Annales scientifiques de l'É.N.S.

Louis Raffy

Sur la déformation des surfaces spirales

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 9 (1892), p. 145-166
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1892_3_9__145_0>

SUR LA

DÉFORMATION DES SURFACES SPIRALES,

PAR M. L. RAFFY,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

PREMIÈRE PARTIE.

CARACTÈRES SPÉCIFIQUES DES SURFACES APPLICABLES SUR LES SPIRALES.

I.

1. Pour qu'une surface d'élément linéaire $\lambda\, dx\, dy = e^{\omega} dx\, dy$ soit applicable sur une spirale, il faut et il suffit que, par un changement de variables

$$dx' = \frac{dx}{\xi(x)}, \qquad dy' = \frac{dy}{\eta(y)},$$

le produit $\lambda\xi\eta$ prenne la forme

$$e^{-i(x'-y')+\int \mathrm{T}(x'+y')\, d(x'+y')},$$

ce qui s'exprime par l'équation

$$(1) \qquad \xi' - \eta' + \xi\omega'_x - \eta\omega'_y = -2i.$$

Il faut donc et il suffit qu'il existe deux fonctions ξ et η qui rendent cette relation identique. Pour trouver quelles conditions cela entraîne, égalons à zéro la dérivée seconde de la fonction (1) prise par rapport à x et y; il vient

$$(\xi' - \eta')\,\omega''_{xy} + \xi\omega'''_{x^2y} - \eta\omega'''_{xy^2} = 0.$$

Si nous représentons la courbure totale par $-2e^{\theta}$, nous aurons

$$\frac{\omega''_{xy}}{\lambda} = e^{\theta}, \qquad \omega''_{xy} = e^{\omega+\theta},$$

de sorte que l'équation précédente s'écrit

$$(2)\qquad \xi' - \eta' + \xi(\omega'_x + \theta'_x) - \eta(\omega'_y + \theta'_y) = 0;$$

d'où, en retranchant membre à membre les identités (1) et (2),

$$(2)'\qquad \xi\theta'_x - \eta\theta'_y = 2i.$$

Au système (1) et (2)', nous adjoindrons les équations qu'on déduit de (2)', en différentiant séparément, puis successivement, par rapport à x et à y, savoir

$$(3)\qquad \xi'\theta'_x + \xi\theta''_{x^2} - \eta\theta''_{xy} = 0,$$

$$(4)\qquad -\eta'\theta'_y + \xi\theta''_{xy} - \eta\theta''_{y^2} = 0,$$

$$(5)\qquad (\xi' - \eta')\theta''_{xy} + \xi\theta'''_{xy^2} - \eta\theta'''_{x^2y} = 0.$$

Des équations (3) et (4), tirons ξ' et η', pour porter leurs valeurs dans l'équation (1); il vient

$$\xi\left(\frac{\theta''_{x^2}}{\theta'_x} + \frac{\theta''_{xy}}{\theta'_y} - \omega'_x\right) - \eta\left(\frac{\theta''_{xy}}{\theta'_x} + \frac{\theta''_{y^2}}{\theta'_y} - \omega'_y\right) = 2i.$$

Si l'on pose, suivant l'usage,

$$\Delta\theta = 4\frac{\theta'_x\theta'_y}{\lambda},$$

en désignant par $\Delta\theta$ le premier paramètre différentiel de la fonction θ, on aura

$$(1)'\qquad \xi\frac{\partial \log\Delta\theta}{\partial x} - \eta\frac{\partial \log\Delta\theta}{\partial y} = 2i.$$

De cette équation rapprochons l'équation

$$(2)'\qquad \xi\frac{\partial\theta}{\partial x} - \eta\frac{\partial\theta}{\partial y} = 2i,$$

et supposons d'abord que le déterminant fonctionnel de $\log\Delta\theta$ et de θ ne soit pas nul, c'est-à-dire que les lignes d'égale courbure des surfaces considérées ne soient point parallèles. Nous pouvons tirer les deux inconnues ξ et η

$$(6)\qquad \xi = -2i\frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\log e^{-\theta}\Delta\theta}{\dfrac{\partial(\log\Delta\theta, \theta)}{\partial(x, y)}}, \qquad \eta = -2i\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\log e^{-\theta}\Delta\theta}{\dfrac{\partial(\log\Delta\theta, \theta)}{\partial(x, y)}},$$

ou bien, en introduisant l'invariant simultané Θ,

$$\Theta(\log\Delta\theta, \theta) = -\frac{2i}{\lambda}\frac{\partial(\log\Delta\theta, \theta)}{\partial(x, y)},$$

$$\xi = -4\frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\log e^{-\theta}\Delta\theta}{\lambda\,\Theta(\log\Delta\theta, \theta)}; \qquad \eta = -4\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\log e^{-\theta}\Delta\theta}{\lambda\,\Theta(\log\Delta\theta, \theta)}.$$

Pour donner à ces expressions leur forme définitive, posons

$$\psi = \frac{\Theta(\log\Delta\theta, \theta)}{\Delta(\log e^{-\theta}\Delta\theta)};$$

nous pourrons écrire

$$-\frac{4}{\xi} = \psi\frac{\partial}{\partial x}\log e^{-\theta}\Delta\theta, \qquad -\frac{4}{\eta} = \psi\frac{\partial}{\partial y}\log e^{-\theta}\Delta\theta,$$

ou, pour abréger,

$$-\frac{4}{\xi} = \psi\varphi'_x, \qquad -\frac{4}{\eta} = \psi\varphi'_y, \qquad \varphi = \log e^{-\theta}\Delta\theta.$$

