PAUL PAINLEVÉ

Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 9 (1892), p. 101-144
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1892_3_9__101_0>

MÉMOIRE

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

(SUITE),

PAR M. PAUL PAINLEVÉ,

CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

4. Les équations canoniques que nous avons introduites dans le paragraphe précédent sont commodes pour certains calculs, parce que trois termes sont nuls dans le coefficient différentiel. Mais elles présentent plusieurs désavantages : une infinité de ces formes réduites correspondent à la même classe d'équations

$$y' = \mathrm{R}[y, (x)]. \tag{1}$$

Les invariants qu'elles définissent dépendent de deux constantes arbitraires, introduites par les deux quadratures qui figurent dans la substitution

$$y = \frac{\mathrm{H}\mathrm{Y} + \mathrm{H}_1}{\mathrm{K}\mathrm{Y} + \mathrm{K}_1}, \qquad x = \varphi(\mathrm{X}). \tag{2}$$

Supposons, par exemple, qu'on étudie une propriété qui soit caractéristique d'une classe d'équations (1). L'équation canonique de cette classe dépend de deux constantes arbitraires B_0 et h, et cette propriété se traduit par des relations différentielles entre les I, J, X, dont l'intégrale générale comporte ces deux constantes. C'est ainsi (pour fixer les idées) qu'une infinité d'équations de la forme

$$\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} = \mathrm{Y}^3 + \mathrm{J}(\mathrm{X})$$

appartiennent à la même classe, à savoir les équations

$$\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} = \mathrm{Y}^3 + \mathrm{B}_0^3 j(\mathrm{B}_0^2 \mathrm{X} + h).$$

Une propriété, caractéristique d'une classe de ces équations, se traduira donc par une relation

$$J = B_0^3 j(B_0^2 X + h),$$

j étant une fonction déterminée, ou encore par une équation différentielle

$$f\left(\frac{d^2J}{dX^2}, \frac{dJ}{dX}, J\right) = 0. \tag{3}$$

Cette équation est d'une forme particulière; elle reste inaltérée si l'on substitue $\frac{Y}{B_0}$ à Y et $(B_0^2 X + h)$ à X. Or, les expressions $\frac{J'^3}{J^5}, \frac{J'J''}{J^4}$ gardent la même valeur dans cette substitution; posons donc

$$\frac{J'^3}{J^5} = u, \qquad \frac{J'J''}{J^4} = v,$$

et exprimons J′ et J″ en u et v dans (3); la relation résolue par rapport à v devient

$$v = F(u, J);$$

elle doit rester la même si l'on change J en $B_0^3 J$; par suite, F est indépendant de J, et la relation (3) s'écrit

$$\frac{J''J'}{J^4} = F\left(\frac{J'^3}{J^5}\right). \tag{3'}$$

Si l'on pose $J'^3 = r$, $J^5 = t$, l'équation (3′), comme le remarque M. Appell, s'intègre par quadratures. On peut poser encore $\frac{J'^3}{J^5} = u$; il vient

$$\frac{dJ}{J} = 3F(u) - 5u.$$

Les quantités $\frac{J'J''}{J^4}, \frac{J'^5}{J^3}$, sont elles-mêmes des invariants des équations de la classe, et s'expriment sans constante ni quadrature à l'aide des coefficients de ces équations. La propriété caractéristique de la classe se traduit par une relation en termes finis entre ces deux invariants. Cette relation connue, l'équation canonique s'obtient par deux quadratures.

N'est-il pas possible de trouver des formes réduites où n'interviennent que des quantités telles que ces deux derniers invariants, qui ne comportent, par conséquent, ni constantes ni intégrations? Il suffit pour cela de définir des équations canoniques telles que la réduction d'une équation donnée à la forme canonique ne se puisse effectuer que d'une seule façon (ou d'un nombre fini de façons). Les équations canoniques d'une classe donnée seront, par le fait même, en nombre fini : la réduction s'opérera algébriquement.

Ces nouvelles formes réduites présenteront un autre avantage. Quand on a reconnu qu'une des équations canoniques introduites plus haut jouit d'une certaine propriété, par exemple est intégrable, on ne peut revenir à l'équation primitive (1) que par deux quadratures, qui souvent sont inutiles et s'éliminent dans le calcul. Par exemple, nous avons montré que les équations (1), qui admettent un groupe continu de substitutions (2), se ramènent, par deux quadratures, à une équation à coefficients constants. Leur intégration semble donc entraîner trois quadratures; en réalité, deux suffisent dans tous les cas, comme nous le verrons plus loin.

De même, cherchons à reconnaître sur une équation canonique (5), si l'intégrale générale n'admet que n valeurs autour des points critiques mobiles. Quand il en est ainsi, l'équation se ramène à une équation de Riccati. Mais, si nous repassons à l'équation (1) primitive, nous obtenons les coefficients de l'équation de Riccati correspondante à l'aide de deux quadratures. Or, nous savons que ces coefficients se calculent algébriquement. Ces exemples suffisent à mettre en évidence la nécessité d'éliminer ces quadratures parasites et justifient l'introduction des nouvelles formes canoniques.

