ELLIOT

Sur les cas d'intégrabilité du mouvement d'un point dans un plan

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 11 (1894), p. 9-22

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1894_3_11__9_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR LES CAS D'INTÉGRABILITÉ

DU

MOUVEMENT D'UN POINT DANS UN PLAN,

PAR M. ELLIOT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON.

Lorsqu'un mobile est sollicité par des forces résultant d'un potentiel, la condition pour que le problème admette, outre l'intégrale des forces vives, une intégrale du second degré par rapport aux vitesses, est que la fonction des forces satisfasse à une équation aux dérivées partielles du second ordre. M. Bertrand a tiré de cette équation des conséquences très intéressantes sans en donner l'intégrale (1). Je me propose de faire voir que l'intégrale générale de l'équation en question est donnée par les expressions de la fonction des forces trouvées par Liouville dans le Mémoire intitulé : *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer* (2). Ce résultat se déduit aisément, comme on peut s'y attendre, de l'expression générale des éléments linéaires susceptibles d'être ramenés à la forme de Liouville.

(1) *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. II, p. 113.

(2) *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XI.

L'équation aux dérivées partielles est, dans un grand nombre de questions, plus commode à utiliser que son intégrale. C'est ce qu'a fait M. Bertrand dans le Mémoire cité, en cherchant les fonctions de forces pour lesquelles il y a une intégrale du second degré, en supposant que les forces ne dépendent que des distances du mobile à des points fixes du plan. Il n'y a aucune difficulté à étendre sa méthode au cas où les forces dépendent de la distance du mobile à des droites fixes du plan. Mais si l'on veut ne laisser échapper aucun cas particulier, il est nécessaire de tenir compte des formes de dégénérescence de l'équation aux dérivées partielles qui correspondent aux diverses expressions de l'intégrale générale signalées par Liouville.

I.

1. Proposons-nous de trouver toutes les fonctions U de x et y telles qu'un changement convenable des variables indépendantes transforme l'équation aux dérivées partielles

$$p^2 + q^2 = 2\,\mathrm{U} \tag{1}$$

en une autre où les variables se trouvent séparées. La nouvelle équation, par hypothèse, aura la forme

$$\mathrm{M}_1 p_1^2 + \mathrm{N}_1 q_1^2 = \mathrm{X}_1 + \mathrm{Y}_1,$$

où M_1 et X_1 ne dépendent que de x_1, N_1 et Y_1 que de y_1. Dans ce cas, un nouveau changement de variables $x_2 = \mathrm{F}(x_1)$, $y_2 = \mathrm{G}(y_1)$ permettra de transformer l'équation en

$$p_2^2 + q_2^2 = \mathrm{X}_2 + \mathrm{Y}_2.$$

Nous pouvons donc nous borner à chercher les équations (1) qui peuvent se ramener à celle-ci, où φ et ψ sont deux fonctions arbitraires

$$p_1^2 + q_1^2 = \varphi(x_1) + \psi(y_1). \tag{2}$$

Soient

$$x_1 = \mathrm{A}(x, y), \qquad y_1 = \mathrm{B}(x, y) \tag{3}$$

les formules qui définiront le changement de variables. Il faudra d'abord, évidemment, que A et B satisfassent aux conditions de la représentation conforme,

$$\frac{\partial A}{\partial x}=\frac{\partial B}{\partial y},\qquad \frac{\partial A}{\partial y}=-\frac{\partial B}{\partial x}.$$

L'équation (2) devient dans le système (x, y)

$$p^2+q^2=\left(\frac{\partial A^2}{\partial x^2}+\frac{\partial A^2}{\partial y^2}\right)[\varphi(A)+\psi(B)]. \tag{4}$$

Le second membre de cette équation est l'expression générale que nous cherchions pour la fonction U.