Exprimons que la première de ces fonctions ne dépend que de x, la seconde que de y; nous trouvons

$$(7) \qquad \begin{cases} \varphi''_{xy}\psi + \varphi'_x\psi'_y = 0, \\ \varphi''_{xy}\psi + \varphi'_y\psi'_x = 0; \end{cases}$$

d'où l'on conclut que ψ est une fonction de φ. Soit $\psi = F(\varphi)$; les deux équations précédentes se réduisent à

$$\varphi''_{xy}F(\varphi) + \varphi'_x\varphi'_y F'(\varphi) = 0,$$

ce qui montre que le quotient $\varphi''_{xy} : \varphi'_x\varphi'_y$ est aussi une fonction de φ. Or on a visiblement

$$\frac{\varphi''_{xy}}{\varphi'_x\varphi'_y} = \frac{\Delta_2\varphi}{\Delta\varphi}, \qquad \Delta_2\varphi = 4\frac{\varphi''_{xy}}{\lambda}.$$

Nous arrivons donc à cette conclusion :

Pour que l'élément linéaire $\lambda\,dx\,dy$ convienne à des spirales, il faut que les deux invariants

$$\frac{\Theta(\log\Delta\theta, \theta)}{\Delta(\log e^{-\theta}\Delta\theta)}, \qquad \frac{\Delta_2(\log e^{-\theta}\Delta\theta)}{\Delta(\log e^{-\theta}\Delta\theta)}$$

soient des fonctions du seul invariant $e^{-\theta}\Delta\theta$, où θ désigne le logarithme de la demi-courbure totale changée de signe.

Je dis que ces conditions sont suffisantes. Elles expriment, en effet, que les solutions (6) des équations (1)′ et (2)′ ne dépendent respectivement que de x et de y; comme elles vérifient, en particulier, l'équation (2)′, elles vérifient les équations (3) et (4) qui en sont déduites. Mais, si l'on tient compte de ces deux équations, l'équation (1) devient identique à l'équation (1)′ qui est vérifiée. Donc les fonctions ξ et η, données par les formules (6), répondent à la question. L'élément linéaire $\lambda\,dx\,dy$ convient à des spirales.

2. Revenons maintenant à l'hypothèse, primitivement exclue, où $\log\Delta\theta$ est une fonction de θ (surfaces à lignes d'égale courbure parallèles). Pour que les deux équations (1)′ et (2)′ soient compatibles, il faut qu'elles n'en fassent qu'une. Alors l'équation (1)′ nous échappe. Nous la remplacerons par celle qu'on obtient en éliminant $\xi' - \eta'$ entre l'équation (2) et l'équation (5) qui ne nous a pas servi jusqu'ici. Cela ne sera possible que si l'équation (5) n'est pas une identité, c'est-à-dire si la dérivée θ''_{xy} est différente de zéro.

Or je dis qu'elle ne peut pas être nulle. En effet, on aurait alors, en désignant par X et Y deux fonctions inconnues, l'une de x, l'autre de y,

$$\theta = \log X + \log Y, \qquad e^{\theta} = XY, \qquad e^{-\theta}\frac{\theta'_x\,\theta'_y}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{X'Y'}{X^2Y^2}.$$

Mais, les formules (6) devant être indéterminées, le produit $e^{-\theta}\Delta\theta$ se réduit à une constante. On aurait donc

$$\frac{1}{\lambda}\frac{X'Y'}{X^2Y^2} = \frac{1}{C}, \qquad \lambda = C\frac{X'Y'}{X^2Y^2}, \qquad ds^2 = C\,d\frac{1}{X}\,d\frac{1}{Y};$$

la surface serait développable, ce qui est inadmissible, quand e^{θ} n'est pas nul.

On trouve encore une surface développable, en supposant nulle l'une des fonctions X et Y.

Laissant ces développables de côté, nous aurons, par la combinaison indiquée,

$$(1)'' \qquad \xi\frac{\partial}{\partial x}\log e^{-\theta}\Delta_2\theta - \eta\frac{\partial}{\partial y}\log e^{-\theta}\Delta_2\theta = 0.$$

Supposons d'abord que cette équation soit une identité, c'est-à-dire qu'on ait à la fois

$$e^{-\theta}\Delta\theta = \text{const.}, \qquad e^{-\theta}\Delta_2\theta = \text{const.}$$

Les deux invariants $\Delta\theta$, $\Delta_2\theta$ sont des fonctions de θ; alors l'élément linéaire $\theta\,dx\,dy$ convient, comme on sait (¹), à des surfaces de révolution. Il convient, en outre, à des spirales, ainsi que nous le montrerons bientôt.

Ces cas particuliers écartés, nous résoudrons les deux équations

$$(1)'' \qquad \xi\frac{\partial}{\partial x}\log e^{-\theta}\Delta_2\theta - \eta\frac{\partial}{\partial y}\log e^{-\theta}\Delta_2\theta = 0,$$

$$(2)' \qquad \xi\frac{\partial\theta}{\partial x} - \eta\frac{\partial\theta}{\partial y} = 2i,$$

qui ne peuvent évidemment pas se confondre, l'une ayant pour second membre zéro et l'autre $2i$. Nous trouvons ainsi

$$(8) \qquad \xi = -2i\frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\log e^{-\theta}\Delta_2\theta}{\dfrac{\partial(\log\Delta_2\theta,\,\theta)}{\partial(x,y)}}, \qquad \eta = -2i\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\log e^{-\theta}\Delta_2\theta}{\dfrac{\partial(\log\Delta_2\theta,\,\theta)}{\partial(x,y)}}.$$