De telles formes se peuvent définir d'une infinité de manières. Nous choisirons la suivante, dont l'utilité apparaîtra quand nous traiterons les problèmes que nous avons en vue dans ce Chapitre.

Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, si les deux équations

$$(1) \qquad y' = \frac{P[y, (x)]}{Q[y, (x)]},$$

$$(1') \qquad y'_1 = \frac{P_1[y_1, (x_1)]}{Q_1[y_1, (x_1)]}$$

sont de la même classe, les valeurs de y et de y_1 qui rendent infinies $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dy_1}{dx_1}$, se correspondent par la substitution

$$y = \frac{hy_1 + h_1}{ky_1 + k_1}, \qquad x = \varphi(x_1).$$

Cette substitution conserve le nombre et la multiplicité des racines des équations $Q = 0$, $Q_1 = 0$. Dans le cas particulier où $-\frac{k_1}{k}$ est une racine d'ordre λ de Q_1, une racine de Q d'ordre de λ est infinie : Q est de degré $\nu - \lambda - 2$.

Ceci posé, nous décomposerons les équations (1) en trois groupes :

Premier groupe. — Le dénominateur Q, de degré $\nu - 2$, a au moins trois racines distinctes.

Servons-nous de la transformation

$$y = \frac{h(x)\,Y + h_1}{k(x)\,Y + k_1},$$

de façon que les valeurs de Y qui correspondent à trois racines α, α_1, α_2 de Q soient trois constantes arbitrairement choisies, ∞, 0 et 1, par exemple. Il suffit pour cela de faire

$$h = k\alpha, \qquad h_1 = k_1\alpha_1, \qquad \frac{k_1}{k} = \frac{\alpha_2 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Nous choisissons pour α, α_1, α_2 les trois racines d'ordre de multiplicité le plus élevé

$$\lambda \geqq \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \lambda_i.$$

L'équation (1) devient

$$\frac{dY}{dx} = M(x)\frac{Y^\nu + c_\nu Y^{\nu-1} + \ldots + c_0}{Y^{\lambda_1}(Y-1)^{\lambda_2}(Y^{(\nu-\lambda-\lambda_1-\lambda_2-2)} + \ldots + \gamma_j Y^j + \ldots + \gamma_0)}.$$

Supposons d'abord que tous les c_i, γ_j ne soient pas des constantes, et soit $C(x)$ la première des quantités

$$c_{\nu-1}, \quad c_{\nu-2}, \quad \ldots, \quad c_0, \quad \gamma_{(\nu-\lambda-\lambda_1-\lambda_2-3)}, \quad \ldots, \quad \gamma_0$$

qui dépende de x. En posant $C(x) = X$, on ramène l'équation à une des formes

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dY}{dX} = P(X)\,\frac{(Y^{\nu} + K_{\nu-1}Y^{\nu-1} + \ldots + XY^{i} + J_{i-1}Y^{i-1} + \ldots + J_1 Y + J_0)}{Y^{\lambda_1}(Y-1)^{\lambda_2}(Y^{(\nu-\lambda-\lambda_1-\lambda_2-2)} + \ldots + I_1 Y + I_0)}\\
&\text{ou}\\
&\frac{dY}{dX} = P(X)\,\frac{(Y^{\nu} + K_{\nu-1}Y^{\nu-1} + \ldots + K_1 Y + K_0)}{Y^{\lambda_1}(Y-1)^{\lambda_2}(Y^{(\nu-\lambda-\lambda_1-\lambda-2)} + \ldots + L_{i+1}Y^{i+1} + XY^{i} + I_{i-1}Y^{i-1} + \ldots + I_0)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les K, L sont des constantes, les P, J, I des fonctions de X. Tous ces coefficients, ainsi que $X = C(x)$, s'expriment algébriquement à l'aide des a_i, α_j, $\frac{da_i}{dx}$, $\cdots$ et sont autant d'invariants de l'équation (1). Pour que deux équations soient de la même classe, il faut et il suffit qu'elles soient réductibles à la même forme (4). Si l'on veut encore, il faut et il suffit qu'il existe une fonction $x = \varphi(x_1)$ satisfaisant aux identités obtenues en égalant les invariants de (1) et de (1'), invariants mis en évidence sur l'équation (4). Dans le cas où $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, ces invariants sont au nombre de $2\nu - 4$, d'où $2\nu - 4$ identités. Si λ, λ_1, λ_2 sont quelconques, il faut joindre à ces $(2\nu - 1 - \lambda - \lambda_1 - \lambda_2)$ conditions les $(\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 - 3)$ conditions qui expriment que Q_1 a, comme Q, trois racines d'ordre λ, λ_1, λ_2 respectivement.

