ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. CASPARY

Sur une nouvelle manière d'établir les relations algébriques qui ont lieu entre les fonctions hyperelliptiques de première espèce

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 10 (1893), p. 253-294

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1893_3_10__253_0>

SUR UNE NOUVELLE MANIÈRE

D'ÉTABLIR

LES RELATIONS ALGÉBRIQUES

QUI ONT LIEU

ENTRE LES FONCTIONS HYPERELLIPTIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE,

PAR M. F. CASPARY.

Les méthodes profondes et ingénieuses que M. Hermite a créées pour l'intégration de l'équation de Lamé m'ont conduit, depuis quelques années, à mettre en lumière les liens étroits qui rattachent les fonctions thêta d'un nombre quelconque d'arguments aux quinze *éléments d'un système orthogonal*.

Je comprends sous ce nom les neuf coefficients a_{mn} (m, $n = 1, 2, 3$) d'une substitution orthogonale à déterminant $+1$ et les six quantités différentielles

$$\begin{aligned} p_h &= -(a_{1k}\,da_{1l} + a_{2k}\,da_{2l} + a_{3k}\,da_{3l}), \\ \varphi_h &= \quad a_{k1}\,da_{l1} + a_{k2}\,da_{l2} + a_{k3}\,da_{l3}, \end{aligned}$$

où h, k, l désignent les indices $1, 2, 3$; $2, 3, 1$; $3, 1, 2$.

Dans un Mémoire, inséré au Tome VI du *Journal de Mathématiques* de M. C. Jordan, j'ai déduit, des identités algébriques et différentielles qui ont lieu entre les éléments a_{mn}, p_h, φ_h, la théorie des fonctions thêta et sigma d'un seul argument, ainsi que la théorie des fonctions elliptiques.

Dans ce Mémoire je me propose d'aborder, d'une façon analogue, l'examen des fonctions hyperelliptiques de première espèce, en y établissant les relations algébriques qui existent entre ces fonctions.

Je prends, comme point de départ, la définition des fonctions hyperelliptiques, aussi élégante que générale, que l'on doit à M. Weierstrass, et j'en tire immédiatement, au moyen des identités ($5'_1$) qui expriment les différentielles da_{mn} par les p_h et φ_h, le théorème que les quinze fonctions hyperelliptiques de première espèce sont proportionnelles aux quinze éléments a_{mn}, p_h, φ_h (n^{os} 1 et 2). Des deux sens, en lesquels ce théorème fécond s'emploie, je ne fais usage, dans ce Mémoire, que d'un seul (n° 3).

En désignant par π_h, ϖ_h les facteurs algébriques des quantités p_h, φ_h, je déduis, dudit théorème, d'abord les relations linéaires entre a_{mn}, π_h, ϖ_h; puis j'exprime les carrés a^2_{mn}, π^2_h, ϖ^2_h les uns par les autres et j'établis, enfin, les relations entre les carrés et les produits de ces carrés (n^{os} 4, 5, 6).

Pour comprendre d'une façon synoptique et simple ces dernières relations, je remplace les fonctions a^2_{mn}, π^2_h, ϖ^2_h par les fonctions $q_{ij}(i, j = 1, 2, 3, 4)$, et je montre que ces seize fonctions, arrangées comme il suit

$$\begin{matrix} q_{11}, & q_{21}, & q_{31}, & q_{41}, \\ q_{12}, & q_{22}, & q_{32}, & q_{42}, \\ q_{13}, & q_{23}, & q_{33}, & q_{43}, \\ q_{14}, & q_{24}, & q_{34}, & q_{44}, \end{matrix}$$

forment les seize coefficients d'une substitution orthogonale à déterminant positif. En empruntant, d'ailleurs, pour cet arrangement, de la théorie des déterminants, la notion de *mineur*, je montre, de plus, que chaque fonction q_{ij} s'exprime d'une façon linéaire par les trois fonctions telles qu'elles sont placées dans les trois lignes ou dans les trois colonnes du mineur adjoint. Les neuf constantes $\mathfrak{a}_{mn}(m, n = 1, 2, 3)$, qui entrent dans ces relations linéaires, forment elles-mêmes les neuf coefficients d'une substitution orthogonale à déterminant $+1$, et s'expriment, au moyen des cinq constantes $a_\mu(\mu = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ dont dépendent les fonctions hyperelliptiques, par les valeurs particulières que prennent les fonctions q_{ij}, si l'on égale leurs arguments à deux constantes a_μ (n^{os} 7 et 8).

Aux relations que je viens de caractériser, je donne le nom de *relations rosenhainéennes*, et j'en déduis d'autres, que j'appelle *rela-*

tions göpeléennes. Ces dernières mettent en évidence que chaque fonction q_{ij} s'exprime aussi, d'une façon linéaire, par les quatre fonctions telles qu'elles forment, dans l'arrangement précédent, les mineurs de second ordre (nº 9). Ce même arrangement, base unique et lien commun des recherches que l'on va lire, conduit, de plus, à distinguer les systèmes rosenhainéens de caractéristiques des systèmes göpeléens et fait établir, d'une façon très concise, les types différents des uns et des autres (nº 10). En remplaçant ledit arrangement de seize fonctions par un arrangement correspondant de seize points ou de seize plans, j'examine, au moyen des principes dus à Cauchy et à Grassmann, quelques-unes des propriétés nombreuses dont jouissent ces points et plans, et je jette un coup d'œil rapide sur les problèmes de Géométrie, de Mécanique et de Cinématique auxquels elles sont liées (nº 11). Enfin je montre que toutes les relations, établies dans ce Mémoire pour les fonctions q_{ij}, deviennent, au moyen de huit quantités $\mathfrak{a}_j$, u_j, identités absolues, et que l'on peut composer, par conséquent, d'une infinité de manières, des fonctions q_{ij} d'autres fonctions qui sont liées par les mêmes relations que celles-ci. De là on conclut que ces relations ont lieu pour une échelle infinie de fonctions (nº 12).

1. *Définition des fonctions hyperelliptiques de première espèce. Relations préliminaires.* — Si l'on désigne par s_1, s_2 des variables et par A_0; a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 des constantes, les fonctions hyperelliptiques de première espèce sont définies, d'après M. Weierstrass, par les expressions

$$P_\mu = \sqrt{(s_1 - a_\mu)(s_2 - a_\mu)},$$

$$P_{\mu\nu} = P_{\nu\mu} = \frac{P_\mu P_\nu}{s_1 - s_2}\left[\frac{\sqrt{R(s_1)}}{(s_1 - a_\mu)(s_1 - a_\nu)} - \frac{\sqrt{R(s_2)}}{(s_2 - a_\mu)(s_2 - a_\nu)}\right]$$

$$(\mu, \nu = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon; \quad \mu \neq \nu),$$

où les indices α, β, γ, δ, ε désignent, dans un ordre quelconque, 0, 1, 2, 3, 4, et où

$$R(s_\varkappa) = A_0(s_\varkappa - a_0)(s_\varkappa - a_1)(s_\varkappa - a_2)(s_\varkappa - a_3)(s_\varkappa - a_4) \qquad (\varkappa = 1, 2).$$

Ces quinze fonctions P_μ, $P_{\mu\nu}$ sont liées entre elles par des relations algébriques très nombreuses, dont on déduit les relations préliminaires directement de la définition proposée.

En effet, au moyen des identités

$$\begin{aligned}
(\beta\gamma) + (\gamma\alpha) + (\alpha\beta) &= 0,\\
a_\alpha(\beta\gamma) + a_\beta(\gamma\alpha) + a_\gamma(\alpha\beta) &= 0,\\
a_\alpha^2(\beta\gamma) + a_\beta^2(\gamma\alpha) + a_\gamma^2(\alpha\beta) &= -(\alpha\beta)(\beta\gamma)(\gamma\alpha),
\end{aligned}$$

où $(\beta\gamma)$, $(\gamma\alpha)$, $(\alpha\beta)$ désignent les différences $a_\beta - a_\gamma$, $a_\gamma - a_\alpha$, $a_\alpha - a_\beta$, on tire immédiatement les relations

$$(1)\qquad (\beta\gamma)P_\alpha^2 + (\gamma\alpha)P_\beta^2 + (\alpha\beta)P_\gamma^2 = -(\alpha\beta)(\beta\gamma)(\gamma\alpha),$$

$$(2)\qquad (\beta\gamma)P_{\alpha\delta}^2 + (\gamma\alpha)P_{\beta\delta}^2 + (\alpha\beta)P_{\gamma\delta}^2 = -A_0(\alpha\beta)(\beta\gamma)(\gamma\alpha)(\delta\varepsilon),$$

$$(3)\qquad (\beta\gamma)P_\alpha P_{\alpha\delta} + (\gamma\alpha)P_\beta P_{\beta\delta} + (\alpha\beta)P_\gamma P_{\gamma\delta} = 0,$$

$$(4)\qquad (\beta\gamma)P_{\alpha\varepsilon}P_{\alpha\delta} + (\gamma\alpha)P_{\beta\varepsilon}P_{\beta\delta} + (\alpha\beta)P_{\gamma\varepsilon}P_{\gamma\delta} = 0;$$

et de même on déduit, de la définition des fonctions hyperelliptiques, les équations

$$(5)\qquad P_{\beta\delta}P_{\gamma\varepsilon} - P_{\beta\varepsilon}P_{\gamma\delta} = -A_0(\beta\gamma)(\delta\varepsilon)P_\alpha,$$

$$(6)\qquad P_\beta P_{\gamma\varepsilon} - P_\gamma P_{\beta\varepsilon} = (\beta\gamma)P_{\alpha\delta},$$

$$(7)\qquad P_{\alpha\delta}P_{\beta\delta} - P_{\alpha\varepsilon}P_{\beta\varepsilon} = -A_0(\delta\varepsilon)P_\alpha P_\beta.$$

A ces formules bien connues (¹) et à celles qui en découlent par des changements des indices, on peut donner une forme très simple, si l'on introduit (²) les neuf coefficients $a_{mn}(m, n = 1, 2, 3)$ d'une substitution orthogonale à déterminant $+1$.

En effet, si l'on désigne par e_1, e_2, e_3, e', e'' des unités positives ou négatives, liées par la condition

$$e_1 e_2 e_3 e' e'' = +1,$$

(¹) *Voir* WEIERSTRASS, *Theorie der Abelschen Functionen*, § 5 (*Journal de Crelle*, t. LII, p. 318-399).

(²) *Voir* WEBER, *Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlicher auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit* (*Math. Ann.*, t. XIV, form. (4), p. 190, et form. (24), p. 196). — BRIOSCHI, *Sulla teorica delle funzioni iperellipliche di primo ordine* (*Ann. di Mat.*, serie II, t. XIV, p. 248). — CASPARY, *Zur Theorie der Thetafunctionen mit zwei Argumenten* (*Journal de Kronecker*, t. XCIV, p. 78).

et si l'on pose

$$\left\{\begin{array}{lll}
a_{11}=\dfrac{e_1}{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\alpha\gamma}}\mathrm{P}_\alpha, & a_{21}=\dfrac{e'e_1}{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\alpha\gamma}\sqrt{\mathrm{A}_0(\delta\varepsilon)}}\mathrm{P}_{\alpha\delta}, & a_{31}=\dfrac{e''e_1}{i\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\alpha\gamma}\sqrt{\mathrm{A}_0(\delta\varepsilon)}}\mathrm{P}_{\alpha\varepsilon},\\
a_{12}=\dfrac{e_2}{i\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\beta\gamma}}\mathrm{P}_\beta, & a_{22}=\dfrac{e'e_2}{i\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\beta\gamma}\sqrt{\mathrm{A}_0(\delta\varepsilon)}}\mathrm{P}_{\beta\delta}, & a_{32}=\dfrac{-e''e_2}{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\beta\gamma}\sqrt{\mathrm{A}_0(\delta\varepsilon)}}\mathrm{P}_{\beta\varepsilon},\\
a_{13}=\dfrac{e_3}{\sqrt{\alpha\gamma}\sqrt{\beta\gamma}}\mathrm{P}_\gamma, & a_{23}=\dfrac{e'e_3}{\sqrt{\alpha\gamma}\sqrt{\beta\gamma}\sqrt{\mathrm{A}_0(\delta\varepsilon)}}\mathrm{P}_{\gamma\delta}, & a_{33}=\dfrac{e''e_3}{i\sqrt{\alpha\gamma}\sqrt{\beta\gamma}\sqrt{\mathrm{A}_0(\delta\varepsilon)}}\mathrm{P}_{\gamma\varepsilon},
\end{array}\right.$$
$$(i=\sqrt{-1},\qquad \sqrt{\mu\nu}=\sqrt{a_\mu-a_\nu}),$$

où les racines carrées sont prises avec le signe positif, les quantités $a_{mn}(m, n=1, 2, 3)$ satisfont, à cause des formules (1), (2), ..., (7), aux équations

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l}
a_{m1}^2+a_{m2}^2+a_{m3}^2=1,\\
a_{l1}a_{m1}+a_{l2}a_{m2}+a_{l3}a_{m3}=0,
\end{array}\right.\qquad (l\neq m;\ l,\ m=1,2,3);$$
$$\left\{\begin{array}{l}
a_{1h}=a_{2k}a_{3l}-a_{3k}a_{2l},\\
a_{2h}=a_{3k}a_{1l}-a_{1k}a_{3l},\\
a_{3h}=a_{1k}a_{2l}-a_{2k}a_{1l},
\end{array}\right.\qquad \left(h,\ k,\ l=\begin{array}{l}1,2,3;\\ 2,3,1;\\ 3,1,2,\end{array}\right)$$

qui mettent en évidence que les quantités a_{mn} forment les neuf coefficients d'une substitution orthogonale, dont le déterminant est égal à l'unité positive.

2. *Introduction des quantités différentielles p_h, v_h. Leurs expressions par les fonctions hyperelliptiques. Théorème.* — Sur les quinze fonctions hyperelliptiques de première espèce qui existent, *neuf* sont liées, au moyen du système (I), aux neuf coefficients a_{mn}. Pour faire paraître aussi les *six* fonctions qui restent, j'introduis les six quantités différentielles p_h, v_h, définies par les expressions

$$p_h=-(a_{1k}\,da_{1l}+a_{2k}\,da_{2l}+a_{3k}\,da_{3l})=\quad(a_{1l}\,da_{1k}+a_{2l}\,da_{2k}+a_{3l}\,da_{3k}),$$
$$v_h=\quad(a_{k1}\,da_{l1}+a_{k2}\,da_{l2}+a_{k3}\,da_{l3})=-(a_{l1}\,da_{k1}+a_{l2}\,da_{k2}+a_{l3}\,da_{k3}).$$

Je vais démontrer que ces quantités sont proportionnelles aux fonctions $\mathrm{P}_{\beta\gamma}$, $\mathrm{P}_{\gamma\alpha}$, $\mathrm{P}_{\alpha\beta}$, $\mathrm{P}_{\delta\varepsilon}$, P_ε, P_δ; résultat que j'ai établi, sans en donner la démonstration, dans une Note que M. Hermite a bien voulu présenter à l'Académie, le 28 juillet 1890 ([1]).

Comme on a, d'après la définition,

$$P_\mu = \sqrt{(s_1 - a_\mu)(s_2 - a_\mu)} \qquad (\mu = \alpha, \beta, \gamma),$$

on trouve, en différentiant,

$$dP_\mu = \frac{1}{2}\,\frac{(s_2 - a_\mu)\,ds_1 + (s_1 - a_\mu)\,ds_2}{P_\mu};$$

par conséquent, au moyen de l'égalité

$$v_3 = -a_{21}\,da_{11} - a_{22}\,da_{12} - a_{23}\,da_{13},$$

on obtient

$$v_3 = -\frac{e' P_\delta}{2(s_1 - s_2)}\,\mathfrak{V},$$

où $\mathfrak{V}$ est égal à l'expression

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\sqrt{R(s_1)}}{(s_1 - a_\alpha)(s_1 - a_\delta)} - \frac{\sqrt{R(s_2)}}{(s_2 - a_\alpha)(s_2 - a_\delta)}\right]\left[\frac{(s_2 - a_\alpha)\,ds_1 + (s_1 - a_\alpha)\,ds_2}{(\alpha\beta)(\alpha\gamma)\sqrt{A_0(\delta\varepsilon)}}\right]\\
+&\left[\frac{\sqrt{R(s_1)}}{(s_1 - a_\beta)(s_1 - a_\delta)} - \frac{\sqrt{R(s_2)}}{(s_2 - a_\beta)(s_2 - a_\delta)}\right]\left[\frac{(s_2 - a_\beta)\,ds_1 + (s_1 - a_\beta)\,ds_2}{(\beta\gamma)(\beta\alpha)\sqrt{A_0(\delta\varepsilon)}}\right]\\
+&\left[\frac{\sqrt{R(s_1)}}{(s_1 - a_\gamma)(s_1 - a_\delta)} - \frac{\sqrt{R(s_2)}}{(s_2 - a_\gamma)(s_2 - a_\delta)}\right]\left[\frac{(s_2 - a_\gamma)\,ds_1 + (s_1 - a_\gamma)\,ds_2}{(\gamma\alpha)(\gamma\beta)\sqrt{A_0(\delta\varepsilon)}}\right].
\end{aligned}$$

Au moyen de l'identité

$$\begin{aligned}
&\frac{s_\varkappa - a_\alpha}{(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(s_\iota - a_\alpha)} + \frac{s_\varkappa - a_\beta}{(\beta\gamma)(\beta\alpha)(s_\iota - a_\beta)} + \frac{s_\varkappa - a_\gamma}{(\gamma\alpha)(\gamma\beta)(s_\iota - a_\gamma)}\\
&\quad = -\frac{s_\iota - s_\varkappa}{(s_\iota - a_\alpha)(s_\iota - a_\beta)(s_\iota - a_\gamma)} \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2),
\end{aligned}$$

la quantité $\mathfrak{V}$ prend la valeur

$$\mathfrak{V} = -\frac{A_0(s_1 - s_2)}{\sqrt{A_0(\delta\varepsilon)}}\left[\frac{(s_1 - a_\varepsilon)\,ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{(s_2 - a_\varepsilon)\,ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}\right].$$

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXI, p. 225.