Si l'on considère la surface dont l'élément linéaire est

$$ds^2=2U(dx^2+dy^2),$$

on saura, dans ce cas, en trouver les lignes géodésiques par des quadratures. Dans le système (x_1, y_1), cet élément se présente sous la forme de Liouville. L'équation (1) admet alors une intégrale du second degré.

2. Le second membre de l'équation (4), qui contient deux fonctions arbitraires, est l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre. Nous allons la chercher en exprimant que l'équation (1) admet une intégrale du second degré. En désignant par α, β, γ des fonctions de x et y, nous prendrons l'intégrale sous la forme

$$(\alpha p+\beta q)^2+2\gamma=\text{const.} \tag{5}$$

en laquelle se transforment, par le changement de variables, les intégrales évidentes $p_1^2-\varphi(x_1)=\text{const.}$, $q_1^2-\psi(y_1)=\text{const.}$ de l'équation (2). La condition pour que l'équation

$$F=p^2+q^2-2U=0$$

admette l'intégrale (5) est que l'on ait

$$(\alpha p+\beta q)\left[p^2\frac{\partial\alpha}{\partial x}+pq\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)+q^2\frac{\partial\beta}{\partial y}+\alpha\frac{\partial U}{\partial x}+\beta\frac{\partial U}{\partial y}\right]+p\frac{\partial\gamma}{\partial x}+q\frac{\partial\gamma}{\partial y}=0.$$

Remplaçant, dans cette équation, q par $\sqrt{2U-p^2}$, les termes rationnels et ceux qui contiennent le radical devront être nuls séparément. On devra donc avoir, quels que soient x, y, p,

$$(6)\quad \begin{cases} \alpha p \left[p^2\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}-\dfrac{\partial\beta}{\partial y}\right)+\alpha\dfrac{\partial U}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial U}{\partial y}+2U\dfrac{\partial\beta}{\partial y}\right] \\ \qquad\qquad +\beta p(2U-p^2)\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial x}+\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\right)+p\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}=0, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \beta \left[p^2\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}-\dfrac{\partial\beta}{\partial y}\right)+\alpha\dfrac{\partial U}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial U}{\partial y}+2U\dfrac{\partial\beta}{\partial y}\right] \\ \qquad\qquad +\alpha p^2\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial x}+\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial\gamma}{\partial y}=0. \end{cases}$$

En égalant à zéro les coefficients de p^3 dans les termes (6) et de p^2 dans les termes (7), on obtient d'abord ces deux conditions

$$\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)-\beta\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)=0,$$

$$\beta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)+\alpha\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)=0.$$

On en conclut, en écartant l'hypothèse $\alpha^2+\beta^2=0$,

$$(8)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial\beta}{\partial y},\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial y}=-\frac{\partial\beta}{\partial x}.$$

En vertu de ces relations, les conditions pour que les termes (6) et (7) soient identiquement nuls deviennent

$$\alpha^2\frac{\partial U}{\partial x}+\alpha\beta\frac{\partial U}{\partial y}+2\alpha U\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial x}=0,$$

$$\alpha\beta\frac{\partial U}{\partial x}+\beta^2\frac{\partial U}{\partial y}+2\beta U\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial y}=0.$$

L'élimination de la fonction γ entre ces deux équations donne l'équation aux dérivées partielles que doit vérifier U

$$(9)\quad \begin{cases} \alpha\beta\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)+(\beta^2-\alpha^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} \\ \qquad +\dfrac{3}{2}\dfrac{\partial(\beta^2-\alpha^2)}{\partial y}\dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{3}{2}\dfrac{\partial(\beta^2-\alpha^2)}{\partial x}\dfrac{\partial U}{\partial y}+\dfrac{\partial^2(\beta^2-\alpha^2)}{\partial x\,\partial y}U=0. \end{cases}$$

Si l'on fait en particulier $\alpha=1$, $\beta=0$, l'équation se réduit à

$\frac{\partial^2 U}{\partial x\, dy} = 0$. Si donc l'équation (1) admet l'intégrale $p^2 + 2\gamma = \text{const.}$, U sera nécessairement la somme d'une fonction de x et d'une fonction de y. Les équations qui déterminent γ, dans ce cas particulier, sont

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

ce qui montre que γ ne peut dépendre que de x.

