ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

M. TIKHOMANDRITZKY

Esquisse d'une méthode pour déterminer le genre et les courbes adjointes d'une courbe algébrique donnée au moyen des opérations rationnelles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 10 (1893), p. 151-165

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1893_3_10__151_0>

ESQUISSE D'UNE MÉTHODE

POUR DÉTERMINER

LE GENRE ET LES COURBES ADJOINTES

D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE DONNÉE

AU MOYEN DES OPÉRATIONS RATIONNELLES,

PAR M. M. TIKHOMANDRITZKY,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE KHARKOFF (RUSSIE).

Le problème de détermination du genre et des courbes adjointes d'une courbe algébrique donnée, au moyen des opérations rationnelles, était déjà l'objet des recherches de M. NÖTHER (*Math. Ann.*, Bd. 32, p. 310) et de M. RAFFY (en ce qui concerne le genre), dans sa Thèse du doctorat (aussi dans les *Math. Ann.*, Bd. 23, p. 256). Si je reviens à ce problème, c'est que les méthodes de M. Nöther et de M. Raffy ne me paraissent être ni aussi simples ni aussi directes qu'on pourrait le désirer, la dernière méthode exigeant la formation des équations qui déterminent en x les dérivées de y de différents ordres, la première des transformations rationnelles de la courbe donnée dans le cas des singularités supérieures, dont la théorie très délicate n'appartient pas encore aux éléments des hautes Mathématiques enseignés partout. Il suffit pourtant, même dans le cas le plus général des singularités quelconques, d'appliquer convenablement la méthode du plus grand commun diviseur pour arriver à déterminer le genre et les courbes adjointes au seul moyen de division et de résolution (pour les dernières) des systèmes des équations du premier degré par rapport aux inconnues. C'est ce que je me propose de montrer dans ce qui suit, en prenant pour point de départ la *Théorie des fonctions abéliennes*, par Ch. Briot (Chap. I), qui a laissé à la courbe fondamentale, on peut le dire, toute la généralité possible, car on peut la ramener toujours, au moyen des transformations du premier degré, à satisfaire aux quelques restrictions adoptées par Briot. Si j'accepte, moi aussi, ces restrictions, ce n'est que pour abréger l'exposition de ma méthode, en employant les expressions et les notations bien déterminées et bien connues de ce Livre.

I.

1. Soit donné un système des équations

$$(1) \qquad f_1(x,y)=0, \qquad f_2(x,y)=0, \qquad \ldots, \qquad f_m(x,y)=0;$$

pour trouver leurs solutions communes, s'il en existe, ou pour prouver leur incompatibilité dans le cas contraire, on peut procéder de la manière suivante. On commence à chercher les solutions communes aux deux premières des équations (1) par la méthode du plus grand commun diviseur; d'après le théorème de Labatie (voir *Cours d'Algèbre supérieure*, par Serret, 3e édition, p. 138), on parviendra à une série de paires d'équations de la forme

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{llll} \varphi_1(x,y)=0, & \varphi_2(x,y)=0, & \ldots, & \varphi_k(x,y)=0, \\ \psi_1(x)=0, & \psi_2(x)=0, & \ldots, & \psi_k(x)=0, \end{array}\right.$$

dont chacune donnera les solutions communes de ces deux équations du système; la somme des produits des degrés μ_i de x en $\psi_i(x)=0$, et ν_i de y en $\varphi_i(x,y)=0$ donnera le nombre de ces solutions [1]. Puis on cherche de la même manière les solutions communes à la troisième des équations (1)

$$(3) \qquad f_3(x,y)=0,$$

et à l'équation

$$(4) \qquad \varphi_1(x,y)=0;$$

[1] Les premiers membres de chacune de ces équations étant débarrassés des facteurs égaux.