Par conséquent, si l'on pose

$$
\text{(III)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
dw_1 &= \frac{1}{2}\frac{s_1\,ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{1}{2}\frac{s_2\,ds_2}{\sqrt{R(s_2)}},\\
dw_2 &= \frac{1}{2}\frac{ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{1}{2}\frac{ds_2}{\sqrt{R(s_2)}},
\end{aligned}
\right.
$$

on trouve

$$
v_3 = \frac{e' A_0}{\sqrt{A_0(\delta\varepsilon)}} P_\delta(dw_1 - a_\varepsilon\, dw_2),
$$

et, par l'échange de δ et ε,

$$
v_2 = \frac{ie'' A_0}{\sqrt{A_0(\delta\varepsilon)}} P_\varepsilon(dw_1 - a_\delta\, dw_2).
$$

Pour obtenir, d'une façon analogue, et sans beaucoup de calculs, les expressions des quantités p_1, p_2, p_3; v_1, je fais usage des identités différentielles

$$
(3'_1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
da_{1h} &= a_{1k}\,p_l - a_{1l}\,p_k = -a_{2h}\,v_3 + a_{3h}\,v_2,\\
da_{2h} &= a_{2k}\,p_l - a_{2l}\,p_k = -a_{3h}\,v_1 + a_{1h}\,v_3,\\
da_{3h} &= a_{3k}\,p_l - a_{3l}\,p_k = -a_{1h}\,v_2 + a_{2h}\,v_1\\
&\qquad (h, k, l = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2).
\end{aligned}
\right.
$$

En prenant $h = 3$, on a d'abord

$$
da_{13} = -a_{23}\,v_3 + a_{33}\,v_2
$$

ou

$$
(\delta\varepsilon)\, dP_\gamma = -P_{\gamma\delta}\, P_\delta(dw_1 - a_\varepsilon\, dw_2) + P_{\gamma\varepsilon}\, P_\varepsilon(dw_1 - a_\delta\, dw_2).
$$

Si l'on y remplace δ par α, et ε par β, on a

$$
\text{(IV}^*\text{)} \qquad (\alpha\beta)\, dP_\gamma = -P_{\alpha\gamma}\, P_\alpha(dw_1 - a_\beta\, dw_2) + P_{\beta\gamma}\, P_\beta(dw_1 - a_\alpha\, dw_2)
$$

ou, eu égard aux expressions (I),

$$
\begin{aligned}
&e_3\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\alpha\gamma}\sqrt{\beta\gamma}\, da_{13}\\
&\qquad = -a_{11}\, e_1\sqrt{\alpha\gamma}\, P_{\alpha\gamma}(dw_1 - a_\beta\, dw_2) + a_{12}\, ie_2\sqrt{\beta\gamma}\, P_{\beta\gamma}(dw_1 - a_\alpha\, dw_2).
\end{aligned}
$$

Or on a identiquement

$$
da_{13} = a_{11}\,p_2 - a_{12}\,p_1;
$$

donc

$$p_1 = \frac{-ie_2e_3}{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\alpha\gamma}} \mathrm{P}_{\beta\gamma}(dw_1 - a_\alpha\, dw_2),$$

$$p_2 = \frac{-e_3e_1}{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\beta\gamma}} \mathrm{P}_{\alpha\gamma}(dw_1 - a_\beta\, dw_2).$$

De plus, si l'on échange, dans l'expression (IV*), γ et α, on obtient

$$\text{(IV)}\qquad (\beta\gamma)\, d\mathrm{P}_\alpha = \mathrm{P}_{\alpha\gamma}\mathrm{P}_\gamma(dw_1 - a_\beta\, dw_2) - \mathrm{P}_{\alpha\beta}\mathrm{P}_\beta(dw_1 - a_\gamma\, dw_2),$$

ou, d'après les expressions (I),

$$da_{11} = a_{12}\frac{-ie_1e_2}{\sqrt{\alpha\gamma}\sqrt{\beta\gamma}} \mathrm{P}_{\alpha\beta}(dw_1 - a_\gamma\, dw_2) - a_{13}p_2.$$

Or on a identiquement

$$da_{11} = a_{12}p_3 - a_{13}p_2;$$

donc

$$p_3 = \frac{-ie_1e_2}{\sqrt{\alpha\gamma}\sqrt{\beta\gamma}} \mathrm{P}_{\alpha\beta}(dw_1 - a_\gamma\, dw_2).$$

Pour obtenir enfin l'expression de v_1, j'emploie la deuxième identité ($5'_1$) pour $h = 1$, $k = 2$, $l = 3$, savoir l'identité

$$da_{21} = a_{22}p_3 - a_{23}p_2 = -a_{31}v_1 + a_{11}v_3.$$

En y substituant les valeurs de a_{21}, a_{22}, a_{23}, p_2, p_3; a_{11}, a_{31}, v_3, on a

$$\text{(V)}\quad (\beta\gamma)\, d\mathrm{P}_{\alpha\delta} = (\mathrm{P}_{\alpha\gamma}\mathrm{P}_{\delta\gamma} - \mathrm{P}_{\alpha\beta}\mathrm{P}_{\delta\beta})\, dw_1 - (a_\beta\mathrm{P}_{\alpha\gamma}\mathrm{P}_{\delta\gamma} - a_\gamma\mathrm{P}_{\alpha\beta}\mathrm{P}_{\delta\beta})\, dw_2,$$

et

$$d\mathrm{P}_{\alpha\delta} = ie'e''\mathrm{P}_{\alpha\varepsilon}v_1 + \mathrm{A}_0\mathrm{P}_\alpha\mathrm{P}_\delta(dw_1 - a_\varepsilon\, dw_2).$$

En égalant les deux valeurs de $d\mathrm{P}_{\alpha\delta}$, et en ayant égard à la formule

$$\mathrm{P}_{\alpha\gamma}\mathrm{P}_{\delta\gamma} - \mathrm{P}_{\alpha\beta}\mathrm{P}_{\delta\beta} = \mathrm{A}_0(\beta\gamma)\mathrm{P}_\alpha\mathrm{P}_\delta,$$

qui découle de la formule (7) si l'on y échange β et δ, ainsi que γ et ε, on trouve d'abord

$$ie'e''(\beta\gamma)\mathrm{P}_{\alpha\varepsilon}v_1 = [(\varepsilon\beta)\mathrm{P}_{\alpha\gamma}\mathrm{P}_{\delta\gamma} + (\gamma\varepsilon)\mathrm{P}_{\alpha\beta}\mathrm{P}_{\delta\beta}]\, dw_2.$$

Or on a, d'après la formule (4), en y échangeant α et ε,

$$(\beta\gamma)P_{\alpha\varepsilon}P_{\delta\varepsilon}+(\gamma\varepsilon)P_{\alpha\beta}P_{\delta\beta}+(\varepsilon\beta)P_{\alpha\gamma}P_{\delta\gamma}=0;$$

donc

$$v_1 = ie'e''P_{\delta\varepsilon}\,dw_2.$$

Ceci établi, on a, en réunissant les expressions trouvées,

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned}
p_1 &= \frac{-ie_2e_3}{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\alpha\gamma}}P_{\beta\gamma}(dw_1-a_\alpha\,dw_2), & v_1 &= ie'e''P_{\delta\varepsilon}\,dw_2,\\
p_2 &= \frac{-e_3e_1}{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\beta\gamma}}P_{\alpha\gamma}(dw_1-a_\beta\,dw_2), & v_2 &= \frac{ie''A_0}{\sqrt{A_0(\delta\varepsilon)}}P_\varepsilon(dw_1-a_\delta\,dw_2),\\
p_3 &= \frac{-ie_1e_2}{\sqrt{\alpha\gamma}\sqrt{\beta\gamma}}P_{\alpha\beta}(dw_1-a_\gamma\,dw_2); & v_3 &= \frac{e'A_0}{\sqrt{A_0(\delta\varepsilon)}}P_\delta(dw_1-a_\varepsilon\,dw_2).
\end{aligned}\right.$$

Si l'on appelle les quinze quantités $a_{mn}(m, n=1, 2, 3)$, p_h, $v_h(h=1, 2, 3)$ *éléments d'un système orthogonal*, les relations (I) et (II) peuvent être énoncées ainsi :

Théorème I. — *Les quinze fonctions hyperelliptiques de première espèce sont proportionnelles aux quinze éléments d'un système orthogonal.*

3. *Emploi du théorème précédent dans deux sens. Conséquences immédiates.* — Le théorème que je viens de démontrer forme la base de toute la théorie des fonctions hyperelliptiques de première espèce ainsi que de leurs applications, et s'emploie dans deux sens.

D'une part, on en déduit, au moyen des identités (5), ($5'_1$) et de leurs conséquences, toutes les relations qui ont lieu pour les fonctions P_μ, $P_{\mu\nu}$.

D'autre part, par simples changements des indices μ, ν, le même théorème fournit les équations algébriques et différentielles dont les unes sont les intégrales des autres et auxquelles doivent satisfaire les éléments a_{mn}, p_h, v_h pour être exprimés par les fonctions P_μ, $P_{\mu\nu}$.

Après avoir appliqué, dans ce second sens, le théorème précédent dans une Note récente (¹), je vais l'employer, dans ce Mémoire, uniquement dans le premier sens. Cependant, comme les relations qui ont lieu entre les fonctions P_μ, $P_{\mu\nu}$ sont très nombreuses, je me borne

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXII, p. 1305; 8 juin 1891.

à celles qui sont algébriques, et parmi ces relations je laisse de côté celles qui sont liées à quelques surfaces du quatrième degré [1].

Avant d'entrer dans les détails de ces recherches, je tire encore, du théorème I, quelques relations qui en découlent immédiatement et qui complètent les relations (1), (2), ..., (7).

Les quantités différentielles p_h, φ_h sont liées entre elles par les identités

$$(5_1)\qquad \begin{cases} p_h = a_{1h}\varphi_1 + a_{2h}\varphi_2 + a_{3h}\varphi_3, \\ \varphi_h = a_{h1}p_1 + a_{h2}p_2 + a_{h3}p_3, \end{cases} \qquad (h = 1, 2, 3),$$

qui se déduisent de la définition des quantités p_h, φ_h (n° 2), au moyen des identités (5), ($5'_1$). Par conséquent, on a, pour $h = 1$, l'identité

$$\varphi_1 = a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3;$$

si l'on y substitue les valeurs de a_{11}, a_{12}, a_{13}, φ_1, p_1, p_2, p_3, établies dans les expressions (I) et (II), on trouve, en égalant les facteurs de dw_1 et de dw_2, les relations

$$(8)\qquad \frac{P_\alpha P_{\beta\gamma}}{(\alpha\beta)(\alpha\gamma)} + \frac{P_\beta P_{\gamma\alpha}}{(\beta\gamma)(\beta\alpha)} + \frac{P_\gamma P_{\alpha\beta}}{(\gamma\alpha)(\gamma\beta)} = 0,$$

$$(9)\qquad \frac{a_\alpha P_\alpha P_{\beta\gamma}}{(\alpha\beta)(\alpha\gamma)} + \frac{a_\beta P_\beta P_{\gamma\alpha}}{(\beta\gamma)(\beta\alpha)} + \frac{a_\gamma P_\gamma P_{\alpha\beta}}{(\gamma\alpha)(\gamma\beta)} = P_{\delta\varepsilon}.$$

D'une façon analogue, on tire, de l'expression de φ_2, les deux relations

$$(10)\qquad \frac{P_{\alpha\delta} P_{\beta\gamma}}{(\alpha\beta)(\alpha\gamma)} + \frac{P_{\beta\delta} P_{\gamma\alpha}}{(\beta\gamma)(\beta\alpha)} + \frac{P_{\gamma\delta} P_{\alpha\beta}}{(\gamma\alpha)(\gamma\beta)} = -A_0 P_\varepsilon,$$

$$(11)\qquad \frac{a_\alpha P_{\alpha\delta} P_{\beta\gamma}}{(\alpha\beta)(\alpha\gamma)} + \frac{a_\beta P_{\beta\delta} P_{\gamma\alpha}}{(\beta\gamma)(\beta\alpha)} + \frac{a_\gamma P_{\gamma\delta} P_{\alpha\beta}}{(\gamma\alpha)(\gamma\beta)} = -A_0 a_\delta P_\varepsilon.$$

De l'expression de p_1, quand on y égale les coefficients de dw_2, on déduit, de même, la relation

$$(12)\qquad (\delta\varepsilon)P_\alpha P_{\delta\varepsilon} + a_\varepsilon P_{\alpha\varepsilon} P_\delta - a_\delta P_{\alpha\delta} P_\varepsilon = a_\alpha(\delta\varepsilon)P_{\beta\gamma}.$$

Si l'on élève au carré les quantités p_h ou $\varphi_h (h = 1, 2, 3)$, on obtient, au moyen des identités (5) et (5_1), l'identité nouvelle

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2.$$

---

(1) Brioschi, *Ann. di Mat.*, serie II, t. XIV, à partir de la page 250. — Caspary, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XV, p. 308-317.

En y substituant les expressions établies par (II), et en égalant, dans les deux membres, les coefficients de dw_1^2, $2\,dw_1\,dw_2$, dw_2^2, on trouve

$$\frac{P_{\beta\gamma}^2}{(\alpha\beta)(\alpha\gamma)} - \frac{P_{\alpha\gamma}^2}{(\alpha\beta)(\beta\gamma)} + \frac{P_{\alpha\beta}^2}{(\alpha\gamma)(\beta\gamma)} = \frac{A_0 P_\varepsilon^2}{(\delta\varepsilon)} - \frac{A_0 P_\delta^2}{(\delta\varepsilon)}, \tag{13}$$

$$\frac{a_\alpha P_{\beta\gamma}^2}{(\alpha\beta)(\alpha\gamma)} - \frac{a_\beta P_{\alpha\gamma}^2}{(\alpha\beta)(\beta\gamma)} + \frac{a_\gamma P_{\alpha\beta}^2}{(\alpha\gamma)(\beta\gamma)} = \frac{A_0 a_\delta P_\varepsilon^2}{(\delta\varepsilon)} - \frac{A_0 a_\varepsilon P_\delta^2}{(\delta\varepsilon)}, \tag{14}$$

$$\frac{a_\alpha^2 P_{\beta\gamma}^2}{(\alpha\beta)(\alpha\gamma)} - \frac{a_\beta^2 P_{\alpha\gamma}^2}{(\alpha\beta)(\beta\gamma)} + \frac{a_\gamma^2 P_{\alpha\beta}^2}{(\alpha\gamma)(\beta\gamma)} = \frac{A_0 a_\delta^2 P_\varepsilon^2}{(\delta\varepsilon)} - \frac{A_0 a_\varepsilon^2 P_\delta^2}{(\delta\varepsilon)} + P_{\delta\varepsilon}^2. \tag{15}$$

4. *Définition des quantités* π_h, ϖ_h $(h = 1, 2, 3)$. *Relations entre celles-ci et les coefficients* a_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$. *Relations entre les carrés* π_h^2 et ϖ_h^2. — On peut donner aux relations précédentes une forme nouvelle et remarquable, si l'on introduit les quantités π_h et ϖ_h $(h = 1, 2, 3)$, définies par les expressions

$$\text{(VI)} \quad \left\{ \begin{aligned} \pi_1 &= \frac{-ie_2e_3}{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\alpha\gamma}} P_{\beta\gamma}, & \varpi_1 &= ie'e'' P_{\delta\varepsilon}, \\ \pi_2 &= \frac{-e_3e_1}{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\beta\gamma}} P_{\alpha\gamma}, & \varpi_2 &= \frac{ie'' A_0}{\sqrt{A_0(\delta\varepsilon)}} P_\varepsilon, \\ \pi_3 &= \frac{-ie_1e_2}{\sqrt{\alpha\gamma}\sqrt{\beta\gamma}} P_{\alpha\beta}, & \varpi_3 &= \frac{e' A_0}{\sqrt{A_0(\delta\varepsilon)}} P_\delta. \end{aligned} \right.$$

Au moyen de ces quantités, les expressions (II) prennent la forme

$$\begin{aligned} p_1 &= \pi_1(dw_1 - a_\alpha\, dw_2), & v_1 &= \varpi_1\, dw_2, \\ p_2 &= \pi_2(dw_1 - a_\beta\, dw_2), & v_2 &= \varpi_2(dw_1 - a_\delta\, dw_2), \\ p_3 &= \pi_3(dw_1 - a_\gamma\, dw_2), & v_3 &= \varpi_3(dw_1 - a_\varepsilon\, dw_2), \end{aligned}$$

et les identités (3_1) entraînent les relations suivantes :

$$\text{(VII)} \quad \left\{ \begin{aligned} \pi_1 &= a_{21}\varpi_2 + a_{31}\varpi_3, & 0 &= a_{11}\pi_1 + a_{12}\pi_2 + a_{13}\pi_3, \\ \pi_2 &= a_{22}\varpi_2 + a_{32}\varpi_3, & \varpi_2 &= a_{21}\pi_1 + a_{22}\pi_2 + a_{23}\pi_3, \\ \pi_3 &= a_{23}\varpi_2 + a_{33}\varpi_3, & \varpi_3 &= a_{31}\pi_1 + a_{32}\pi_2 + a_{33}\pi_3, \end{aligned} \right.$$

et

$$\text{(VIII)} \quad \left\{ \begin{aligned} a_\alpha\pi_1 &= -a_{11}\varpi_1 + a_\delta a_{21}\varpi_2 + a_\varepsilon a_{31}\varpi_3, & -\varpi_1 &= a_\alpha a_{11}\pi_1 + a_\beta a_{12}\pi_2 + a_\gamma a_{13}\pi_3, \\ a_\beta\pi_2 &= -a_{12}\varpi_1 + a_\delta a_{22}\varpi_2 + a_\varepsilon a_{32}\varpi_3, & a_\delta\varpi_2 &= a_\alpha a_{21}\pi_1 + a_\beta a_{22}\pi_2 + a_\gamma a_{23}\pi_3, \\ a_\gamma\pi_3 &= -a_{13}\varpi_1 + a_\delta a_{23}\varpi_2 + a_\varepsilon a_{33}\varpi_3, & a_\varepsilon\varpi_3 &= a_\alpha a_{31}\pi_1 + a_\beta a_{32}\pi_2 + a_\gamma a_{33}\pi_3. \end{aligned} \right.$$

Dès lors résulte

$$(\mathrm{IX})\left\{\begin{aligned} a_{11}\pi_1+\qquad a_{12}\pi_2+\qquad a_{13}\pi_3&=0, & a_{11}\varpi_1+(\alpha\delta)a_{21}\varpi_2+(\alpha\varepsilon)a_{31}\varpi_3&=0,\\ (\alpha\delta)a_{21}\pi_1+(\beta\delta)a_{22}\pi_2+(\gamma\delta)a_{23}\pi_3&=0, & a_{12}\varpi_1+(\beta\delta)a_{22}\varpi_2+(\beta\varepsilon)a_{32}\varpi_3&=0,\\ (\alpha\varepsilon)a_{31}\pi_1+(\beta\varepsilon)a_{32}\pi_2+(\gamma\varepsilon)a_{33}\pi_3&=0, & a_{13}\varpi_1+(\gamma\delta)a_{23}\varpi_2+(\gamma\varepsilon)a_{33}\varpi_3&=0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on élève au carré les expressions de π_1, π_2, π_3 et de $a_\alpha\pi_1$, $a_\beta\pi_2$, $a_\gamma\pi_3$, et si l'on multiplie les unes par $a_\alpha\pi_1$, ... ou les autres par π_1 ..., on obtient les relations

$$(\mathrm{X})\qquad\left\{\begin{aligned} \pi_1^2+\quad\pi_2^2+\quad\pi_3^2&=\qquad\qquad\varpi_2^2+\quad\varpi_3^2,\\ a_\alpha\pi_1^2+a_\beta\pi_2^2+a_\gamma\pi_3^2&=\qquad\quad a_\delta\varpi_2^2+a_\varepsilon\varpi_3^2,\\ a_\alpha^2\pi_1^2+a_\beta^2\pi_2^2+a_\gamma^2\pi_3^2&=\varpi_1^2+a_\delta^2\varpi_2^2+a_\varepsilon^2\varpi_3^2,\end{aligned}\right.$$

qui représentent, sous une forme nouvelle, les relations (13), (14), (15) du numéro précédent. En ajoutant ces relations, après les avoir multipliées, respectivement, par $a_\beta a_\gamma$, $-(a_\beta+a_\gamma)$, $+1$; $a_\gamma a_\alpha$, $-(a_\gamma+a_\alpha)$, $+1$; $a_\alpha a_\beta$, $-(a_\alpha+a_\beta)$, $+1$, on trouve

$$(\mathrm{XI})\qquad\left\{\begin{aligned} (\alpha\beta)(\alpha\gamma)\pi_1^2&=\varpi_1^2+(\beta\delta)(\gamma\delta)\varpi_2^2+(\beta\varepsilon)(\gamma\varepsilon)\varpi_3^2,\\ (\beta\gamma)(\beta\alpha)\pi_2^2&=\varpi_1^2+(\gamma\delta)(\alpha\delta)\varpi_2^2+(\gamma\varepsilon)(\alpha\varepsilon)\varpi_3^2,\\ (\gamma\alpha)(\gamma\beta)\pi_3^2&=\varpi_1^2+(\alpha\delta)(\beta\delta)\varpi_2^2+(\alpha\varepsilon)(\beta\varepsilon)\varpi_3^2;\end{aligned}\right.$$

et, par conséquent,

$$(\mathrm{XII})\qquad\left\{\begin{aligned} \varpi_1^2&=(\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)\pi_1^2+(\beta\delta)(\beta\varepsilon)\pi_2^2+(\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)\pi_3^2,\\ (\delta\varepsilon)\varpi_2^2&=\qquad(\alpha\varepsilon)\pi_1^2+\qquad(\beta\varepsilon)\pi_2^2+\qquad(\gamma\varepsilon)\pi_3^2,\\ (\delta\varepsilon)\varpi_3^2&=\quad-(\alpha\delta)\pi_1^2-\qquad(\beta\delta)\pi_2^2-\qquad(\gamma\delta)\pi_3^2.\end{aligned}\right.$$