3. Connaissant les fonctions α et β, il faut maintenant, pour définir le changement des variables, trouver A et B. Par hypothèse, les formules

$$(10) \qquad x_1 = A(x, y), \qquad y_1 = B(x, y)$$

transforment l'équation (1) en une autre, où les variables sont séparées dans le second membre, et qui admet, comme nous venons de le voir, l'intégrale $p_1^2 + 2\gamma_1 = \text{const.}$ Puisque U est solution de l'équation (9), l'équation (1) admet l'intégrale

$$(\alpha p + \beta q)^2 + 2\gamma = \text{const.}$$

D'ailleurs, la substitution (10) transforme $\alpha p + \beta q$ en

$$\left(\alpha \frac{\partial A}{\partial x} + \beta \frac{\partial A}{\partial y}\right) p_1 + \left(\alpha \frac{\partial B}{\partial x} + \beta \frac{\partial B}{\partial y}\right) q_1.$$

Il suffit donc [1] que les fonctions A et B satisfassent aux équations

$$\alpha \frac{\partial A}{\partial x} + \beta \frac{\partial A}{\partial y} = 1, \qquad \alpha \frac{\partial B}{\partial x} + \beta \frac{\partial B}{\partial y} = 0.$$

A et B satisfaisant aux conditions $\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y}$, $\frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{\partial B}{\partial x}$, on en tire

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial x} = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, & \dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ \dfrac{\partial B}{\partial x} = -\dfrac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, & \dfrac{\partial B}{\partial y} = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}. \end{cases}$$

---

[1] Il y aura évidemment d'autres façons de déterminer A et B dans le cas où l'équation (1) admettrait plusieurs intégrales du second degré.

Ainsi, lorsqu'on se donne α et β, on a l'intégrale générale de l'équation (9), en déterminant A et B par les quadratures précédentes et en formant l'expression

$$(12) \qquad U = \left(\frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^2}{\partial y^2}\right)[\varphi(A) + \psi(B)].$$

4. Si l'on veut que les résultats précédents s'appliquent à un problème de Mécanique pour lequel la fonction des forces est U, il faut que cette fonction ne cesse pas de satisfaire à l'équation (9) quand on l'augmente d'une constante quelconque, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial^2(\beta^2 - \alpha^2)}{dx\,dy} = 0.$$

Observons, toutefois, que, si cette dernière condition n'est pas remplie, la connaissance d'une intégrale complète de l'équation $p^2 + q^2 = 2U$ ne sera pas sans utilité pour la résolution du problème de Mécanique. Car si l'on suppose connue une intégrale complète de l'équation $p^2 + q^2 = 2(U + h)$, on obtient les trajectoires en égalant à une constante arbitraire le résultat de la différentiation de l'intégrale complète par rapport à la constante non additive qui y entre. Les trajectoires relatives à $h = 0$ s'obtiendront en introduisant cette hypothèse dans le résultat précédent, et, comme aucune différentiation n'est faite par rapport à h, on aura évidemment les trajectoires qui répondent à $h = 0$ par une différentiation de l'intégrale complète de $p^2 + q^2 = 2U$.

