W. Kapteyn

Recherches sur les fonctions de Fourier-Bessel

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 10 (1893), p. 91-122
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1893_3_10__91_0>

RECHERCHES

SUR LES

FONCTIONS DE FOURIER-BESSEL,

PAR M. W. KAPTEYN.

Dans ce Mémoire, je me propose d'abord de faire voir que le calcul des résidus de Cauchy se prête admirablement à la démonstration des propriétés fondamentales des fonctions de Fourier-Bessel et à la sommation de plusieurs séries composées de ces fonctions. Je m'occupe ensuite des développements importants d'une fonction holomorphe en série des fonctions de Fourier-Bessel et en série des carrés de ces fonctions, que M. C. Neumann a traités dans son travail *Theorie der Besselschen Functionen* (¹), et dans un Mémoire intitulé *Ueber die Entwicklung einer Function nach Quadraten und Producten der Fourier-Besselschen Functionen* (²).

Après avoir donné une nouvelle démonstration pour les formules fondamentales de M. C. Neumann, je termine par donner un nouveau développement qui m'a été suggéré par la solution connue du problème de Képler en fonctions de Fourier-Bessel.

(¹) Leipzig, 1867.

(²) *Berichte üb. die Verhandlungen der Kön. Sächs. Gesellsch. der Wissensch.* Bd. XXI; 1869.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Soient z et t deux variables imaginaires et $J_n(z)$ la fonction de Fourier-Bessel de rang n, on a, d'après M. Schlömilch ([1]),

$$
(1) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = I_0(z) + t I_1(z) + t^2 I_2(z) + t^3 I_3(z) + \ldots \\ - \frac{1}{t} I_1(z) + \frac{1}{t^2} I_2(z) - \frac{1}{t^3} I_3(z) + \ldots \end{aligned} \right.
$$

pour toutes les valeurs finies de z et de t, à l'exception de $t = 0$.

En effet, pour toute valeur de z, $e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$ est une fonction holomorphe de t dans toute l'étendue du plan de représentation, excepté à l'origine et à l'infini. Cette fonction est donc développable en une double série, ordonnée suivant les puissances entières positives et négatives de la variable.

Si l'on pose

$$
u_n = \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{n+1}}\, dt,
$$

$$
u_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_r e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\, t^{n-1}\, dt,
$$

les intégrales se rapportant à la circonférence d'un cercle de rayon arbitraire r, décrit dans le sens positif, la double série devient

$$
e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \ldots + u_{-2} t^{-2} + u_{-1} t^{-1} + u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \ldots.
$$

Choisissons $r = 1$, et soit

$$
t = e^{i\theta},
$$

([1]) *Ueber die Bessel'sche Function. Zeitsch. für Math. u. Phys.*, II, Jahrgang.

les coefficients peuvent être représentés par

$$u_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(z\sin\theta - n\theta)}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(z\sin\theta - n\theta)\,d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(z\sin\theta - n\theta)\,d\theta,$$

$$u_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(z\sin\theta + n\theta)}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(z\sin\theta + n\theta)\,d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(z\sin\theta + n\theta)\,d\theta$$

ou par

$$u_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\theta - n\theta)\,d\theta = \mathrm{I}_n(z),$$

$$u_{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\theta + n\theta)\,d\theta = \mathrm{I}_n(-z) = (-1)^n\mathrm{I}_n(z),$$

ce qui démontre le théorème de M. Schlömilch.

Le développement précédent nous permet d'introduire les résidus. En effet,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{n+1}}\,dt \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_r e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\,t^{n-1}\,dt$$

sont précisément les résidus des fonctions

$$\frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{n+1}} \quad \text{et} \quad e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\,t^{n-1},$$

par rapport au seul point de discontinuité $t = 0$.

On a donc les deux formules

$$(2) \qquad \mathrm{I}_n(z) = \mathcal{E}_{(0)} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{n+1}}\,dt,$$

$$(3) \qquad \mathrm{I}_n(z) = (-1)^n\,\mathcal{E}_{(0)}\, e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\,t^{n-1} = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_r e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\,t^{n-1}\,dt.$$

2. Appliquons la première de ces formules à la démonstration des

deux propriétés fondamentales

$$\frac{d\,\mathrm{I}_n(z)}{dz} = \frac{1}{2}[\mathrm{I}_{n-1}(z) - \mathrm{I}_{n+1}(z)],$$

$$n\,\mathrm{I}_n(z) = \frac{z}{2}[\mathrm{I}_{n-1}(z) + \mathrm{I}_{n+1}(z)].$$

En différentiant l'équation (2) on obtient

$$\frac{d\,\mathrm{I}_n(z)}{dz} = \frac{1}{2}\mathop{\mathcal{E}}_{(0)} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{n+1}}\left(t-\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}[\mathrm{I}_{n-1}(z) - \mathrm{I}_{n+1}(z)].$$

La seconde propriété se déduit de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\frac{z}{2}[\mathrm{I}_{n-1}(z) + \mathrm{I}_{n+1}(z)] &= \frac{1}{2\pi i}\int_r e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\frac{z}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\frac{dt}{t^n} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{1}{t^n}\,de^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^n}\right]_r + \frac{n}{2\pi i}\int_r \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{n+1}}\,dt \\
&= n\,\mathrm{I}_n(z).
\end{aligned}$$

3. Pour faire voir avec quelle facilité se fait la sommation de plusieurs séries connues, je choisis les deux séries

$$\frac{z^n}{2^n n!} = \mathrm{I}_n(z) + \frac{z}{2}\mathrm{I}_{n+1}(z) + \frac{z^2}{2.4}\mathrm{I}_{n+2}(z) + \ldots \text{ [1]},$$

$$\cos(z\cos\varphi) = \mathrm{I}_0(z) - 2\,\mathrm{I}_2(z)\cos 2\varphi + 2\,\mathrm{I}_4(z)\cos 4\varphi - \ldots.$$

Le second membre de la première série se réduit, en introduisant l'équation (2), à

$$\mathop{\mathcal{E}}_{(0)} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{n+1}}\left(1 + \frac{z}{2t} + \frac{z^2}{2.4t^2} + \frac{z^3}{2.4.6t^3} + \ldots\right).$$

Or, pour toutes les valeurs de z et de t, ce résidu s'écrit

$$\mathop{\mathcal{E}}_{(0)} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{n+1}}e^{\frac{z}{2t}} = \mathop{\mathcal{E}}_{(0)} \frac{e^{\frac{zt}{2}}}{t^{n+1}} = \frac{z^n}{2^n n!}.$$

[1] LOMMEL, *Studien üb. die Bessel'sche Function*, p. 29.

Pour vérifier la seconde série, posons

$$S(z) = I_0(z) - 2I_2(z)\cos 2\varphi + 2I_4(z)\cos 4\varphi - \ldots.$$

En introduisant l'équation (3), on obtient

$$S(z) = \mathcal{E}_{(0)} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t}(1 - 2t^2\cos 2\varphi + 2t^4\cos 4\varphi - \ldots),$$

ou, parce que mod $t < 1$,

$$S(z) = \mathcal{E}_{(0)} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t} \frac{1-t^4}{1+2t^2\cos 2\varphi + t^4} = \frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t} \frac{1-t^4}{1+2t^2\cos 2\varphi + t^4}\,dt,$$

où le rayon r est supposé plus petit que l'unité.