La réduction à la forme (4) n'est évidemment possible que d'un nombre fini de manières. Si m désigne le nombre des combinaisons de trois racines de Q, α_i, α_k, α_l, telles que α_i soit d'ordre λ, α_k d'ordre λ_1, α_l d'ordre λ_2, à la classe d'équations (1) considérée correspondent m équations canoniques (4). Les invariants (K, L, I, J, P, X) sont des fonctions algébriques à m valeurs des a_i, α_j, $\frac{da_i}{dx}$, $\cdots$. Ce sont les racines d'une équation de degré m, dont les coefficients dépendent rationnellement des a_i, α_j, $\frac{da_i}{dx}$, $\ldots$, et définissent les invariants absolus de l'équation (1).

C'est ainsi, par exemple, que les équations

$$y' = \frac{a_5 y^5 + a_4 y^4 + \ldots + a_0}{(y-\alpha)(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)}$$

se ramènent à des équations de la forme

$$\frac{dY}{dX} = P(X)\frac{Y^5 + XY^4 + J_3Y^3 + J_2Y^2 + J_1Y + J_0}{Y(Y-1)}$$

ou

$$\frac{dY}{dX} = P(X)\frac{Y^5 + K_4Y^4 + XY^3 + J_2Y^2 + \ldots + J_0}{Y(Y-1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou enfin

$$\frac{dY}{dX} = P(X)\frac{Y^5 + K_4Y^4 + \ldots + K_1Y + X}{Y(Y-1)}.$$

Les coefficients de ces équations se calculent aisément à l'aide des a_i, α_j. A une classe de telles équations correspondent six formes réduites (4).

Les équations (4) ne sauraient admettre de groupe continu de transformation (2); autrement la réduction de (1) à une forme (4) s'effectuerait d'une infinité de manières.

Mais cette réduction suppose que dans l'équation en Y et x les coefficients c_i, γ_j ne soient pas tous constants. Si l'on se trouve dans ce cas exceptionnel, en posant

$$dX = M(x)\,dx,$$

on ramène l'équation à avoir ses coefficients constants.

Ceci nous montre que l'équation (1) admet alors un groupe continu de substitutions (2), et, de plus, qu'elle s'intègre à l'aide de deux quadratures portant respectivement sur une fonction de x et une fonction de Y.

Deuxième groupe. — Le dénominateur $Q[y, (x)]$ n'a que deux racines distinctes

$$y' = \frac{P[y, (x)]}{(y-\alpha)^{\lambda}(y-\alpha_1)^{\lambda_1}} \qquad (\lambda + \lambda_1 = \nu - 2,\ \lambda \geqq \lambda_1).$$

En posant

$$y = \frac{\alpha y_1 + \alpha_1}{y_1 + 1},$$

on ramène l'équation à la suivante

$$y_1' = \frac{P_1[y_1, (x)]}{y_1^{\lambda_1}} = M(x)\frac{(y_1^\nu + c_{\nu-1}y_1^{\nu-1} + \ldots + c_0)}{y_1^{\lambda_1}};$$

c_0 est différent de zéro. Faisons ensuite

$$y_1 = AY,$$

et déterminons A de façon que, dans la nouvelle équation, le coefficient de Y^ν soit égal au terme constant du numérateur; il suffit pour cela que

$$A^\nu = c_0.$$

L'équation ainsi obtenue s'écrit

$$\frac{dY}{da} = N(x)\frac{(Y^\nu + D_{\nu-1}Y^{\nu-1} + \ldots + D_1 Y + 1)}{Y^{\lambda_1}}.$$

Soit $C(x)$ le premier des coefficients

$$D_{\nu-1}, \quad D_{\nu-2}, \quad \ldots, \quad D_1$$

qui dépende de x. Si l'on fait $X = C(x)$, il vient

$$(5) \qquad \frac{dY}{dX} = P(X)\frac{(Y^\nu + K_{\nu-1}Y^{\nu-1} + \ldots + K_{i+1}Y^{i+1} + XY^i + J_{i-1}Y^{i-1} + \ldots + J_1 Y + 1)}{Y^{\lambda_1}},$$

les K désignant des constantes, les J des fonctions de X. Ces quantités, ainsi que P et $X(x)$, sont des invariants de (1).

C'est ainsi que l'équation

$$y' = \frac{a_4 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0}{(y-\alpha)(y-\alpha_1)}$$

se ramène à l'une des équations

$$\frac{dY}{dX} = P(X)\frac{Y^4 + XY^3 + J_2 Y^2 + J_1 Y + 1}{Y}$$

ou

$$\frac{dY}{dX} = P(X)\frac{Y^4 + K_3 Y^3 + XY^2 + J_1 Y + 1}{Y},$$

ou enfin

$$\frac{dY}{dX} = P(X)\frac{Y^4 + K_3 Y^3 + K_2 Y^2 + XY + 1}{Y}.$$

De même, l'équation

$$y' = \frac{a_5 y^5 + a_4 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0}{(y-\alpha)^2 (y-\alpha_1)}$$