Ces formules ne diffèrent des formules (6) qu'en ce que $\Delta\theta$ est remplacé par $\Delta_2\theta$. Il suffira donc de répéter le raisonnement fait plus haut et l'on prouvera que *les deux invariants*

$$\frac{\Theta(\log\Delta_2\theta,\,\theta)}{\Delta(\log e^{-\theta}\Delta_2\theta)}, \quad \frac{\Delta_2(\log e^{-\theta}\Delta_2\theta)}{\Delta(\log e^{-\theta}\Delta_2\theta)}$$

sont des fonctions du seul invariant $e^{-\theta}\Delta_2\theta$. *De plus* $e^{-\theta}\Delta\theta$ *est constant.*

Nous allons voir que ces conditions, qui sont nécessaires, sont suffisantes. En effet, elles expriment que les formules (8) donnent pour ξ une fonction de x seulement, pour η une fonction de y seulement. Ces fonctions vérifient les équations (1)″ et (2)′, d'où on les a déduites. Elles vérifient donc aussi les équations (3) et (4) qui résultent de l'équation (2)′. D'autre part, elles vérifient aussi l'équation (1)′ qui,

---

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CIX, p. 661. *Voir* aussi DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. III, Livre VII, Chap. II.

dans l'hypothèse où $e^{-\theta}\Delta\theta$ est constant, n'est pas distincte de l'équation $(2)'$. Or nous avons vu plus haut que les équations (3), (4) et $(1)'$ entraînent l'équation (1). La proposition est donc démontrée.

3. Il semble qu'il y ait *trois* conditions d'applicabilité dans le cas que nous venons de traiter. Mais nous montrerons, dans l'article qui suit, qu'une surface pour laquelle $e^{-\theta}\Delta\theta$ se réduit à une constante est applicable sur des spirales quand l'invariant

$$\frac{\Theta(\log\Delta_2\theta, \theta)}{\Delta(\log e^{-\theta}\Delta_2\theta)}$$

est une fonction de $e^{-\theta}\Delta_2\theta$ ou encore, ce qui revient au même, quand l'invariant

$$\frac{\Theta(e^{-\theta}\Delta_2\theta, \theta)}{\Delta(e^{-\theta}\Delta_2\theta)}$$

est une fonction de $e^{-\theta}\Delta_2\theta$.

On peut simplifier aussi l'énoncé des deux conditions d'applicabilité obtenues dans le cas général; elles reviennent, en effet, à ceci : les deux invariants

$$\frac{\Theta(e^{-\theta}\Delta\theta, \theta)}{\Delta(e^{-\theta}\Delta\theta)}, \quad \frac{\Delta_2(e^{-\theta}\Delta\theta)}{\Delta(e^{-\theta}\Delta\theta)}$$

sont des fonctions de $e^{-\theta}\Delta\theta$.

En résumé, nous arrivons à ces conclusions :

RÈGLE [1]. — *Pour reconnaître si un élément linéaire donné convient à des spirales, on calculera la courbure totale* $-2e^{\theta}$ (*qui ne peut être constante sans être nulle*) *et l'on formera l'invariant* $e^{-\theta}\Delta\theta$.

Si cet invariant ne se réduit pas à une constante, on formera les deux invariants

$$\frac{\Theta(e^{-\theta}\Delta\theta, \theta)}{\Delta(e^{-\theta}\Delta\theta)}, \quad \frac{\Delta_2(e^{-\theta}\Delta\theta)}{\Delta(e^{-\theta}\Delta\theta)},$$

et l'on devra vérifier que chacun d'eux est une fonction de $e^{-\theta}\Delta\theta$.

Si l'invariant $e^{-\theta}\Delta\theta$ *est constant, on calculera l'invariant* $e^{-\theta}\Delta_2\theta$. *Si ce dernier est constant aussi, l'élément linéaire donné convient à des spirales*

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXII, p. 850.

en même temps qu'à des surfaces de révolution. Si l'invariant $e^{-\theta}\Delta_2\theta$ *n'est pas constant, on formera*

$$\frac{\Theta(e^{-\theta}\Delta_2\theta,\theta)}{\Delta(e^{-\theta}\Delta_2\theta)},$$

et ce nouvel invariant devra être une fonction de $e^{-\theta}\Delta_2\theta$.

Pour justifier l'assertion qu'une spirale ne peut avoir sa courbure totale constante, à moins d'être une développable, rappelons que, quand une surface a comme élément linéaire

$$ds^2 = \lambda\,dx\,dy = e^{\omega}\,dx\,dy,$$

sa courbure totale est donnée par la formule

$$\frac{1}{R_1R_2} = -\frac{2}{\lambda}\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial x\,\partial y} = -2\omega''_{xy}e^{-\omega}.$$

Or nous représentons la courbure totale par $-2e^{\theta}$; nous avons donc toujours

$$e^{\theta} = \omega''_{xy}e^{-\omega}.$$

Dans le cas des surfaces spirales, ω est de la forme

$$\omega = -i(x-y) + \int T(x+y)\,d(x+y);$$

il en résulte qu'on a

$$e^{\theta} = T'(x+y)\,e^{-\int T(x+y)\,d(x+y)}\,e^{i(x-y)}.$$

Ainsi e^{θ} est le produit d'une fonction de $x+y$ par l'exponentielle $e^{i(x-y)}$. Ce produit ne peut être constant que s'il est nul.