En remplaçant t par $\frac{1}{t}$, la dernière équation prend la forme

$$S(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{r}} \frac{e^{-\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t} \frac{t^4-1}{t^4+2t^2\cos 2\varphi+1}\,dt,$$

le chemin d'intégration étant maintenant la circonférence d'un cercle de rayon $\frac{1}{r} > 1$, parcourue dans le sens négatif. On déduit de l'équation précédente, en changeant le sens de l'intégration

$$\begin{aligned} S(-z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{r}} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t} \frac{1-t^4}{1+2t^2\cos 2\varphi+t^4}\,dt \\ &= -\mathcal{E}\, \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t} \frac{1-t^4}{1+2t^2\cos 2\varphi+t^4}. \end{aligned}$$

A l'intérieur du cercle de rayon $\frac{1}{r} > 1$ se trouvent à présent tous les points de discontinuité de la fonction $\frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t} \frac{1-t^4}{1+2t^2\cos 2\varphi+t^4}$:

$$t = 0, \qquad t = \pm i e^{-\frac{i\varphi}{2}}, \qquad t = \pm i e^{\frac{i\varphi}{2}};$$

le résidu est donc un résidu intégral, consistant en cinq résidus partiels. Le résidu, par rapport au pôle essentiel $t=0$, est $S(z)$; les autres résidus, relatifs aux pôles simples,

$$ie^{-\frac{i\varphi}{2}},\quad -ie^{-\frac{i\varphi}{2}},\quad ie^{\frac{i\varphi}{2}},\quad -ie^{\frac{i\varphi}{2}},$$

se déterminent aisément et sont représentés par

$$-\tfrac{1}{2}e^{iz\cos\varphi},\quad -\tfrac{1}{2}e^{-iz\cos\varphi},\quad -\tfrac{1}{2}e^{iz\cos\varphi},\quad -\tfrac{1}{2}e^{-iz\cos\varphi}.$$

En réunissant, on obtient

$$S(-z) = -[S(z) - e^{iz\cos\varphi} - e^{-iz\cos\varphi}]$$

ou, parce que

$$S(-z) = S(z),\qquad S(z) = \cos(z\cos\varphi).$$

4. Dans le reste de cette première Partie, j'étudierai encore deux séries, dont la première

$$\frac{1}{1-z} = 1 + 2I_1(z) + 2I_2(2z) + 2I_3(3z) + \ldots \text{ [1]} \tag{4}$$

n'a été démontrée jusqu'à présent que pour les valeurs réelles

$$-1 < z < 1.$$

Cette série, dont je me servirai dans la troisième Partie, présente des difficultés plus grandes.

En posant

$$S(z) = 1 + 2I_1(z) + 2I_2(2z) + 2I_3(3z) + \ldots$$

et introduisant des résidus, on aura

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{t}\left[1 - 2te^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} + 2t^2e^{\frac{2z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} - 2t^3e^{\frac{3z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} + \ldots\right]dt,$$

où le chemin d'intégration, la circonférence d'un cercle de rayon arbitraire, est parcouru dans le sens positif. En adoptant, pour z et t, des valeurs telles que

$$\operatorname{mod} te^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} < 1, \tag{5}$$

(1) Todhunter, *The functions of Laplace, Lamé and Bessel*, p. 342.

l'équation précédente s'écrit

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1 - t e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t\left[1 + t e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\right]}\,dt.$$

Avant d'aller plus loin, il nous faut discuter la condition (5).

Soit

$$t = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

la condition s'écrit

$$(6) \qquad r e^{\frac{\rho}{2}\left[\left(r-\frac{1}{r}\right)\cos\alpha\cos\theta - \left(r+\frac{1}{r}\right)\sin\alpha\sin\theta\right]} < 1.$$

Imaginons que $z(\rho, \alpha)$ ait une valeur fixe et proposons-nous de déterminer toutes les valeurs de r, telles que, pour tous les points sur la circonférence du cercle r, la condition soit remplie.

La valeur de θ, qui fait maximum l'exposant

$$\left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\alpha\cos\theta - \left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\alpha\sin\theta,$$

est déterminée par l'équation

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{1+r^2}{1-r^2}\operatorname{tang}\alpha.$$

Cette valeur, substituée dans la condition (6), la transforme en

$$r e^{\frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{1}{r^2} - 2\cos 2\alpha + r^2}} < 1,$$

où la racine a une valeur positive. Il n'y a pas moyen de satisfaire à cette condition en prenant $r > 1$; supposons donc

$$r = e^{-u} < 1,$$

on aura, pour déterminer r, l'inégalité

$$\sqrt{2\operatorname{ch} 2u - 2\cos 2\alpha} < \frac{2u}{\rho}.$$

Il faut donc, ρ et α étant convenablement choisis, que u varie entre les deux racines positives u_1 et u_2 de l'équation

$$\sqrt{2\,\mathrm{ch}\,2u - 2\cos 2\alpha} = \frac{2u}{\rho} \tag{7}$$

ou de l'équation

$$\sqrt{\mathrm{sh}^2 u + \sin^2\alpha} = \frac{u}{\rho}. \tag{8}$$

Par approximation, j'écris pour la plus petite valeur de u : $\mathrm{sh}\,u = u$ et pour la plus grande, en négligeant $\sin^2\alpha$: $\mathrm{sh}\,u = \frac{e^u}{2}$. Ainsi on obtient les formules approximatives

$$u_1 = \frac{\rho\sin\alpha}{\sqrt{1-\rho^2}}, \tag{9}$$

$$e^{2u_2} = \frac{2u_2}{\rho}. \tag{10}$$

Remarquons maintenant que les deux valeurs de u, qui satisfont à l'équation (7), sont égales si l'on a

$$\mathrm{ch}\,2u - u\,\mathrm{sh}\,2u = \cos 2\alpha \text{ (1)}, \tag{11}$$

et qu'avec cette valeur l'équation (7) devient

$$\rho = \sqrt{\frac{2u}{\mathrm{sh}\,2u}}. \tag{12}$$

On voit donc que pour toute valeur de z dont le module est plus petit que $\sqrt{\frac{2u}{\mathrm{sh}\,2u}}$, u étant la racine réelle de l'équation (11), tous les points t à l'intérieur d'une couronne, entre les circonférences des cercles décrits avec les rayons

$$r_1 = e^{-u_1} \quad \text{et} \quad r_2 = e^{-u_2},$$

remplissent la condition (5).

Il est évident que l'ensemble des équations (11) et (12) détermine une courbe C, symétrique par rapport à deux axes rectangulaires.

---

(1) Pour $\alpha = 90°$ cette équation est la même que Laplace a étudiée dans son Supplément à la *Mécanique céleste*, p. 3 (c).

Pour former une idée plus nette de cette courbe, nous avons calculé les valeurs de u et de ρ correspondantes à quelques valeurs de l'angle α.

α.	0°.	15°.	30°.	45°.	60°.	75°.	90°.
u.......	0,000	0,651	0,884	1,031	1,128	1,184	1,199
ρ.......	1,000	0,875	0,788	0,730	0,691	0,669	0,663

Ajoutons-y quelques valeurs de u_1 et u_2, r_1 et r_2 correspondantes à différentes valeurs de ρ et α, calculées d'après les formules approximatives (9) et (10).

ρ.	0°.		30°.		60°.		90°.	
0,1...	(u_1) 0,000,	(r_1) 1,000	0,050,	0,951	0,087,	0,917	0,100,	0,905
	(u_2) 4,50,	(r_2) 0,011	4,50,	0,011	4,50,	0,011	4,50,	0,011
0,2...	0,000,	1,000	0,102,	0,903	0,177,	0,838	0,204,	0,815
	3,58,	0,028	3,58,	0,028	3,58,	0,028	3,58,	0,028
0,3...	0,000,	1,000	0,157,	0,855	0,272,	0,762	0,315,	0,730
	2,99,	0,050	2,99,	0,050	2,99,	0,050	2,99,	0,050
0,4...	0,000,	1,000	0,218,	0,804	0,378,	0,685	0,438,	0,645
	2,54,	0,050	2,54,	0,079	2,54,	0,079	2,54,	0,079
0,5...	0,000,	1,000	0,289,	0,749	0,500,	0,606	0,546,	0,579
	2,15,	0,116	2,15,	0,116	2,15,	0,116	2,15,	0,116
0,6...	0,000,	1,000	0,375,	0,687	0,648,	0,523	0,785,	0,456
	1,51,	0,221	1,51,	0,221	1,51,	0,221	1,51,	0,221
0,7...	0,000,	1,000	0,490,	0,613				
	1,35,	0,259	1,35,	0,259				
0,8...	0,000,	1,000						
	1,18,	0,307						
0,9...	0,000,	1,000						
	0,80,	0,449						

5. La discussion précédente apprend que la série S(z) est équivalente avec l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{1-te^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t\left[1+te^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\right]}\,dt, \tag{13}$$

pour tout point z situé dans la partie du plan à l'intérieur de la courbe fermée C.