correspondra à l'une des formes canoniques

$$\frac{dY}{dX} = P(X) \frac{(Y^5 + XY^4 + J_3 Y^3 + \ldots + J_1 Y + 1)}{Y}$$

ou

$$\frac{dY}{dX} = P(X) \frac{(Y^5 + K_4 Y^4 + XY^3 + J_2 Y^2 + \ldots + J_1 Y + 1)}{Y},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou enfin

$$\frac{dY}{dX} = P(X) \frac{(Y^5 + K_4 Y^4 + \ldots + K_2 Y^2 + XY + 1)}{Y}.$$

Cette réduction n'est possible toutefois, comme la précédente, que si les coefficients $D_i(x)$, qui figurent dans l'équation en $\frac{dY}{dx}$, ne sont pas tous constants. Si cette circonstance se présente, une quadrature ramène l'équation (1) à une équation dont les coefficients sont constants. L'équation (1) s'intègre ainsi à l'aide de deux quadratures. En dehors de ce cas, l'équation (1) ne saurait admettre un groupe continu de substitutions (2).

3° *Troisième groupe.* — Le dénominateur n'a qu'une racine distincte (cette racine est alors multiple d'ordre $\nu - 2$)

$$y' = \frac{P[y, (x)]}{(y-\alpha)^{\nu-2}}.$$

En posant

$$y = \alpha + \frac{1}{z},$$

il vient

$$z' = c_\nu z^\nu + c_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + c_0.$$

Faisons ensuite

$$z = t + A,$$

et déterminons A de façon que le coefficient de $t^{\nu-1}$ soit nul dans l'équation en t; il suffit pour cela que

$$A = -\frac{c_{\nu-1}}{\nu c_\nu};$$

alors

$$t' = M(x)(t^\nu + d_{\nu-2}t^{\nu-2} + \ldots + d_0).$$

Posons encore

$$t = BY,$$

B étant choisi de façon que le coefficient de Y^i dans la nouvelle équation soit égal au coefficient de Y^ν; il suffit de prendre

$$B^{\nu-i} = d_i(x),$$

à moins que i ne soit égal à 1, auquel cas B doit vérifier l'égalité

$$-B' + MBd_1 = MB^\nu.$$

Faisons i égal au plus petit des indices *autres que* 1, pour lesquels d_i n'est pas nul. L'équation est ainsi réduite à une des formes

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dY}{dx} = N(x)(Y^\nu + D_{\nu-2}Y^{\nu-2} + \ldots + D_1 Y + 1) \\ \text{ou} \\ \dfrac{dY}{dx} = N(x)(Y^\nu + D_{\nu-2}Y^{\nu-2} + \ldots + Y^i + D_1 Y). \end{array}\right.$$

Ceci suppose que l'équation en t n'appartient pas à la classe

$$\frac{dt}{dx} = N(x)(t^\nu + d_1 t).$$

Cette dernière équation s'intègre, comme on sait, à l'aide de deux quadratures, effectuées successivement sur des fonctions de x. Elle admet un groupe continu de substitutions (2).

Laissons de côté ce cas particulier et revenons aux équations (6). Si tous les coefficients D_j sont des constantes, l'équation se ramène comme précédemment à une équation dont les coefficients sont constants. Sinon, soit $C(x)$ le premier des coefficients

$$D_{\nu-2},\quad D_{\nu-3},\quad \ldots,\quad D_1,$$

qui dépende de x. En faisant $X = C(x)$, l'équation (1) se trouve ramenée à la forme canonique

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{dY}{dX} = P(X)\left(Y^\nu + K_{\nu-2}Y^{\nu-2} + \ldots + K_{j+1}Y^{j+1} + XY^j + J_{j-1}Y^{j-1} + \ldots + J_1 Y + 1\right) \\ \text{ou} \\ \dfrac{dY}{dX} = P(X)\left(Y^\nu + K_{\nu-2}Y^{\nu-2} + \ldots + K_{j+1}Y^{j+1} + XY^j + J_{j-1}Y^{j-1} + \ Y \ + J_1 Y\right), \\ \text{ou enfin} \\ \dfrac{dY}{dX} = P(X)\left(Y^\nu + K_{\nu-2}Y^{\nu-2} + \ldots + K_{i+1}Y^{i+1} + Y^i + XY\right). \end{cases}$$

Les K, J, P, $X(x)$ sont des invariants; les K désignent des constantes.

Par exemple, l'équation

$$y' = \frac{a_3 y^3 + a_2 y^2 + \ldots + a_0}{b_1 y + b_0}$$

correspond à la forme canonique

$$(8)\qquad \frac{dY}{dX} = P(X)(Y^3 + XY + 1),$$

à moins toutefois qu'elle n'appartienne aux types exceptionnels

$$(8')\qquad \begin{cases} \dfrac{dY}{dx} = N(x)(Y^3 + KY + 1), \\ \dfrac{dY}{dx} = N(x)(Y^3 + d_1 Y) \end{cases}$$

(K désigne une constante, d_1 une fonction de x).