5. *Expressions des carrés a_{mn}^2 par les carrés π_h^2 et ϖ_h^2.* — D'après l'identité

$$a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2=1,$$

on a

$$(16)\qquad A_0(\delta\varepsilon)P_\alpha^2+P_{\alpha\delta}^2-P_{\alpha\varepsilon}^2=A_0(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\delta\varepsilon),$$

ou, en y échangeant δ et β ainsi que ε et γ,

$$A_0(\beta\gamma)P_\alpha^2=A_0(\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)(\beta\gamma)-P_{\alpha\beta}^2+P_{\alpha\gamma}^2.$$

De cette relation et de deux autres qui en résultent, si l'on y remplace les indices α, β, γ par β, γ, α; γ, α, β, on déduit immédiatement les expressions

$$(\mathrm{XIII}_1)\qquad \left\{\begin{aligned} a_{11}^2 &= \frac{(\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)}{(\alpha\beta)(\alpha\gamma)} + \frac{\pi_2^2}{A_0(\alpha\gamma)} + \frac{\pi_3^2}{A_0(\alpha\beta)},\\ a_{12}^2 &= \frac{(\beta\delta)(\beta\varepsilon)}{(\beta\gamma)(\beta\alpha)} + \frac{\pi_3^2}{A_0(\beta\alpha)} + \frac{\pi_1^2}{A_0(\beta\gamma)},\\ a_{13}^2 &= \frac{(\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)}{(\gamma\alpha)(\gamma\beta)} + \frac{\pi_1^2}{A_0(\gamma\beta)} + \frac{\pi_2^2}{A_0(\gamma\alpha)}. \end{aligned}\right.$$

D'une façon analogue on tire de l'identité

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1,$$

ou de la formule (2), si l'on y échange α et δ, la relation

$$(2^*)\qquad (\beta\gamma)P_{\alpha\delta}^2 = A_0(\beta\gamma)(\beta\delta)(\gamma\delta)(\alpha\varepsilon) - (\gamma\delta)P_{\alpha\beta}^2 + (\beta\delta)P_{\alpha\gamma}^2;$$

donc

$$(\mathrm{XIII}_2)\qquad \left\{\begin{aligned} a_{21}^2 &= \frac{(\alpha\varepsilon)(\beta\delta)(\gamma\delta)}{(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\delta\varepsilon)} + \frac{(\beta\delta)\pi_2^2}{A_0(\alpha\gamma)(\delta\varepsilon)} + \frac{(\gamma\delta)\pi_3^2}{A_0(\alpha\beta)(\delta\varepsilon)},\\ a_{22}^2 &= \frac{(\beta\varepsilon)(\gamma\delta)(\alpha\delta)}{(\beta\gamma)(\beta\alpha)(\delta\varepsilon)} + \frac{(\gamma\delta)\pi_3^2}{A_0(\beta\alpha)(\delta\varepsilon)} + \frac{(\alpha\delta)\pi_1^2}{A_0(\beta\gamma)(\delta\varepsilon)},\\ a_{23}^2 &= \frac{(\gamma\varepsilon)(\alpha\delta)(\beta\delta)}{(\gamma\alpha)(\gamma\beta)(\delta\varepsilon)} + \frac{(\alpha\delta)\pi_1^2}{A_0(\gamma\beta)(\delta\varepsilon)} + \frac{(\beta\delta)\pi_2^2}{A_0(\gamma\alpha)(\delta\varepsilon)}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on échange, dans ces expressions, δ et ε, on obtient les expressions pour a_{31}^2, a_{32}^2, a_{33}^2.

Pour exprimer, de même, les carrés a_{mn}^2 par ϖ_h^2, je change, dans la formule (1), β en δ et γ en ε, et, dans la formule (16) de ce numéro, α en δ et en ε. Alors on trouve

$$(\mathrm{XIV}_1)\qquad \left\{\begin{aligned} a_{11}^2 &= \frac{(\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)}{(\alpha\beta)(\alpha\gamma)} + \frac{(\alpha\delta)\varpi_2^2}{A_0(\alpha\beta)(\alpha\gamma)} + \frac{(\alpha\varepsilon)\varpi_3^2}{A_0(\alpha\beta)(\alpha\gamma)},\\ a_{21}^2 &= \frac{(\alpha\varepsilon)(\beta\delta)(\gamma\delta)}{(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\delta\varepsilon)} - \frac{\varpi_1^2}{A_0(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\delta\varepsilon)} - \frac{(\alpha\varepsilon)\varpi_3^2}{A_0(\alpha\beta)(\alpha\gamma)},\\ a_{31}^2 &= -\frac{(\alpha\delta)(\beta\varepsilon)(\gamma\varepsilon)}{(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\delta\varepsilon)} + \frac{\varpi_1^2}{A_0(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\delta\varepsilon)} - \frac{(\alpha\delta)\varpi_2^2}{A_0(\alpha\beta)(\alpha\gamma)}, \end{aligned}\right.$$

et dès lors résultent les expressions des coefficients a_{12}^2, a_{22}^2, a_{32}^2; a_{13}^2, a_{23}^2, a_{33}^2, si l'on remplace α, β, γ respectivement par β, γ, α; γ, α, β.

6. *Conséquences. Relations entre les carrés et les produits des quantités* a_{mn}^2, π_h^2, ϖ_h^2. — Les relations précédentes entraînent d'autres, très nombreuses et très importantes. Pour en aborder l'examen, je donne aux relations (XIII_1) une forme plus simple, en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned}
(\beta\gamma) &= m_1, & -(\alpha\delta)(\alpha\varepsilon) &= n_1,\\
(\gamma\alpha) &= m_2, & -(\beta\delta)(\beta\varepsilon) &= n_2,\\
(\alpha\beta) &= m_3; & -(\gamma\delta)(\gamma\varepsilon) &= n_3;
\end{aligned}$$

alors ces relations prennent la forme suivante :

$$(\mathrm{XIII}_1^*)\qquad \left\{\begin{aligned}
A_0 m_2 m_3 a_{11}^2 &= A_0 n_1 - m_3\pi_2^2 + m_2\pi_3^2,\\
A_0 m_3 m_1 a_{12}^2 &= A_0 n_2 - m_1\pi_3^2 + m_3\pi_1^2,\\
A_0 m_1 m_2 a_{13}^2 &= A_0 n_3 - m_2\pi_1^2 + m_1\pi_2^2.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on élève ces formules au carré et qu'on les divise respectivement par $m_2m_3n_1$, $m_3m_1n_2$, $m_1m_2n_3$, on obtient par addition

$$\begin{aligned}
&A_0^2\left(\frac{m_2m_3}{n_1}a_{11}^4 + \frac{m_3m_1}{n_2}a_{12}^4 + \frac{m_1m_2}{n_3}a_{13}^4\right)\\
&\quad = \frac{A_0^2}{m_1m_2m_3}(m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3)\\
&\qquad + \frac{m_2n_2 + m_3n_3}{m_1n_2n_3}\pi_1^4 + \frac{m_3n_3 + m_1n_1}{m_2n_3n_1}\pi_2^4 + \frac{m_1n_1 + m_2n_2}{m_3n_1n_2}\pi_3^4\\
&\qquad - \frac{2}{n_1n_2n_3}(n_2n_3\pi_2^2\pi_3^2 + n_3n_1\pi_3^2\pi_1^2 + n_1n_2\pi_1^2\pi_2^2).
\end{aligned}$$

Or on tire des relations (XIII_1^*) immédiatement l'identité

$$m_1m_2m_3 = m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3;$$

par conséquent, le second membre de la formule précédente devient

$$A_0^2 + \left(\frac{m_2m_3}{n_2n_3}\pi_1^4 + \frac{m_3m_1}{n_3n_1}\pi_2^4 + \frac{m_1m_2}{n_1n_2}\pi_3^4\right) - \frac{1}{n_1n_2n_3}(n_1\pi_1^2 + n_2\pi_2^2 + n_3\pi_3^2)^2;$$

donc on a

$$\begin{aligned}
&\frac{m_2m_3}{n_1}a_{11}^4 + \frac{m_3m_1}{n_2}a_{12}^4 + \frac{m_1m_2}{n_3}a_{13}^4 + \frac{1}{A_0^2n_1n_2n_3}(n_1\pi_1^2 + n_2\pi_2^2 + n_3\pi_3^2)^2\\
&\quad = \left(\frac{m_2m_3}{A_0^2n_2n_3}\pi_1^4 + \frac{m_3m_1}{A_0^2n_3n_1}\pi_2^4 + \frac{m_1m_2}{A_0^2n_1n_2}\pi_3^4 + 1\right).
\end{aligned}$$

Les relations (XIII_1) deviennent les relations (XIII_2), si l'on remplace, en même temps, a_{11}^2, a_{12}^2, a_{13}^2 par a_{21}^2, a_{22}^2, a_{23}^2; π_1^2, π_2^2, π_3^2 par $\frac{(\alpha\delta)}{(\delta\varepsilon)}\pi_1^2$, $\frac{(\beta\delta)}{(\delta\varepsilon)}\pi_2^2$, $\frac{(\gamma\delta)}{(\delta\varepsilon)}\pi_3^2$ et n_1, n_2, n_3 par n'_1, n'_2, n'_3, où

$$\begin{aligned}
-(\delta\varepsilon)\,n'_1 &= (\alpha\varepsilon)\,(\beta\delta)\,(\gamma\delta),\\
-(\delta\varepsilon)\,n'_2 &= (\beta\varepsilon)\,(\gamma\delta)\,(\alpha\delta),\\
-(\delta\varepsilon)\,n'_3 &= (\gamma\varepsilon)\,(\alpha\delta)\,(\beta\delta).
\end{aligned}$$

Si l'on applique ces changements à la formule précédente, son second membre ne change pas et son premier membre devient

$$\frac{m_2 m_3}{n'_1} a_{21}^4 + \frac{m_3 m_1}{n'_2} a_{22}^4 + \frac{m_1 m_2}{n'_3} a_{23}^4 - \frac{1}{\Lambda_0^2 (\alpha\varepsilon)(\beta\varepsilon)(\gamma\varepsilon)(\delta\varepsilon)}[(\alpha\varepsilon)\,\pi_1^2 + (\beta\varepsilon)\,\pi_2^2 + (\gamma\varepsilon)\,\pi_3^2]^2.$$

Par conséquent, on obtient, eu égard aux relations (XII),

$$\begin{aligned}
&\frac{m_2 m_3}{n_1} a_{11}^4 + \frac{m_3 m_1}{n_2} a_{12}^4 + \frac{m_1 m_2}{n_3} a_{13}^4 + \frac{1}{\Lambda_0^2\, n_1 n_2 n_3}\varpi_1^4 = q^4,\\
&\frac{m_2 m_3}{n'_1} a_{21}^4 + \frac{m_3 m_1}{n'_2} a_{22}^4 + \frac{m_1 m_2}{n'_3} a_{23}^4 - \frac{(\delta\varepsilon)}{\Lambda_0^2 (\alpha\varepsilon)(\beta\varepsilon)(\gamma\varepsilon)}\varpi_2^4 = q^4,\\
&\frac{m_2 m_3}{\Lambda_0^2 n_2 n_3}\pi_1^4 + \frac{m_3 m_1}{\Lambda_0^2 n_3 n_1}\pi_2^4 + \frac{m_1 m_2}{\Lambda_0^2 n_1 n_2}\pi_3^4 + 1 = q^4,
\end{aligned}$$

et, si l'on échange, dans la deuxième formule, δ et ε,

$$\frac{m_2 m_3}{n''_1} a_{31}^4 + \frac{m_3 m_1}{n''_2} a_{32}^2 + \frac{m_1 m_2}{n''_3} a_{33}^2 + \frac{(\delta\varepsilon)}{\Lambda_0^2 (\alpha\delta)(\beta\delta)(\gamma\delta)}\varpi_3^4 = q^4,$$

où

$$\begin{aligned}
(\delta\varepsilon)\,n''_1 &= (\alpha\delta)\,(\beta\varepsilon)\,(\gamma\varepsilon),\\
(\delta\varepsilon)\,n''_2 &= (\beta\delta)\,(\gamma\varepsilon)\,(\alpha\varepsilon),\\
(\delta\varepsilon)\,n''_3 &= (\gamma\delta)\,(\alpha\varepsilon)\,(\beta\varepsilon).
\end{aligned}$$

En ajoutant les relations (XIII_1) et (XIII_2), après les avoir multipliées respectivement par $m_2 m_3 \pi_1^2, m_3 m_1 \pi_2^2, m_1 m_2 \pi_3^2$ et par $(\alpha\delta) m_2 m_3 \pi_1^2$, $(\beta\delta) m_3 m_1 \pi_2^2$, $(\gamma\delta) m_1 m_2 \pi_3^2$, on trouve, eu égard aux relations (XII),

$$\begin{aligned}
&m_2 m_3\, a_{11}^2 \pi_1^2 + m_3 m_1\, a_{12}^2 \pi_2^2 + m_1 m_2\, a_{13}^2 \pi_3^2 + \varpi_1^2 = 0,\\
&(\alpha\delta)\, m_2 m_3\, a_{21}^2 \pi_1^2 + (\beta\delta)\, m_3 m_1\, a_{22}^2 \pi_2^2 + (\gamma\delta)\, m_1 m_2\, a_{23}^2 \pi_3^2 + (\alpha\delta)(\beta\delta)(\gamma\delta)\,\varpi_2^2 = 0,
\end{aligned}$$

et, si l'on échange, dans la dernière formule, δ et ε,

$$(\alpha\varepsilon)\, m_2 m_3\, a_{31}^2 \pi_1^2 + (\beta\varepsilon)\, m_3 m_1\, a_{32}^2 \pi_2^2 + (\gamma\varepsilon)\, m_1 m_2\, a_{33}^2 \pi_3^2 + (\alpha\varepsilon)(\beta\varepsilon)(\gamma\varepsilon)\varpi_3^2 = 0.$$

Si l'on forme de même, au moyen des expressions (XIII_1) et (XIII_2), l'expression

$$A_0^2(\delta\varepsilon)\,[(\beta\varepsilon)(\gamma\varepsilon)\, m_2 m_3\, a_{11}^2 a_{21}^2 + (\gamma\varepsilon)(\alpha\varepsilon)\, m_3 m_1\, a_{12}^2 a_{22}^2 + (\alpha\varepsilon)(\beta\varepsilon)\, m_1 m_2\, a_{13}^2 a_{23}^2],$$

on voit immédiatement que, dans le second membre, le terme

$$(\beta\varepsilon)(\gamma\varepsilon)\, m_1 n_1 n'_1 + (\gamma\varepsilon)(\alpha\varepsilon)\, m_2 n_2 n'_2 + (\alpha\varepsilon)(\beta\varepsilon)\, m_3 n_3 n'_3$$

s'évanouit, et que, d'ailleurs, les coefficients de π_1^2, π_2^2, π_3^2 se détruisent; par conséquent, les termes qui restent, dans le second membre, sont les suivants

$$\begin{gathered} -(\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)^2\pi_1^4 - (\beta\delta)(\beta\varepsilon)^2\pi_2^4 - (\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)^2\pi_3^4 - (\beta\varepsilon)(\gamma\varepsilon)[(\beta\delta)+(\gamma\delta)]\,\pi_2^2\pi_3^2 \\ -(\gamma\varepsilon)(\alpha\varepsilon)[(\gamma\delta)+(\alpha\delta)]\,\pi_3^2\pi_1^2 - (\alpha\varepsilon)(\beta\varepsilon)[(\alpha\delta)+(\beta\delta)]\,\pi_1^2\pi_2^2 \end{gathered}$$

ou

$$-[(\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)\pi_1^2 + (\beta\delta)(\beta\varepsilon)\pi_2^2 + (\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)\pi_3^2]\,[(\alpha\varepsilon)\pi_1^2 + (\beta\varepsilon)\pi_2^2 + (\gamma\varepsilon)\pi_3^2] = -(\delta\varepsilon)\,\varpi_1^2\varpi_2^2.$$

Donc

$$A_0^2[(\beta\varepsilon)(\gamma\varepsilon)\, m_2 m_3\, a_{11}^2 a_{21}^2 + (\gamma\varepsilon)(\alpha\varepsilon)\, m_3 m_1\, a_{12}^2 a_{22}^2 + (\alpha\varepsilon)(\beta\varepsilon)\, m_1 m_2\, a_{13}^2 a_{23}^2] + \varpi_1^2\varpi_2^2 = 0,$$

et, en échangeant δ et ε,

$$A_0^2[(\beta\delta)(\gamma\delta)\, m_2 m_3\, a_{11}^2 a_{31}^2 + (\gamma\delta)(\alpha\delta)\, m_3 m_1\, a_{12}^2 a_{32}^2 + (\alpha\delta)(\beta\delta)\, m_1 m_2\, a_{13}^2 a_{33}^2] + \varpi_1^2\varpi_3^2 = 0.$$

D'une façon tout à fait analogue, on obtient enfin

$$A_0^2(m_2 m_3\, a_{21}^2 a_{31}^2 + m_3 m_1\, a_{22}^2 a_{32}^2 + m_1 m_2\, a_{23}^2 a_{33}^2) + \varpi_2^2\varpi_3^2 = 0.$$