Observons encore que le chemin d'intégration est une courbe fermée, située entièrement dans la couronne entre les circonférences des cercles décrits avec les rayons r_1 et r_2 et renfermant la plus petite de ces circonférences, tandis que les rayons r_1 et r_2 sont variables avec la valeur de z et déterminés par la position de ce point.

Choisissons pour ce chemin la circonférence d'un cercle de rayon r, et proposons-nous de trouver la valeur de cette intégrale.

Pour y arriver, nous démontrerons d'abord que, z étant un point fixe à l'intérieur de la courbe C et r_1 le plus grand des rayons correspondants à ce point, l'équation

$$1 + t e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = 0 \tag{14}$$

n'admet aucune racine dans la couronne comprise entre les circonférences des cercles de rayons r_1 et 1, ni sur le contour du premier cercle.

En effet, substituant dans l'équation (14)

$$t = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

on obtient, en séparant la partie réelle et la partie imaginaire,

$$\theta + \frac{\rho}{2}\left[\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha\cos\theta + \left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\alpha\sin\theta\right] = \pi, \tag{15}$$

$$r e^{\frac{\rho}{2}\left[\left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\alpha\cos\theta - \left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\alpha\sin\theta\right]} = 1. \tag{16}$$

De ces équations on déduit, en posant

$$p = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\theta, \qquad q = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\theta,$$

$$\rho\sin\alpha = \frac{p(\pi - \theta) + q\log r}{p^2 + q^2} \qquad \text{et} \qquad \rho\cos\alpha = \frac{q(\pi - \theta) - p\log r}{p^2 + q^2},$$

ou, en remplaçant r par e^{-u},

$$\rho^2 = 2\,\frac{(\pi - \theta)^2 + u^2}{\operatorname{ch} 2u - \cos 2\theta},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{u \operatorname{ch} u \sin\theta + \operatorname{sh} u\,(\pi - \theta)\cos\theta}{u \operatorname{sh} u \cos\theta - \operatorname{ch} u\,(\pi - \theta)\sin\theta}.$$

Avec chaque valeur de $t(r, \theta)$ correspondra donc une valeur de $z(\rho, \alpha)$, et faisant varier t sur la circonférence d'un cercle de rayon $r = e^{-u}$, la valeur de θ, pour laquelle ρ est minimum, est évidemment $\theta = \pi$. Cette valeur minima de ρ sera

$$\rho = \frac{u}{\operatorname{sh} u}.$$

Imaginons maintenant que pour certaine valeur de $z(\rho, \alpha)$, par exemple $\rho = 0,5$ et $\alpha = 60^\circ$, r varie entre les valeurs $r_1 = 0,606$ et 1, il est évident que, dans la couronne considérée, il n'y a pas un point t qui puisse satisfaire à l'équation (14). En effet, le module du point z, correspondant à une racine, tandis que t varie dans la couronne, doit avoir une valeur $\rho \geqq \frac{u}{\operatorname{sh} u}$. Or, u variant entre $u_1 = 0,500$ et zéro, $\frac{u}{\operatorname{sh} u}$ variera entre les valeurs $\frac{u_1}{\operatorname{sh} u_1} = 0,959$ et 1.

En général, la couronne correspondant à une valeur fixe de $z(\rho, \alpha)$ sera limitée par les circonférences des cercles de rayons 1 et r_1, correspondants à

$$u = 0 \quad \text{et} \quad u = u_1,$$

où u_1 est la plus petite racine réelle de l'équation (8)

$$\sqrt{\operatorname{sh}^2 u_1 + \sin^2\alpha} = \frac{u_1}{\rho}.$$

La valeur de $\frac{u}{\operatorname{sh} u}$ variant entre les limites

$$1 \quad \text{et} \quad \frac{u_1}{\operatorname{sh} u_1},$$

il est évident que la valeur fixe

$$\rho = \frac{u_1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u_1 + \sin^2\alpha}}$$

est plus petite que toute valeur que $\frac{u}{\operatorname{sh} u}$ possède dans l'intervalle considéré.

Il semble qu'il y ait une exception pour $\alpha = 0^\circ$ et $\alpha = 180^\circ$; cela s'explique en remarquant que, dans ces cas, la couronne se réduit à zéro.

L'équation (14) n'admettant point de racine dans la couronne, entre les cercles de rayon r_1 et 1, n'en aura non plus dans la couronne entre les cercles de rayons 1 et $\frac{1}{r_1}$. En effet, on remarquera aisément que les équations (15) et (16) ne changent point si l'on remplace r et θ par $\frac{1}{r}$ et $2\pi - \theta$.

Ajoutons encore que, pour toute valeur de z, l'équation (14) admet la racine $t = -1$.

Revenons maintenant à la formule (13)

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{1 - te^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}}{t\left[1 + te^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}\right]} dt,$$

où $r_1 > r > r_2$, les valeurs r_1 et r_2 étant les valeurs correspondantes à une valeur fixe de z choisie arbitrairement à l'intérieur de la courbe C. En remplaçant t par $\frac{1}{t}$, on obtient

$$-S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{r}} \frac{1 - te^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}}{t\left[1 + te^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}\right]} dt.$$

Nous avons changé le signe de $S(z)$ parce que nous admettons que la variable t, dans la dernière intégrale, parcourt la circonférence du cercle de rayon $\frac{1}{r}$ dans le sens positif, comme dans la première intégrale.

La différence des deux intégrales

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{r}} \frac{1 - te^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}}{t\left[1 + te^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}\right]} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{1 - te^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}}{t\left[1 + te^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}\right]} dt$$

n'étant autre chose que le résidu de la fonction

$$\frac{1 - te^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}}{t\left[1 + te^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}\right]}$$

par rapport à la seule racine simple $t = -1$ du dénominateur, on peut la représenter par

$$\left[\frac{\left[1 - te^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\right](t+1)}{t\left[(1 + te^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\right]}\right]_{t=-1} = -\frac{2}{1-z}.$$

En réunissant, on aura

$$-S(z) = S(z) - \frac{2}{1-z},$$

ou enfin

$$S(z) = 1 + 2\sum_1^\infty I_n(nz) = \frac{1}{1-z}$$

pour toute valeur de z située à l'intérieur de la courbe fermée C.

6. La seconde série dont je me propose de déterminer le champ de convergence est la série

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} z^n = 2^n n^2 \Bigg[&(n-1)!\,\frac{I_n(nz)}{n^{n+1}} + n!\,\frac{I_{n+2}(\overline{n+2}\,z)}{(n+2)^{n+1}} \\ &+ \frac{(n+1)!}{2!}\,\frac{I_{n+4}(\overline{n+4}\,z)}{(n+4)^{n+1}} + \ldots \Bigg] \end{aligned} \right.$$

qui résulte des développements dans la troisième Partie de ce Mémoire.