Comparons ces équations à la forme réduite

$$(9)\qquad \frac{dY_1}{dX_1} = Y_1^3 + J_1(X_1).$$

En se servant de l'expression de J_1, donnée au paragraphe précédent, on trouve aussitôt

$$X_1 = \int dX.P(X)e^{2\int dX.X P(X)},$$
$$J_1 = e^{-3\int X P(X)\, dX}$$

et inversement, en passant de (8) à (9),

$$X = -\frac{1}{3} J'_1 J_1^{-\frac{5}{3}},$$

$$\frac{1}{P(X)} = \frac{5}{9}\left(\frac{J'^3_1}{J_1^5}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\left(\frac{J''^3_1}{J_1^7}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Comme nous l'avons remarqué, $\frac{J'^3_1}{J_1^5}$, $\frac{J''^3_1}{J_1^7}$ sont des invariants absolus de (8) qui s'expriment algébriquement à l'aide des a_i, b_j, $\frac{da_i}{dx}$, ... Le premier type exceptionnel (8′) correspond au cas où J_1 est, soit constant (mais différent de zéro), soit égal à $(B_0 X_1 + h)^{-\frac{3}{2}}$; le second type (8′) correspondra au cas où J est nul.

De même, l'équation la plus générale, telle que

$$y' = \frac{a_4 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0}{(y-\alpha)^2},$$

se ramène à l'équation canonique

$$\frac{dY}{dX} = P(X)(Y^4 + XY^2 + JY + 1)$$

ou

$$\frac{dY}{dX} = P(X)(Y^4 + KY^2 + XY + 1),$$

en laissant de côté les types exceptionnels.

Remarquons que les formes de réduction (7) conviennent aux équations des deux premiers groupes, et les formes (5) aux équations du premier.

Les observations faites au sujet des coefficients invariants des équations (4) s'appliquent aux équations (5) et (7). Il serait facile, d'ailleurs, d'introduire d'autres formes canoniques où figureraient seulement des invariants absolus, fonctions rationnelles des a_i, b_j, $\frac{da_i}{dx}$, ... Mais ces équations seraient peu avantageuses pour le calcul.

Les équations (7), pas plus que les équations (5) et (4), ne sauraient admettre un groupe continu de transformations (2).

En définitive, nous venons de mettre en évidence des formes réduites des équations (1), telles que les équations canoniques d'une même classe soient en nombre limité.

Les substitutions (2) qui permettent de ramener une équation (1) à sa forme réduite sont également en nombre limité, et s'obtiennent algébriquement. Les seules équations (1), pour lesquelles il n'existe pas de pareilles formes canoniques, sont celles qui admettent un groupe continu de substitutions (2). Une telle substitution, qu'on détermine algébriquement, ramène alors l'équation à un des types

$$\frac{dY}{dx} = N(x)\,R(Y), \qquad \frac{dY}{dx} = N(x)\,Y^{\nu} + P(x)\,Y.$$

Dans le premier cas, l'équation s'intègre à l'aide de deux quadratures, portant respectivement sur deux fonctions de x et de Y. Dans le second cas, elle s'intègre à l'aide de deux quadratures successives effectuées sur des fonctions de x. L'équation de Riccati fait exception à ce théorème.

Nous appellerons *formes canoniques* ou *réduites de première espèce*, les formes introduites au n° 2, et *formes de seconde espèce* celles dont nous venons de parler.

On peut se servir bien aisément de ces dernières pour mettre en évidence des cas d'intégrabilité des équations (1). Je me borne à indiquer ici la nature générale des questions qu'on se trouve amené ainsi à résoudre.

Nous laissons de côté les équations admettant un groupe continu de substitutions (2), équations que nous savons intégrer, et nous cherchons à déterminer si l'on peut passer, à l'aide d'une substitution

$$y = \frac{h(x_1)\,y_1 + h_1}{k(x_1)\,y_1 + k_1}, \qquad x = \varphi(x_1),$$

d'une équation (1) donnée

$$\frac{dy}{dx} = R[y, (x)]$$

à une équation (1')

$$\frac{dy_1}{dx_1} = R_1[y_1, (x_1)]$$

qui jouit de certaines propriétés, par exemple est intégrable.

On reconnaît toujours s'il en est ainsi à l'aide d'opérations purement algébriques; mais le calcul des substitutions (2) elles-mêmes est de nature différente suivant les circonstances. Tout d'abord, si l'équation (1)′ est elle-même numériquement donnée, il n'existe qu'un nombre fini de substitutions (2) et elles s'obtiennent algébriquement. De même, si les coefficients de (1)′ dépendent explicitement de constantes, il suffit de ramener (1) et (1)′ à la forme canonique et de vérifier si les deux équations coïncident pour un choix convenable des constantes.