Revenant maintenant aux problèmes de Mécanique que la méthode de Jacobi permet d'intégrer complètement, la condition $\frac{\partial^2(\beta^2 - \alpha^2)}{\partial x\,\partial y} = 0$ jointe à celles de la représentation conforme que doivent vérifier α et β, et qui peuvent s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha\beta) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\beta) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}\right) = 0,$$

déterminent α et β. On trouvera immédiatement, en désignant par a, b, b_1, c, c_1 des constantes, les deux relations

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} \beta^2 - \alpha^2 &= a(y^2 - x^2) + 2b_1 y - 2bx + c, \\ \alpha\beta &= axy + b_1 x + by + c_1. \end{aligned}\right.$$

5. Supposons d'abord $a \neq 0$. On pourra, sans altérer la généralité, supposer $a = 1$. Cela revient à multiplier α et β par une même constante, et par suite aussi A et B. En outre, on voit qu'un transport des axes permet de supposer nulles les constantes b et b_1, en sorte que α et β peuvent être considérés comme satisfaisant aux relations

$$\beta^2 - \alpha^2 = y^2 - x^2 + c, \qquad \alpha\beta = xy + c_1. \tag{14}$$

Il faut maintenant déterminer les fonctions A et B par les quadratures (11). Or, la forme des seconds membres montre que, si l'on pose $f(z) = \alpha + \beta i$, A et B seront respectivement la partie réelle et le coefficient de i dans l'intégrale $\int \frac{dz}{f(z)}$. En outre, d'après les relations (14), le carré de la fonction $f(z)$ est $z^2 + 2c_1 i - c$. Une rotation des axes d'un angle convenable ω va simplifier encore cette recherche. Si $z_1 = x_1 + y_1 i$ désigne la nouvelle variable imaginaire après la rotation, notre intégrale deviendra

$$\int \frac{dz_1}{\sqrt{z_1^2 + (2c_1 i - c)e^{-2\omega i}}}.$$

Déterminons ω de façon que

$$(2c_1 i - c)e^{-2\omega i} = -h^2,$$

h étant une quantité réelle, on aura

$$2c_1 \cos 2\omega + c \sin 2\omega = 0, \qquad c \cos 2\omega - 2c_1 \sin 2\omega = h^2;$$

en prenant

$$\sin 2\omega = -\frac{2c_1}{h^2}, \qquad \cos 2\omega = \frac{c}{h^2}, \qquad \sqrt{c^2 + 4c_1^2} = h^2,$$

l'intégrale se réduit à

$$\int \frac{dz_1}{\sqrt{z_1^2 - h^2}}. \tag{15}$$

Appelons r et ρ les distances d'un point du plan aux deux points fixes qui ont actuellement pour coordonnées $(h, 0)$, $(-h, 0)$; on sait que la partie réelle et le coefficient de i dans l'intégrale (15) sont des fonctions très simples, l'une de $r+\rho$, l'autre de $r-\rho$ [1]. Il est même inutile de préciser la forme de ces fonctions, puisque l'expression de U que nous voulons obtenir contient A et B sous deux fonctions arbitraires.

Il nous reste à trouver l'expression de

$$\frac{\partial A^2}{\partial x^2}+\frac{\partial A^2}{\partial y^2}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Les formules (14) donnent

$$(\alpha^2+\beta^2)^2=(x^2+y^2)^2+2c(y^2-x^2)+8c_1xy+c^2+4c_1^2;$$

le second membre transformé dans le système (x_1, y_1) se réduit à

$$(x_1^2+y_1^2)^2+2h^2(y_1^2-x_1^2)+h^4,$$

qui est le carré de $r\rho$. L'expression générale que nous cherchions pour U est donc

$$U=\frac{1}{r\rho}[\varphi(r+\rho)+\psi(r-\rho)].$$

C'est la forme générale trouvée par Liouville.