on parviendra, d'après le même théorème de Labatie, à une série de paires d'équations de la même forme

$$(5)\qquad \begin{cases} \varphi_{1,1}(x,y)=0, & \varphi_{1,2}(x,y)=0, & \ldots, & \varphi_{1,l_1}(x,y)=0,\\ \psi_{1,1}(x)=0, & \psi_{1,2}(x)=0, & \ldots, & \psi_{1,l_1}(x)=0; \end{cases}$$

on cherchera alors les plus grands communs diviseurs de $\psi_1(x)$ avec chacun des $\psi_{1,i}(x)$ $(i=1, 2, 3, \ldots, l_1)$. En désignant ainsi le plus grand commun diviseur de $\psi_i(x)$ et de $\psi_{1,i}(x)$:

$$(6)\qquad \mathrm{D}[\psi_1(x), \psi_{1,i}(x)] = \theta_{1,i}(x),$$

si l'on rencontre un résultat de la forme

$$(7)\qquad \theta_{1,j}(x)=1,$$

on en conclura que, parmi les solutions de la paire d'équations

$$(8)\qquad \begin{cases} \varphi_{1,j}(x,y)=0,\\ \psi_{1,j}(x)=0, \end{cases}$$

il n'y en a aucune qui satisfasse aux trois premières des équations (1). En rejetant les pareilles paires d'équations de la série (5), s'il y en a, les autres conduiront à des paires d'équations suivantes :

$$(9)\qquad \begin{cases} \varphi_{1,i_1}(x,y)=0, & \varphi_{1,i_2}(x,y)=0, & \ldots, & \varphi_{1,i_{g_1}}(x,y)=0,\\ \theta_{1,i_1}(x)=0, & \theta_{1,i_2}(x)=0, & \ldots, & \theta_{1,i_{g_1}}(x)=0, \end{cases}$$

qui donneront toutes les solutions communes des trois premières des équations (1) qui se trouvent parmi les solutions de la première paire des équations (2). On passera alors à la seconde paire (2), en la combinant de la même manière avec l'équation (3), et l'on arrive aux paires d'équations

$$(10)\qquad \begin{cases} \varphi_{2,i_1}(x,y)=0, & \varphi_{2,i_2}(x,y)=0, & \ldots, & \varphi_{2,i_{g_2}}(x,y)=0,\\ \theta_{2,i_1}(x)=0, & \theta_{2,i_2}(x)=0, & \ldots, & \theta_{2,i_{g_2}}(x)=0, \end{cases}$$

qui donnent toutes les solutions communes aux trois premières des équations (1) qui se trouvent parmi celles de la deuxième des paires (2). En appliquant le même procédé à la combinaison de l'équation (3) avec la troisième, la quatrième enfin avec la dernière des paires d'équations (2), on arrive à la dernière série des paires d'équations

$$(11)\quad \begin{cases} \varphi_{k,i_1}(x,y)=0, & \varphi_{k,i_2}(x,y)=0, & \ldots, & \varphi_{k,i_{g_k}}(x,y)=0, \\ \psi_{k,i_1}(x)=0, & \psi_{k,i_2}(x)=0, & \ldots, & \psi_{k,i_{g_k}}(x)=0, \end{cases}$$

qui donnent toutes les solutions communes aux trois premières des équations (1) qui se trouvent parmi les solutions de la dernière des paires des équations (2). On aura ainsi toutes les solutions communes aux trois premières des équations (1) représentées par les paires d'équations contenues dans les séries (9), (10), ..., enfin (11). En combinant chacune de ces paires d'équations avec la quatrième des équations (1), on arrivera : ou 1° à démontrer l'incompatibilité des quatre premières des équations [et par suite de tout le système donné des équations (1)], ou 2° à représenter leurs solutions communes par les séries des paires d'équations de la même forme. En combinant chacune de ces dernières paires d'équations avec la cinquième des équations données, ou l'on démontrera leur incompatibilité, et par suite de tout le système donné, ou l'on arrivera à représenter leurs solutions par les paires d'équations de la même forme; et en continuant toujours de combiner chacune des paires d'équations, représentant les solutions communes des k premières des équations (1) avec la suivante, on arrive : ou 1° à démontrer l'incompatibilité de ces $k+1$ premières des équations (1), et par suite de tout le système donné, ou 2° à représenter les solutions communes à toutes les équations du système donné (1) par une série de paires d'équations de la forme

$$(12)\quad \begin{cases} \varphi(x,y)=0, \\ \psi(x)=0. \end{cases}$$

C'est ce qui suffit pour la résolution de notre double problème.