Pour démontrer l'égalité précédente, je commencerai par la sommation de la série

$$\begin{aligned} P(z) = (n-1)!\,\frac{d^{n+1} I_n(nz)}{n^{n+1}\,dz^{n+1}} &+ n!\,\frac{d^{n+1} I_{n+2}(\overline{n+2}\,z)}{(n+2)^{n+1}\,dz^{n+1}} \\ &+ \frac{(n+1)!}{2!}\,\frac{d^{n+1} I_{n+4}(\overline{n+4}\,z)}{(n+4)^{n+1}\,dz^{n+1}} + \ldots. \end{aligned}$$

D'après la formule (3), on a

$$I_{n+2p}(\overline{n+2p}\,z) = (-1)^n \mathop{\mathcal{E}}_{(0)} e^{\frac{n+2p}{2} z\left(t-\frac{1}{t}\right)}\, t^{n+2p-1},$$

par suite

$$\frac{d^{n+1} I_{n+2p}(\overline{n+2p}\,z)}{dz^{n+1}} = (-1)^n \left(\frac{n+2p}{2}\right)^{n+1} \mathop{\mathcal{E}}_{(0)} \frac{1}{t}\left(t - \frac{1}{t}\right)^{n+1} e^{\frac{n+2p}{2} z\left(t-\frac{1}{t}\right)}\, t^{n+2p}.$$

En introduisant cette équation dans la série P (z), il est évident qu'on obtient

$$P(z) = \frac{(-1)^n (n-1)!}{2^{n+1}} \mathcal{E}_{(0)} \frac{1}{t}\left(t - \frac{1}{t}\right)^{n+1} t^n e^{\frac{nz}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$$

$$\times \left[1 + nt^2 e^{\frac{2z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} + \frac{n(n+1)}{1.2} t^4 e^{\frac{4z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} + \ldots\right].$$

Or, tant que

$$\operatorname{mod} t e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} < 1, \tag{5}$$

la série entre parenthèses se réduit à

$$\frac{1}{\left[1 - t^2 e^{\frac{2z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\right]^n},$$

par suite

$$P(z) = \frac{(-1)^n (n-1)!}{2^{n+1}} \mathcal{E}_{(0)} \frac{(t^2-1)^{n+1}}{t^2} \frac{e^{\frac{nz}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{\left[1 - t^2 e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\right]^n}.$$

En assujettissant la variable z à ne pas quitter la partie du plan à l'intérieur de la courbe C, on sait qu'on peut toujours assigner à t des valeurs telles que la condition (5) est remplie. Toutes ces valeurs de t sont comprises dans la couronne entre deux cercles de rayons r_1 et r_2 plus petits que l'unité qui dépendent de la valeur choisie pour z. Choisissons maintenant pour r une valeur intermédiaire entre r_1 et r_2, l'équation précédente prend la forme

$$P(z) = \frac{(-1)^n (n-1)!}{2^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{(t^2-1)^{n+1}}{t^2} \frac{e^{\frac{nz}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{\left[1 - t^2 e^{\frac{2z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\right]^n} dt$$

ou, en remplaçant t par $\frac{1}{t}$ et changeant le sens de la nouvelle intégrale,

$$P(z) = -\frac{(-1)^n (n-1)!}{2^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_1 \frac{(t^2-1)^{n+1}}{t^2} \frac{e^{\frac{nz}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{\left[1 - t^2 e^{\frac{2z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\right]^n} dt.$$

Or, d'après ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, il est clair que, dans la couronne, entre les deux cercles de rayons r et $\frac{1}{r}$, la fonction sous le signe d'intégration ne possède aucun point de discontinuité; par conséquent, les deux dernières intégrales sont identiques et l'on obtient

$$P(z) = -P(z)$$

ou

$$P(z) = 0.$$

On a donc, pour toute valeur de z à l'intérieur de la courbe C,

$$0 = (n-1)!\,\frac{d^{n+1}\mathrm{I}_n(nz)}{n^{n+1}\,dz^{n+1}} + n!\,\frac{d^{n+1}\mathrm{I}_{n+2}(\overline{n+2}\,z)}{(n+2)^{n+1}\,dz^{n+1}} + \frac{(n+1)!}{2!}\,\frac{d^{n+1}\mathrm{I}_{n+4}(\overline{n+4}\,z)}{(n+4)^{n+1}\,dz^{n+1}} + \ldots.$$

En multipliant cette équation par dz et intégrant entre les limites 0 et z, le chemin d'intégration étant situé entièrement à l'intérieur de la partie du plan limitée par la courbe C, on obtient aisément

$$\frac{(n-1)!}{n^{n+1}}\left[\frac{d^n\,\mathrm{I}_n(nz)}{dz^n}\right]_{z=0} = \frac{(n-1)!}{2^n\,n}$$
$$= (n-1)!\,\frac{d^n\mathrm{I}_n(nz)}{n^{n+1}\,dz^n} + n!\,\frac{d^n\mathrm{I}_{n+2}(\overline{n+2}\,z)}{(n+2)^{n+1}\,dz^n} + \frac{(n+1)!}{n!}\,\frac{d^n\mathrm{I}_{n+4}(\overline{n+4}\,z)}{(n+4)^{n+1}\,dz^n} + \ldots,$$

et cette équation a lieu pour les mêmes valeurs de z que la précédente. Ce procédé, répété encore n fois, conduit à la série demandée.

DEUXIÈME PARTIE.

7. Proposons-nous maintenant de développer une fonction holomorphe $f(z)$ en série de fonctions de Fourier-Bessel, de telle sorte que

$$f(z) = \alpha_0 I_0(z) + \alpha_1 I_1(z) + \alpha_2 I_2(z) + \ldots,$$

les coefficients α étant indépendants de z.

Admettons d'abord qu'un tel développement soit possible, et cherchons à déterminer les coefficients. Pour y arriver, je développe les deux membres de l'équation précédente suivant les puissances croissantes de z, et j'égale les coefficients des mêmes puissances dans les deux membres. En écrivant

$$f(z) = f(0) + 2\left(\frac{z}{2}\right) f^1(0) + \frac{2^2}{2!}\left(\frac{z}{2}\right)^2 f^2(0) + \frac{2^3}{3!}\left(\frac{z}{2}\right)^3 f^3(0) + \ldots,$$

$$I_n(z) = \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n \left[1 - \frac{1}{1!\,(n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!\,(n+1)(n+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^4 - \ldots\right],$$

on obtient aisément

$$\begin{aligned}
f(0) &= f &&= \alpha_0,\\
2\,f^1(0) &= 2f^1 &&= \alpha_1,\\
2^2 f^2(0) &= 2^2 f^2 &&= -\ 2\alpha_0 + \alpha_2,\\
2^3 f^3(0) &= 2^3 f^3 &&= -\ 3\alpha_1 + \alpha_3,\\
2^4 f^4(0) &= 2^4 f^4 &&= 6\alpha_0 - 4\alpha_2 + \alpha_4,\\
2^5 f^5(0) &= 2^5 f^5 &&= 10\alpha_1 - 5\alpha_3 + \alpha_5,\\
2^6 f^6(0) &= 2^6 f^6 &&= -20\alpha_0 + 15\alpha_2 - 6\alpha_4 + \alpha_6,\\
2^7 f^7(0) &= 2^7 f^7 &&= -35\alpha_1 + 21\alpha_3 - 7\alpha_5 + \alpha_7,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

dont on déduit, en généralisant,

$$\alpha_0 = f,$$

$$\alpha_n = 2\left[f + \frac{n^2}{2!}f^2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}f^4 + \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}f^6 + \ldots + 2^{n-1}f^n\right] (n \text{ pair}),$$

$$\alpha_n = 2\left[nf^1 + \frac{n(n^2-1^2)}{3!}f^3 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}f^5 + \ldots + 2^{n-1}f^n\right] (n \text{ impair}).$$

Ces coefficients admettent une forme beaucoup plus simple, quand on introduit les fonctions

$$O_n(z) = \frac{1}{z} + \frac{n^2}{z^3} + \frac{n^2(n^2-2^2)}{z^5} + \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{z^7} + \ldots + \frac{2^{n-1}n!}{z^{n+1}} \ (n \text{ pair}),$$

$$O_n(z) = \frac{n}{z^2} + \frac{n(n^2-1^2)}{z^4} + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{z^6} + \ldots + \frac{2^{n-1}n!}{z^{n+1}} \ (n \text{ impair}).$$

En effet, on verra aisément que

$$\alpha_0 = \mathcal{E}_{(0)} O_0(t) f(t),$$

$$\alpha_n = 2\,\mathcal{E}_{(0)} O_n(t) f(t),$$

où les résidus correspondent au seul pôle $t = 0$.