II.

4. *Discussion du cas où l'invariant* $e^{-\theta}\Delta\theta$ *est constant.* — L'hypothèse actuelle entraîne visiblement cette conséquence, que le paramètre $\Delta\theta$ est une fonction de θ, c'est-à-dire que les lignes d'égale courbure sont parallèles.

Nous partirons donc de l'expression générale de l'élément linéaire des surfaces qui ont leurs lignes d'égale courbure parallèles

$$(1)\qquad ds^2 = du^2 + \frac{(U-V)^2}{U'}\,dv^2,$$

et nous exprimerons d'abord que le produit $e^{-\theta}\Delta\theta$ ou son égal $e^{-3\theta}\Delta e^{\theta}$ est constant. Lorsqu'on a

$$(1)'\qquad ds^2 = du^2 + G\,dv^2,$$

la courbure totale $-2e^{\theta}$ est donnée par la formule connue

$$-2e^{\theta} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Dans le cas présent, on trouve par un calcul facile

$$(2)\qquad -2e^{\theta} = -\sqrt{U'}\,\frac{d^2}{du^2}\,\frac{1}{\sqrt{U'}}.$$

D'autre part, la formule générale

$$(3)\qquad \Delta\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2,$$

appliquée à e^{θ}, qui ne dépend que de u, donne simplement

$$\Delta e^{\theta} = \left(\frac{de^{\theta}}{du}\right)^2.$$

La première équation du problème est donc

$$e^{-3\theta}\left(\frac{de^{\theta}}{du}\right)^2 = \text{const.}$$

On en déduit facilement

$$e^{\theta} = \frac{C}{(u-u_0)^2},$$

ce qu'on peut, sans restreindre la généralité, écrire ainsi

$$(4)\qquad 2e^{\theta} = \frac{n(n-1)}{u^2},$$

n désignant une constante arbitraire, différente toutefois de zéro et de l'unité, valeurs qui ne donneraient que des surfaces développables.

Ainsi, la condition que l'invariant $e^{-\theta}\Delta\theta$ soit constant s'exprime par la formule (4) et détermine la fonction U par la relation

$$(2)' \qquad u^2 \frac{d^2}{du^2} \frac{1}{\sqrt{U'}} = \frac{n(n-1)}{\sqrt{U'}}.$$

Pour intégrer cette équation, remarquons qu'elle admet la solution

$$\frac{1}{\sqrt{U'}} = u^n;$$

comme elle ne change pas quand on change n en $1-n$, elle admet aussi la solution

$$\frac{1}{\sqrt{U'}} = u^{1-n}.$$

Si donc les deux nombres n et $1-n$ ne sont pas égaux, c'est-à-dire si $2n-1$ est différent de zéro, l'intégrale générale sera

$$\frac{1}{\sqrt{U'}} = au^n + bu^{1-n},$$

a et b désignant deux constantes arbitraires. On déduit de là

$$U' = \frac{u^{2n-2}}{(au^{2n-1}+b)^2} = \frac{u^{-2n}}{(a+bu^{1-2n})^2}.$$

Quand les deux constantes a et b sont différentes de zéro, il vient

$$(5) \qquad U = \frac{1}{(1-2n)\,a(au^{2n-1}+b)},$$

en négligeant la constante d'intégration qu'on peut faire rentrer dans la fonction V. Dans le cas contraire, on pourra prendre

$$(6) \qquad U = \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)b^2} \qquad \text{ou} \qquad U = \frac{u^{1-2n}}{(1-2n)a^2},$$

suivant que a sera nul ou que b sera nul.

Faisons maintenant l'hypothèse $n=\frac{1}{2}$. L'équation

$$u^2 \frac{d^2}{du^2} \frac{1}{\sqrt{U'}} = -\frac{1}{4\sqrt{U'}}$$

admet toujours la solution particulière

$$\frac{1}{\sqrt{U'}} = u^n = \sqrt{u};$$

ce qui permet d'obtenir aisément l'intégrale générale

$$\frac{1}{\sqrt{U'}} = \sqrt{u}\,(a \log u + b),$$

a et b étant les deux constantes arbitraires. On déduit de là

$$U' = \frac{1}{u(a \log u + b)^2}.$$

Négligeant, comme tout à l'heure, la constante d'intégration, on pourra prendre

$$(7) \qquad U = -\frac{1}{a^2 \log C u} \qquad \text{ou} \qquad U = \frac{\log u}{b^2},$$

suivant que a sera différent de zéro ou égal à zéro. La nouvelle constante C se réduit à l'unité quand b est nul.

5. Ces préliminaires posés, considérons l'invariant $e^{-\theta}\Delta_2\theta$. Lorsqu'on a

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2,$$

le second paramètre différentiel d'une fonction φ est donné par la formule

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right).$$

Si l'on prend pour φ la fonction θ, qui satisfait ici à la relation

$$2e^\theta = \frac{n(n-1)}{u^2},$$

et qu'on remplace $\sqrt{G}$ par sa valeur $(U - V) : \sqrt{U'}$, il viendra

$$\Delta_2\theta = -\frac{2\sqrt{U'}}{U - V}\frac{\partial}{\partial u}\frac{U - V}{u\sqrt{U'}},$$

ce qui peut s'écrire

$$\Delta_2\theta = -\frac{2}{u}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{U-V}{u\sqrt{U'}} = -\frac{2}{u}\left(\frac{U'}{U-V} - \frac{U''}{2U'} - \frac{1}{u}\right).$$

On a donc finalement

$$e^{-\theta}\Delta_2\theta = -\frac{4u}{n(n-1)}\left(\frac{U'}{U-V} - \frac{U''}{2U'} - \frac{1}{u}\right).$$

Nous pourrons, dans la suite, substituer à $e^{-\theta}\Delta_2\theta$ l'expression

$$\varphi = u\left(\frac{U'}{U-V} - \frac{U''}{2U'}\right), \tag{8}$$

qui en dépend linéairement.