2. Soit donnée maintenant une équation irréductible du degré m en x et y

$$(1)\quad F(x,y)=0;$$

en appliquant la méthode exposée au système composé de cette équation et de celles qu'on obtient, en égalant à zéro, un certain nombre de dérivées partielles de différents ordres de son premier membre par rapport aux variables x et y, on arrivera à représenter les solutions communes de ce système d'équations par les paires d'équations de la forme (12). Soit

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ \psi(x) = 0 \end{cases}$$

une de ces paires d'équations, et soit $x = a$, $y = b$ une de ses solutions (qu'on n'a pas besoin de connaître pour notre but). En posant

$$(3) \qquad x = a + \xi, \qquad y = b + \eta,$$

et développant le premier membre de l'équation

$$(4) \qquad \mathrm{F}(a + \xi, b + \eta) = 0$$

d'après le théorème de Taylor, suivant les puissances de ξ et η, on aura, après avoir effacé les termes qui contiennent l'une des dérivées s'annulant pour $x = a$ et $y = b$, l'équation (2) de Briot (p. 2) :

$$(5) \qquad \Sigma \mathrm{A}_{\alpha\beta}\, \eta^\alpha \xi^\beta = 0,$$

où les coefficients $\mathrm{A}_{\alpha\beta}$, désignant les valeurs des dérivées partielles de $\mathrm{F}(x, y)$ par rapport à x et à y pour $x = a, y = b$, ne sont généralement connues qu'avec a et b, mais les exposants α et β le sont parfaitement, et cela suffit pour construire la ligne polygonale P, à l'aide de laquelle, chez Briot, se fait la première séparation en groupes circulaires des racines égales à b. Pour le côté C_i de cette ligne polygonale P, on aura, pour déterminer le rapport $v = \frac{\eta}{\xi^\mu}$, une équation

$$(6) \qquad \Phi(v) = \mathrm{A}_{\alpha_i\beta_i} v^{\alpha_i} + \Sigma \mathrm{A}_{\alpha\beta} v^\alpha + \mathrm{A}_{\alpha_{i+1}\beta_{i+1}} v^{\alpha_{i+1}} = v^{\alpha_{i+1}} \mathrm{L}_i = 0,$$

où

$$(7) \qquad \mathrm{L}_i = \mathrm{A}_{\alpha_i\beta_i} \lambda^{k_i} + \Sigma \mathrm{A}_{\alpha\beta} \lambda^{k_i - k} + \mathrm{A}_{\alpha_{i+1}\beta_{i+1}} = 0,$$

en posant $v^p = \lambda$ (Briot, p. 3). Maintenant, il faut séparer les racines simples de cette équation (7) et les racines multiples; pour chaque racine simple on aura un système circulaire de p racines devenant égales à b, et l'on connaîtra ainsi leur nombre; pour les racines multiples on aura besoin de faire la seconde transformation de Briot. Cette séparation des racines simples et des racines multiples de l'équation (7) pourra être faite par le procédé suivant.

On cherchera pour cela, par la méthode du plus grand commun diviseur, les solutions communes des équations en λ : $L_i = 0$ et $\frac{\partial L_i}{\partial \lambda} = 0$; ce qui conduira d'après le théorème de Labatie à une série des paires d'équations de la forme

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{llll} f_1(x, y, \lambda) = 0, & f_2(x, y, \lambda) = 0, & \ldots, & f_r(x, y, \lambda) = 0, \\ \chi_1(x, y) = 0, & \chi_2(x, y) = 0, & \ldots, & \chi_r(x, y) = 0; \end{array} \right.$$

puis on cherchera, par la même méthode, les solutions communes à $\varphi(x, y) = 0$ (2) avec chacune des $\chi_i(x, y) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, ce qui conduira, d'après le théorème cité, à une série des paires d'équations