6. Lorsque $h=0$, $\alpha^2+\beta^2$ devient égal au carré de la distance du mobile à la nouvelle origine. L'intégrale qu'il faut mettre sous la forme $A+Bi$ est ici $\int\frac{dz_1}{z_1}$. A est une fonction de $x_1^2+y_1^2$, B une fonction de $\frac{y_1}{x_1}$. Donc r désignant la distance du mobile à un point fixe du plan, θ l'angle avec une direction quelconque du rayon vecteur joignant le mobile au point fixe, la valeur de U sera

$$U=\varphi(r)+\frac{1}{r^2}\psi(\theta).$$

7. Reste à examiner le cas de $a=0$. Un transport d'axes permet

---

[1] L'équation aux dérivées partielles de Jacobi se transformera donc en une autre où les variables seront séparées, quand on fera un changement de variables en coordonnées elliptiques.

d'annuler alors les termes c et c_1. Les relations qui déterminent α et β sont

$$\beta^2 - \alpha^2 = 2(b_1 y - bx), \qquad \alpha\beta = b_1 x + by.$$

L'expression $\alpha^2 + \beta^2$ est égale, à un facteur constant près, à la distance du mobile à la nouvelle origine. Les fonctions A et B sont la partie réelle, et le coefficient de i dans l'intégrale $\int \frac{dz}{f(z)}$ où l'on a posé $f(z) = \alpha + \beta i$. Le carré de $f(z)$ se réduit ici à $2(b + b_1 i)z$. Une rotation des axes permet, en négligeant un facteur constant réel, de ramener l'intégrale à $\int \frac{dz_1}{\sqrt{z_1}}$. A un facteur constant près, les carrés de A et B sont $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - x_1$ et $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + x_1$. En revenant au système primitif, on voit que, si r désigne la distance du mobile à un point fixe, et δ sa distance à une droite fixe, l'expression de U sera

$$\mathrm{U} = \frac{1}{r}[\varphi(r + \delta) + \psi(r - \delta)].$$

Ces deux cas particuliers ont été déduits par Liouville du cas général de la transformation en coordonnées elliptiques, au moyen de considérations géométriques.

II.

8. On peut tirer de l'équation aux dérivées partielles que vérifie la fonction U tous les cas des problèmes admettant une intégrale du second degré, ou, ce qui est la même chose, complètement intégrables par la méthode de Jacobi, dans l'hypothèse que U ne dépend que des distances du mobile à des points fixes ou à des droites fixes du plan. A cause de la forme linéaire de l'équation aux dérivées partielles, si l'on a obtenu un certain nombre de solutions particulières où U ne dépend que des distances du mobile à certains points ou droites du plan, on aura encore une solution en ajoutant toutes ces solutions particulières multipliées respectivement par des constantes quelconques. Il suffit de répéter les calculs de M. Bertrand en distinguant les divers cas qui ont été examinés dans l'intégration.

Dans le cas général, la constante a n'étant pas nulle, on peut la supposer égale à l'unité. Le transport des axes et leur rotation revient, comme on l'a vu, à annuler les constantes b, b_1, c_1. En introduisant la distance $2h$ des deux foyers, l'équation aux dérivées partielles est

$$(1)\qquad xy\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)+(y^2-x^2+h^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}+3y\frac{\partial U}{\partial x}-3x\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

Il faut voir si elle peut admettre une solution de la forme

$$U=\varphi[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2],$$

en déterminant convenablement la fonction φ et les constantes x_0, y_0. Le résultat de la substitution est

$$(2)\qquad \begin{cases} \{4xy[(x-x_0)^2-(y-y_0)^2]+4(y^2-x^2+h^2)(x-x_0)(y-y_0)\}\varphi'' \\ \qquad\qquad +6(y_0x-x_0y)\varphi'=0. \end{cases}$$

Le polynome qui figure comme coefficient de φ'' est seulement du troisième degré; il doit être évidemment le produit du coefficient de φ' par une expression de la forme $k[(x-x_0)^2+y-y_0)^2]$, où k est une constante. On reconnaît tout de suite que l'identification donne comme condition nécessaire $k=\frac{2}{3}$ et $x_0y_0=0$. Si l'on veut se borner aux solutions réelles, il faut prendre $y_0=0$, et l'identification a lieu effectivement en prenant $x_0^2-h^2=0$.

