{2^n \gamma_n} \text{arc tang} (\text{tang } 2 \varphi_{n-1} \cos \theta_{n-1}), \\ \frac{\nu}{i} &= \frac{1}{2^{n+1} \gamma_n} \log \frac{1 + \sin 2 \varphi_{n-1} \sin \theta_{n-1}}{1 - \sin 2 \varphi_{n-1} \sin \theta_{n-1}}. \end{aligned} \right.$$

On le voit, pour avoir ces formules, il faut seulement changer e_1 et γ_1 en e_2 et β_1 dans les formules que nous avons déduites pour le cas du discriminant positif.

Remarquons que le champ de l'argument imaginaire ν s'est encore restreint : de zéro il ne s'étend qu'à $\frac{\omega'_2}{4}$. Si l'on avait $\frac{\omega'_2}{4} < \nu < \frac{3\omega'_2}{4}$, il faudrait introduire au lieu de ν l'argument complexe $\nu - \omega_3$; dans le cas $\frac{3\omega'_2}{4} < \nu < \omega'_2$, on introduirait $\omega'_2 - \nu$.

La fonction ζu . — Les constantes à évaluer seront maintenant

$$\zeta \omega_2 = \eta_2, \quad \zeta \omega'_2 = \eta'_2,$$

entre lesquelles il y a la relation

$$\omega'_2 \eta_2 - \omega_2 \eta'_2 = i\pi.$$

On trouve bientôt qu'il suffit de remplacer e_1 et γ_1 par e_2 et β_1 dans la formule (20).

Il viendra

$$(42) \quad \frac{\eta_2}{\omega_2} = 2^{n-2} \beta_{n-1}^2 - (e_2 + \beta_1^2 + 2\gamma_2^2 + 4\gamma_3^2 + \dots + 2^{n-3} \gamma_{n-2}^2).$$

Dans la formule (23), pour le calcul de ζu dans le cas d'argument réel, il n'y a aucun changement. On a toujours

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta u - \frac{\eta_2 u}{\omega_2} = \gamma_n \cot \varphi_{n-1} + (\mathfrak{F}_0 + \mathfrak{F}_1 + \dots + \mathfrak{F}_{n-2}), \\ \mathfrak{F}_0 = 2\mathfrak{F}_1 \cos 2\varphi_0, \\ \mathfrak{F}_1 = 2\mathfrak{F}_2 \sin 2\varphi_1, \\ \dots\dots\dots, \\ \mathfrak{F}_{n-1} = \frac{\gamma_n}{\sin 2\varphi_{n-1}}. \end{array} \right.$$

La formule (24), qui sert également à évaluer ζu , se modifie et s'écrit maintenant

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta u - \frac{\eta_2 u}{\omega_2} = \beta_1 \cot \varphi_0 - (\beta_1 - \gamma_1) \sin 2\varphi_0 \\ \quad + (\beta_2 - \gamma_2) \sin 2\varphi_1 (1 + 2 \cos 2\varphi_0) \\ \quad + (\beta_3 - \gamma_3) \sin 2\varphi_2 (1 + 2 \cos 2\varphi_1 + 4 \cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_0) \\ \quad + (\beta_4 - \gamma_4) \sin 2\varphi_3 (1 + 2 \cos 2\varphi_2 + 4 \cos 2\varphi_2 \cos 2\varphi_1 \\ \quad \quad \quad + 8 \cos 2\varphi_2 \cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_0) \\ \quad + \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

On remarque que, dans le premier terme de (24), γ_1 est remplacé par β_1 , et que le second terme a changé de signe.

Pour l'argument imaginaire ν ($\nu \leq \frac{\omega_2}{4}$), on trouve, en prenant $n=3$

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta \nu - \frac{\eta_2 \nu}{\omega_2} = -i\beta_1 \cot \varphi_0 \\ \quad - (\beta_1 - \gamma_1) i \operatorname{tang} 2\varphi_0 + (\beta_2 - \gamma_2) i \operatorname{tang} 2\varphi_1 \left(1 + \frac{2}{\cos 2\varphi_0} \right). \end{array} \right.$$

La fonction σu . — L'argument u étant réel dans la formule (28), on n'a qu'à changer γ_1 en β_1 . Il vient

$$3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \log \sigma^2 u - \frac{u^2 \eta^2}{\omega_2} \\ = \frac{1}{2^{n-1}} \log \left(\frac{\sin \varphi_{n-1}}{\gamma_n} \right)^2 - \frac{1}{2^{n-1}} \log (2\beta_1 \cot \varphi_0)^{2^{n-1}} (2\gamma_2 \cot \varphi_1)^{2^{n-2}} \dots (2\gamma_{n-1} \cot \varphi_{n-2})^2; \end{array} \right.$$

également pour l'argument imaginaire $v \leq \frac{\omega'_2}{4}$, on aura, au lieu de (29),

$$(47) \left\{ \begin{aligned} & \log(-\sigma^2 v) - \frac{v^2 \eta_2}{\omega} \\ & = \frac{1}{2^n} \log \left(\frac{\tan 2\varphi_{n-1}}{2\gamma_n \cot \varphi_{n-1}} \right)^2 - \frac{1}{2^{n-1}} \log (2\beta_1 \cot \varphi_0)^{2^{n-1}} (2\gamma_2 \cot \varphi_1)^{2^{n-2}} \dots (2\gamma_{n-1} \cot \varphi_{n-2})^2. \end{aligned} \right.$$

Dans la formule (30), il n'y a rien à modifier : on aura toujours

$$(48) \left\{ \begin{aligned} & 2 \log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} - \frac{4uv\eta_2}{\omega_2} \\ & = \frac{i}{2^{n-2}} \operatorname{arc} \operatorname{tang} (\cos 2\varphi_{n-1} \operatorname{tang} \theta_{n-1}) + \frac{i}{2^{n-2}} (2^{n-1}\theta_0 + 2^{n-2}\theta_1 + \dots + \theta_{n-1}). \end{aligned} \right.$$