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \Phi_{i1}(x, y) = 0, & \Phi_{i2}(x, y) = 0, & \ldots, & \Phi_{is}(x, y) = 0, \\ \Psi_{i1}(x) = 0, & \Psi_{i2}(x) = 0, & \ldots, & \Psi_{is}(x) = 0 \end{array} \right.$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, r);$$

après cela, on cherche les plus grands communs diviseurs de $\psi(x)$ (2) avec chacun de $\Psi_{ij}(x)$; en les désignant par $\theta_{ij}(x)$, ainsi que

$$(10) \qquad \theta_{ij}(x) = D[\psi(x), \Psi_{ij}(x)],$$

on aura de telles séries de paires d'équations

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \Phi_{i1}(x, y) = 0, & \Phi_{i2}(x, y) = 0, & \ldots, & \Phi_{is}(x, y) = 0, \\ \theta_{i1}(x) = 0, & \theta_{i2}(x) = 0, & \ldots, & \theta_{is}(x) = 0, \end{array} \right.$$

pour déterminer les valeurs de x et y, pour lesquelles l'équation (7) aura des racines multiples. En excluant ces dernières solutions des solutions de la paire d'équations (2), on aura les solutions de cette paire d'équations, pour lesquelles l'équation (7) en λ n'a que des racines simples. En désignant par $M(x)$ le plus petit multiple commun de toutes les $\theta_{ij}(x)$, on pourra représenter ces dernières valeurs de x et y par une telle série de paires d'équations

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, y) = 0, \\ \psi(x) : M(x) = 0 \end{array} \right.$$

et

$$(13)\qquad \begin{cases} \varphi(x,y) : \Phi_{ij}(x,y) = 0, \\ \theta_{ij}(x) = 0 \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r, \qquad j = 1, 2, \ldots, s).$$

D'après ce qui a été dit plus haut, on calculera facilement leur nombre par la seule considération des degrés de $\theta_{ij}(x)$ et des autres équations de chaque paire en y.

3. Les solutions multiples de l'équation (7) seront les solutions communes aux équations

$$(1)\qquad L_i = 0, \qquad \frac{dL_i}{d\lambda} = 0.$$

D'après le paragraphe précédent, elles seront données par les séries suivantes des systèmes de trois équations :

$$(2)\qquad \begin{cases} f_i(x, y, \lambda) = 0, \\ \Phi_{ij}(x, y) = 0, \\ \theta_{ij}(x) = 0 \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, s),$$

et les paires des deux dernières des équations de chaque système représenteront les points analytiques où cela aura lieu. Pour déterminer l'ordre de multiplicité de chaque solution multiple d'équation $L_i = 0$, on cherchera lesquelles des solutions communes (2) des équations (1) satisfont aussi aux conditions suivantes :

$$(3)\qquad \frac{d^2 L_i}{d\lambda^2} = 0, \qquad \frac{d^3 L_i}{d\lambda^3} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^{k-1} L_i}{d\lambda^{k-1}} = 0;$$

celle des valeurs de λ qui satisfait à toutes ces équations jusqu'à la dernière sera d'ordre k de multiplicité pour l'équation $L_i = 0$. On pourra le faire par la même méthode du n° 1. On cherche les solutions communes de la première des équations (3) et de $f_i(x, y, \lambda) = 0$ par la méthode du plus grand commun diviseur, et l'on arrive, d'après le théorème de Labatie (en considérant x comme connu) à une série de paires d'équations de la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} f_{i_1}^{(i)}(x, y, \lambda) = 0, \\ \chi_{i_1}^{(i)}(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$(i_1 = 1, 2, \ldots, r_1);$$

on cherche les solutions communes de la deuxième de ces équations et de chacune des équations $\Phi_{ij}(x, y) = 0$ en ayant égard à la dernière des (2), et l'on parvient à une série de paires d'équations

$$(5)\qquad \begin{cases} \Phi_{i_1 j_1}^{(i,j)}(x, y) = 0, \\ \theta_{i_1 j_1}^{(i,j)}(x) = 0. \end{cases}$$

En excluant les solutions de ces équations des solutions du système

$$(6)\qquad \begin{cases} \Phi_{ij}(x, y) = 0, \\ \theta_{ij}(x) = 0, \end{cases}$$

on aura, pour déterminer les valeurs de x et de y, pour lesquelles l'équation en λ n'a que des racines doubles, de tels systèmes d'équations :

$$(7)\qquad \begin{cases} \Phi_{ij}(x, y) = 0, \\ \theta_{ij}(x) : \mathrm{M}^{(i)}(x) = 0 \quad (^1) \end{cases}$$

$$(i_1 = 1, 2, \ldots, r, \qquad j_1 = 1, 2, \ldots, s)$$

et

$$(8)\qquad \begin{cases} \Phi_{ij}(x, y) : \Phi_{i_1 j_1}^{(i,j)}(x, y) = 0, \\ \theta_{i_1 j_1}^{ij}(x) = 0, \end{cases}$$