On peut réunir les deux formules pour O_n en renversant l'ordre des termes et en introduisant un coefficient ε_n, dont la valeur pour $n = 0$ est égale à l'unité et pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ égale à deux. Avec cette notation, on a

$$(18) \qquad \varepsilon_n O_n(z) = \frac{2^n n!}{z^{n+1}} \left[1 + \frac{z^2}{2(2n-2)} + \frac{z^4}{2.4(2n-2)(2n-4)} + \ldots \right],$$

les derniers termes entre parenthèses étant

$$\frac{z^n}{2.4\ldots n(2n-2)(2n-4)\ldots n}$$

ou

$$\frac{z^n}{2.4\ldots(n-1)(2n-2)(2n-4)\ldots(n+1)},$$

selon que n est un nombre pair ou impair.

De cette manière, on est conduit à ce développement de M. C. Neumann

$$(19) \qquad f(z) = \alpha_0 I_0(z) + \alpha_1 I_1(z) + \alpha_2 I_2(z) + \ldots,$$

où

$$(20) \qquad \alpha_n = \varepsilon_n\, \mathcal{E}_{(0)} O_n(t) f(t) = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int_r O_n(t) f(t)\, dt,$$

r représentant le rayon d'un cercle arbitraire décrit de l'origine comme centre.

8. La méthode précédente, analogue à celle dont s'est servi Fourier dans son *Traité de la Chaleur* pour déterminer les coefficients des séries trigonométriques, est loin d'être suffisante. C'est pourquoi nous allons reprendre le problème et déterminer directement la somme de la série obtenue.

En introduisant, pour $O_n(t)$, l'intégrale de M. Neumann (¹)

$$O_n(t) = \frac{1}{2\,t^{n+1}} \int_0^\infty \left[(x + \sqrt{x^2+t^2})^n + (x - \sqrt{x^2+t^2})^n \right] e^{-x}\,dx$$

ou

$$O_n(t) = \frac{1}{2t} \int_0^\infty \left[\left(\frac{x + \sqrt{x^2+t^2}}{x} \right)^n + (-1)^n \left(\frac{t}{x+\sqrt{x^2+t^2}} \right)^n \right] e^{-x}\,dx,$$

on obtient

$$\sum_0^\infty \varepsilon_n O_n(t) I_n(z) = \frac{1}{2t} \int_0^\infty \sum_0^\infty \left\{ \varepsilon_n \left[\left(\frac{x+\sqrt{x^2+t^2}}{t} \right)^n + (-1)^n \left(\frac{t}{x+\sqrt{x^2+t^2}} \right)^n \right] I_n(z) \right\} e^{-x}\,dx.$$

Considérons, dans le dernier membre de cette équation, l'intégrale comme la limite de $\int_0^X$ pour X infini, la somme sous le signe d'intégration s'écrit, pour toutes les valeurs de x et t, à l'exception de $t = 0$, d'après la formule (1),

$$2e^{\frac{z}{2}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+t^2}}{t} - \frac{t}{x+\sqrt{x^2+t^2}} \right)} = 2e^{\frac{zx}{t}},$$

par suite

$$\sum_0^\infty \varepsilon_n O_n(t) I_n(z) = \frac{1}{t} \lim \int_0^X e^{\frac{z-t}{t}x}\,dx = \frac{1}{t} \int_0^\infty e^{\frac{z-t}{t}x}\,dx.$$

(¹) Cette formule, que M. Neumann donne sans démonstration, a été prouvée d'une manière très élégante par M. Sonine (*Math. Ann.*, t. XVI).

En posant

$$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad \text{et} \quad t = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

la partie réelle de

$$\frac{z-t}{t} \quad \text{ou} \quad \frac{\rho}{r}\cos(\alpha - \theta) - 1$$

sera toujours négative quand on a

$$\rho < r \quad \text{ou} \quad \operatorname{mod} z < \operatorname{mod} t.$$

Si cette condition est remplie, on aura donc

$$(21) \qquad \sum_0^\infty \varepsilon_n O_n(t)\, I_n(z) = \frac{1}{t-z}$$

et

$$\sum_0^\infty \alpha_n I_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_r \left[\sum_0^\infty \varepsilon_n O_n(t)\, I_n(z)\right] f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{f(t)}{t-z}\, dt = f(z),$$

ce qui prouve le théorème de M. C. Neumann.

9. Pour développer une fonction paire $f(z)$ en série de la forme

$$(22) \qquad f(z) = \alpha_0 I_0^2(z) + \alpha_1 I_1^2(z) + \alpha_2 I_2^2(z),$$

on pourrait suivre la même méthode.

En développant

$$f(z) = f(0) + 2\left(\frac{z}{2}\right) f'(0) + \frac{2^2}{2!}\left(\frac{z}{2}\right)^2 f^2(0) + \ldots$$

et

$$I_n^2(z) = \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\left[1 - \frac{2^2 T_2}{1.(2n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{2^4 T_4}{1.2.(2n+1)(2n+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^4 + \ldots\right],$$

où

$$T_2 = \frac{2n+1}{2n+2},$$

$$T_4 = \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)},$$

$$T_6 = \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{(2n+2)(2n+4)(2n+6)},$$

on obtiendrait, en généralisant,

$$(23)\qquad \alpha_n = \varepsilon_n \underset{(0)}{\mathcal{L}} \Omega_n(t)\, t f(t),$$

la fonction $\Omega_n(z)$ étant définie par l'équation

$$(24)\qquad \begin{cases} z^2\Omega_n(z) = \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_2 \dfrac{4n^2}{z^2} + \mathfrak{S}_4 \dfrac{4n^2(4n^2-2^2)}{z^4} \\ \qquad + \mathfrak{S}_6 \dfrac{4n^2(4n^2-2^2)(4n^2-4^2)}{z^6} + \ldots \\ \qquad + \mathfrak{S}_{2n} \dfrac{4n^2(4n^2-2^2)\ldots(4n^2-\overline{2n-2}^2)}{z^{2n}}, \end{cases}$$

dans laquelle

$$(25)\qquad \mathfrak{S}_{2p} = \frac{(p!)^2}{(2p)!}.$$

10. Pour démontrer rigoureusement le développement précédent, je commencerai par établir une formule analogue à la formule connue

$$(26)\qquad \mathrm{I}_n^2(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{I}_{2n}(2z\sin\omega)\, d\omega,$$

pour les fonctions $\Omega_n(z)$ et $\mathrm{O}_{2n}(z)$.

En partant de l'équation

$$\mathrm{O}_{2n}(z) = \frac{1}{z} + \frac{4n^2}{z^3} + \frac{4n^2(4n^2-2^2)}{z^5} + \ldots + \frac{4n^2(4n^2-2^2)\ldots(4n^2-\overline{2n-2}^2)}{z^{2n+1}},$$

on a

$$-z^2\frac{d}{dz}\mathrm{O}_{2n}(z) = 1 + 3\frac{4n^2}{z^2} + 5\frac{4n^2(4n^2-2^2)}{z^4} + \ldots$$
$$+ (2n+1)\frac{4n^2(4n^2-2^2)\ldots(4n^2-\overline{2n-2}^2)}{z^{2n}}.$$