Aux dix relations que je viens d'établir entre les carrés et les produits des quantités a_{mn}^2, π_h^2, $\varpi_h^2 (m, n, h = 1, 2, 3)$, correspondent dix autres, où ces quantités sont remplacées par a_{nm}^2, ϖ_h^2, π_h^2. En effet, au moyen des relations (XIII_1) et (XIII_2), on trouve d'abord

$$\begin{aligned} &A_0^2\, m_2^2 m_3^2\left(\frac{a_{11}^4}{n_1} + \frac{a_{21}^4}{n'_1} + \frac{a_{31}^4}{n''_1}\right) \\ &\quad = A_0^2(n_1 + n'_1 + n''_1) + \frac{m_3^2}{n_3 n_1}(n_3 + n'_3 + n''_3)\pi_2^4 + \frac{m_2^2}{n_1 n_2}(n_2 + n'_2 + n''_2)\pi_3^4. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} n_1 + n'_1 + n''_1 &= m_2 m_3, \\ n_2 + n'_2 + n''_2 &= m_3 m_1, \\ n_3 + n'_3 + n''_3 &= m_1 m_2; \end{aligned}$$

par conséquent on obtient

$$m_2 m_3\left(\frac{a_{11}^4}{n_1} + \frac{a_{21}^4}{n'_1} + \frac{a_{31}^4}{n''_1}\right) = 1 + \frac{m_3 m_1}{A_0^2 n_3 n_1}\pi_2^4 + \frac{m_1 m_2}{A_0^2 n_1 n_2}\pi_3^4$$

ou, en ajoutant, dans les deux membres, le terme $\frac{m_2 m_3}{A_0^2 n_2 n_3}\pi_1^4$,

$$m_2 m_3\left(\frac{a_{11}^4}{n_1} + \frac{a_{21}^4}{n'_1} + \frac{a_{31}^4}{n''_1} + \frac{\pi_1^4}{A_0^2 n_2 n_3}\right) = q^\star.$$

De là résulte, en remplaçant les indices α, β, γ par β, γ, α et γ, α, β,

$$\begin{aligned} m_3 m_1\left(\frac{a_{12}^4}{n_2} + \frac{a_{22}^4}{n'_2} + \frac{a_{32}^4}{n''_2} + \frac{\pi_2^4}{A_0^2 n_3 n_1}\right) &= q^\star, \\ m_1 m_2\left(\frac{a_{13}^4}{n_3} + \frac{a_{23}^4}{n'_3} + \frac{a_{33}^4}{n''_3} + \frac{\pi_3^4}{A_0^2 n_1 n_2}\right) &= q^\star, \end{aligned}$$

et si l'on ajoute les quatre expressions de $q^\star$, établies plus haut (p. 267), on trouve aussi

$$\frac{\varpi_1^4}{A_0^2 n_1 n_2 n_3} - \frac{(\delta\varepsilon)\varpi_2^4}{A_0^2(\alpha\varepsilon)(\beta\varepsilon)(\gamma\varepsilon)} + \frac{(\delta\varepsilon)\varpi_3^4}{A_0^2(\alpha\delta)(\beta\delta)(\gamma\delta)} + 1 = q^\star.$$

Au moyen des relations (XIV_1), on a immédiatement

$$\begin{aligned} &(\alpha\beta)(\alpha\gamma)[a_{11}^2\varpi_1^2 + (\alpha\delta)(\delta\varepsilon)a_{21}^2\varpi_2^2 - (\alpha\varepsilon)(\delta\varepsilon)a_{31}^2\varpi_3^2] \\ &= (\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)[\quad \varpi_1^2 + (\beta\delta)(\gamma\delta)\varpi_2^2 \quad + (\beta\varepsilon)(\gamma\varepsilon)\varpi_3^2], \end{aligned}$$

ou, eu égard à la première relation (XI),

$$a_{11}^2\varpi_1^2 + (\alpha\delta)(\delta\varepsilon)a_{21}^2\varpi_2^2 - (\alpha\varepsilon)(\delta\varepsilon)a_{31}^2\varpi_3^2 - (\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)\pi_1^2 = 0$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} a_{12}^2\varpi_1^2 + (\beta\delta)(\delta\varepsilon)a_{22}^2\varpi_2^2 - (\beta\varepsilon)(\delta\varepsilon)a_{32}^2\varpi_3^2 - (\beta\delta)(\beta\varepsilon)\pi_2^2 &= 0, \\ a_{13}^2\varpi_1^2 + (\gamma\delta)(\delta\varepsilon)a_{23}^2\varpi_2^2 - (\gamma\varepsilon)(\delta\varepsilon)a_{33}^2\varpi_3^2 - (\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)\pi_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

Enfin on tire des relations (XIII_1) et (XIV_1)

$$\begin{aligned}
&A_0^2[n_3 a_{11}^2 a_{12}^2 - (\gamma\varepsilon)(\delta\varepsilon) a_{21}^2 a_{22}^2 + (\gamma\delta)(\delta\varepsilon) a_{31}^2 a_{32}^2] + \pi_1^2 \pi_2^2 = 0,\\
&A_0^2[n_1 a_{12}^2 a_{13}^2 - (\alpha\varepsilon)(\delta\varepsilon) a_{22}^2 a_{23}^2 + (\alpha\delta)(\delta\varepsilon) a_{32}^2 a_{33}^2] + \pi_2^2 \pi_3^2 = 0,\\
&A_0^2[n_2 a_{13}^2 a_{11}^2 - (\beta\varepsilon)(\delta\varepsilon) a_{23}^2 a_{21}^2 + (\beta\delta)(\delta\varepsilon) a_{33}^2 a_{31}^2] + \pi_3^2 \pi_1^2 = 0.
\end{aligned}$$

7. *Introduction des seize fonctions q_{11} $q_{12}, \ldots, q_{34}, q_{44}$ et des neuf constantes $\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{12}, \ldots, \mathfrak{a}_{33}$. Théorèmes et corollaires.* — Les vingt relations entre les carrés et les produits des éléments a_{mn}^2, π_h^2, ϖ_h^2, établies dans le numéro précédent, bien qu'elles soient très simples, manquent de symétrie et d'homogénéité. Pour cela, j'introduis, au lieu des quinze éléments a_{mn}^2, π_h^2, ϖ_h^2 les seize fonctions $q_{11}, q_{12}, \ldots, q_{34}$, q_{44}, en posant

$$(\mathrm{XV})\quad\left\{\begin{array}{llll}
\dfrac{\sqrt{m_2}\sqrt{m_3}}{\sqrt{n_1}} a_{11}^2 = \dfrac{q_{11}}{q_{44}}, & \dfrac{\sqrt{m_2}\sqrt{m_3}}{\sqrt{n_1'}} a_{21}^2 = \dfrac{q_{21}}{q_{44}}, & \dfrac{\sqrt{m_2}\sqrt{m_3}}{\sqrt{n_1''}} a_{31}^2 = \dfrac{q_{31}}{q_{44}}, & \dfrac{\sqrt{m_2}\sqrt{m_3}}{A_0\sqrt{n_2}\sqrt{n_3}} \pi_1^2 = \dfrac{q_{41}}{q_{44}},\\[2ex]
\dfrac{\sqrt{m_3}\sqrt{m_1}}{\sqrt{n_2}} a_{12}^2 = \dfrac{q_{12}}{q_{44}}, & \dfrac{\sqrt{m_3}\sqrt{m_1}}{\sqrt{n_2'}} a_{22}^2 = \dfrac{q_{22}}{q_{44}}, & \dfrac{\sqrt{m_3}\sqrt{m_1}}{\sqrt{n_2''}} a_{32}^2 = \dfrac{q_{32}}{q_{44}}, & \dfrac{\sqrt{m_3}\sqrt{m_1}}{A_0\sqrt{n_3}\sqrt{n_1}} \pi_2^2 = \dfrac{q_{42}}{q_{44}},\\[2ex]
\dfrac{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}}{\sqrt{n_3}} a_{13}^2 = \dfrac{q_{13}}{q_{44}}, & \dfrac{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}}{\sqrt{n_3'}} a_{23}^2 = \dfrac{q_{23}}{q_{44}}, & \dfrac{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}}{\sqrt{n_3''}} a_{33}^2 = \dfrac{q_{33}}{q_{44}}, & \dfrac{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}}{A_0\sqrt{n_1}\sqrt{n_2}} \pi_3^2 = \dfrac{q_{43}}{q_{44}},\\[2ex]
\dfrac{1}{A_0\sqrt{n}}\, \varpi_1^2 = \dfrac{q_{14}}{q_{44}}, & \dfrac{1}{A_0\sqrt{n'}}\, \varpi_2^2 = \dfrac{q_{24}}{q_{44}}, & \dfrac{1}{A_0\sqrt{n''}}\, \varpi_3^2 = \dfrac{q_{34}}{q_{44}}, &
\end{array}\right.$$

où

$$(\mathrm{XVI})\quad\left\{\begin{array}{lll}
\sqrt{m_1} = \sqrt{\beta\gamma}, & \sqrt{m_2} = i\sqrt{\alpha\gamma}, & \sqrt{m_3} = \sqrt{\alpha\beta},\\[2ex]
\sqrt{n_1} = i\sqrt{\alpha\delta}\sqrt{\alpha\varepsilon}, & \sqrt{n_1'} = \dfrac{\sqrt{\alpha\varepsilon}\sqrt{\beta\delta}\sqrt{\gamma\delta}}{i\sqrt{\delta\varepsilon}}, & \sqrt{n_1''} = \dfrac{\sqrt{\alpha\delta}\sqrt{\beta\varepsilon}\sqrt{\gamma\varepsilon}}{\sqrt{\delta\varepsilon}},\\[2ex]
\sqrt{n_2} = i\sqrt{\beta\delta}\sqrt{\beta\varepsilon}, & \sqrt{n_2'} = \dfrac{\sqrt{\beta\varepsilon}\sqrt{\gamma\delta}\sqrt{\alpha\delta}}{i\sqrt{\delta\varepsilon}}, & \sqrt{n_2''} = \dfrac{\sqrt{\beta\delta}\sqrt{\gamma\varepsilon}\sqrt{\alpha\varepsilon}}{\sqrt{\delta\varepsilon}},\\[2ex]
\sqrt{n_3} = i\sqrt{\gamma\delta}\sqrt{\gamma\varepsilon}, & \sqrt{n_3'} = \dfrac{\sqrt{\gamma\varepsilon}\sqrt{\alpha\delta}\sqrt{\beta\delta}}{i\sqrt{\delta\varepsilon}}, & \sqrt{n_3''} = \dfrac{\sqrt{\gamma\delta}\sqrt{\alpha\varepsilon}\sqrt{\beta\varepsilon}}{\sqrt{\delta\varepsilon}},\\[2ex]
\sqrt{n} = \sqrt{n_1}\sqrt{n_2}\sqrt{n_3}, & \sqrt{n'} = i\dfrac{\sqrt{\alpha\varepsilon}\sqrt{\beta\varepsilon}\sqrt{\gamma\varepsilon}}{\sqrt{\delta\varepsilon}}, & \sqrt{n''} = -\dfrac{\sqrt{\alpha\delta}\sqrt{\beta\delta}\sqrt{\gamma\delta}}{\sqrt{\delta\varepsilon}}.
\end{array}\right.$$

Dans ces expressions, i est égal à $\sqrt{-1}$ et les racines carrées sont prises avec le signe positif.

Au moyen des expressions (XV) et (XVI), et si l'on pose, d'ailleurs, $q^* q_{44} = q$, les vingt relations entre les carrés et les produits des éléments a_{mn}^2, π_h^2, ϖ_h^2, établies dans le numéro précédent, prennent les formes suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} q_{j1}^2 \quad + q_{j2}^2 \quad + q_{j3}^2 \quad + q_{j4}^2 \quad = q \\ q_{j1}\, q_{j'1} + q_{j2}\, q_{j'2} + q_{j3}\, q_{j'3} + q_{j4}\, q_{j'4} = 0 \end{array}\right\} \quad (j \neq j';\ j, j' = 1, 2, 3, 4)$$

et

$$\left.\begin{array}{l} q_{1j}^2 \quad + q_{2j}^2 \quad + q_{3j}^2 \quad + q_{4j}^2 \quad = q \\ q_{1j}\, q_{1j'} + q_{2j}\, q_{2j'} + q_{3j}\, q_{3j'} + q_{4j}\, q_{4j'} = 0 \end{array}\right\} \quad (j \neq j';\ j, j' = 1, 2, 3, 4).$$

Ces relations, dont les unes entraînent les autres, mettent en évidence que les seize fonctions $q_{11}, q_{12}, \ldots, q_{34}, q_{44}$ forment les coefficients d'une substitution orthogonale. Par conséquent, on est conduit au théorème suivant [1] :

Théorème II. — *Les seize fonctions*

$$\text{(XVII)} \qquad \left\{\begin{array}{llll} q_{11}, & q_{21}, & q_{31}, & q_{41}, \\ q_{12}, & q_{22}, & q_{32}, & q_{42}, \\ q_{13}, & q_{23}, & q_{33}, & q_{43}, \\ q_{14}, & q_{24}, & q_{34}, & q_{44} \end{array}\right.$$

définies par les expressions (XV) *forment les seize coefficients d'une substitution orthogonale à déterminant positif.*

Le théorème que je viens d'énoncer donne naissance à un très grand nombre de conséquences nouvelles; parmi les plus importantes et les plus souvent employées, je signale les suivantes, en empruntant, pour l'arrangement (XVII), à la théorie des déterminants la notion de *mineur :*

Corollaire I. — *Dans l'arrangement* (XVII), *chaque fonction* q_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ *est placée avec trois autres dans une ligne et aussi dans une colonne; la somme des carrés des unes, qui forment le triple hori-*

---

[1] Ce théorème a trait à un autre, relatif aux fonctions thêta de deux arguments, que j'ai établi, en 1881, dans le Tome XCIV du *Journal de Borchardt*, p. 77. *Voir* aussi la Note insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CIV, p. 492.

zontal, est égale à la somme des carrés des autres, qui forment le triple vertical.

Corollaire II. — *La somme des carrés de quatre fonctions q_{ij}, telles qu'elles se trouvent, dans l'arrangement* (XVII), *dans un mineur quelconque de second ordre, est égale à la somme des carrés de ces quatre fonctions qui se trouvent dans le mineur adjoint.*

Corollaire III. — *Si l'on forme, dans l'arrangement* (XVII), *les déterminants de second ordre, ils sont égaux aux déterminants adjoints.*

Au théorème précédent, relatif aux fonctions q_{ij}, correspond un autre, relatif aux constantes α_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$, définies comme il suit :

$$\text{(XVIII)}\quad \left\{\begin{array}{lll} \alpha_{11} = \dfrac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{m_2}\sqrt{m_3}}, & \alpha_{21} = \dfrac{\sqrt{n'_1}}{\sqrt{m_2}\sqrt{m_3}}, & \alpha_{31} = \dfrac{\sqrt{n''_1}}{\sqrt{m_2}\sqrt{m_3}}, \\ \alpha_{12} = \dfrac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{m_3}\sqrt{m_1}}, & \alpha_{22} = \dfrac{\sqrt{n'_2}}{\sqrt{m_3}\sqrt{m_1}}, & \alpha_{32} = \dfrac{\sqrt{n''_2}}{\sqrt{m_3}\sqrt{m_1}}, \\ \alpha_{13} = \dfrac{\sqrt{n_3}}{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}}, & \alpha_{23} = \dfrac{\sqrt{n'_3}}{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}}, & \alpha_{33} = \dfrac{\sqrt{n''_3}}{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2}}. \end{array}\right.$$

En effet, si l'on transforme les identités entre les constantes m_h, n_h, n'_h, n''_h $(h = 1, 2, 3)$, établies dans le n° 6 (*voir* p. 266 et 269), ainsi que les identités qui découlent immédiatement des expressions (XVI), on reconnaît que les constantes α_{mn} sont liées entre elles par les relations (5) du n° 1 (*voir* p. 257). Donc, on a le théorème :

Théorème III. — *Les constantes α_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$, définies par les expressions* (XVIII), *forment les neuf coefficients d'une substitution orthogonale dont le déterminant est égal à l'unité positive.*

8. *Relations linéaires entre les seize fonctions q_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$. Théorème. Lien entre les constantes $\alpha_{mn}(m, n = 1, 2, 3)$ et les fonctions q_{ij}.* — Les fonctions $q_{11}, q_{12}, \ldots, q_{34}, q_{44}$ qui forment, d'après le théorème II, les seize coefficients d'une substitution orthogonale, ne sont pas indépendantes les unes des autres. Pour obtenir d'une façon simple et élégante les relations linéaires qui ont lieu entre elles, je fais usage des constantes α_{mn}. Au moyen de ces constantes, on

déduit d'abord des expressions (XV) les relations

$$\text{(XIX)} \qquad a_{mn}^2 = \frac{\alpha_{mn}\, q_{mn}}{q_{44}} \qquad (m, n = 1, 2, 3),$$

et, par conséquent, on a

$$\left.\begin{aligned} q_{44} &= \alpha_{1h}\, q_{1h} + \alpha_{2h}\, q_{2h} + \alpha_{3h}\, q_{3h},\\ &= \alpha_{h1}\, q_{h1} + \alpha_{h2}\, q_{h2} + \alpha_{h3}\, q_{h3}, \end{aligned}\right\} \quad (h = 1, 2, 3).$$

Ces expressions mettent en évidence que la fonction q_{44} s'exprime, d'une façon linéaire et de six manières différentes, par trois autres fonctions q_{mn}, propriété remarquable dont jouissent aussi les fonctions $q_{11}, q_{12}, \ldots, q_{43}$.