Ces solutions doubles elles-mêmes seront déterminées par l'équation

$$(9)\qquad f_i(x, y, \lambda) = 0$$

combinée avec (7) et (8), et par l'équation

$$(10)\qquad f_i(x, y, \lambda) : f_{i_1}^{(i)}(x, y, \lambda) = 0$$

combinée avec les équations (6).

En combinant chacune de ces équations (9) avec les paires (5), on

---

(1) Où $\mathrm{M}^{(i)}(x) = \mathrm{M}[\ldots \theta_{i_1 j_1}^{ij}(x) \ldots]$ le plus petit multiple des fonctions entre parenthèses.

pourra représenter les racines de l'équation $L_i = 0$, d'une multiplicité plus grande que la deuxième, ainsi :

$$(11)\qquad \begin{cases} f_{i_1}^{(i)}(x, y, \lambda) = 0, \\ \Phi_{i_1 j_1}^{(i,j)}(x, y) = 0, \\ \theta_{i_1 j_1}^{(i,j)}(x) = 0. \end{cases}$$

En combinant ces équations (11) avec $\frac{d^3 L_i}{d\lambda^3} = 0$, on pourra arriver aux séries de systèmes de trois équations de la forme (7) et (8) avec (9), ou (10) avec (6), qui donneront les valeurs des racines de $L_i = 0$ de multiplicité 3, et aux équations de la forme (11), qui donneront les racines de $L_i = 0$ de multiplicité plus grande que 3; et ainsi de suite. Cette opération préliminaire se terminera lorsque tous les θ seront $= 1$, ou lorsque la somme totale des multiplicités des solutions trouvées sera égale au degré de l'équation $L_i = 0$.

4. Considérons maintenant l'un des systèmes de trois équations, analogue au (11) du numéro précédent, nous le désignerons, pour plus de simplicité, ainsi :

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0, \\ \Theta(x) = 0, \end{cases}$$

qui donne les valeurs des racines de l'équation $L_i = 0$ en λ de multiplicité n'. A cause de $\lambda = \varphi^p$, ce système pourra s'écrire aussi ainsi :

$$(2)\qquad \begin{cases} f(x, y, \varphi^p) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0, \\ \Theta(x) = 0. \end{cases}$$

L'équation $\Phi(\varphi) = 0$ (6) du n° 2 aura n' racines égales à φ_1, n' égales à φ_2, ..., n' égales à φ_p, et l'équation (5) en η du n° 2 aura n' racines approchées de $\varphi_1 \xi^{\frac{q}{p}}$, n' de $\varphi_2 \xi^{\frac{q}{p}}$, ..., n' de $\varphi_p \xi^{\frac{q}{p}}$; toutes les pn' valeurs exactes de η peuvent être représentées (Briot, p. 10) par une formule unique

$$(3)\qquad (\varphi_1 + \eta')\xi'^q,$$

où $\xi' = \xi^{\frac{1}{p}}$, et φ_1 désigne l'une des p valeurs quelconques du radical

$\sqrt[p]{\lambda}$; en posant donc $\eta = (\varphi_1 + \eta')\xi'^q$ dans l'équation (5) du n° 2 et développant le résultat suivant les puissances de η' et ξ', on aura un résultat de la forme :

$$\Sigma A'_{\alpha'\beta'} \eta'^{\alpha'} \xi'^{\beta'} = 0, \tag{4}$$

où les $A'_{\alpha'\beta'}$ seront les polynômes en φ_1, avec les coefficients fonctions linéaires des $A_{\alpha\beta}$. Quelques-uns de ces polynômes peuvent s'annuler pour la valeur considérée de φ_1. On peut chercher de la même manière, comme au n° 4, les valeurs de φ_1, qui annulent plusieurs de ces polynômes, et l'on parviendra à représenter ces valeurs par les séries des systèmes de trois équations de la forme (2) (sans p). Après avoir effacé les termes de (4), qui s'annulent pour le système que l'on considère, on saura tous les α' et β' qui resteront dans (4), et l'on pourra construire la ligne polygonale P' (Briot, p. 10). On aura ainsi, pour le côté C'_i de cette ligne, l'équation en λ'