Quand on remplace dans la dernière équation z par $\frac{2z}{\sin\omega}$, elle devient

$$-2z^2\frac{d}{dz}\,O_{2n}\left(\frac{2z}{\sin 2\omega}\right)=\sin 2\omega+3\,\frac{4n^2}{z^2}\,\frac{\sin^3 2\omega}{2^2}$$
$$+5\,\frac{4n^2(4n^2-2^2)}{z^4}\,\frac{\sin^5 2\omega}{2^4}+\ldots$$
$$+(2n+1)\,\frac{4n^2(4n^2-2^2)\ldots(4n^2-\overline{2n-2}^2)}{z^{2n}}\,\frac{\sin^{2n+1}2\omega}{2^{2n}},$$

et de cette équation on déduira aisément

$$(27)\quad\left\{\begin{aligned}&-2z^2\frac{d}{dz}\int_0^{\frac{\pi}{2}}O_{2n}\left(\frac{2z}{\sin 2\omega}\right)dz=\mathfrak{S}_0+\mathfrak{S}_2\,\frac{4n^2}{z^2}+\mathfrak{S}_4\,\frac{4n^2(4n^2-2^2)}{z^4}+\ldots\\&\qquad+\mathfrak{S}_{2n}\,\frac{4n^2(4n^2-2^2)\ldots(4n^2-\overline{2n-2}^2)}{z^{2n}},\end{aligned}\right.$$

en observant que

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p+1}\omega\cos^{2p+1}\omega\,d\omega=\frac{[\Gamma(p+1)]^2}{\Gamma(2p+2)}=\frac{(p!)^2}{(2p+1)!},$$

ou

$$\frac{1}{2^{2p}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p+1}2\omega\,d\omega=\frac{1}{2p+1}\,\mathfrak{S}_{2p}.$$

Or le second membre de l'équation (27) se réduit à $z^2\Omega_n(x)$, d'où résulte la formule cherchée

$$\Omega_n(z)=-2\,\frac{d}{dz}\int_0^{\frac{\pi}{2}}O_{2n}\left(\frac{2z}{\sin 2\omega}\right)d\omega,$$

ou

$$(28)\qquad \Omega_n(z)=-\frac{d}{dz}\int_0^{\pi}O_{2n}\left(\frac{2z}{\sin\omega}\right)d\omega.$$

Les formules (25) et (27) nous permettent maintenant d'écrire l'équation

$$\sum_0^{\infty}\varepsilon_n\Omega_n(t)\,\mathrm{I}_n^2(z)=-\frac{1}{\pi}\,\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sum_0^{\infty}\varepsilon_n\,O_{2n}\left(\frac{2t}{\sin\varphi}\right)\mathrm{I}_{2n}(2z\sin\psi)\,d\varphi\,d\psi.$$

Dans le dernier membre de cette équation $\operatorname{mod} \frac{2t}{\sin\varphi}$ varie entre ∞ et $2 \operatorname{mod} t$, tandis que $\operatorname{mod} 2z \sin\psi$ varie entre o et $2 \operatorname{mod} z$; par suite la formule (21) sera applicable et l'on aura

$$\sum_0^\infty \varepsilon_n \, O_{2n}\left(\frac{2t}{\sin\varphi}\right) I_{2n}(2z\sin\psi) = \frac{t\sin\varphi}{2t^2 - 2z^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

la condition $\operatorname{mod} t > \operatorname{mod} z$ étant remplie.

En introduisant la dernière équation dans la précédente, celle-ci se réduit à

$$\sum_0^\infty \varepsilon_n \, \Omega_n(t) \, I_n^2(z) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{t\sin\varphi}{t^2 - z^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}\, d\varphi\, d\psi,$$

ou, après avoir effectué l'intégration par rapport à ψ, à

$$\sum_0^\infty \varepsilon_n \, \Omega_n(t) \, I_n^2(z) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\pi \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{t^2 - z^2\sin^2\varphi}},$$

et après l'intégration par rapport à φ, à

$$\sum_0^\infty \varepsilon_n \, \Omega_n(t) \, I_n^2(z) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z}\log\frac{t+z}{t-z}\right),$$

ou à

$$\sum_0^\infty \varepsilon_n \, \Omega_n(t) \, I_n^2(z) = \frac{1}{t^2 - z^2}. \tag{29}$$

L'équation (29) ayant lieu quand $\operatorname{mod} t > \operatorname{mod} z$, on aura sous la même condition

$$\sum_0^\infty \alpha_n \, I_n^2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_r \left[\sum_0^\infty \varepsilon_n \, \Omega_n(t) \, I_n^2(z)\right] t f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{t f(t)}{t^2 - z^2}\, dt.$$

Dans la dernière intégrale, le rayon r étant soumis à la seule condition d'être plus grand que $\operatorname{mod} z$, cette intégrale, multipliée par $\frac{1}{2\pi i}$, n'est autre chose que la somme des résidus de la fonction $\frac{t f(t)}{t^2 - z^2}$

par rapport aux deux pôles simples $t = z$ et $t = -z$, dont les valeurs se déterminent aisément. Il en résulte

$$\sum_0^\infty \alpha_n \mathrm{I}_n^2(z) = \frac{1}{2} f(z) + \frac{1}{2} f(-z) = f(z),$$

ce qui démontre le second développement de M. C. Neumann.

TROISIÈME PARTIE.

11. Dans cette Partie, je m'occuperai d'un nouveau développement d'une fonction holomorphe en série de la forme

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{I}_1(z) + \alpha_2 \mathrm{I}_2(2z) + \alpha_3 \mathrm{I}_3(3z) + \ldots.$$

En admettant la possibilité d'un tel développement, la comparaison des coefficients des mêmes puissances de la variable dans les deux membres conduit aisément aux équations

$$\begin{aligned}
f(0) &= \alpha_0,\\
2 f^1(0) &= \alpha_1,\\
2^2 f^2(0) &= 2^2 \alpha_2,\\
2^3 f^3(0) &= -3\alpha_1 + 3^3 \alpha_3,\\
2^4 f^4(0) &= -2^4.4\alpha_2 + 4^4 \alpha_4,\\
2^5 f^5(0) &= 10\alpha_1 - 3^5.5\alpha_3 + 5^5 \alpha_5,\\
2^6 f^6(0) &= 2^6.15\alpha_2 - 4^6.6\alpha_4 + 6^6 \alpha_6,\\
2^7 f^7(0) &= -35\alpha_1 + 3^7.21\alpha_3 - 5^7.7\alpha_5 + 7^7 \alpha_7,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

De ces équations on tire, en généralisant,

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= f(0),\\
\alpha_{2n} &= \frac{1}{n^2} f^2(0) + \frac{2}{3!}\frac{n^2 - 1^2}{n^4} f^4(0) + \frac{3}{5!}\frac{(n^2-2^2)(n^2-1^2)}{n^6} f^6(0) + \ldots + \frac{1}{n^{2n}} f^{2n}(0),\\
\alpha_{2n+1} &= \frac{2}{(2n+1)^2} f'(0) + \frac{2^3.3}{2!}\frac{n(n+1)}{(2n+1)^4} f^3(0)\\
&\quad + \frac{2^5.5}{4!}\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{(2n+1)^6} f^5(0) + \ldots + \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)^{2n+1}} f^{2n+1}(0).
\end{aligned}$$

En introduisant les fonctions nouvelles

$$2\,O_{2n}(z) = \frac{2}{n^2}\frac{1}{z^3} + 2.4\,\frac{n^2-1^2}{n^4}\frac{1}{z^5} + 3.6\,\frac{(n^2-2^2)(n^2-1^2)}{n^6}\frac{1}{z^7} + \dots + \frac{(2n)!}{n^{2n}}\frac{1}{z^{2n+1}},$$

$$2\,O_{2n+1}(z) = \frac{2}{(2n+1)^2}\frac{1}{z^2} + 2^3.3^2\,\frac{n(n+1)}{(2n+1)^4}\frac{1}{z^4} + 2^5.5^2\,\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{(2n+1)^6}\frac{1}{z^6} + \dots + \frac{2^{2n+1}(2n+1)!}{(2n+1)^{2n+1}}\frac{1}{z^{2n+2}},$$

les coefficients prendront la forme

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= f(0), \\ \alpha_{2n} &= 2\,\underset{(0)}{\mathcal{E}}\, O_{2n}(z) f(z), \\ \alpha_{2n+1} &= 2\,\underset{(0)}{\mathcal{E}}\, O_{2n+1}(z) f(z), \end{aligned}$$

où les résidus sont relatifs au seul pôle $z = 0$.