Pour établir ce résultat important, je transforme, au moyen des expressions (XV) et (XVIII), les relations (XI), (XII), (XIII_1), (XIII_2), (XIV_1), ainsi que celles qui découlent de ces dernières par des changements convenables des indices (*voir* le n° 5). Alors on obtient

$$(\text{XX}_1) \qquad q_{4h} = -\alpha_{1h} q_{14} - \alpha_{2h} q_{24} - \alpha_{3h} q_{34};$$

$$(\text{XX}_2) \qquad q_{h4} = -\alpha_{h1} q_{41} - \alpha_{h2} q_{42} - \alpha_{h3} q_{43};$$

$$(\text{XX}_3) \qquad \left\{\begin{aligned} q_{1h} &= -\alpha_{3h} q_{24} + \alpha_{2h} q_{34} + \alpha_{1h} q_{44},\\ q_{2h} &= -\alpha_{1h} q_{34} + \alpha_{3h} q_{14} + \alpha_{2h} q_{44},\\ q_{3h} &= -\alpha_{2h} q_{14} + \alpha_{1h} q_{24} + \alpha_{3h} q_{44}; \end{aligned}\right.$$

$$(\text{XX}_4) \qquad \left\{\begin{aligned} q_{h1} &= -\alpha_{h3} q_{42} + \alpha_{h2} q_{43} + \alpha_{h1} q_{44},\\ q_{h2} &= -\alpha_{h1} q_{43} + \alpha_{h3} q_{41} + \alpha_{h2} q_{44},\\ q_{h3} &= -\alpha_{h2} q_{41} + \alpha_{h1} q_{42} + \alpha_{h3} q_{44}. \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on désigne par h, k, l les indices 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2 [*voir* n° 1, relations (5)], on obtient, d'après les expressions (XX_3) et les relations (5), si l'on y remplace les a_{mn} par les α_{mn}, les formules

$$(\text{XX}) \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_{1l} q_{1k} - \alpha_{1k} q_{1l} &= -\alpha_{2h} q_{24} - \alpha_{3h} q_{34},\\ \alpha_{2l} q_{2k} - \alpha_{2k} q_{2l} &= -\alpha_{3h} q_{34} - \alpha_{1h} q_{14},\\ \alpha_{3l} q_{3k} - \alpha_{3k} q_{3l} &= -\alpha_{1h} q_{14} - \alpha_{2h} q_{24}; \end{aligned}\right.$$

par conséquent l'expression (XX_4) se transforme dans les suivantes

$$(XX_5)\quad \begin{cases} q_{4h} = -\alpha_{1h}q_{14} + \alpha_{1l}q_{1k} - \alpha_{1k}q_{1l}, \\ \phantom{q_{4h}} = -\alpha_{2h}q_{24} + \alpha_{2l}q_{2k} - \alpha_{2k}q_{2l}, \\ \phantom{q_{4h}} = -\alpha_{3h}q_{34} + \alpha_{3l}q_{3k} - \alpha_{3k}q_{3l}. \end{cases}$$

De même, on trouve

$$(XX_6)\quad \begin{cases} q_{4h} = \alpha_{1l}\,q_{1k} + \alpha_{2l}\,q_{2k} + \alpha_{3l}\,q_{3k}, \\ \phantom{q_{4h}} = -\alpha_{1k}q_{1l} - \alpha_{2k}q_{2l} - \alpha_{3k}q_{3l}; \end{cases}$$

$$(XX_7)\quad \begin{cases} q_{1h} = \alpha_{3l}\,q_{2k} - \alpha_{2l}\,q_{3k} - \alpha_{1l}\,q_{4k}, \\ \phantom{q_{1h}} = -\alpha_{3k}q_{2l} + \alpha_{2k}q_{3l} + \alpha_{1k}q_{4l}; \end{cases}$$

et, eu égard aux formules

$$(XX^*)\quad \begin{cases} \alpha_{3l}q_{2k} - \alpha_{3k}q_{2l} = \alpha_{2h}q_{34} + \alpha_{1h}q_{44}, \\ -\alpha_{2l}q_{3k} + \alpha_{2k}q_{3l} = -\alpha_{3h}q_{24} + \alpha_{1h}q_{44}, \\ -\alpha_{1l}q_{4k} + \alpha_{1k}q_{4l} = -\alpha_{3h}q_{24} + \alpha_{2h}q_{34}, \end{cases}$$

on obtient, au moyen de la première formule (XX_3),

$$(XX_8)\quad \begin{cases} q_{1h} = \alpha_{3l}q_{2k} - \alpha_{3k}q_{2l} - \alpha_{3h}q_{24}, \\ \phantom{q_{1h}} = -\alpha_{2l}q_{3k} + \alpha_{2k}q_{3l} + \alpha_{2h}q_{34}, \\ \phantom{q_{1h}} = -\alpha_{1l}q_{4k} + \alpha_{1k}q_{4l} + \alpha_{1h}q_{44}. \end{cases}$$

En réunissant les relations que je viens d'établir, on a

$$(XXI)\quad \begin{cases} q_{44} = \alpha_{1h}q_{1h} + \alpha_{2h}q_{2h} + \alpha_{3h}q_{3h}; & q_{44} = \alpha_{h1}q_{h1} + \alpha_{h2}q_{h2} + \alpha_{h3}q_{h3}; \\ q_{4h} = \alpha_{1l}\,q_{1k} + \alpha_{2l}\,q_{2k} + \alpha_{3l}\,q_{3k}, & q_{4h} = \alpha_{1l}\,q_{1k} - \alpha_{1k}q_{1l} - \alpha_{1h}q_{14}, \\ \phantom{q_{4h}} = -\alpha_{1k}q_{1l} - \alpha_{2k}q_{2l} - \alpha_{3k}q_{3l}, & \phantom{q_{4h}} = \alpha_{2l}\,q_{2k} - \alpha_{2k}q_{2l} - \alpha_{2h}q_{24}, \\ \phantom{q_{4h}} = -\alpha_{1h}q_{14} - \alpha_{2h}q_{24} - \alpha_{3h}q_{34}; & \phantom{q_{4h}} = \alpha_{3l}\,q_{3k} - \alpha_{3k}q_{3l} - \alpha_{3h}q_{34}; \\ q_{1h} = \alpha_{3l}\,q_{2k} - \alpha_{2l}\,q_{3k} - \alpha_{1l}\,q_{4k}, & q_{1h} = \alpha_{3l}\,q_{2k} - \alpha_{3k}q_{2l} - \alpha_{3h}q_{24}, \\ \phantom{q_{1h}} = -\alpha_{3k}q_{2l} + \alpha_{2k}q_{3l} + \alpha_{1k}q_{4l}, & \phantom{q_{1h}} = -\alpha_{2l}\,q_{3k} + \alpha_{2k}q_{3l} + \alpha_{2h}q_{34}, \\ \phantom{q_{1h}} = -\alpha_{3h}q_{24} + \alpha_{2h}q_{34} + \alpha_{1h}q_{44}; & \phantom{q_{1h}} = -\alpha_{1l}\,q_{4k} + \alpha_{1k}q_{4l} + \alpha_{1h}q_{44}; \end{cases}$$

$$(h,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3;\ 2,\ 3,\ 1;\ 3,\ 1,\ 2)$$

Des six expressions de q_{1h}, on déduit les six expressions de q_{2h} et les six expressions de q_{3h}, si l'on remplace, dans les relations précédentes, les indices 1, 2, 3 respectivement par 2, 3, 1 et 3, 1, 2.

Les relations (XXI) se sont déduites des relations (XX_1) et (XX_3), au moyen des identités (5), si l'on remplace, dans ces identités, les a_{mn} par les $\mathfrak{a}_{mn}$. Ces identités ne changent pas, si l'on change, dans les $\mathfrak{a}_{mn}$, l'ordre des indices m, n. Or, par ce changement, les relations (XX_1) et (XX_3) deviennent les relations (XX_2) et (XX_4), si l'on change en même temps l'ordre des indices i, j $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ dans les fonctions q_{ij}. De là on conclut que *les relations* (XXI) *subsistent encore et ne changent que leur forme si l'on y change, en même temps, dans les fonctions* q_{ij} *et dans les constantes* $\mathfrak{a}_{mn}$, *l'ordre des indices.*

Les résultats précédents peuvent être résumés et énoncés comme il suit :

Théorème IV. — *Chaque fonction* $q_{ij}(i, j = 1, 2, 3, 4)$ *s'exprime, d'une façon linéaire et de six manières différentes, par trois autres de ces seize fonctions. Ces six triples de fonctions sont ceux qui forment, dans l'arrangement* (XVII), *les trois lignes et les trois colonnes du mineur adjoint à* q_{ij}. *Les constantes qui entrent dans ces relations linéaires, sont les constantes* $\mathfrak{a}_{mn}$, *et les expressions elles-mêmes sont représentées par les expressions* (XXI) *et par celles qui en découlent, si l'on y change les indices* 1, 2, 3 *en* 2, 3, 1; 3, 1, 2, *et les indices* h, k, l *en* k, l, h; l, h, k. *D'ailleurs, on peut changer, dans toutes les expressions, l'ordre des indices.*

En somme, on obtient ainsi 16.6 = 96 *expressions différentes.*

Entre les fonctions q_{ij} et les constantes $\mathfrak{a}_{mn}$, il y a une liaison très simple que je vais déduire des expressions (XXI).

Si l'on égale (*voir* n° 1) à a_δ et a_ε les arguments s_1 et s_2 dont dépendent les fonctions P_μ, $P_{\mu\nu}$ et, par conséquent, aussi les fonctions q_{ij}, on reconnaît sur-le-champ que les fonctions P_δ, P_ε, $P_{\delta\varepsilon}$ et, dès lors, les fonctions q_{14}, q_{24}, q_{34} s'évanouissent. Or on a, d'après les expressions (XXI),

$$(\mathrm{XXI}^*)\qquad \begin{cases} q_{4h} = -\mathfrak{a}_{1h} q_{14} - \mathfrak{a}_{2h} q_{24} - \mathfrak{a}_{3h} q_{34}, \\ q_{1h} = -\mathfrak{a}_{3h} q_{24} + \mathfrak{a}_{2h} q_{34} + \mathfrak{a}_{1h} q_{44}; \end{cases}$$

par conséquent, pour $s_1 = a_\delta$, $s_2 = a_\varepsilon$ ou pour $s_1 = a_\varepsilon$, $s_2 = a_\delta$, les fonctions q_{41}, q_{42}, q_{43} elles-mêmes s'évanouissent et $\mathfrak{a}_{1h}$ prend la valeur

$$\mathfrak{a}_{1h} = \frac{q_{1h}(a_\delta, a_\varepsilon)}{q_{44}(a_\delta, a_\varepsilon)} = \frac{q_{1h}(a_\varepsilon, a_\delta)}{q_{44}(a_\varepsilon, a_\delta)}.$$

De même, on trouve

$$\text{(XXII)} \qquad \mathfrak{a}_{mn} = \frac{\mathfrak{q}_{mn}}{\mathfrak{q}_{44}},$$

où $\mathfrak{q}_{mn}$, $\mathfrak{q}_{44}$ désignent les valeurs que prennent respectivement les fonctions q_{mn}, q_{44} si l'on égale leurs arguments à a_δ, a_ε.

Plus généralement, on trouve :

Corollaire. — *Si l'on égale à* a_μ, a_ν ($\mu, \nu = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$; $\mu \neq \nu$) *les arguments* s_1, s_2 *des seize fonctions* q_{ij}, *six fonctions parmi les seize s'évanouissent; et les neuf quotients formés, avec le même dénominateur, par les valeurs que prennent, pour* $s_1 = a_\mu$, $s_2 = a_\nu$, *les dix autres fonctions* q_{ij}, *sont égaux aux neuf constantes* $\mathfrak{a}_{mn}$.

Les six fonctions qui deviennent égales à zéro se trouvent, dans l'arrangement (XVII), *dans une ligne et dans une colonne; à l'une et à l'autre appartient une septième fonction dont la valeur pour* $s_1 = a_\mu$, $s_2 = a_\nu$ *forme ledit dénominateur commun.*

9. *Conséquences des relations* (XXI). *Expression des seize fonctions* q_{ij} *par quatre parmi elles. Théorèmes.* — Les relations (XXI) mettent en évidence le théorème suivant, qui équivaut au théorème (IV) :

Théorème IV*. — *Au moyen de quatre fonctions* q_{ij}, *telles qu'elles forment, dans l'arrangement* (XVII), *une ligne ou une colonne quelconques, les douze autres fonctions s'expriment d'une façon linéaire.*

Les quatre fonctions, placées dans l'arrangement (XVII) dans une ligne ou dans une colonne quelconques, ne sont pas les seules par lesquelles les autres s'expriment d'une façon linéaire. Je vais démontrer que de la même propriété jouissent aussi les quatre fonctions qui forment, dans l'arrangement (XVII), un mineur quelconque de second ordre.

Pour déduire ce résultat, je commence par exprimer les fonctions q_{ij} par les quatre fonctions q_{2k}, q_{2l}, q_{3k}, q_{3l}.

D'après les formules (XX) et (XX*) du numéro précédent, on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_{2l}q_{2k} - \mathfrak{a}_{2k}q_{2l} &= -\mathfrak{a}_{3h}q_{34} - \mathfrak{a}_{1h}q_{14},\\
\mathfrak{a}_{3l}q_{3k} - \mathfrak{a}_{3k}q_{3l} &= -\mathfrak{a}_{1h}q_{14} - \mathfrak{a}_{2h}q_{24},\\
\mathfrak{a}_{3l}q_{2k} - \mathfrak{a}_{3k}q_{2l} &= \mathfrak{a}_{2h}q_{34} + \mathfrak{a}_{1h}q_{44},\\
-\mathfrak{a}_{2l}q_{3k} + \mathfrak{a}_{2k}q_{3l} &= -\mathfrak{a}_{3h}q_{24} + \mathfrak{a}_{1h}q_{44}.
\end{aligned}$$

Ces formules permettent d'exprimer les fonctions q_{14}, q_{24}, q_{34}, q_{44} par les fonctions q_{2k}, q_{2l}, q_{3k}, q_{3l}. Dès lors, en substituant les valeurs trouvées pour $q_{14}, \ldots, q_{44}$ dans les relations (XXI)

$$\text{(XXI}^*\text{)} \qquad \begin{cases} q_{4h} = -\mathfrak{a}_{1h} q_{14} - \mathfrak{a}_{2h} q_{24} - \mathfrak{a}_{3h} q_{34}, \\ q_{1h} = -\mathfrak{a}_{3h} q_{24} + \mathfrak{a}_{2h} q_{34} + \mathfrak{a}_{1h} q_{44} \end{cases}$$

et dans les analogues, on est conduit, après quelques simples calculs, au système suivant :

$$\mathfrak{A}_1 = (1 - \mathfrak{a}_{1h}^2);$$

$$\text{(XXIII)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_1 q_{14} = \mathfrak{a}_{2h}\mathfrak{a}_{1l} q_{2k} - \mathfrak{a}_{2h}\mathfrak{a}_{1k} q_{2l} + \mathfrak{a}_{3h}\mathfrak{a}_{1l} q_{3k} - \mathfrak{a}_{3h}\mathfrak{a}_{1k} q_{3l}, \\ \mathfrak{A}_1 q_{24} = -\mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{1l} q_{2k} + \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{1k} q_{2l} + \mathfrak{a}_{1k} q_{3k} + \mathfrak{a}_{1l} q_{3l}, \\ \mathfrak{A}_1 q_{34} = -\mathfrak{a}_{1k} q_{2k} - \mathfrak{a}_{1l} q_{2l} - \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{1l} q_{3k} + \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{1k} q_{3l}, \\ \mathfrak{A}_1 q_{44} = -\mathfrak{a}_{3h}\mathfrak{a}_{1l} q_{2k} + \mathfrak{a}_{3h}\mathfrak{a}_{1k} q_{2l} + \mathfrak{a}_{2h}\mathfrak{a}_{1l} q_{3k} - \mathfrak{a}_{2h}\mathfrak{a}_{1k} q_{3l}; \\[6pt] \mathfrak{A}_1 q_{4h} = \mathfrak{a}_{3h}\mathfrak{a}_{1k} q_{2k} + \mathfrak{a}_{3h}\mathfrak{a}_{1l} q_{2l} - \mathfrak{a}_{2h}\mathfrak{a}_{1k} q_{3k} - \mathfrak{a}_{2h}\mathfrak{a}_{1l} q_{3l}, \\ \mathfrak{A}_1 q_{4k} = -\mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{3h} q_{2k} + \mathfrak{a}_{2h} q_{2l} + \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{2h} q_{3k} + \mathfrak{a}_{3h} q_{3l}, \\ \mathfrak{A}_1 q_{4l} = -\mathfrak{a}_{2h} q_{2k} - \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{3h} q_{2l} - \mathfrak{a}_{3h} q_{3k} + \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{2h} q_{3l}; \\[6pt] \mathfrak{A}_1 q_{1h} = -\mathfrak{a}_{2h}\mathfrak{a}_{1k} q_{2k} - \mathfrak{a}_{2h}\mathfrak{a}_{1l} q_{2l} - \mathfrak{a}_{3h}\mathfrak{a}_{1k} q_{3k} - \mathfrak{a}_{3h}\mathfrak{a}_{1l} q_{3l}, \\ \mathfrak{A}_1 q_{2h} = \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{1k} q_{2k} + \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{1l} q_{2l} + \mathfrak{a}_{1l} q_{3k} - \mathfrak{a}_{1k} q_{3l}, \\ \mathfrak{A}_1 q_{3h} = -\mathfrak{a}_{1l} q_{2k} + \mathfrak{a}_{1k} q_{2l} + \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{1k} q_{3k} + \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{1l} q_{3l}; \\[6pt] \mathfrak{A}_1 q_{1k} = \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{2h} q_{2k} + \mathfrak{a}_{3h} q_{2l} + \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{3h} q_{3k} - \mathfrak{a}_{2h} q_{3l}, \\ \mathfrak{A}_1 q_{1l} = -\mathfrak{a}_{3h} q_{2k} + \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{2h} q_{2l} + \mathfrak{a}_{2h} q_{3k} + \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{3h} q_{3l}. \end{array} \right.$$

L'arrangement (XVII) donne naissance à trente-six mineurs de second ordre. Par conséquent on peut choisir de trente-six manières quatre fonctions q_{ij} par lesquelles les douze autres s'expriment d'une façon linéaire. Parmi les trente-six systèmes de formules qui s'obtiennent ainsi, les relations (XXIII) en représentent dix-huit, puisque l'on peut remplacer, dans les relations (XXIII), les indices 1, 2, 3 par 2, 3, 1 ; 3, 1, 2, et les indices h, k, l par k, l, h; l, h, k (neuf systèmes), et puisque l'on peut changer, d'ailleurs, dans ces neuf systèmes, l'ordre des indices des constantes $\mathfrak{a}_{mn}$ et des fonctions q_{ij}. Par les mêmes changements on déduit les dix-huit systèmes de formules qui restent encore de celui-ci qui représente, au moyen des quatre fonctions q_{1h}, q_{4h}, q_{14}, q_{44} les douze autres.

Pour établir ce système, je reprends les formules précédentes (XXI*). On en tire immédiatement les valeurs de q_{24} et q_{34}, exprimées par q_{1h}, q_{4h}, q_{14}, q_{44}, et en substituant les valeurs de q_{14}, q_{24}, q_{34}, q_{44} dans les formules qui proviennent des formules (XXI*) par les changements des indices, on obtient le système suivant :

$$
(\mathrm{XXIV})\quad \left\{
\begin{aligned}
&\qquad\qquad \mathfrak{A}_1 = (1 - \mathfrak{a}_{1h}^2);\\[4pt]
\mathfrak{A}_1 q_{24} &= - \mathfrak{a}_{3h} q_{1h} - \mathfrak{a}_{2h} q_{4h} - \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{2h} q_{14} + \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{3h} q_{44},\\
\mathfrak{A}_1 q_{34} &= \mathfrak{a}_{2h} q_{1h} - \mathfrak{a}_{3h} q_{4h} - \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{3h} q_{14} - \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{2h} q_{44};\\[4pt]
\mathfrak{A}_1 q_{2h} &= - \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{2h} q_{1h} + \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{3h} q_{4h} + \mathfrak{a}_{3h} q_{14} + \mathfrak{a}_{2h} q_{44},\\
\mathfrak{A}_1 q_{3h} &= - \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{3h} q_{1h} - \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{2h} q_{4h} - \mathfrak{a}_{2h} q_{14} + \mathfrak{a}_{3h} q_{44};\\[4pt]
\mathfrak{A}_1 q_{1k} &= - \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{1k} q_{1h} + \mathfrak{a}_{1l} q_{4h} + \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{1l} q_{14} + \mathfrak{a}_{1k} q_{44},\\
\mathfrak{A}_1 q_{2k} &= - \mathfrak{a}_{2h}\mathfrak{a}_{1k} q_{1h} + \mathfrak{a}_{3h}\mathfrak{a}_{1l} q_{4h} + \mathfrak{a}_{2h}\mathfrak{a}_{1l} q_{14} - \mathfrak{a}_{3h}\mathfrak{a}_{1l} q_{44},\\
\mathfrak{A}_1 q_{3k} &= - \mathfrak{a}_{3h}\mathfrak{a}_{1k} q_{1h} - \mathfrak{a}_{2h}\mathfrak{a}_{1k} q_{4h} + \mathfrak{a}_{3h}\mathfrak{a}_{1l} q_{14} + \mathfrak{a}_{2h}\mathfrak{a}_{1l} q_{44};\\[4pt]
\mathfrak{A}_1 q_{1l} &= - \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{1l} q_{1h} - \mathfrak{a}_{1k} q_{4h} - \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{1k} q_{14} + \mathfrak{a}_{1l} q_{44},\\
\mathfrak{A}_1 q_{2l} &= - \mathfrak{a}_{2h}\mathfrak{a}_{1l} q_{1h} + \mathfrak{a}_{3h}\mathfrak{a}_{1l} q_{4h} - \mathfrak{a}_{2h}\mathfrak{a}_{1k} q_{14} + \mathfrak{a}_{3h}\mathfrak{a}_{1k} q_{44},\\
\mathfrak{A}_1 q_{3l} &= - \mathfrak{a}_{3h}\mathfrak{a}_{1l} q_{1h} - \mathfrak{a}_{2h}\mathfrak{a}_{1l} q_{4h} - \mathfrak{a}_{3h}\mathfrak{a}_{1k} q_{14} - \mathfrak{a}_{2h}\mathfrak{a}_{1k} q_{44};\\[4pt]
\mathfrak{A}_1 q_{4k} &= - \mathfrak{a}_{1l} q_{1h} - \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{1k} q_{4h} - \mathfrak{a}_{1k} q_{14} + \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{1l} q_{44},\\
\mathfrak{A}_1 q_{4l} &= \mathfrak{a}_{1k} q_{1h} - \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{1l} q_{4h} - \mathfrak{a}_{1l} q_{14} - \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{1k} q_{44}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les formules (XXIII) et (XXIV), ainsi que celles qui en découlent, conduisent au théorème suivant, qui correspond au théorème (IV*) :