$$L'_i = 0 \tag{5}$$

pour déterminer les valeurs de $\lambda' = \varphi'^{p'}$, où $\varphi' = \dfrac{\eta'}{\xi'^{\mu}}$.

On cherche, d'une manière analogue au n° 2, les valeurs de λ' pour lesquelles cette équation en λ' n'aura que des racines simples, et celles pour lesquelles elle aura des racines multiples. Pour les premières, les valeurs de φ seront représentées par les systèmes d'équations de trois formes :

$$\left\{\begin{aligned} &f(x, y, \varphi) = 0,\\ &\Phi(x, y) = 0,\\ &\Theta(x) : \Im(x) = 0 \text{ [1]}, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

$$\left\{\begin{aligned} &f(x, y, \varphi) = 0,\\ &\Phi(x, y) : \Phi_1(x, y) = 0,\\ &\Theta_1(x) = 0, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} &f(x, y, \varphi) : f_1(x, y, \varphi) = 0,\\ &\Phi_1(x, y) = 0,\\ &\Theta_1(x) = 0; \end{aligned}\right. \tag{8}$$

pour les dernières, par les équations de la forme (1).

---

[1] $\Im(x)$ étant le plus petit multiple commun de tous les $\Theta_1(x)$.

On pourra aussi subdiviser les solutions multiples de l'équation (5) en λ' suivant l'ordre de leur multiplicité, comme on l'a fait pour l'équation en λ. Pour les racines simples de l'équation $L'_i = 0$, la séparation des racines de l'équation fondamentale $F(x, y) = 0$, égales à b pour $x = a$, en systèmes circulaires sera atteinte dès la *seconde transformation;* pour les racines d'ordre de multiplicité n'', on posera

$$(9) \qquad \eta' = (v'_1 + \eta'')\xi''^{q'}, \qquad \xi' = \xi''^{p'},$$

dans l'équation (4), qui prendra alors la forme

$$(10) \qquad \Sigma A''_{\alpha'', \beta''} \eta''^{\alpha''} \xi''^{\beta''} = 0,$$

où les $A''_{\alpha'', \beta''}$ seront les polynômes en v'_1 avec des coefficients fonctions linéaires de $A'_{\alpha', \beta'}$, et, par suite, fonctions entières de v_1 avec des coefficients fonctions linéaires des $A_{\alpha, \beta}$. Par la même méthode du n° 1, on parviendra à représenter par les systèmes de la forme

$$(11) \qquad \begin{cases} f(x, y, v, v') = 0, \\ \mathfrak{f}(x, y, v) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0, \\ \Theta(x) = 0 \end{cases}$$

les valeurs de v' qui annulent plusieurs des $A''_{\alpha'', \beta''}$. En effaçant ceux des termes de (10) qui contiennent les $A''_{\alpha'', \beta''}$ s'annulant pour le système considéré des valeurs de x, y, v, v', on saura tous les α'', β'', et, après avoir construit la ligne polygonale P'', on pourra exécuter la *troisième transformation* de Briot. Si, pour quelques-unes des valeurs de v', elle ne suffit pas, on passera à la quatrième, qui amènera les systèmes d'équations de la forme

$$(12) \qquad \begin{cases} \chi(x, y, v, v', v'') = 0, \\ f(x, y, v, v') = 0, \\ \mathfrak{f}(x, y, v) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0, \\ \Theta(x) = 0. \end{cases}$$

La marche à suivre plus loin, s'il était besoin, et la forme des systèmes d'équations représentant les points critiques à singularités d'ordres supérieurs qu'on rencontrera sont déjà assez éclairées par ce qui précède pour que nous puissions passer maintenant à la seconde partie de notre problème, car la première est résolue : nous avons montré effectivement comment, à l'aide de l'algorithme du plus grand commun diviseur, on parvient à connaître tous les nombres α_i, β_i; α'_i, β'_i; α''_i, β''_i, ..., et les nombres n, k; n', k', ..., par lesquels s'expriment, chez Briot, les nombres A_{ab} des conditions à remplir pour les coefficients du polynôme $Q(x,y)$ du degré $m-3$, les degrés D_{ab} des points singuliers, les nombres N_{ab} des lacets binaires, enfin le genre p de la courbe $F(x,y)=0$.