On peut réunir les deux formules pour O_{2n} et O_{2n+1} en posant

$$\varepsilon_n O_n(z) = \frac{2^n n!}{n^n}\frac{1}{z^{n+1}}\left[1 + \frac{(n-2)^2}{2(2n-2)}z^2 + \frac{n^2(n-4)^2}{2.4(2n-2)(2n-4)}z^4 + \frac{n^4(n-6)^2}{2.4.6(2n-2)(2n-4)(2n-6)} + \dots\right],$$

le dernier terme entre parenthèses étant

$$\frac{1}{n!}\frac{n^{n-2}}{2^{n-3}}z^{n-2}$$

ou

$$\frac{1}{n!}\frac{n^{n-2}}{2^{n-1}}z^{n-1},$$

selon que n est un nombre pair ou impair. Remarquons que la détermination précédente se réduit pour $n = 0$, ε_0 étant égal à l'unité, à

$$O_0(z) = \frac{1}{z}.$$

De cette manière on obtient ce développement

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{I}_1(z) + \alpha_2 \mathrm{I}_2(2z) + \alpha_3 \mathrm{I}_3(3z) + \ldots \tag{30}$$

où

$$\alpha_n = \varepsilon_n \mathcal{L}_{(0)} \mathcal{O}_n(z) f(z). \tag{31}$$

12. Avant de donner une démonstration rigoureuse de ce développement, nous allons établir une propriété importante de la fonction $\mathcal{O}_n(z)$.

Distinguons les cas où n est pair et où n est impair.

a. n pair, plus grand que zéro,

$$2\mathcal{O}_n(z) = \frac{2^n n!}{n^{n+2}} \left[\frac{n^2}{z^{n+1}} + \frac{(n-2)^2}{2(2n-2)} \frac{n^2}{z^{n-1}} \right.$$
$$\left. + \frac{(n-4)^2}{2.4(2n-2)(2n-4)} \frac{n^4}{z^{n-3}} + \ldots + \frac{1}{n!} \frac{n^n}{2^{n-3}} \frac{1}{z^3} \right].$$

De cette définition on tire, en intégrant entre les limites ∞ et z,

$$\frac{2}{z}\int_\infty^z \mathcal{O}_n(z)\, dz = -\frac{2^n n!}{n^{n+2}} \left[\frac{n}{z^{n+1}} + \frac{n-2}{2(2n-2)} \frac{n^2}{z^{n-1}} \right.$$
$$\left. + \frac{n-4}{2.4(2n-2)(2n-4)} \frac{n^4}{z^{n-3}} + \ldots + \frac{1}{n!} \frac{n^n}{2^{n-2}} \frac{1}{z^3} \right]$$

et

$$\frac{2}{z}\int_\infty^z \frac{1}{z}\int_\infty^z \mathcal{O}_n(z)\, dz^2 = \frac{2^n n!}{n^{n+2} z^{n+1}} \left[1 + \frac{n^2 z^2}{2(2n-2)} \right.$$
$$\left. + \frac{n^4 z^4}{2.4(2n-2)(2n-4)} + \ldots + \frac{1}{n!} \frac{n^n}{2^{n-1}} z^{n-2} \right],$$

ou, d'après l'équation (18),

$$\frac{2}{z}\int_\infty^z \frac{1}{z}\int_\infty^z \mathcal{O}_n(z)\, dz^2 = \frac{1}{n}\left[2\mathrm{O}_n(nz) - \frac{2}{nz} \right]. \tag{32}$$

b. n impair,

$$2\mathcal{O}_n(z) = \frac{2^n n!}{n^{n+2}} \left[\frac{n^2}{z^{n+1}} + \frac{(n-2)^2}{2(2n-2)} \frac{n^2}{z^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{n!} \frac{n^n}{2^{n-1}} \frac{1}{z^2} \right].$$

En intégrant cette équation entre les limites ∞ et z, on obtient

$$\frac{2}{z}\int_\infty^z \mathcal{O}_n(z)\,dz = -\frac{2^n n!}{n^{n+2}}\left[\frac{n}{z^{n+1}} + \frac{n-2}{2(2n-2)}\frac{n^2}{z^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{n^n}{2^{n-1}}\frac{1}{z^2}\right]$$

et

$$\frac{2}{z}\int_\infty^z \frac{1}{z}\int_\infty^z \mathcal{O}_n(z)\,dz^2 = \frac{2^n n!}{n^{n+2} z^{n+1}}\left[1 + \frac{n^2 z^2}{2(2n-2)} + \frac{n^4 z^4}{2.4(2n-2)(2n-4)} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{n^n}{z^{n-1}} z^{n-1}\right]$$

ou, d'après l'équation (18),

$$\frac{2}{z}\int_\infty^z \frac{1}{z}\int_\infty^z \mathcal{O}_n(z) = \frac{2}{n}\,O_n(nz). \tag{33}$$

Des équations (32) et (33) on déduit aisément la relation

$$\mathcal{O}_n(z) = \frac{1}{n}\left[z^2\frac{d^2 O_n(nz)}{dz^2} + 3z\frac{dO_n(nz)}{dz} + O_n(nz)\right]. \tag{34}$$

Cette équation nous permet d'écrire $\mathcal{O}_n(z)$ en forme d'intégrale définie.

En effet, en admettant que la partie réelle de z soit positive, l'intégrale

$$\frac{1}{2n^{n+1}z^{n+1}}\int_0^\infty \left[(x+\sqrt{x^2+n^2z^2})^n + (x-\sqrt{x^2+n^2z^2})^n\right] e^{-x}\,dx$$

est équivalente à

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \left[(x+\sqrt{x^2+1})^n + (x-\sqrt{x^2+1})^n\right] e^{-nzx}\,dx.$$

Celle-ci représente donc aussi la fonction $O_n(nz)$ et l'on aura, en introduisant l'abréviation $y = \dfrac{(x+\sqrt{x^2+1})^n + (x-\sqrt{x^2+1})^n}{2}$,

$$O_n(nz) = \int_0^\infty y\, e^{-nzx}\,dx,$$

et, d'après l'équation (34),

$$\mathcal{O}_n(z) = \frac{1}{n}\int_0^\infty (n^2z^2x^2 - 3nzx + 1)\,y\,e^{-nzx}\,dx. \tag{35}$$

En intégrant par parties, l'équation précédente prend la forme

$$\mathcal{O}_n(z) = \frac{1}{n}\int_0^\infty \left(x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}\right)e^{-nzx}\,dx, \tag{36}$$

ou, en remarquant que la fonction y satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - x^2y = 0, \tag{37}$$

la forme

$$\mathcal{O}_n(z) = -\frac{1}{n}\int_0^\infty \left(\frac{d^2y}{dx^2} - n^2y\right)e^{-nzx}\,dx. \tag{38}$$

D'après l'identité

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2} - n^2y\right)e^{-nzx} = \left[\frac{d^2}{dx^2} + 2nz\frac{d}{dx} + n^2(z^2-1)\right](ye^{-nzx}),$$

on déduit de l'équation (38)

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_n(z) &= -\frac{1}{n}\int_0^\infty \left(\frac{d^2}{dx^2} + 2nz\frac{d}{dx}\right)(ye^{-nzx})\,dx - n(z^2-1)\int_0^\infty ye^{-nzx}\,dx\\ &= (1-\cos n\pi) + \frac{z}{2}(1+\cos n\pi) + n(1-z^2)\,O_n(nz).\end{aligned}$$

Cette propriété, que nous avions en vue, se réduit à

$$\mathcal{O}_n(z) = z + n(1-z^2)\,O_n(nz) \tag{39}$$

et

$$\mathcal{O}_n(z) = 1 + n(1-z^2)\,O_n(nz), \tag{40}$$

selon que n est un nombre pair ou impair (1).

---

(1) De ces équations et des équations différentielles pour $O_n(z)$ que M. Neumann a données, on pourrait déduire des équations différentielles pour les fonctions $\mathcal{O}_n(z)$.