Théorème V. — *Au moyen de quatre fonctions q_{ij}, telles qu'elles forment, dans l'arrangement* (XVII), *un mineur quelconque de second ordre, les douze autres fonctions s'expriment d'une façon linéaire.*

10. *Systèmes rosenhainéens et systèmes göpeléens de caractéristiques et de fonctions. Leurs types et nombres.* — Après avoir établi les formules (XXI), (XXIII), (XXIV), je remplace les fonctions q_{ij} par les fonctions hyperelliptiques, et je vais examiner la composition de leurs *caractéristiques,* c'est-à-dire la composition des indices μ, $\mu\nu$ ($\mu, \nu = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$) dont elles dépendent. Si l'on n'écrit que ceux-ci,

l'arrangement (XVII) prend la forme suivante :

$$(\text{XVII}^*)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \alpha & \alpha\delta & \alpha\varepsilon & \beta\gamma, \\ \beta & \beta\delta & \beta\varepsilon & \alpha\gamma, \\ \gamma & \gamma\delta & \gamma\varepsilon & \alpha\beta, \\ \delta\varepsilon & \varepsilon & \delta & . \end{array}\right.$$

Ce Tableau met en évidence que, d'une part, les caractéristiques, placées dans les trois premières lignes, et, d'autre part, les caractéristiques, placées dans la deuxième et la troisième colonne, sont formées d'une manière tout à fait analogue. Par conséquent, les lignes du Tableau précédent ne conduisent qu'à deux types, et les colonnes qu'à trois types différents de caractéristiques, savoir :

$$\begin{array}{lllll} (1) & \alpha & \alpha\delta & \alpha\varepsilon & \beta\gamma, \\ (2) & \delta\varepsilon & \varepsilon & \delta & , \\ (3) & \alpha & \beta & \gamma & \delta\varepsilon, \\ (4) & \alpha\delta & \beta\delta & \gamma\delta & \varepsilon, \\ (5) & \beta\gamma & \alpha\gamma & \alpha\beta & . \end{array}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon = 0, 1, 2, 3, 4; \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta \neq \varepsilon).$$

Quant au nombre des triples et quadruples de caractéristiques représentés par les cinq types précédents, on voit immédiatement que les types (2), (5), (3) en constituent $\frac{5.4}{1.2} = \frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$; le type (4) donne naissance à $5.4 = 20$ quadruples, et, enfin, le type (1) à $5.\frac{4.3}{1.2} = 30$ quadruples. Par conséquent, on a :

Si l'on remplace, dans l'arrangement (XVII), *les fonctions* q_{ij} *par les fonctions hyperelliptiques* P_μ, $P_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$), *on est conduit à l'arrangement* (XVII*), *dans lequel ne sont inscrites que les caractéristiques des fonctions hyperelliptiques.*

Les systèmes (triples ou quadruples) de caractéristiques qui forment, dans l'arrangement (XVII*), *les lignes et les colonnes, offrent cinq types différents, savoir :*

$$(\mathfrak{A})\qquad \left\{\begin{array}{llllll} (1) & \alpha & \alpha\delta & \alpha\varepsilon & \beta\gamma & \ldots\ 30, \\ (2) & \alpha & \beta & \alpha\beta & & \ldots\ 10, \\ (3) & \alpha & \beta & \gamma & \delta\varepsilon & \ldots\ 10, \\ (4) & \alpha\delta & \beta\delta & \gamma\delta & \varepsilon & \ldots\ 20, \\ (5) & \beta\gamma & \alpha\gamma & \alpha\beta & & \ldots\ 10, \end{array}\right.$$

et chaque type donne naissance, si l'on attribue aux indices α, β, γ, δ, ε *les valeurs* 0, 1, 2, 3, 4, *à tant de systèmes* (*triples ou quadruples*) *de caractéristiques que le nombre juxtaposé fait connaître.*

De même on trouve :

Les systèmes de caractéristiques qui forment, dans l'arrangement (XVII*), *les mineurs de second ordre, offrent trois types différents, savoir :*

$$(\mathcal{G})\qquad \begin{cases} (1) & \alpha \quad \beta\gamma \quad \delta\varepsilon \qquad \ldots \; 15, \\ (2) & \alpha \quad \beta \quad \alpha\delta \quad \beta\delta \quad \ldots \; 30, \\ (3) & \alpha\delta \quad \beta\delta \quad \alpha\varepsilon \quad \beta\varepsilon \quad \ldots \; 15, \end{cases}$$

où les nombres juxtaposés possèdent la même signification que plus haut.

Pour distinguer les systèmes ($\mathcal{R}$) de caractéristiques des systèmes ($\mathcal{G}$), j'appellerai les systèmes ($\mathcal{R}$) *systèmes rosenhainéens*, et les systèmes ($\mathcal{G}$) *systèmes göpeléens de caractéristiques* (1).

Dès lors j'appellerai les systèmes de fonctions auxquelles appartiennent les systèmes rosenhainéens de caractéristiques, respectivement les systèmes göpeléens de caractéristiques *systèmes rosenhainéens*, respectivement *systèmes göpeléens de fonctions*.

En employant ces désignations, on voit que dans les seconds membres des relations (XXI) entrent des systèmes rosenhainéens de fonctions; par conséquent j'appellerai les relations (XXI) *relations rosenhai-*

---

(1) Si l'on remplace les fonctions hyperelliptiques par les fonctions thêta, en faisant usage de la notation de M. Weierstrass, les systèmes ($\mathcal{G}$) de caractéristiques pour lesquels je viens de proposer le nom de *systèmes göpeléens* deviennent les suivants :

$$(\mathcal{G}^*)\qquad \begin{cases} (1) & \alpha \quad \beta\gamma \quad \delta\varepsilon \quad 5, \\ (2) & \alpha \quad \beta \quad \alpha\delta \quad \beta\delta, \\ (3) & \alpha\delta \quad \beta\delta \quad \alpha\varepsilon \quad \beta\varepsilon, \end{cases}$$
$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Ces trois types représentent et comprennent, d'une manière très concise, les soixante quadruples de caractéristiques, établis par M. M. Krause dans son bel Ouvrage : *Die Transformation der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung*, p. 27. Leipzig; 1886.

Les fonctions thêta, auxquelles appartiennent ces quadruples de caractéristiques, jouent un rôle important, on le sait, dans les célèbres découvertes de M. Hermite, relatives à la transformation des fonctions abéliennes (*Comptes rendus des séances de l'Académie des* *néennes*, et, par une raison analogue, j'appellerai les relations (XXIII) et (XXIV) *relations göpeléennes*.

Quant à ces dernières désignations, elles sont motivées, d'ailleurs, par la circonstance que les relations (100), établies par Rosenhain dans son Mémoire couronné (*Mémoires présentés par divers savants*, t. XI, p. 424); et de même les relations (29), (30), (31), déduites par Göpel dans son célèbre travail (*Journal de Crelle*, t. XXXV, p. 290) se trouvent, sauf la notation, les unes dans les relations *rosenhainéennes* (XXI), et les autres dans les relations *göpeléennes* (XXIV).

Dans le n° 9, j'ai tiré les relations göpeléennes (XXIII) et (XXIV) des relations rosenhainéennes (XXI). Par conséquent, ces deux systèmes de relations sont tout à fait équivalents, mais le système de relations rosenhainéennes est beaucoup plus simple. Pour cette raison je le prends comme point de départ des recherches suivantes, et je commence par en donner une interprétation géométrique.

11. *Interprétation géométrique des relations rosenhainéennes au moyen de seize points* $A^{(j)}$, $B^{(j)}$, $C^{(j)}$, $D^{(j)}$ *ou de seize plans* $\alpha^{(j)}$, $\beta^{(j)}$, $\gamma^{(j)}$, $\delta^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$. *Propositions. Construction des points et des plans par six donnés. Remarques.* — D'après les relations rosenhainéennes (XXI) les douze fonctions q_{1h}, q_{2h}, q_{3h}, q_{4h} $(h = 1, 2, 3)$ s'expriment, d'une façon linéaire, par les quatre fonctions q_{14}, q_{24}, q_{34}, q_{44}. Si ces quatre fonctions sont envisagées comme les coordonnées homogènes

---

Sciences, t. XI). De plus, ces quadruples de fonctions thêta se sont présentés à BORCHARDT dans ses recherches relatives à la surface de Kummer (*Journal de Borchardt*, t. LXXXIII, p. 240). En profitant des résultats dus à Borchardt, M. H. WEBER est conduit à quatre-vingts nouveaux quadruples de fonctions thêta (*Journal de Borchardt*, t. LXXXIV, p. 375) dont les caractéristiques sont établies, avec la notation de M. Weierstrass, par M. KRAUSE (*loc. cit.*, p. 25). Ces quatre-vingts quadruples de caractéristiques ($\mathfrak{R}^*$) sont précisément les caractéristiques ($\mathfrak{R}$), si l'on ajoute aux deux triples ($\mathfrak{R}$, 2) et ($\mathfrak{R}$, 5), comme quatrième caractéristique, la caractéristique 5.

Dans la théorie des fonctions thêta, les systèmes de caractéristiques ($\mathfrak{G}^*$) ont reçu par M. FROBENIUS (*Journal de Borchardt*, t. LXXXIX, p. 193) le nom de *systèmes göpeléens*; de même, les systèmes de caractéristiques ($\mathfrak{R}^*$) ont reçu par M. REICHARDT (*Nova Acta der kais. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher*, Bd. L, p. 423, n° 5) le nom de *systèmes rosenhainéens*.

Ces explications mettent en évidence que les noms que j'ai proposés pour distinguer les systèmes ($\mathfrak{R}$) des systèmes ($\mathfrak{G}$) sont dans un accord parfait avec ceux que l'on emploie ordinairement dans la théorie des fonctions thêta.

d'un plan, les seize équations $q_{1j}=0$, $q_{2j}=0$, $q_{3j}=0$, $q_{4j}=0$, définiront, en coordonnées tangentielles, seize points que je désignerai, dès lors, par $A^{(j)}$, $B^{(j)}$, $C^{(j)}$, $D^{(j)}$ $(j=1, 2, 3, 4)$.

Pour examiner les propriétés de ces seize points, ainsi que les propriétés des droites, des plans et des configurations que ces points engendrent, on pourrait employer les principes ordinaires de la Géométrie en espace. Cependant cette voie conduirait à des calculs un peu pénibles. Pour cette raison je l'éviterai et je ferai usage des principes que j'ai exposés dans mon Mémoire : *Sur une méthode générale de la Géométrie qui forme le lien entre la Géométrie synthétique et la Géométrie analytique* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XIII, p. 202-240).

Dans ce Mémoire j'ai montré (*loc. cit.*, p. 213) que tous les points de l'espace peuvent être représentés, d'une façon linéaire, par quatre points quelconques. Si l'on choisit, pour ces quatre points, les points $A^{(4)}$, $B^{(4)}$, $C^{(4)}$, $D^{(4)}$, on déduit des relations (XXI) les égalités

$$\text{(XXV)}\qquad \left\{\begin{aligned} A^{(h)} &= -\alpha_{3h}B^{(4)}+\alpha_{2h}C^{(4)}+\alpha_{1h}D^{(4)},\\ B^{(h)} &= -\alpha_{1h}C^{(4)}+\alpha_{3h}A^{(4)}+\alpha_{2h}D^{(4)},\\ C^{(h)} &= -\alpha_{2h}A^{(4)}+\alpha_{1h}B^{(4)}+\alpha_{3h}D^{(4)},\\ D^{(h)} &= -\alpha_{1h}A^{(4)}-\alpha_{2h}B^{(4)}-\alpha_{3h}C^{(4)} \end{aligned}\right.$$
$$(h=1, 2, 3).$$

Ces égalités proviennent des expressions pour $q_{1h}, \ldots, q_{4h}$, établies dans les relations (XXI), si l'on y remplace q_{1j}, q_{2j}, q_{3j}, q_{4j} par $A^{(j)}$, $B^{(j)}$, $C^{(j)}$, $D^{(j)}$. De même, on peut déduire des relations (XXI) d'autres systèmes d'égalités qui correspondent aux égalités (XXV) et qui en sont les conséquences. Dans les égalités qui s'obtiennent ainsi, les points $A^{(4)}, \ldots, D^{(4)}$ sont remplacés par les points $A^{(h)}, \ldots, D^{(h)}$ $(h=1, 2, 3)$, ou par les points $A^{(1)}, \ldots, A^{(4)}$; $B^{(1)}, \ldots, B^{(4)}$; $C^{(1)}, \ldots, C^{(4)}$; $D^{(1)}, \ldots, D^{(4)}$.

Ce sont précisément les points qui sont placés dans les quatre lignes ou dans les quatre colonnes de l'arrangement suivant qui correspond à l'arrangement (XVII)

$$\text{(XXVI)}\qquad \left\{\begin{matrix} A^{(1)} & B^{(1)} & C^{(1)} & D^{(1)},\\ A^{(2)} & B^{(2)} & C^{(2)} & D^{(2)},\\ A^{(3)} & B^{(3)} & C^{(3)} & D^{(3)},\\ A^{(4)} & B^{(4)} & C^{(4)} & D^{(4)}. \end{matrix}\right.$$

Ceci posé, je vais envisager les quatre quadruples de points $A^{(j)}$, $B^{(j)}$, $C^{(j)}$, $D^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3, 4$), placés dans les lignes de cet arrangement, comme les sommets de quatre tétraèdres et je vais en exprimer les faces $\alpha^{(j)}$, $\beta^{(j)}$, $\gamma^{(j)}$, $\delta^{(j)}$, opposées respectivement aux sommets $A^{(j)}$, $B^{(j)}$, $C^{(j)}$, $D^{(j)}$. En faisant usage des notions et des désignations, établies dans mon Mémoire cité, ces plans sont représentés (*loc. cit.*, p. 215) par les *produits extérieurs* :

$$(\mathrm{XXVII}_1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \alpha^{(j)} = [B^{(j)}C^{(j)}D^{(j)}], & \beta^{(j)} = -[C^{(j)}D^{(j)}A^{(j)}], \\ \gamma^{(j)} = [D^{(j)}A^{(j)}B^{(j)}], & \delta^{(j)} = -[A^{(j)}B^{(j)}C^{(j)}], \end{array}\right.$$
$$(j = 1, 2, 3, 4)$$

qui se transforment, au moyen des égalités (XXV), comme il suit :

$$(\mathrm{XXVIII})\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha^{(h)} = -\mathfrak{a}_{3h}\beta^{(4)} + \mathfrak{a}_{2h}\gamma^{(4)} + \mathfrak{a}_{1h}\delta^{(4)}, \\ \beta^{(h)} = -\mathfrak{a}_{1h}\gamma^{(4)} + \mathfrak{a}_{3h}\alpha^{(4)} + \mathfrak{a}_{2h}\delta^{(4)}, \\ \gamma^{(h)} = -\mathfrak{a}_{2h}\alpha^{(4)} + \mathfrak{a}_{1h}\beta^{(4)} + \mathfrak{a}_{3h}\delta^{(4)}, \\ \delta^{(h)} = -\mathfrak{a}_{1h}\alpha^{(4)} - \mathfrak{a}_{2h}\beta^{(4)} - \mathfrak{a}_{3h}\gamma^{(4)}, \end{array}\right.$$
$$(h = 1, 2, 3).$$

On voit immédiatement que les égalités (XXV) et (XXVIII) se déduisent les unes des autres, si l'on remplace les points $A^{(j)} \ldots D^{(j)}$ respectivement par les plans $\alpha^{(j)} \ldots \delta^{(j)}$ et *vice versa*. Par conséquent, à l'arrangement (XXVI) des points correspond un arrangement des plans, savoir :

$$(\mathrm{XXIX})\qquad \left\{\begin{array}{llll} \alpha^{(1)} & \beta^{(1)} & \gamma^{(1)} & \delta^{(1)}, \\ \alpha^{(2)} & \beta^{(2)} & \gamma^{(2)} & \delta^{(2)}, \\ \alpha^{(3)} & \beta^{(3)} & \gamma^{(3)} & \delta^{(3)}, \\ \alpha^{(4)} & \beta^{(4)} & \gamma^{(4)} & \delta^{(4)}, \end{array}\right.$$

et, plus généralement, à toutes les relations qui ont lieu pour les points $A^{(j)} \ldots D^{(j)}$ correspondent des relations corrélatives pour les plans $\alpha^{(j)} \ldots \delta^{(j)}$ et *vice versa*.

Les relations qui ont lieu pour les points $A^{(j)} \ldots D^{(j)}$ et pour les plans $\alpha^{(j)} \ldots \delta^{(j)}$ ont trait à plusieurs problèmes de la Géométrie de position (¹), de la Mécanique et de la Cinématique qui obtiennent,

(¹) On pourra consulter, au sujet de ces problèmes de la Géométrie de position : REYE, *Ueber Strahlensysteme zweiter Classe und die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit* par conséquent, dans les égalités (XXV) et (XXVIII) leur base analytique, et, dès lors, aussi leur lien avec la théorie des fonctions hyperelliptiques de première espèce. Comme lesdites relations sont extrêmement nombreuses, je me borne à en établir les plus simples et de signaler quelques autres.