La forme analytique de l'invariant $e^{-\theta}\Delta_2\theta$ va nous permettre d'établir le premier des théorèmes que nous avons annoncés plus haut.

6. Théorème. — *Si un élément linéaire est tel que les deux invariants $e^{-\theta}\Delta\theta$ et $e^{-\theta}\Delta_2\theta$ se réduisent à des constantes, cet élément linéaire convient à la fois à des surfaces de révolution et à des spirales.*

En effet, cet élément linéaire est réductible, d'après ce qui précède, à la forme

$$ds^2 = du^2 + \frac{(U-V)^2}{U'}dv^2, \tag{1}$$

la fonction U ayant l'une des expressions (5), (6) et (7) précédemment obtenues.

De plus, l'invariant $e^{-\theta}\Delta_2\theta$ étant constant, la fonction φ se réduit à une constante, ce qui exige qu'il en soit de même de V. Donc déjà l'élément linéaire convient à des surfaces de révolution. Mais, si l'on pose

$$u\left(\frac{U'}{U-V} - \frac{U''}{2U'}\right) = \text{const.} = -(r-1),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{d}{du}\log\frac{U-V}{\sqrt{U'}} = -\frac{r-1}{u},$$

on a, par une intégration immédiate,

$$\frac{U - V}{\sqrt{U'}} = g u^{1-r}.$$

D'après cela, l'élément linéaire (1) devient

$$ds^2 = du^2 + \frac{dv^2}{g^2 u^{2r-2}};$$

il suffit de poser $v = t^r$ pour le ramener à la forme homogène

$$ds^2 = du^2 + \frac{r^2}{g^2}\left(\frac{t}{u}\right)^{2r-2} dt^2.$$

Donc cet élément linéaire convient à des spirales, si toutefois l'équation

$$\frac{U - V}{\sqrt{U'}} = g u^{1-r}$$

s'accorde avec l'une des formules (5), (6) et (7). Or on vérifie aisément qu'elle ne diffère pas de la seconde des formules (6).

7. Nous allons maintenant justifier notre seconde assertion.

Théorème. — *Si un élément linéaire est tel que l'invariant $e^{-\theta}\Delta\theta$ soit constant, mais non l'invariant $e^{-\theta}\Delta_2\theta$, et que le rapport*

$$\frac{\Delta(e^{-\theta}\Delta_2\theta)}{\Theta(e^{-\theta}\Delta_2\theta, \theta)}$$

soit une fonction de $e^{-\theta}\Delta_2\theta$, cet élément linéaire convient à des spirales.

En effet, cet élément linéaire est réductible à la forme

$$ds^2 = du^2 + \frac{(U - V)^2}{U'} dv^2, \tag{1}$$

la fonction U ayant l'une des expressions (5), (6) et (7). Nous avons, de plus, à exprimer que, si l'on pose

$$\varphi = \frac{u U'}{U - V} - \frac{u U''}{2U'}, \tag{8}$$

le rapport

$$\psi = \frac{\Delta\varphi}{\Theta(\varphi, \theta)} \tag{9}$$

est une fonction de φ seulement, θ étant toujours donné par la formule (4), d'où résulte

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = -\frac{2}{u}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial v} = 0.$$

Rappelons les formules qui définissent, quand l'élément linéaire est donné sous la forme (1'), les deux invariants Δ et Θ

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2, \qquad \Theta(\varphi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right).$$

Si l'on a égard aux valeurs des dérivées partielles de θ, et si l'on remplace G par $(U - V)^2 : U'$, on trouvera

$$2\psi = u\,\frac{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \dfrac{U'}{(U-V)^2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}{\dfrac{\sqrt{U'}}{U-V}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}} = u\,\frac{U-V}{\sqrt{U'}}\,\frac{\varphi_u'^2}{\varphi_v'} + u\,\frac{\sqrt{U'}}{U-V}\,\varphi_v'.$$

Telle est l'expression qui ne doit dépendre que de φ.

Remarque préliminaire. — Avant d'aller plus loin, il convient de prouver que la fonction V ne peut plus désormais être supposée constante. En effet, θ ne dépend que de u; si V est constant, φ et par suite $e^{-\theta}\Delta_2\theta$ ne dépendant que de u sont des fonctions de θ. Le déterminant des équations (1)″ et (2)′ de l'article précédent est nul; ces équations ne sont compatibles que si la première se réduit à une identité, c'est-à-dire si $e^{-\theta}\Delta_2\theta$ est constant, hypothèse qui vient d'être étudiée et qui est maintenant exclue.