Pour avoir la loi de la force dirigée par exemple vers le point $x_0=h$, $y_0=0$, il suffit de remarquer que l'équation (2) donne, en posant $v=(x-h)^2+y^2$,

$$2v\varphi''+3\varphi'=0.$$

En désignant par C et C_1 des constantes arbitraires, on en conclut

$$\varphi=\frac{C}{\sqrt{v}}+C_1.$$

La loi d'attraction est donc celle de Newton.

Remarquons, avec M. Bertrand, qu'il y a une autre façon de satisfaire à l'équation (2) en exprimant que le coefficient de φ' est identiquement nul. Cela donne $x_0=y_0=0$. La force est dirigée vers l'origine. L'équation (2) se réduit alors à $\varphi'' = 0$. La fonction φ est donc du premier degré par rapport à $x^2 + y^2$; la force est proportionnelle à la distance.

De même, en désignant par M, N, P trois constantes, la substitution dans l'équation (1) de $\varphi(Mx + Ny + P)$ donne

$$[(M^2 - N^2)xy + MN(y^2 - x^2 + h^2)]\varphi'' + 3(My - Nx)\varphi' = 0.$$

On doit avoir, comme précédemment,

$$(M^2 - N^2)xy + MN(y^2 - x^2 + h^2) = 3k(My - Nx)(Mx + Ny + P).$$

L'identification exige d'abord $k = \frac{1}{3}$, ensuite que P soit nul ainsi que l'une des quantités M ou N. On retrouve ainsi, avec les forces considérées par Lagrange, celles qu'a ajoutées Liouville. Elles sont dirigées parallèlement aux deux axes coordonnés que nous avons choisis, et l'on vérifie immédiatement qu'elles sont inversement proportionnelles aux cubes de la distance du mobile aux deux axes.

9. Dans le cas particulier où $h = 0$, l'équation aux dérivées partielles devient

$$(3) \qquad xy\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + (y^2 - x^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + 3y\frac{\partial U}{\partial x} - 3x\frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

En répétant le raisonnement précédent, on voit immédiatement que les seules forces dirigées vers un point fixe doivent passer par l'origine actuelle et que la force est une fonction quelconque de la distance.

En cherchant les solutions de l'équation (3) qui sont de la forme $\varphi(Mx + Ny + P)$, on trouve aisément que la droite $Mx + Ny + P = 0$ est une quelconque de celles qui passent par l'origine, la force devant varier en raison inverse du cube de la distance.

Ainsi, dans ce cas particulier, la méthode de Jacobi ne permettra de résoudre le problème par des quadratures que si le mobile est sollicité 1° par une force dirigée vers un point fixe O et fonction quelconque de la distance à ce point; 2° par des forces émanant d'un nombre quelconque de droites passant par le point O, ces forces variant en raison inverse du cube de la distance du mobile à ces différentes droites.

10. Lorsque $a = 0$, un transport d'axes et une rotation convenable qui revient évidemment à prendre comme axes de coordonnées les deux droites rectangulaires en évidence dans les expressions de $\beta^2 - \alpha^2$ et de $\alpha\beta$ du n° 7 ramènent l'équation aux dérivées partielles à la forme

$$x\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + 2y\frac{\partial^2 U}{\partial x\, dy} + 3\frac{\partial U}{\partial x} = 0. \tag{4}$$

En essayant, d'après les mêmes procédés, les solutions de la forme

$$U = \varphi[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2],$$

on trouve immédiatement que le point fixe vers lequel est dirigée la force ne peut être que l'origine, et que la force est en raison inverse du carré de la distance.

Pour que l'équation (4) admette une solution de la forme

$$U = \varphi(Mx + Ny + P),$$

on doit avoir identiquement

$$[(M^2 - N^2)x + 2MNy]\varphi'' + 3M\varphi' = 0.$$

On peut d'abord y satisfaire en prenant $M = 0$. La force est parallèle à Oy, et, comme l'équation se réduit à $\varphi'' = 0$, la force est constante. Ce cas étant écarté, on doit avoir identiquement

$$(M^2 - N^2)x + 2MNy = 3kM(Mx + Ny + P).$$

Il faut et il suffit que $P = N = 0$ et que $k = \frac{1}{3}$. D'ailleurs, en posant $Mx = v$, l'intégration de l'équation en φ donne

$$\varphi = \frac{C}{v^2} + C_1.$$

La force dirigée perpendiculairement à Oy est inversement proportionnelle au cube de la distance à cet axe.