Il est bien évident que les dernières équations auront lieu pour toutes les valeurs de z et qu'on a, dans tous les cas,

$$\Theta_n(1) = 1. \tag{41}$$

13. Revenons maintenant à notre développement (30) et (31), et appliquons ces formules d'abord à la fonction

$$f(z) = \frac{1}{1-z},$$

ensuite à la fonction

$$f(z) = z^n.$$

Dans le premier cas, les coefficients prennent des valeurs très simples. En effet,

$$\alpha_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i}\int_r \Theta_n(t)\frac{dt}{1-t},$$

où le rayon r est arbitraire et soumis à la seule condition d'être plus petit que l'unité.

Or, en remplaçant t par $\frac{1}{t}$ et changeant le sens de l'intégrale, on obtient

$$\alpha_n = -\frac{\varepsilon_n}{2\pi i}\int_{\frac{1}{r}} \Theta_n\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t(1-t)} = -\frac{\varepsilon_n}{2\pi i}\int_r \Theta_n\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t(1-t)} - \varepsilon_n \mathcal{E}_{(1)}\frac{\Theta_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t(1-t)},$$

ou

$$\alpha_n = \varepsilon_n \mathcal{E}_{(1)}\frac{\Theta_n\left(\frac{1}{t}\right)}{t(t-1)} = \varepsilon_n\Theta_n(1) = \varepsilon_n.$$

Il en résulte la série

$$\frac{1}{1-z} = 1 + 2\,I_1(z) + 2\,I_2(2z) + 2\,I_3(3z) + \ldots, \tag{4}$$

que nous avons étudiée dans la première Partie et dont nous avons déterminé le champ de convergence. Dans le second cas, la formule (31) devient

$$\alpha_m = \varepsilon_m \mathcal{E}_{(0)} \mathcal{O}_m(t) \frac{1}{t_n},$$

dont la valeur se déduit immédiatement de la définition de la fonction $\mathcal{O}_m(t)$. Cette valeur, substituée dans l'équation (30), donne la série

$$(17) \qquad z^n = 2^2 n^2 \left[(n-1)! \frac{I_n(nz)}{n^{n+1}} + n! \frac{I_{n+2}(\overline{n+2}\,z)}{(n+2)^{n+1}} + \frac{(n+1)!}{2!} \frac{I_{n+4}(\overline{n+4}\,z)}{(n+4)^{n+1}} + \dots \right],$$

dont le champ de convergence est identique avec celui de la série précédente.

14. Considérons maintenant la série

$$S = \sum_0^\infty \varepsilon_n \mathcal{O}_n(t) I_n(nz)$$

et déterminons la partie du plan dans laquelle cette série sera absolument convergente.

Pour cela, je remarque d'abord que pour

$$\rho = \operatorname{mod} z,$$

on a

$$(42) \qquad \operatorname{mod} I_n(nz) < \frac{n^n \rho^n}{2^n n!} e^{\frac{n\rho^2}{4}}.$$

En effet, on a

$$\operatorname{mod} I_n(nz) < \frac{n^n \rho^n}{2^n n!} \left[1 + \frac{n^2}{2(2n+2)} \rho^2 + \frac{n^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} \rho^4 + \dots \right]$$

et, *a fortiori*,

$$\mathrm{mod}\,\mathrm{I}_n(nz) < \frac{n^n \rho^n}{2^n n!}\left[1 + \frac{n^n}{2.2n}\rho^2 + \frac{n^4}{2.4.2n.2n}\rho^4 + \ldots\right]$$

ou

$$\mathrm{mod}\,\mathrm{I}_n(nz) < \frac{n^n \rho^n}{2^n n!} e^{\frac{n\rho^2}{4}}.$$

En second lieu, je tire de l'équation (41), en posant

$$r = \mathrm{mod}\, t,$$

que pour $r \geqq 1$

$$\mathrm{mod}\,\mathcal{O}_n(t) \leqq 1. \tag{43}$$

D'après les équations (42) et (43), on voit que le terme général u_n de la série

$$\sum_0^\infty \mathrm{mod}[\varepsilon_n \mathcal{O}_n(t)\,\mathrm{I}_n(nz)]$$

satisfait à l'inégalité

$$u_n < 2\,\frac{n^n \rho^n}{2^n.2!} e^{\frac{n\rho^2}{4}},$$

d'où

$$\lim\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n=\infty} = \frac{\rho}{2} e^{\frac{\rho^2}{4}} \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n=\infty} = \frac{\rho}{2} e^{1+\frac{\rho^2}{4}}.$$

La convergence absolue de la série S est donc établie dans un cercle de rayon $\zeta = 0,659$, ζ étant racine réelle de l'équation

$$e^{1+\frac{\zeta^2}{4}} = \frac{2}{\zeta}. \tag{44}$$

Les conditions $r \geqq 1$ et $\rho \leqq \zeta$ étant remplies, nous pouvons changer l'ordre des termes de la série S et obtenir aisément la somme de cette série. Pour y parvenir, développons les fonctions $\mathcal{O}_n(t)$ et réunissons les coefficients des puissances négatives de t. De cette manière, on obtient

$$\begin{aligned}
S = \frac{1}{t} &+ \frac{1}{t^2}\,2\,.\,1^2\left[\frac{I_1(z)}{1^2} + \frac{I_3(3z)}{3^2} + \frac{I_5(5z)}{5^2} + \ldots\right]\\
&+ \frac{1}{t^3}\,2^2.2^2\left[\frac{I_2(2z)}{2^3} + 2!\,\frac{I_4(4z)}{4^3} + \frac{3!}{2!}\,\frac{I_6(6z)}{6^3} + \ldots\right]\\
&+ \frac{1}{t^4}\,2^3.3^2\left[2!\,\frac{I_3(3z)}{3^4} + 3!\,\frac{I_5(5z)}{5^4} + \frac{4!}{2!}\,\frac{I_7(7z)}{7^4} + \ldots\right]\\
&+ \frac{1}{t^5}\,2^4.4^2\left[3!\,\frac{I_4(4z)}{4^5} + 4!\,\frac{I_6(6z)}{6^5} + \frac{5!}{2!}\,\frac{I_8(8z)}{8^5} + \ldots\right]\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

ou, en introduisant les valeurs de z^n d'après l'équation (17),

$$S = \frac{1}{t} + \frac{z}{t^2} + \frac{z^2}{t^3} + \frac{z^3}{t^4} + \frac{z^4}{t^5} + \ldots = \frac{1}{t-z}.$$

En résumant, on a

$$(45) \qquad \frac{1}{t-z} = \sum_0^\infty \varepsilon_n \Theta_n(t)\, I_n(nz)$$

pour

$$\operatorname{mod} t \geqq 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{mod} z \leqq \zeta.$$

La dernière formule s'étend aussi à toutes les valeurs de z comprises à l'intérieur de la courbe C, qui est située entièrement dans le cercle de rayon 1.

En effet, attribuons à t une valeur constante dont le module est plus grand que l'unité, il est évident que la série considérée sera convergente en même temps que la série

$$\sum_0^\infty \varepsilon_n I_n(nz),$$

dont le champ de convergence est précisément limité par la courbe C.

15. Déterminons maintenant la somme de la série

$$\sum_0^\infty \alpha_n I_n(nz) = \mathcal{L}_{(0)}\left[\sum_0^\infty \varepsilon_n O_n(t) I_n(nz)\right] f(t).$$

D'après ce qui précède, si nous choisissons $\operatorname{mod} t = R \geqq 1$ et z à l'intérieur de la courbe C, on obtient

$$\sum_0^\infty \alpha_n I_n(nz) = \frac{1}{2\pi i}\int_R \frac{f(t)}{t-z}\,dt = f(z).$$

En résumant, nous aurons donc ce théorème :

Lorsqu'une fonction $f(z)$ est holomorphe dans un cercle de rayon $R \geqq 1$, *elle est développable en une série de la forme*

$$\alpha_0 + \alpha_1 I_1(z) + \alpha_2 I_2(2z) + \alpha_3 I_3(3z) + \ldots$$

et convergente à l'intérieur de la courbe C.