8. Cela posé, en vue d'exprimer φ_u' et φ_v', faisons

$$R = \frac{uU''}{2U'}; \tag{10}$$

la formule (8) devient

$$\varphi = \frac{uU'}{U-V} - R. \tag{8$'$}$$

On en déduit aisément φ'_u et φ'_v. Si dans les expressions de ces dérivées on remplace $U - V$ par sa valeur

$$(8)'' \qquad U - V = \frac{uU'}{\varphi + R}$$

tirée de l'équation $(8)'$, il vient

$$(11) \qquad \varphi'_v = \frac{V'}{uU'}(\varphi + R)^2, \qquad \varphi'_u = -\frac{M}{u},$$

en posant, pour abréger,

$$(12) \qquad M = (\varphi + R)^2 - (2R + 1)(\varphi + R) + uR'.$$

Nous pouvons maintenant, grâce à ces formules et à la relation $(8)''$, exprimer 2ψ par une somme de termes où ne figurera plus $U - V$. On trouve ainsi

$$(9)' \quad 2\psi = \frac{uU'\sqrt{U'}}{V'(\varphi + R)^3}[(\varphi + R)^2 - (2R + 1)(\varphi + R) + uR']^2 + \frac{V'}{uU'\sqrt{U'}}(\varphi + R)^3.$$

Il est avantageux d'introduire φ dans l'expression de ψ, parce que, devant égaler à zéro le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

nous pourrons, dans le calcul des dérivées partielles de ψ, regarder φ comme constant, ce qui simplifie. On a immédiatement

$$2\frac{\partial\psi}{\partial u} = \left[\frac{V'(\varphi + R)^3}{uU'\sqrt{U'}} - \frac{uU'\sqrt{U'}M^2}{V'(\varphi + R)^3}\right]\left[\frac{3R'}{\varphi + R} - \frac{(uU'\sqrt{U'})'}{uU'\sqrt{U'}}\right] + 2(uR'' - 2RR')\frac{uU'\sqrt{U'}M}{V'(\varphi + R)^3},$$

$$2\frac{\partial\psi}{\partial v} = \left[\frac{V'(\varphi + R)^3}{uU'\sqrt{U'}} - \frac{uU'\sqrt{U'}M^2}{V'(\varphi + R)^3}\right]\frac{V''}{V'}.$$

Je dis que la différence $uR'' - 2RR'$ est nulle. Posons en effet $\sqrt{U'} = e^\sigma$; l'équation $(2)'$ devient

$$u^2(\sigma'^2 - \sigma'') = n(n - 1).$$

La définition de R donne

$$R = u\sigma';$$

d'où, tirant σ', σ'' et substituant dans l'équation précédente, on déduit

$$R^2 + R - uR' = n(n-1).$$

Il n'y a plus qu'à différentier pour trouver

$$2RR' - uR'' = 0.$$

Ainsi les deux dérivées partielles de ψ ont un facteur commun. Si on les substitue, ainsi que les expressions (11) de φ'_u et de φ'_v dans le déterminant fonctionnel qu'il s'agit d'annuler, on obtient l'équation du problème

$$(13)\quad \left[\frac{V'(\varphi+R)^3}{uU'\sqrt{U'}} - \frac{uU'\sqrt{U'}M^2}{V'(\varphi+R)^3}\right]\left\{\frac{MU'V''}{V'} + \left[\frac{3R'}{\varphi+R} - \frac{(uU'\sqrt{U'})'}{uU'\sqrt{U'}}\right]V'(\varphi+R)^2\right\} = 0.$$

Son premier membre est un produit de deux facteurs. Mais je dis que le premier ne peut pas être supposé nul. En effet, il se décompose lui-même en deux autres qui ne diffèrent que par le signe de $\sqrt{U'}$. Si l'on égale l'un de ces facteurs à zéro, on trouve

$$uU'\sqrt{U'}M - V'(\varphi+R)^3 = 0,$$

ou, en ayant égard aux formules $(8)'$ et (12),

$$(U-V)[R'(U-V)^2 - (2R+1)(U-V)U' + uU'^2] - V'uU'\sqrt{U'} = 0.$$

Or si l'on donne à la lettre V, qui peut être prise pour variable indépendante (en vertu de la remarque faite au début), la succession des valeurs variables de la fonction U, on arrive à cette contradiction, que la dérivée V' serait identiquement nulle.

En conséquence, nous n'avons plus à nous occuper que de l'équation

$$(13)'\quad \frac{MU'V''}{V'} + \left[\frac{3R'}{\varphi+R} - \frac{(uU'\sqrt{U'})'}{uU'\sqrt{U'}}\right]V'(\varphi+R)^2 = 0.$$

Nous devons en tirer la fonction inconnue V, sachant que U a l'une des formes (5), (6) et (7). Pour y arriver, il convient de faire deux hypothèses, $R' = 0$ et $R' \neq 0$.

9. Première hypothèse. — La fonction R′ est supposée nulle; c'est-à-dire que l'on a

$$R = \frac{uU''}{2U'} = \text{const.} = -n, \qquad \frac{U''}{U'} = -\frac{2n}{u}.$$

On tire de là immédiatement

$$(14) \qquad U' = \frac{1}{c^2 u^{2n}}, \qquad uU'\sqrt{U'} = \frac{1}{c^3 u^{3n-1}},$$

et, en vertu des formules (8)′ et (12),

$$\varphi + R = \varphi - n = \frac{uU'}{U - V}, \qquad M = \frac{uU'[(2n-1)(U-V) + uU']}{(U-V)^2}.$$

En conséquence, l'équation (13)′ devient

$$(15) \qquad V''[(2n-1)(U-V) + uU'] + (3n-1)V'^2 = 0,$$

d'où trois cas à distinguer : 1° $V'' \neq 0$ avec $2n - 1 \neq 0$; 2° $V'' \neq 0$ avec $2n - 1 = 0$; 3° $V'' = 0$.