D'après les égalités (XXV) et (XXVIII), on trouve

$$[A^{(h)}\alpha^{(k)}] = \mathfrak{a}_{3h}\mathfrak{a}_{3k}[B^{(4)}\beta^{(4)}] + \mathfrak{a}_{2h}\mathfrak{a}_{2k}[C^{(4)}\gamma^{(4)}] + \mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{1k}[D^{(4)}\delta^{(4)}];$$
$$(h, k = 1, 2, 3;\quad h \neq k);$$

or on a

$$[B^{(4)}\beta^{(4)}] = [C^{(4)}\gamma^{(4)}] = [D^{(4)}\delta^{(4)}] = [A^{(4)}B^{(4)}C^{(4)}D^{(4)}];$$

donc

$$[A^{(h)}\alpha^{(k)}] = (\mathfrak{a}_{1h}\mathfrak{a}_{1k} + \mathfrak{a}_{2h}\mathfrak{a}_{2k} + \mathfrak{a}_{3h}\mathfrak{a}_{3k})[A^{(4)}B^{(4)}C^{(4)}D^{(4)}] = 0.$$

De plus on déduit des égalités

$$[A^{(4)}\beta^{(4)}] = [A^{(4)}\gamma^{(4)}] = [A^{(4)}\delta^{(4)}] = 0,$$
$$[B^{(4)}\alpha^{(4)}] = [C^{(4)}\alpha^{(4)}] = [D^{(4)}\alpha^{(4)}] = 0$$

les relations

$$[A^{(4)}\alpha^{(k)}] = 0, \qquad [A^{(h)}\alpha^{(4)}] = 0.$$

Ces deux relations et la relation $[A^{(h)}\alpha^{(k)}] = 0$ peuvent être comprises par l'égalité

$$[A^{(j)}\alpha^{(j')}] = 0, \qquad (j, j' = 1, 2, 3, 4;\quad j \neq j').$$

De la même façon, on trouve

$$[B^{(j)}\beta^{(j')}] = 0, \qquad [C^{(j)}\gamma^{(j')}] = 0, \qquad [D^{(j)}\delta^{(j')}] = 0.$$

Si l'on envisage, d'une manière analogue, les quatre quadruples de points $A^{(1)} \ldots A^{(4)}, \ldots, D^{(1)} \ldots D^{(4)}$, placés dans les colonnes de l'arrangement (XXVI) comme les sommets de quatre nouveaux tétraèdres, et que l'on en forme les faces opposées, on est conduit, au moyen des égalités (XXV), aux expressions

$$(\mathrm{XXVII}_2)\quad \begin{cases} [A^{(2)}A^{(3)}A^{(4)}] = -\alpha^{(1)}, & [A^{(1)}A^{(3)}A^{(4)}] = \alpha^{(2)}, \\ [A^{(1)}A^{(2)}A^{(4)}] = -\alpha^{(3)}, & [A^{(1)}A^{(2)}A^{(3)}] = \alpha^{(4)}, \end{cases}$$

sechzehn Knotenpunkten; Ueber die Kummer'sche Configuration von sechzehn Punkten und sechzehn Ebenen (*Journal de Borchardt*, t. LXXXVI, p. 84-107; 209-216). — SCHRÖTER, *Ueber das Fünfflach und Sechsflach und die damit zusammenhängende Kummer'sche Configuration* (*Ibid.*, t. C, p. 231-257).

et aux analogues qui en proviennent, si l'on remplace $A^{(j)}, \alpha^{(j)}$ par $B^{(j)}, \beta^{(j)}$; $C^{(j)}, \gamma^{(j)}$; $D^{(j)}, \delta^{(j)}$.

Par les expressions ($XXVII_1$) et ($XXVII_2$), chacune des faces $\alpha^{(j)} \ldots \delta^{(j)}$ est représentée de deux manières; par conséquent, les relations établies plus haut

$$\text{(XXX)}\quad [A^{(j)}\alpha^{(j')}] = 0,\quad [B^{(j)}\beta^{(j')}] = 0,\quad [C^{(j)}\gamma^{(j')}] = 0,\quad [D^{(j)}\delta^{(j')}] = 0$$
$$(j, j' = 1, 2, 3, 4;\quad j \neq j')$$

peuvent être énoncées comme il suit :

1° *Si l'on envisage les points, placés dans les lignes ou dans les colonnes de l'arrangement* (XXVI), *comme les sommets de quatre tétraèdres, chacun de ces tétraèdres est inscrit et circonscrit aux trois autres* [1].

De plus on a, eu égard aux égalités ($XXVII_1$) et ($XXVII_2$) :

2° *Les six points, placés dans l'arrangement* (XXVI) *avec un point quelconque dans la même ligne et dans la même colonne, sont situés sur un plan. Ce plan est celui qui correspond audit point dans l'arrangement* (XXIX).

Si l'on interprète géométriquement les résultats établis dans le n° 7 pour les carrés des fonctions q_{ij}, on obtient :

3° *Les six points, placés dans l'arrangement* (XXVI) *avec un point quelconque dans la même ligne et dans la même colonne, sont situés sur une conique.*

4° *Les huit points, placés dans l'arrangement* (XXVI), *dans deux lignes, ou dans deux colonnes, ou dans deux mineurs adjoints de second ordre, forment les huit points d'intersection de trois surfaces de second ordre.*

Étant donnés six points convenablement choisis parmi les seize points $A^{(j)}, \ldots, D^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3, 4$), la proposition 2° et sa corrélative permettent d'en construire, d'une façon linéaire, les dix autres.

Pour établir cette construction, je choisis, comme les six points donnés, trois points d'une diagonale de l'arrangement (XXVI), et les trois autres points, placés avec le quatrième point de la diagonale dans

---

[1] *Voir*, au sujet de ces tétraèdres, découverts par MÖBIUS (*Journal de Crelle*, t. III, p. 273-278; *Œuvres compl.*, t. I, p. 441-446), le Mémoire important de M. NEUBERG : *Sur les tétraèdres de Möbius* (*Mém. de la Soc. royale des Sciences de Liège*, 2e série, t. XI).

la même ligne ou dans la même colonne, par exemple les six points $A^{(1)}$, $B^{(2)}$, $C^{(3)}$; $A^{(4)}$, $B^{(4)}$, $C^{(4)}$. Ces six points sont placés, dans l'arrangement (XXVI), comme il suit :

$$(\text{XXVI}^{\star})\qquad \left\{\begin{array}{cccc} A^{(1)} & \star & \star & \star, \\ \star & B^{(2)} & \star & \star, \\ \star & \star & C^{(3)} & \star, \\ A^{(4)} & B^{(4)} & C^{(4)} & \star, \end{array}\right.$$

où les astérisques désignent les points cherchés que je vais construire.

Dans l'arrangement (XXVI) et par conséquent aussi dans l'arrangement (XXVI*) les points, placés, en même temps, dans une ligne et dans une colonne, sont situés, d'après la proposition 2°, sur un plan, savoir celui qui est corrélatif au point d'intersection de la ligne et de la colonne. Par conséquent, les points $A^{(1)}$, $B^{(2)}$, $B^{(4)}$ sont situés sur le plan $\beta^{(1)}$; les points $A^{(1)}$, $C^{(3)}$, $C^{(4)}$ sur le plan $\gamma^{(1)}$, ... De là on conclut que l'arrangement suivant des plans qui s'obtient ainsi, savoir

$$\left\{\begin{array}{cccc} \star & [A^{(1)}B^{(2)}B^{(4)}] & [A^{(1)}C^{(3)}C^{(4)}] & \star, \\ [A^{(1)}A^{(4)}B^{(2)}] & \star & [B^{(2)}C^{(3)}C^{(4)}] & \star, \\ [A^{(1)}A^{(4)}C^{(3)}] & [B^{(2)}B^{(4)}C^{(3)}] & \star & \star, \\ [A^{(1)}B^{(4)}C^{(4)}] & [A^{(4)}B^{(2)}C^{(4)}] & [A^{(4)}B^{(4)}C^{(3)}] & [A^{(4)}B^{(4)}C^{(4)}], \end{array}\right.$$

est tout à fait identique à l'arrangement

$$(\text{XXIX}^{\star})\qquad \left\{\begin{array}{cccc} \star & \beta^{(1)} & \gamma^{(1)} & \star, \\ \alpha^{(2)} & \star & \gamma^{(2)} & \star, \\ \alpha^{(3)} & \beta^{(3)} & \star & \star, \\ \alpha^{(4)} & \beta^{(4)} & \gamma^{(4)} & \delta^{(4)}. \end{array}\right.$$

Par conséquent les dix plans qui entrent dans l'arrangement (XXIX*) sont construits par les six points de l'arrangement (XXVI*). Or, par ces dix plans, se construisent, d'une façon analogue, au moyen de la proposition corrélative à la proposition 2°, les dix points suivants :

$$(\text{XXVI}^{\star\star})\left\{\begin{array}{cccc} \star & [\beta^{(3)}\beta^{(4)}\gamma^{(1)}] & [\beta^{(1)}\gamma^{(2)}\gamma^{(4)}] & [\beta^{(1)}\gamma^{(1)}\delta^{(4)}], \\ [\alpha^{(3)}\alpha^{(4)}\gamma^{(2)}] & \star & [\alpha^{(2)}\gamma^{(1)}\gamma^{(4)}] & [\alpha^{(2)}\gamma^{(2)}\delta^{(4)}], \\ [\alpha^{(2)}\alpha^{(4)}\beta^{(3)}] & [\alpha^{(3)}\beta^{(1)}\beta^{(4)}] & \star & [\alpha^{(3)}\beta^{(3)}\delta^{(4)}], \\ \star & \star & \star & [\alpha^{(4)}\beta^{(4)}\gamma^{(4)}], \end{array}\right.$$

et ces points sont précisément les points cherchés.

La construction précédente est déduite de la proposition 2° ou des égalités ($XXVII_1$) et ($XXVII_2$). Ces mêmes égalités conduisent à une autre proposition que je vais encore indiquer.

D'après les égalités ($XXVII_1$), on obtient

$$[A^{(j)}\alpha^{(j)}] = [B^{(j)}\beta^{(j)}] = [C^{(j)}\gamma^{(j)}] = [D^{(j)}\partial^{(j)}] = [A^{(j)}B^{(j)}C^{(j)}D^{(j)}]$$
$$(j = 1, 2, 3, 4).$$

Or on a, au moyen des égalités (XXV) et (XXVIII),

$$\begin{aligned}[A^{(h)}\alpha^{(h)}] &= \mathfrak{a}_{3h}^2[B^{(4)}\beta^{(4)}] + \mathfrak{a}_{2h}^2[C^{(4)}\gamma^{(4)}] + \mathfrak{a}_{1h}^2[D^{(4)}\partial^{(4)}] \\ &= (\mathfrak{a}_{3h}^2 + \mathfrak{a}_{2h}^2 + \mathfrak{a}_{1h}^2)[A^{(4)}B^{(4)}C^{(4)}D^{(4)}], \\ &= [A^{(4)}\alpha^{(4)}],\end{aligned}$$
$$(h = 1, 2, 3).$$

Par conséquent, les produits extérieurs $[A^{(j)}\alpha^{(j)}]$ ont la même valeur pour $j = 1, 2, 3, 4$. Si l'on désigne cette valeur par $\mathfrak{F}$, on a

$$(XXXI_1) \qquad [A^{(j)}B^{(j)}C^{(j)}D^{(j)}] = \mathfrak{F}, \qquad (j = 1, 2, 3, 4).$$

De même on déduit des égalités ($XXVII_2$)

$$[A^{(1)}A^{(2)}A^{(3)}A^{(4)}] = -[A^{(1)}\alpha^{(1)}] = -\mathfrak{F}$$

ou, plus généralement,

$$(XXXI_2) \qquad \left\{\begin{aligned} &[A^{(i_1)}A^{(i_2)}A^{(i_3)}A^{(i_4)}] = [B^{(i_1)}B^{(i_2)}B^{(i_3)}B^{(i_4)}] \\ &= [C^{(i_1)}C^{(i_2)}C^{(i_3)}C^{(i_4)}] = [D^{(i_1)}D^{(i_2)}D^{(i_3)}D^{(i_4)}] = \pm\mathfrak{F}.\end{aligned}\right.$$

Dans ces produits extérieurs, les indices i_1, i_2, i_3, i_4 sont différents les uns des autres et désignent les nombres 1, 2, 3, 4; suivant qu'ils sont choisis de telle manière que les permutations i_1, i_2, i_3, i_4 et 1, 2, 3, 4 appartiennent à la même classe ou non, $\mathfrak{F}$ prend le signe $-$ ou $+$.

Donc

5° *Les tétraèdres dont les sommets sont formés par les points, placés dans une ligne ou dans une colonne de l'arrangement* (XXVI), *possèdent le même volume.*

Les produits extérieurs que j'ai envisagés jusqu'à présent ont, sans exception, la dimension 3 ou la dimension 4 (*voir* mon Mémoire cité,

p. 218); je vais envisager encore quelques produits extérieurs dont la dimension est égale à 2.

Au moyen des égalités (XXV), on obtient aisément

$$[A^{(h)}B^{(h)}] + [C^{(h)}D^{(h)}] = [A^{(4)}B^{(4)}] + [C^{(4)}D^{(4)}], \qquad (h = 1, 2, 3).$$

Par conséquent l'expression $[A^{(j)}B^{(j)}] + [C^{(j)}D^{(j)}]$ reste invariable pour $j = 1, 2, 3, 4$. En désignant sa valeur par $\Gamma^{(A, B)}$ et en permutant les lettres A, B, C, D, on est conduit ainsi aux égalités suivantes

$$\text{(XXXII)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &[A^{(j)}B^{(j)}] + [C^{(j)}D^{(j)}] = \Gamma^{(A, B)}, \\ &[A^{(j)}C^{(j)}] + [D^{(j)}B^{(j)}] = \Gamma^{(A, C)}, \\ &[A^{(j)}D^{(j)}] + [B^{(j)}C^{(j)}] = \Gamma^{(A, D)}. \end{aligned} \right.$$

D'une façon tout à fait analogue on trouve

$$\text{(XXXIII)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\quad [A^{(h)}A^{(k)}] + [A^{(l)}A^{(4)}] \\ &= [B^{(h)}B^{(k)}] + [B^{(l)}B^{(4)}] \\ &= [C^{(h)}C^{(k)}] + [C^{(l)}C^{(4)}] \\ &= [D^{(h)}D^{(k)}] + [D^{(l)}D^{(4)}] \\ &= \Gamma^{(l)} \end{aligned} \right.$$

$$(h, k, l = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2).$$

Les égalités (XXXII) et (XXXIII) entraînent de nombreuses conséquences dont la plus simple, qui complète d'ailleurs la proposition 4°, s'énonce ainsi :

6° *Si l'on partage, dans deux lignes ou dans deux colonnes de l'arrangement* (XXVI), *les quatre points et leurs correspondants en deux à deux, les quatre couples de points qui s'obtiennent ainsi déterminent quatre droites, appartenant au même système de génératrices d'un hyperboloïde à une nappe.*

Les égalités (XXV) dont j'ai déduit les résultats précédents, bien qu'elles soient très simples, ne sont pas symétriques, parce que les points $A^{(4)}, \ldots, D^{(4)}$ jouent, dans elles, un rôle préféré. Pour cela, je vais transformer ces égalités et leur donner une forme nouvelle et symétrique, en représentant tous les seize points $A^{(j)}, \ldots, D^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ par les mêmes quatre points $E^{(1)}, E^{(2)}, E^{(3)}, E^{(4)}$.

A cet effet, j'exprime identiquement les neuf coefficients

$$\mathfrak{a}_{mn}(m,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

d'une substitution orthogonale à déterminant $+1$ (*voir* le n° 7, théorème III, p. 272 de ce Mémoire) au moyen de quatre quantités $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$.

D'après les formules bien connues d'Olinde Rodrigues, on a

$$(\mathrm{IV})\left\{\begin{array}{lll} & \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{a}_2^2 + \mathfrak{a}_3^2 + \mathfrak{a}_4^2, & \\ \mathfrak{a}.\mathfrak{a}_{11} = \mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{a}_2^2 - \mathfrak{a}_3^2 + \mathfrak{a}_4^2, & \mathfrak{a}.\mathfrak{a}_{12} = 2(\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2), & \mathfrak{a}.\mathfrak{a}_{13} = 2(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4), \\ \mathfrak{a}.\mathfrak{a}_{21} = 2(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4), & \mathfrak{a}.\mathfrak{a}_{22} = \mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{a}_2^2 + \mathfrak{a}_3^2 - \mathfrak{a}_4^2, & \mathfrak{a}.\mathfrak{a}_{23} = 2(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4), \\ \mathfrak{a}.\mathfrak{a}_{31} = 2(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3), & \mathfrak{a}.\mathfrak{a}_{32} = 2(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4), & \mathfrak{a}.\mathfrak{a}_{33} = \mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{a}_2^2 - \mathfrak{a}_3^2 - \mathfrak{a}_4^2 \end{array}\right.$$

En substituant ces valeurs des coefficients $\mathfrak{a}_{mn}$ dans les expressions pour $A^{(1)}, \ldots, D^{(1)}$ qui proviennent des égalités (XXV) pour $h = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}.A^{(1)} = {} & \mathfrak{a}_1(\mathfrak{a}_3 B^{(4)} + \mathfrak{a}_2 C^{(4)} + \mathfrak{a}_1 D^{(4)}) - \mathfrak{a}_2(\mathfrak{a}_4 B^{(4)} - \mathfrak{a}_1 C^{(4)} + \mathfrak{a}_2 D^{(4)}) \\ & - \mathfrak{a}_3(-\mathfrak{a}_1 B^{(4)} - \mathfrak{a}_4 C^{(4)} + \mathfrak{a}_3 D^{(4)}) + \mathfrak{a}_4(-\mathfrak{a}_2 B^{(4)} + \mathfrak{a}_3 C^{(4)} + \mathfrak{a}_4 D^{(4)}), \\ \mathfrak{a}.B^{(1)} = {} & \mathfrak{a}_2(\mathfrak{a}_2 C^{(4)} + \mathfrak{a}_4 A^{(4)} + \mathfrak{a}_1 D^{(4)}) + \mathfrak{a}_1(-\mathfrak{a}_1 C^{(4)} - \mathfrak{a}_3 A^{(4)} + \mathfrak{a}_2 D^{(4)}) \\ & + \mathfrak{a}_4(-\mathfrak{a}_4 C^{(4)} + \mathfrak{a}_2 A^{(4)} + \mathfrak{a}_3 D^{(4)}) + \mathfrak{a}_3(\mathfrak{a}_3 C^{(4)} - \mathfrak{a}_1 A^{(4)} + \mathfrak{a}_4 D^{(4)}), \\ \mathfrak{a}.C^{(1)} = {} & -\mathfrak{a}_3(\mathfrak{a}_4 A^{(4)} + \mathfrak{a}_3 B^{(4)} + \mathfrak{a}_1 D^{(4)}) + \mathfrak{a}_4(-\mathfrak{a}_3 A^{(4)} + \mathfrak{a}_4 B^{(4)} + \mathfrak{a}_2 D^{(4)}) \\ & - \mathfrak{a}_1(\mathfrak{a}_2 A^{(4)} - \mathfrak{a}_1 B^{(4)} + \mathfrak{a}_3 D^{(4)}) + \mathfrak{a}_2(-\mathfrak{a}_1 A^{(4)} - \mathfrak{a}_2 B^{(4)} + \mathfrak{a}_4 D^{(4)}), \\ \mathfrak{a}.D^{(1)} = {} & -\mathfrak{a}_4(\mathfrak{a}_4 A^{(4)} + \mathfrak{a}_3 B^{(4)} + \mathfrak{a}_2 C^{(4)}) - \mathfrak{a}_3(-\mathfrak{a}_3 A^{(4)} + \mathfrak{a}_4 B^{(4)} - \mathfrak{a}_1 C^{(4)}) \\ & + \mathfrak{a}_2(\mathfrak{a}_2 A^{(4)} - \mathfrak{a}_1 B^{(4)} - \mathfrak{a}_4 C^{(4)}) + \mathfrak{a}_1(-\mathfrak{a}_1 A^{(4)} - \mathfrak{a}_2 B^{(4)} + \mathfrak{a}_3 C^{(4)}). \end{aligned}$$