II.

Les courbes adjointes de M. Nöther se comportant aux points singuliers comme les courbes d'ordre $m-3$

$$Q(x,y)=0, \tag{1}$$

nous pourrons nous borner à considérer seulement ces courbes. Écrivons ce polynôme avec les coefficients indéterminés, et substituons $a+\xi$ au lieu de x et $b+\eta$ au lieu de y; en le développant suivant les puissances de ξ et η, nous aurons

$$Q(a+\xi, b+\eta)=\Sigma B_{\gamma,\delta}\eta^{\gamma-1}\xi^{\delta-1}, \tag{2}$$

(Briot, p. 3), où $B_{\gamma,\delta}$ sont les polynômes en a et b avec les coefficients fonctions linéaires des coefficients indéterminés de $Q(x,y)$. Pour toutes les valeurs de γ et δ qui correspondent aux points situés au-dessous de la ligne polygonale P et sur cette ligne, les coefficients $B_{\gamma,\delta}$ doivent s'annuler; donc on aura ces équations linéaires par rapport aux coefficients de $Q(x,y)$:

$$B_{\gamma,\delta}=0, \tag{3}$$

pour les déterminer. Mais les valeurs a et b, qui entrent dans le premier membre, n'étant pas connues, mais seulement représentées par les paires d'équations (12) et (13) du n° 2, on procédera de telle manière. L'équation (3) devant être satisfaite par toutes les valeurs de y satisfaisant à l'équation

$$\varphi(x,y)=0, \tag{4}$$

lorsque x est égal à l'une des racines de l'équation

$$(5)\qquad \psi(x) : M(x) = \vartheta(x) = 0$$

(les premiers membres de ces équations étant toujours censés être débarrassés des facteurs égaux), on divisera $B_{\gamma,\delta}$ (après y avoir écrit x et y au lieu de a et b) par $\varphi(x, y)$, supposant tous les deux polynômes disposés suivant les puissances descendantes de y; arrivé au reste d'un degré moindre que le degré de $\varphi(x, y)$ par rapport à y, on égalera à zéro chacun de ses coefficients, car cette division ne doit pas donner de reste; on aura ainsi une suite d'équations de la forme

$$(6)\qquad F_k(x) = 0,$$

qui doivent être satisfaites par toutes les racines de l'équation (5); donc on divisera chacun des polynômes $F_k(x)$ par $\vartheta(x)$, et l'on égalera à zéro les coefficients de chaque puissance de x dans le reste et l'on aura ainsi les équations linéaires en coefficients indéterminés de $Q(x, y)$ pour déterminer ces derniers.

Pour trouver les conditions dérivant des valeurs de x et y, qui sont déterminées par les équations (13) du n° 2, on multipliera le polynôme $B_{\gamma,\delta}$ par $\Phi_{ij}(x, y)$, puis on divisera le produit par $\varphi(x, y)$; égalant à zéro les coefficients de chaque puissance de y dans le reste de cette division, on aura les équations en x, qui doivent être satisfaites par toutes les racines de l'équation

$$(7)\qquad \theta_{ij}(x) = 0;$$

donc on divisera leur premier membre par $\theta_{ij}(x)$ et l'on égalera à zéro chacun des coefficients du reste reçu : on aura ainsi les équations cherchées, linéaires en coefficients indéterminés de $Q(x, y)$.