Premier cas. — $V'' \neq 0$, $2n - 1 \neq 0$. L'équation (15) peut s'écrire

$$(2n-1)U + uU' + (3n-1)\frac{V'^2}{V''} - (2n-1)V = 0.$$

Les termes en u et les termes en v sont séparément constants. On peut même supposer les deux groupes nuls

$$\frac{U'}{U} + \frac{2n-1}{u} = 0, \qquad \frac{V''}{V'^2} = \frac{3n-1}{2n-1}\,\frac{1}{V},$$

à condition d'augmenter U et V d'une même constante qui n'influe pas sur la différence U — V. Les équations ainsi obtenues s'intègrent facilement. Si l'on néglige la constante arbitraire qui s'ajoute à v, on trouve

$$U = A u^{1-2n}, \qquad V = B v^{\frac{1-2n}{n}};$$

le premier de ces résultats s'accorde avec la seconde des équations (6). Avec ces valeurs de U et de V, l'élément linéaire (1) devient

$$ds^2 = du^2 + \frac{u^{2n}}{(1-2n)A}\left(A u^{1-2n} - B v^{\frac{1-2n}{n}}\right)^2 dv^2$$

et l'on voit qu'il suffit de poser $v = t^n$ pour lui faire acquérir la forme homogène

$$ds^2 = du^2 + \frac{n^2}{(1-2n)A}(A u^{1-2n} - B t^{1-2n})^2 u^{2n} t^{2n-2} dt^2, \tag{16}$$

ce qui montre qu'il convient à des spirales.

Deuxième cas. — $V'' \neq 0$, $2n - 1 = 0$. L'équation (15) se réduit à

$$\frac{V'^2}{2V''} + u U' = 0$$

et donne évidemment

$$u U' = -\frac{V'^2}{2V''} = \text{const.} = n.$$

On déduit de là, en remplaçant $v - v_0$ par v,

$$V = \log B v^{2n}, \qquad U = \log A u^n,$$

résultats dont le dernier s'accorde avec la seconde des formules (7). L'élément linéaire devient alors

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{n}\left(\log \frac{A u^n}{B v^{2n}}\right)^2 dv^2,$$

ou, en posant $v = \sqrt{t}$, $A : B = C^n$,

$$ds^2 = du^2 + \frac{n}{4}\left(\log C \frac{u}{t}\right)^2 \frac{u}{t} dt^2. \tag{17}$$

Étant homogène et de degré zéro, cet élément linéaire convient à des spirales.

Troisième cas. — $V'' = 0$. L'équation (15) exige seulement

$$n = \tfrac{1}{3}.$$

L'équation (14) donne alors

$$U' = A u^{-\frac{2}{3}}.$$

On pourra donc, puisque $V'' = 0$, prendre

$$U - V = 3\left(A u^{\frac{1}{3}} - B v\right),$$

ce qui s'accorde, quant à la détermination de U, avec la première des formules (6). L'élément linéaire (1) devient alors

$$ds^2 = du^2 + 9\frac{u^{\frac{2}{3}}}{A}\left(A u^{\frac{1}{3}} - B v\right)^2 dv^2,$$

ou, en faisant $v = \sqrt[3]{t}$,

$$ds^2 = du^2 + \frac{\left(A u^{\frac{1}{3}} - B t^{\frac{1}{3}}\right)^2}{A} u^{\frac{2}{3}} t^{\ \frac{4}{3}} dt^2; \tag{18}$$

il est homogène et de degré zéro, comme les deux précédents. Il convient donc à des spirales.

Ainsi il est prouvé que, dans l'hypothèse $R' = 0$, l'équation (13)′ ne fournit que des éléments linéaires de surfaces spirales. La forme (17) est une dégénérescence du type (16); la forme (18) en est un cas particulier.

10. Seconde hypothèse. — Faisons maintenant l'hypothèse $R' \neq 0$. Si l'on tient compte des relations (12) et (8)′, l'équation (13)′ pourra s'écrire ainsi

$$\begin{aligned}\frac{V''}{V'^2}&[R'(U - V)^2 - (2R + 1)(U - V)U' + uU'^2] \\ &+ 3R'\left[U - V - \frac{uU'\left(uU'\sqrt{U'}\right)'}{3R'uU'\sqrt{U'}}\right] = 0,\end{aligned}$$

ou encore, eu égard à la définition de R,

$$\left\{\begin{aligned}\frac{V''}{V'^2}&[R'(U - V)^2 - (2R + 1)(U - V)U' + uU'^2] \\ &+ 3R'\left[U - \frac{(3R + 1)U'}{3R'} - V\right] = 0.\end{aligned}\right. \tag{19}$$

Dans cette équation, nous allons substituer celles des expressions (5), (6) et (7) de U qui n'annulent pas R′, savoir

$$U = \frac{1}{(1 - 2n)a(au^{2n-1} + b)} \qquad [(2n - 1)ab \neq 0]; \tag{5}$$

$$U = -\frac{1}{a^2 \log cu} \qquad (ac \neq 0). \tag{7}$$

Substituons d'abord la valeur (5) qui donne

$$R = \frac{u U''}{2 U'} = -(2n-1)^2 ab U - n, \qquad R' = -(2n-1)^2 ab U';$$

l'équation (19) devient

$$\frac{V''}{V'^2}[(2n-1)^2 ab(U^2 - V^2) + (2n-1)(U - V) + u U'] \\ - 3(2n-1)^2 ab\left[\frac{1-3n}{3(2n-1)^2 ab} - V\right] = 0$$

ou, en tenant compte de la formule (5),

$$(20) \quad \frac{VV''}{V'^2}[(2n-1)abV + 1] - 3(2n-1)ab\left[V - \frac{1-3n}{3(2n-1)^2 ab}\right] = 0.$$

Il faut ici distinguer deux cas suivant que $3n - 2$ est égal à zéro ou différent de zéro.