Si l'on pose, dans ces expressions,

$$(\mathcal{E})\quad\left\{\begin{aligned} \mathfrak{a}_4 A^{(4)} + \mathfrak{a}_3 B^{(4)} + \mathfrak{a}_2 C^{(4)} + \mathfrak{a}_1 D^{(4)} &= \mathfrak{a}.E^{(1)}, \\ -\mathfrak{a}_3 A^{(4)} + \mathfrak{a}_4 B^{(4)} - \mathfrak{a}_1 C^{(4)} + \mathfrak{a}_2 D^{(4)} &= \mathfrak{a}.E^{(2)}, \\ \mathfrak{a}_2 A^{(4)} - \mathfrak{a}_1 B^{(4)} - \mathfrak{a}_4 C^{(4)} + \mathfrak{a}_3 D^{(4)} &= \mathfrak{a}.E^{(3)}, \\ -\mathfrak{a}_1 A^{(4)} - \mathfrak{a}_2 B^{(4)} + \mathfrak{a}_3 C^{(4)} + \mathfrak{a}_4 D^{(4)} &= \mathfrak{a}.E^{(4)}, \end{aligned}\right.$$

elles prennent la forme simple

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= \mathfrak{a}_1 E^{(1)} - \mathfrak{a}_2 E^{(2)} - \mathfrak{a}_3 E^{(3)} + \mathfrak{a}_4 E^{(4)}, \\ B^{(1)} &= \mathfrak{a}_2 E^{(1)} + \mathfrak{a}_1 E^{(2)} + \mathfrak{a}_4 E^{(3)} + \mathfrak{a}_3 E^{(4)}, \\ C^{(1)} &= -\mathfrak{a}_3 E^{(1)} + \mathfrak{a}_4 E^{(2)} - \mathfrak{a}_1 E^{(3)} + \mathfrak{a}_2 E^{(4)}, \\ D^{(1)} &= -\mathfrak{a}_4 E^{(1)} - \mathfrak{a}_3 E^{(2)} + \mathfrak{a}_2 E^{(3)} + \mathfrak{a}_1 E^{(4)}. \end{aligned}$$

D'une manière analogue, on peut représenter au moyen des points $E^{(1)}, \ldots, E^{(4)}$ les points $A^{(2)}, \ldots, D^{(2)}$, $A^{(3)}, \ldots, D^{(3)}$ et tirer des égalités ($\mathfrak{E}$) les expressions pour $A^{(4)}, \ldots, D^{(4)}$. C'est ainsi que l'on obtient les expressions suivantes des seize points $A^{(j)}, \ldots, D^{(j)}$, au moyen de quatre constantes et de quatre points :

$$
(\text{XXXV})\quad
\left\{
\begin{aligned}
A^{(1)} &= \alpha_1 E^{(1)} - \alpha_2 E^{(2)} - \alpha_3 E^{(3)} + \alpha_4 E^{(4)},\\
A^{(2)} &= -\alpha_2 E^{(1)} - \alpha_1 E^{(2)} + \alpha_4 E^{(3)} + \alpha_3 E^{(4)},\\
A^{(3)} &= \alpha_3 E^{(1)} + \alpha_4 E^{(2)} + \alpha_1 E^{(3)} + \alpha_2 E^{(4)},\\
A^{(4)} &= \alpha_4 E^{(1)} - \alpha_3 E^{(2)} + \alpha_2 E^{(3)} - \alpha_1 E^{(4)};\\[4pt]
B^{(1)} &= \alpha_2 E^{(1)} + \alpha_1 E^{(2)} + \alpha_4 E^{(3)} + \alpha_3 E^{(4)},\\
B^{(2)} &= \alpha_1 E^{(1)} - \alpha_2 E^{(2)} + \alpha_3 E^{(3)} - \alpha_4 E^{(4)},\\
B^{(3)} &= -\alpha_4 E^{(1)} + \alpha_3 E^{(2)} + \alpha_2 E^{(3)} - \alpha_1 E^{(4)},\\
B^{(4)} &= \alpha_3 E^{(1)} + \alpha_4 E^{(2)} - \alpha_1 E^{(3)} - \alpha_2 E^{(4)};\\[4pt]
C^{(1)} &= -\alpha_3 E^{(1)} + \alpha_4 E^{(2)} - \alpha_1 E^{(3)} + \alpha_2 E^{(4)},\\
C^{(2)} &= \alpha_4 E^{(1)} + \alpha_3 E^{(2)} + \alpha_2 E^{(3)} + \alpha_1 E^{(4)},\\
C^{(3)} &= \alpha_1 E^{(1)} + \alpha_2 E^{(2)} - \alpha_3 E^{(3)} - \alpha_4 E^{(4)},\\
C^{(4)} &= \alpha_2 E^{(1)} - \alpha_1 E^{(2)} - \alpha_4 E^{(3)} + \alpha_3 E^{(4)};\\[4pt]
D^{(1)} &= -\alpha_4 E^{(1)} - \alpha_3 E^{(2)} + \alpha_2 E^{(3)} + \alpha_1 E^{(4)},\\
D^{(2)} &= -\alpha_3 E^{(1)} + \alpha_4 E^{(2)} + \alpha_1 E^{(3)} - \alpha_2 E^{(4)},\\
D^{(3)} &= -\alpha_2 E^{(1)} + \alpha_1 E^{(2)} - \alpha_4 E^{(3)} + \alpha_3 E^{(4)},\\
D^{(4)} &= \alpha_1 E^{(1)} + \alpha_2 E^{(2)} + \alpha_3 E^{(3)} + \alpha_4 E^{(4)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces expressions symétriques de seize points $A^{(4)}, \ldots, D^{(4)}$ possèdent exactement la même forme que j'ai prise, dans mon Mémoire cité, comme point de départ pour la représentation des points (voir *loc. cit.*, p. 204). Par conséquent, on peut employer aux points $A^{(1)}, \ldots, D^{(4)}$, aux droites, aux plans et aux configurations qu'ils engendrent les principes y exposés. Tout particulièrement, si l'on pose (voir *loc. cit.*, p. 206 et 210)

$$
\begin{aligned}
[E^{(1)} E^{(2)} E^{(3)} E^{(4)}] &= +1,\\
[E^{(2)} E^{(3)} E^{(4)}] &= \varepsilon^{(1)},\\
[E^{(1)} E^{(3)} E^{(4)}] &= -\varepsilon^{(2)},\\
[E^{(1)} E^{(2)} E^{(4)}] &= \varepsilon^{(3)},\\
[E^{(1)} E^{(2)} E^{(3)}] &= -\varepsilon^{(4)},
\end{aligned}
$$

on obtient, pour les seize plans $\alpha^{(1)}, \ldots, \delta^{(4)}$, des expressions tout à fait analogues aux expressions (XXXV) et en provenant, si l'on remplace, dans les expressions (XXXV), $A^{(j)}$ et $E^{(j)}$ par $\alpha^{(j)}$ et $\mathfrak{a}.\varepsilon^{(j)}$, sans changer les coefficients $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$. Par exemple, de l'expression pour $A^{(1)}$, savoir

$$A^{(1)} = \mathfrak{a}_1 E^{(1)} - \mathfrak{a}_2 E^{(2)} - \mathfrak{a}_3 E^{(3)} + \mathfrak{a}_4 E^{(4)},$$

on tire l'expression suivante pour $\alpha^{(1)}$

$$\alpha^{(1)} = \mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}_1 \varepsilon^{(1)} - \mathfrak{a}_2 \varepsilon^{(2)} - \mathfrak{a}_3 \varepsilon^{(3)} + \mathfrak{a}_4 \varepsilon^{(4)}).$$

De là résulte

$$[A^{(1)} \alpha^{(1)}] = \mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{a}_2^2 + \mathfrak{a}_3^2 + \mathfrak{a}_4^2)\,[E^{(1)} E^{(2)} E^{(3)} E^{(4)}]$$

ou

$$[A^{(1)} \alpha^{(1)}] = \mathfrak{a}^2$$

ou

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{a}^2.$$

Donc, si l'on pose $\mathfrak{a} = 1$ et, par conséquent, aussi $\mathfrak{F} = 1$, les expressions (XXXV) fournissent encore la représentation des seize plans $\alpha^{(1)}, \ldots, \delta^{(4)}$, définis, de deux manières, par les égalités (XXVII_1) et (XXVII_2), si l'on remplace dans les expressions (XXXV) $A^{(j)}$ par $\alpha^{(j)}$ et $E^{(j)}$ par $\varepsilon^{(j)}$. Comme ainsi les points $A^{(j)}$ et les plans $\alpha^{(j)}$ sont représentés par les *mêmes* égalités, les relations qui en découlent ont lieu pour les uns et pour les autres. Je ne m'arrêterai pas à ces relations, très importantes et très nombreuses, mais j'indiquerai quelques-uns des problèmes, beaucoup étudiés, dont elles forment la solution analytique.

D'après la manière de représenter les *tétraèdres desmiques* que j'ai établie dans le Tome XXIX des *Mathematische Annalen*, p. 581, les expressions (XXXV) mettent en évidence que les points $A^{(1)}, B^{(2)}, C^{(3)}, D^{(4)}$; $A^{(2)}, B^{(1)}, C^{(4)}, D^{(3)}$; $A^{(3)}, B^{(4)}, C^{(1)}, D^{(2)}$; $A^{(4)}, B^{(3)}, C^{(2)}, D^{(1)}$ forment les sommets de quatre tétraèdres, dont chacun est desmique au tétraèdre de référence $E^{(1)}, E^{(2)}, E^{(3)}, E^{(4)}$. Par conséquent, les propositions, découvertes pour les tétraèdres desmiques par MM. Hermes, Reye, Schröter, Stephanos, Veronese et d'autres géomètres, ont lieu pour les points $A^{(j)}$ et les plans $\alpha^{(j)}$. C'est ainsi que la configuration, appelée *desmique*, entre dans la théorie des fonctions hyperelliptiques de première espèce.

De même, entrent, en vertu des propositions 3° et 4°, les configurations de Desargues, de l'hexagramme mystique, et des huit points associés, et, dès lors, les recherches que l'on doit à Kirkmann, à Staudt, à Steiner, à Schröter, ainsi qu'à MM. Cayley, Reye, Schönflies, Sturm, Veronese, de Vries et Zeuthen (¹).

Si l'on applique à la Mécanique et à la Cinématique les principes que l'on doit à Cauchy et à Grassmann, et que j'ai déjà appliqués à la Géométrie, dans mon Mémoire cité plus haut (p. 282), on est conduit à des expressions telles que (XXXII) et (XXXIII). C'est ainsi que prennent place dans les recherches que je viens de proposer les résultats, découverts par Möbius, Chasles, M. Ball et M. Mannheim, ainsi que ceux que M. Schönflies a exposés dans son bel Ouvrage : *Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung*. Il me faut me borner à cette succincte remarque, parce que son illustration exigerait des explications détaillées qui surpasseraient beaucoup les limites que je me suis fixées pour ce Mémoire.

12. *Conséquence des relations rosenhainéennes. Fonctions, composées des fonctions q_{ij}, et liées par les mêmes relations que celles-ci. Théorème. Corollaire.* — Dans le numéro précédent, j'ai déduit des relations (XXV), au moyen des identités (XXXIV), les expressions (XXXV). Or les relations (XXV), si l'on y remplace $A^{(j)}$, $B^{(j)}$, $C^{(j)}$, $D^{(j)}$ respectivement par q_{1j}, q_{2j}, q_{3j}, q_{4j}, se transforment dans les relations *rosenhainéennes* (XXI) dont je les ai tirées. Par conséquent, les relations *rosenhainéennes* se transforment elles-mêmes dans les expressions (XXXV) et en proviennent, si l'on y remplace $A^{(j)}, B^{(j)}, C^{(j)}, D^{(j)}; E^{(j)} (j=1, 2, 3, 4)$

(¹) A ces sujets, on pourra consulter aussi mes propres Mémoires suivants : *Ueber die Umformung gewisser Determinanten, welche in der Lehre von den Kegelschnitten vorkommen* (*Journal de Borchardt*, t. XCII, p. 123-144) – *Ueber einige Determinanten-Identitäten, welche in der Lehre von den perspectivischen Dreiecken vorkommen* (*Ibid.*, t. XCV, p. 36-43). — *Zur Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung* (*Ibid.*, t. XCIX, p. 128-130). — *Bemerkung zu den desmischen Tetraedern* (*Math. Ann.*, t. XXIX, p. 581-582). — *Sur les cubiques gauches* (*Bulletin des Sciences mathém.*, 2ᵉ série, t. XI, p. 222-236).

par les fonctions q_{1j}, q_{2j}, q_{3j}, q_{4j}; u_j où les u_j désignent de nouvelles fonctions qui dépendent des fonctions q_{14}, q_{24}, q_{34}, q_{44}, au moyen des relations $(\mathcal{E})$ du numéro précédent.

Les expressions (XXXV), ainsi transformées, offrent une propriété remarquable et importante : elles représentent les seize expressions qui s'obtiennent, si l'on compose les éléments placés dans les lignes des deux systèmes suivants :

$$\begin{array}{rrrr}
\mathfrak{a}_1, & \mathfrak{a}_2, & -\mathfrak{a}_3, & \mathfrak{a}_4, \\
-\mathfrak{a}_2, & \mathfrak{a}_1, & \mathfrak{a}_4, & \mathfrak{a}_3, \\
\mathfrak{a}_3, & -\mathfrak{a}_4, & \mathfrak{a}_1, & \mathfrak{a}_2, \\
\mathfrak{a}_4, & \mathfrak{a}_3, & \mathfrak{a}_2, & -\mathfrak{a}_1,
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrr}
u_1, & -u_2, & u_3, & u_4, \\
u_2, & u_1, & -u_4, & u_3, \\
-u_3, & u_4, & u_1, & u_2, \\
u_4, & u_3, & u_2, & -u_1.
\end{array}$$

Or l'un de ces systèmes et l'autre représentent les seize coefficients d'une substitution orthogonale à déterminant positif, et, d'ailleurs, *identiquement;* par conséquent, le système composé jouit de la même propriété. De là résulte non seulement une nouvelle démonstration du théorème II du n° 7, mais encore la conséquence importante et féconde que les relations qui découlent de ce théorème deviennent des *identités absolues,* si l'on exprime les fonctions q_{ij} par les constantes $\mathfrak{a}_j$ et les fonctions u_j. Cette remarque entraîne l'autre que les quantités $\mathfrak{a}_j$, u_j ne jouent que le rôle de *paramètres* et qu'elles peuvent être remplacées, par conséquent, par d'autres quantités qui dépendent d'elles d'une manière tout à fait arbitraire. Comme d'ailleurs les relations rosenhainéennes et les relations göpeléennes deviennent ellesmêmes des identités absolues, si l'on introduit les paramètres $\mathfrak{a}_j$, u_j, on obtient le théorème très général :

THÉORÈME VI. — *On peut composer, et d'ailleurs d'une infinité de manières, des seize fonctions* q_{ij} *d'autres seize fonctions* Q_{ij}, *et des neuf constantes* $\mathfrak{a}_{mn}$ *d'autres neuf constantes* $\mathfrak{A}_{mn}$, *de façon que les fonctions* Q_{ij} *sont les seize coefficients d'une substitution orthogonale à déterminant positif, et que les neuf constantes* $\mathfrak{A}_{mn}$ *sont les neuf coefficients d'une substitution orthogonale à déterminant* $+1$. *Si les fonctions* Q_{ij} *et les constantes* $\mathfrak{A}_{mn}$ *proviennent des fonctions* q_{ij} *et des constantes* $\mathfrak{a}_{mn}$, *en remplaçant les paramètres* $\mathfrak{a}_j$, u_j *par d'autres, convenablement choisis, toutes les relations établies dans ce Mémoire subsistent encore pour ces fonctions et ces constantes nouvelles.*

Je vais terminer ce Mémoire en établissant une conséquence très particulière du théorème précédent :

Si l'on remplace tout simplement les paramètres $\mathfrak{a}_j$, u_j par leurs carrés $\mathfrak{a}_j^2$, u_j^2, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire. — *Les théorèmes II et III, ainsi que les relations* (XXI), (XXIII), (XXIV) *et toutes les conséquences qui en découlent, subsistent encore si l'on y remplace les fonctions* q_{ij} *et les constantes* $\mathfrak{a}_{mn}$ *par les fonctions* Q_{ij} *et les constantes* $\mathfrak{A}_{mn}$, *définies comme il suit :*

$$
\begin{aligned}
Q_{11} &= \tfrac{1}{2}(q_{11}q_{44} + q_{22}q_{33}), & Q_{31} &= \tfrac{1}{2}(q_{31}q_{13} + q_{24}q_{42}),\\
Q_{12} &= \tfrac{1}{2}(q_{12}q_{21} + q_{34}q_{43}), & Q_{32} &= \tfrac{1}{4}(q_{32}^2 + q_{23}^2 + q_{14}^2 + q_{41}^2),\\
Q_{13} &= \tfrac{1}{4}(q_{13}^2 + q_{31}^2 + q_{24}^2 + q_{42}^2), & Q_{33} &= \tfrac{1}{2}(q_{33}q_{44} + q_{11}q_{22}),\\
Q_{14} &= \tfrac{1}{2}(q_{14}q_{32} + q_{41}q_{23}), & Q_{34} &= \tfrac{1}{2}(q_{34}q_{21} + q_{43}q_{12}),\\[1ex]
Q_{21} &= \tfrac{1}{4}(q_{21}^2 + q_{12}^2 + q_{34}^2 + q_{43}^2), & Q_{41} &= \tfrac{1}{2}(q_{41}q_{32} + q_{23}q_{14}),\\
Q_{22} &= \tfrac{1}{2}(q_{22}q_{44} + q_{33}q_{11}), & Q_{42} &= \tfrac{1}{2}(q_{42}q_{13} + q_{31}q_{24}),\\
Q_{23} &= \tfrac{1}{2}(q_{23}q_{32} + q_{14}q_{41}), & Q_{43} &= \tfrac{1}{2}(q_{43}q_{21} + q_{12}q_{34}),\\
Q_{24} &= \tfrac{1}{2}(q_{24}q_{13} + q_{42}q_{31}), & Q_{44} &= \tfrac{1}{4}(q_{11}^2 + q_{22}^2 + q_{33}^2 + q_{44}^2);
\end{aligned}
$$

et

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}_{11}^2 + \mathfrak{a}_{22}^2 + \mathfrak{a}_{33}^2 + 1),$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A}.\mathfrak{A}_{11} &= \mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33}, & \mathfrak{A}.\mathfrak{A}_{21} &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}_{21}^2 + \mathfrak{a}_{12}^2), & \mathfrak{A}.\mathfrak{A}_{31} &= \mathfrak{a}_{31}\mathfrak{a}_{13},\\
\mathfrak{A}.\mathfrak{A}_{12} &= \mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{21}, & \mathfrak{A}.\mathfrak{A}_{22} &= \mathfrak{a}_{22} + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{a}_{11}, & \mathfrak{A}.\mathfrak{A}_{32} &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}_{32}^2 + \mathfrak{a}_{23}^2),\\
\mathfrak{A}.\mathfrak{A}_{13} &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}_{13}^2 + \mathfrak{a}_{31}^2), & \mathfrak{A}.\mathfrak{A}_{23} &= \mathfrak{a}_{23}\mathfrak{a}_{32}, & \mathfrak{A}.\mathfrak{A}_{33} &= \mathfrak{a}_{33} + \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}.
\end{aligned}
$$

De la même manière que les Q_{ij} et $\mathfrak{A}_{mn}$ sont composés des q_{ij} et $\mathfrak{a}_{mn}$, on peut composer des Q_{ij} et $\mathfrak{A}_{mn}$ d'autres fonctions et d'autres constantes, et ainsi de suite. De cette façon, le théorème précédent et tout particulièrement le corollaire que je viens d'établir donnent naissance à une *échelle* de fonctions et de constantes, liées entre elles par les relations que j'ai établies dans ce Mémoire et par d'autres qui en découlent.