Mais dans l'hypothèse la plus générale, les a_i^1, b_j^1 satisfont à certaines relations, différentielles ou non, qui définissent les a_i, b_j à l'aide de fonctions et de constantes arbitraires. La réduction de (1)′ à la forme canonique présente alors des difficultés en ce qui concerne le changement de la variable x_1 en X_1. Mais il est toujours aisé de ramener les équations (1)′ par une substitution

$$y_1 = \frac{h(x_1)Y_1 + h_1(x_1)}{k(x_1)Y_1 + k_1(x_1)}$$

à une forme qui se déduit de la forme canonique par le seul changement de X_1 en x_1 :

$$(\alpha) \qquad \frac{dY_1}{dx_1} = \rho[Y_1, (x_1)].$$

Supposons donc les équations (1)′ données sous cette forme, et réduisons (1) à l'équation canonique

$$(\beta) \qquad \frac{dY}{dX} = R[Y, (X)].$$

Pour que (β) soit de la même classe qu'une équation (α), il faut et il suffit qu'il existe une fonction

$$X = \psi(x_1)$$

telle que la substitution de x_1 à X fasse coïncider l'équation (β) avec une des équations (α). Si les équations (α) qui appartiennent à la même classe sont en nombre limité, il ne saurait exister qu'un nombre limité de fonctions $\psi(x_1)$ et elles se déterminent algébriquement.

Mais il est possible qu'une infinité d'équations (α) soient de la même classe. Ces équations se déduisent d'une même équation canonique par le changement de X_1 en x_1

$$X_1 = \psi_1(x_1);$$

ψ_1 est une fonction arbitraire ou satisfait à une relation différentielle plus ou moins compliquée. Dans le premier cas, l'équation (β) doit coïncider avec une des équations (α); dans le second, $X = \psi(x_1)$ est l'intégrale d'une équation différentielle.

Pour éclaircir cette difficulté par un exemple, prenons pour équations (1)′ toutes les équations

$$(\gamma) \qquad \frac{dY}{dx_1} = \frac{A(x_1)}{Y}(Y^4 + DY^2 + 1),$$

dont les coefficients satisfont à la relation

$$1 = \frac{A}{x_1}(x_1^4 + Dx_1^2 + 1).$$

Ces équations, qui se trouvent mises sous la forme (β), se ramènent, par le changement de la fonction $Y^2 = z$, à une équation de Riccati, et comme elles admettent l'intégrale particulière $Y = x_1$, elles s'intègrent par quadratures. Pour qu'une équation (1) soit de la même classe qu'une des équations (γ), il faut d'abord que, une fois réduite, elle s'écrive

$$(\delta) \qquad \frac{dY}{dX} = \frac{P(X)}{Y}(Y^4 + JY^2 + 1).$$

Effectuons alors le changement de variable $X = \psi(x_1)$, il vient

$$\frac{dY}{dx_1} = \frac{dX}{dx_1}\frac{P(X)}{Y}[Y^4 + J(X)Y^2 + 1];$$

si cette équation coïncide avec une des équations (γ), on a

$$\frac{dx_1}{dX} = \frac{P(X)}{x_1}[x_1^4 + J(X)x_1^2 + 1],$$

c'est-à-dire que $x_1(X)$ doit être une intégrale de (δ).

Nous voyons, en somme, que le calcul des substitutions (2) ne présente de difficultés que dans le cas où une infinité d'équations (β), dépendant de q constantes arbitraires, appartiennent à la même classe. La recherche de la fonction $x_1(X)$ peut alors dépendre de l'intégration d'une équation différentielle d'ordre q. Mais cette singularité ne se rencontre guère dans les exemples qui s'offrent naturellement.

5. Avant de revenir à la question qui nous a conduits à cette étude, j'étendrai en quelques mots la théorie précédente aux équations qui ne sont pas résolues par rapport à y'.

Soit une relation algébrique quelconque entre y et y'

$$(1) \qquad y'^q M_q + y'^{q-1} M_{q-1} + \ldots + y' M_1 + M_0 = 0.$$

Les M_0, M_1, ..., M_q sont des polynômes en y de degré m_0, m_1, ..., m_q et dépendent de x d'une façon quelconque. Effectuons sur cette équation une substitution (2)

$$(2) \qquad y = \frac{h y_1 + h_1}{k y_1 + k_1}, \qquad x = \varphi(x_1);$$

l'équation devient

$$(1)' \quad N_\nu[y_1, (x_1)] y_1'^q + N_{\nu-2}[y_1, (x_1)] y_1'^{q-1} + \ldots + N_{\nu-2q}[y_1, (x_1)] = 0,$$

les N_i désignant des polynômes de degré i en y_1, et ν le plus grand des nombres m_0, $(m_1 + 2)$, $(m_2 + 4)$, ..., $(m_q + 2q)$.