Ainsi seront trouvées toutes les conditions pour ces coefficients qui viennent des valeurs de x et y, pour lesquelles l'équation $L_i = 0$ n'a pas de racines égales; pour les autres on a besoin de la seconde transformation, laquelle conduit aux nouvelles conditions qu'on obtiendra ainsi. On fera la substitution (3) du n° 4 dans l'expression (2) et l'on aura l'expression suivante

$$(8)\qquad \Sigma B'_{\gamma',\delta'} \eta'^{\gamma'-1} \xi'^{\delta'-1},$$

où les $B'_{\gamma',\delta'}$ sont les polynômes en v_1 avec les coefficients fonctions linéaires de $B_{\gamma,\delta}$ et, par suite aussi, fonctions linéaires des coefficients indéterminés de $Q(x, y)$. Tous les membres de cette expression pour lesquels γ', δ' ont des valeurs se rapportant aux points situés au-dessous de la ligne polygonale P′ et sur cette ligne, devant avoir des coefficients nuls, on posera pour ces valeurs des γ' et δ'

$$B_{\gamma',\delta'} = 0. \tag{9}$$

Une telle équation aura lieu pour toutes les valeurs de v_1, déterminées par les systèmes d'équations (6), (7) et (8) du n° 4; donc, après avoir disposé $B_{\gamma',\delta'}$ suivant les puissances descendantes de v_1, on le divisera par $f(x, y, v_1)$ et l'on égalera à zéro les coefficients de chaque puissance de v_1 dans le reste reçu; on aura de cette manière une série d'équations de la forme

$$F_k(x, y) = 0, \tag{10}$$

qui doivent être satisfaites par toutes les valeurs de y et x qui satisfont aux équations de la forme

$$\begin{cases} \Phi(x, y) = 0, \\ \Theta(x) = 0; \end{cases}$$

donc, après avoir disposé $F_k(x, y)$ suivant les puissances de y, on le divisera par $\Phi(x, y)$ et l'on égalera à zéro chacun des coefficients du reste reçu; chacune de ces dernières équations devant être satisfaite par toutes les racines de $\Theta(x) = 0$, on divisera les premiers membres de chacun par $\Theta(x)$, on égalera à zéro chacun des coefficients du reste de cette division et l'on aura ainsi les équations cherchées, linéaires par rapport aux coefficients indéterminés de $Q(x, y)$.

Pour les valeurs de x et y et de v, pour lesquelles l'équation $L'_i = 0$ a des racines égales, on fera dans l'expression (8) la substitution (9) du n° 4, après quoi elle prendra la forme

$$\Sigma B''_{\gamma'',\delta''} \eta''^{\gamma''-1} \xi''^{\delta''-1}; \tag{11}$$

pour les valeurs de γ'' et δ'' qui répondent aux points situés au-dessous de la ligne polygonale P″ et sur cette ligne, on aura

$$B''_{\gamma'',\delta''} = 0; \tag{12}$$

ces équations doivent être satisfaites par les valeurs de v'_1, définies par les équations (11) du n° 4; donc, après avoir disposé $B''_{\gamma'',\delta''}$ suivant les puissances descendantes de v'_1, on le divisera par $f(x, y, v_1, v'_1)$ après avoir égalé à zéro les coefficients de chaque puissance de v'_1 dans le reste, qu'on aura reçu : on aura les équations qui doivent être satisfaites par les valeurs de v_1, définies par les trois équations restantes de ce système (11); donc, après les avoir disposés suivant les puissances descendantes de v_1, on divisera le premier membre de chacun par $f(x, y, v_1)$, et l'on égalera à zéro les coefficients de chaque puissance de y dans le reste de cette division; ces équations devant être satisfaites par les valeurs de y représentées par les deux dernières équations du système (11), on divisera leur premier membre par $\Phi(x, y)$; en égalant à zéro les coefficients de chaque puissance de y dans le reste qu'on aura reçu, on aura les équations qui doivent être satisfaites par toutes les racines de la dernière des équations du système (11); donc, on divisera leurs premiers membres par $\Theta(x)$ et l'on égalera à zéro les coefficients de chaque puissance de x dans ce reste, et l'on aura ainsi les équations cherchées, linéaires par rapport aux coefficients de $Q(x, y)$. On procédera de la même manière plus loin, si l'on en a besoin.

Toutes les équations qu'on aura reçues par cette méthode, étant linéaires par rapport aux coefficients de $Q(x, y)$, on les aura par les opérations rationnelles.