Dans le premier cas, les deux termes de l'équation contiennent en facteur le même binôme linéaire en V. La solution correspondante doit être écartée, parce que V serait constant; et il reste

$$\frac{VV''}{V'^2} = 3.$$

Cette équation donne, en négligeant la constante arbitraire qui s'ajoute à v,

$$V = \frac{c}{\sqrt{v}}.$$

D'autre part, puisque $n = \frac{2}{3}$, on a

$$U = \frac{-3}{a\left(au^{\frac{1}{3}} + b\right)};$$

l'élément linéaire (1) devient alors

$$ds^2 = du^2 + \left[\frac{3\sqrt{v}}{a} + c\left(au^{\frac{1}{3}} + b\right)\right]^2 u^{\frac{2}{3}} \frac{dv^2}{v};$$

il n'y a plus qu'à poser

$$\frac{3\sqrt{v}}{a} + bc = -act^{\frac{1}{3}}$$

pour le mettre sous la forme homogène

$$ds^2 = du^2 + \frac{4a^6c^4}{81}\left(u^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{3}}\right)^2 u^{\frac{2}{3}} t^{-\frac{4}{3}} dt^2,$$

ce qui prouve bien qu'il convient à des spirales.

Soit maintenant $3n - 2 \neq 0$. Pour intégrer l'équation (20), nous poserons

$$V' = V_1, \qquad V'' = V_1 \frac{dV_1}{dV} = V_1 V_1',$$

la fonction V étant prise pour nouvelle variable, et il viendra

$$\frac{VV_1'}{V_1}\left[V + \frac{1}{(2n-1)ab}\right] - 3\left[V + \frac{3n-1}{3(2n-1)^2ab}\right] = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$(21) \qquad \frac{V_1'}{V_1} = \frac{3V + mh}{V(V+h)},$$

en faisant, pour abréger,

$$h = \frac{1}{(2n-1)ab}, \qquad m = \frac{3n-1}{2n-1}.$$

L'équation (21) intégrée donne, avec une constante arbitraire C,

$$CV_1 = C\frac{dV}{dv} = V^m(V+h)^{3-m},$$

d'où l'on déduit

$$dv = CV^{-3}\left(1 + \frac{h}{V}\right)^{m-3} dV,$$

ou, en désignant par w l'inverse de V,

$$dv = -cw(hw+1)^{m-3}\,dw.$$

Si dans l'élément linéaire on substitue la valeur (3) de U et cette expression de du, il vient

$$ds^2 = du^2 + c^2 u^{2-2n}\left[b(hv+1) + au^{2n-1}\right]^2 (hv+1)^{\frac{6n-4}{1-2n}} dv^2;$$

il n'y a plus qu'à poser

$$b(hv+1) = -at^{2n-1}$$

pour arriver à la forme homogène et du degré zéro

$$(22) \qquad ds^2 = du^2 + A^2(u^{2n-1} - t^{2n-1})^2 u^{2-n2} t^{-2n}\, dt^2,$$

ce qui prouve que l'élément linéaire convient encore à des spirales. Il rentre d'ailleurs visiblement dans le type (16).

Substituons enfin dans l'équation (19) la valeur

$$(7) \qquad U = -\frac{1}{a^2 \log cu} \qquad (ac \neq 0),$$

qui donne, par un calcul facile,

$$R = \frac{u U''}{2U'} = -\frac{1}{2} + a^2 U, \qquad R' = a^2 U'.$$

L'équation proposée devient

$$\frac{V''}{V'^2}\left[-a^2(U^2 - V^2) + uU'\right] - 3a^2\left(V - \frac{1}{6a^2}\right) = 0$$

ou, en tenant compte de l'équation (7) qui donne $uU' = a^2 U^2$,

$$(23) \qquad \frac{V''}{V'^2} = \frac{3}{V} - \frac{1}{2a^2 V^2}.$$

Prenant pour nouvelle variable la fonction V, il vient

$$\frac{1}{V'}\frac{dV'}{dV} = \frac{3}{V} - \frac{1}{2a^2 V},$$

d'où l'on déduit, en intégrant et désignant par γ une constante arbitraire,

$$\gamma V' = \gamma \frac{dV}{dv} = V^3 e^{\frac{1}{2a^2 V}}.$$

Soit w l'inverse de V; nous aurons

$$dv = -\gamma w e^{-\frac{w}{2a^2}} dw.$$

Si l'on porte cette expression de dv ainsi que la valeur (7) de U dans l'élément linéaire, on trouve

$$ds^2 = du^2 + a^2\gamma^2\left(\frac{w}{a^2} + \log cu\right)^2 u e^{-\frac{w}{2a^2}} dw^2,$$

ou bien, en posant $w = -a^2 \log ct$,

$$(24) \qquad ds^2 = du^2 + a^6\gamma^2 c\left(\log\frac{u}{t}\right)^2 \frac{u}{t} dt^2.$$

Cet élément linéaire, étant homogène et de degré zéro, convient à des spirales. Il ne diffère pas d'ailleurs de celui que représente la formule (17).

Ainsi se trouve établi le théorème énoncé au n° 7. En le rapprochant de celui qui le précède (n° 6) et des résultats obtenus au début, on a la démonstration complète de la règle (n° 3) qui fait connaître les caractères spécifiques des surfaces applicables sur les spirales.

(*A suivre.*)