11. Les forces dirigées vers des centres fixes ou provenant de droites fixes du plan qui ont été trouvées précédemment sont évidemment les seules qui donnent des problèmes intégrables par la méthode de Jacobi, si l'on veut que les intensités des différentes forces soient indépendantes les unes des autres. Dans le cas contraire, il est possible de trouver d'autres fonctions U pour lesquelles la méthode de Jacobi ramène le problème à des quadratures.

Cherchons, par exemple, si l'équation (4) peut admettre une intégrale de la forme

$$U = \varphi(x^2 + y^2) + \psi(y).$$

La substitution donne, en posant $x^2 + y^2 = v$,

$$4v\varphi'' + 6\varphi' - \psi'' = 0,$$

qui ne peut être vérifiée que si l'on a, en désignant par h une constante,

$$\psi'' = h, \qquad 4v\varphi'' + 6\varphi' = h.$$

On en conclut

$$U = -\frac{2k}{\sqrt{v}} + \frac{h}{6}(v + 3y^2) + h_1 y + k_1,$$

h_1, k, k_1 désignant des nouvelles constantes. Tous les termes correspondent à des forces déjà examinées, sauf le second, que l'on peut écrire $\frac{1}{6}h(r^2 + 3y^2)$, r étant la distance du mobile à l'origine. Ce terme répond à deux forces : l'une dirigée vers l'origine et agissant en raison directe de la distance, l'autre perpendiculaire à Ox, et aussi en raison directe de la distance; mais, pour une même distance, l'intensité de la seconde doit être triple de celle de la première.

Cherchons de même s'il y a des solutions de l'équation (4) de la forme

$$U = \varphi(x^2 + y^2) + \psi(x).$$

Le résultat de la substitution est

$$4x(x^2 + y^2)\varphi'' + 6x\varphi' + x\psi'' + 3\psi' = 0.$$

Les variables $x^2 + y^2$ et x se séparent quand on divise par x. En désignant par h une constante, et posant $x^2+y^2=\rho$, les fonctions φ et ψ seront déterminées par les deux équations

$$4\rho\varphi'''+6\varphi'=h, \qquad \psi''+\frac{3}{x}\psi'+h=0.$$

On en conclut par l'intégration

$$U=h(\tfrac{1}{6}\rho-\tfrac{1}{8}x^2)-\frac{2k}{\sqrt{\rho}}-\frac{1}{2}\frac{h_1}{x^2}+k_1,$$

où les termes correspondent à des forces déjà trouvées, sauf le premier, qui peut s'écrire $h(\frac{1}{6}r^2-\frac{1}{8}x^2)$. Il correspond à deux forces proportionnelles à la distance, l'une dirigée vers l'origine, l'autre émanant de l'axe Oy. La première force étant choisie arbitrairement et étant, par exemple, attractive, la seconde doit être répulsive, et, pour une même distance, son intensité doit être les $\frac{3}{4}$ de celle de la première.

La méthode de Jacobi ramènera donc à des quadratures le mouvement d'un mobile sollicité simultanément par les forces suivantes :

1° Une force constante parallèle à Oy; 2° une force perpendiculaire à Oy et inversement proportionnelle au cube de la distance; 3° une force dirigée vers l'origine en raison inverse du carré de la distance; 4° une force hy émanant de Ox; 5° une force $-h_1x$ émanant de Oy; 6° une force dirigée vers l'origine et ayant pour expression $(\frac{1}{3}h+\frac{4}{3}h_1)r$.