On peut définir pour ces équations, et de bien des manières, des formes réduites analogues à celles que nous avons déjà étudiées dans le cas de $q = 1$: soit, par exemple, en cherchant à annuler trois termes de (1)′ convenablement choisis, comme au n° 2, soit en assujettissant les équations canoniques à des conditions qui les déterminent, pour chaque classe, en nombre fini, comme au n° 4. Je me borne à dire un mot de ces dernières formes, et à étendre aux équations du premier ordre les plus générales les théorèmes établis tout à l'heure sur les équations qui admettent un groupe continu de substitutions (2).

Les points singuliers de la fonction $y'[y, (x)]$ sont les points $y = \alpha(x)$ où y' est infinie, et les points $y = \beta(x)$ où deux valeurs de y' se confondent. Soit

$$F[y, (x)] = 0, \qquad G[y, (x)] = 0$$

les deux équations qui déterminent respectivement les valeurs $\alpha(x)$, $\beta(x)$, pour l'équation (1) ramenée à sa forme la plus générale (1)'. Si l'on effectue dans (1) une substitution (2), les valeurs singulières α_1, β_1 de la nouvelle équation correspondent par les formules (2) aux α, β. La substitution (2) conserve le nombre et l'ordre de multiplicité des racines de F et de G. Pour certaines transformations, une des quantités α_1, β_1 peut devenir infinie.

Ceci posé, considérons d'abord les équations (1) telles que trois au moins des valeurs α, β soient distinctes. Disposons de la transformation

$$y=\frac{h(x)\mathrm{Y}+h_1(x)}{k(x)\mathrm{Y}+k_1(x)},$$

de manière que les valeurs $\mathrm{Y}=\infty$, $\mathrm{Y}=0$, $\mathrm{Y}=1$ correspondent aux valeurs $y=a$, $y=b$, $y=c$. Nous désignons par a, b, c les trois racines de F et G d'ordre de multiplicité le plus élevé. L'équation devient ainsi

$$\Pi_\nu\left(\frac{d\mathrm{Y}}{dx}\right)^q+\Pi_{\nu-2}\left(\frac{d\mathrm{Y}}{dx}\right)^{q-1}+\ldots+\Pi_{\nu-2q}=0.$$

Si les rapports des coefficients de chaque polynôme Π_i ne sont pas indépendants de x, en égalant un de ces rapports à X, nous sommes conduits à une forme canonique qui répond aux conditions exigées.

Si tous ces rapports sont constants, écrivons l'équation ainsi :

$$\left(\frac{d\mathrm{Y}}{dx}\right)^q+\frac{\mathrm{R}_{q-1}(\mathrm{Y})}{\mathrm{N}_{q-1}(x)}\left(\frac{d\mathrm{Y}}{dx}\right)^{q-1}+\ldots+\frac{\mathrm{R}_0(\mathrm{Y})}{\mathrm{N}_0(x)}=0.$$

Les R_i sont des polynômes en Y dont le terme de degré le plus élevé a pour coefficient l'unité; les N_j sont des fonctions de x. Si je pose

$$\frac{\mathrm{N}_{q-i}^{\frac{1}{i}}}{\mathrm{N}_{q-j}^{\frac{1}{j}}}=\mathrm{X}, \tag{3}$$

le changement de x en X ramène l'équation à une forme canonique invariante. Ceci suppose toutefois que les rapports (3) ne soient pas tous constants.

Au cas contraire, on a

$$\mathrm{N}_{q-i}=k_i\mathrm{N}_{q-1}^i=k_i\mathrm{A}^i(x).$$

Le changement de variable

$$\frac{dx}{A(x)} = dX$$

ramène l'équation à une équation dont les coefficients sont indépendants de X.

Passons au cas où le nombre des valeurs α, β distinctes se réduit à 2. Il ne saurait se réduire davantage, car la fonction multiforme $y'[y, (x)]$, définie par la relation *irréductible* (1), possède au moins deux points critiques β_1, β_2. La transformation

$$y = \frac{\beta_1 z + \beta_2}{z + 1}$$

ramène l'équation à une autre, où la fonction $z'[z, (x)]$ n'a comme points singuliers que $z = 0$ et $z = \infty$. Nous disposons encore de la transformation

$$z = AY, \qquad x = \varphi(X).$$

D'ailleurs, z' se développe suivant les puissances de $z^{\frac{1}{k}}$, k étant un entier. Si l'on pose

$$z^{\frac{1}{k}} = u,$$

il vient

$$\frac{du}{dx} = \frac{c_n u^n + c_{n-1} u^{n-1} + \ldots + c_0}{u^{m^*}},$$

car $\frac{du}{dx}$ ne saurait devenir infini pour d'autres valeurs que $u = 0$, $u = \infty$. Il est permis d'ailleurs de supposer $m^* < n - 2$, sinon on changerait u en $\frac{1}{u}$. Nous retrouvons ainsi une des équations du second groupe ou du troisième groupe, étudiées dans le paragraphe précédent. Une transformation

$$u = BU,$$
$$x = \varphi(X)$$

la rend canonique, à moins qu'elle ne se ramène à une équation à coefficients constants ou qu'elle ne soit de la forme

La fonction z subit la transformation correspondante

$$z = B^k Y,$$
$$x = \varphi(X),$$

et l'équation (1) est ainsi réduite à une équation canonique, les cas exceptés où elle se ramène soit à une équation dont les coefficients sont constants, soit à une équation

$$z' = Cz + D z^{\frac{k'}{k}}.$$

Pour donner un exemple de telles réductions, considérons les équations

$$y'^2 + (a_2 y^2 + a_1 y + a_0) y' + b_4 y^4 + b_3 y^3 + b_2 y^2 + b_1 y + b_0 = 0.$$

Il n'existe pas de valeurs $y = \alpha$ rendant y' infini.

L'équation, résolue par rapport à y', s'écrit

$$y' = -(a_2 y^2 + a_1 y + a_0) \pm \sqrt{R_4[y, (x)]}.$$

Plaçons-nous dans le cas le plus général, où les quatre racines de R_4 sont distinctes, et où le module du radical dépend de x. Une forme canonique de l'équation sera

$$\frac{dY}{dX} = -(A_2 Y^2 + A_1 Y + A_0) \pm \sqrt{P(X) Y (Y-1)(Y-X)}.$$

Les A_2, A_1, A_0, P, X sont des invariants.

Nous venons de mettre ainsi en évidence des formes réduites des équations (1) algébriques en y' et y; mais les procédés que nous avons employés s'étendent sans peine à toutes les équations du premier ordre. Soit

$$y' = F(y, x)$$

une équation du premier ordre, où F désigne une fonction analytique quelconque de y. Représentons par $\alpha(x)$ les valeurs de y qui rendent y' infini ou indéterminé. S'il existe trois valeurs α distinctes, on se sert de la transformation

$$y = \frac{hY + h_1}{kY + k_1}$$

pour rendre ces valeurs égales à ∞, o et 1. On développe alors $\frac{dY}{dx}$ suivant les puissances de $Y - Y_0$, Y_0 étant un point régulier de $\frac{dY}{dx}$,

$$\frac{dY}{dx} = P(x)[(z - z_0)^i + C_{i+1}(z - z_0)^{i+1} + \ldots].$$

Quand tous les C_j ne sont pas constants, on pose, comme plus haut,

$$C_j(x) = X;$$

sinon l'équation se ramène à avoir ses coefficients constants.

Admettons maintenant qu'il n'existe que deux valeurs α distinctes, α_1, α_2. La transformation

$$y = \frac{\alpha_1 z + \alpha_2}{z + 1}$$

rend l'une de ces valeurs nulle, l'autre infinie. On dispose encore de la substitution

$$(4) \qquad z = AY, \qquad x = \varphi(X).$$

D'autre part, faisons $z = e^u$; il vient

$$\frac{dz}{dx} = e^u \frac{du}{dx} = \rho[u, (x)]$$

ou bien

$$\frac{du}{dx} = f[u, (x)] = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \ldots,$$

ρ et f désignant deux fonctions holomorphes de u.

Ajoutons qu'à la transformation (4) correspond la suivante

$$u = U + L.A = U + B, \qquad x = \varphi(X).$$

Disposons de B de manière que, dans le développement de $\frac{dU}{dx}$

$$\frac{dU}{dx} = C_0 + C_1 U + C_2 U^2 + \ldots,$$

le rapport $\frac{C_2}{C_1}$ soit égal à une quantité arbitraire donnée. Il faut, pour cela, que

$$\frac{f''(B)}{f'(B)} = \gamma,$$

si f' et f'' désignent les dérivées $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$, où l'on fait $u = B$. La quantité B une fois déterminée, on écrit

$$\frac{dU}{dx} = P(x)(U^i + D_{i+1}U^{i+1} + \ldots),$$

et l'on pose

$$D_j(x) = X.$$

L'équation en z se trouve ramenée ainsi, par la substitution

$$z = Ye^B, \qquad X = D_j(x),$$

à une forme canonique, en exceptant le cas particulier où elle correspond à une équation dont les coefficients sont constants.

Remarquons toutefois qu'on ne peut calculer B comme nous l'avons fait que si $\frac{f''(B)}{f'(B)}$ est fonction de B. Qu'arrive-t-il quand

$$\frac{f''(u)}{f'(u)} = \gamma(x)\,?$$

Tout d'abord, si $\gamma = 0$, l'équation en u est une équation linéaire; sinon on trouve

$$\frac{du}{dx} = f(u) = d_0 + de^{\gamma u},$$

d_0, d, γ dépendant de x. L'équation en z correspondante est alors

$$\frac{dz}{dx} = d_0 z + dz^{(\gamma+1)} = d_0 z + d_\varkappa z^\delta.$$

Si δ ne dépend pas de x, l'équation s'intègre par quadratures. Au cas contraire, on pose $\delta = X$, et l'on dispose ensuite de A de façon que le coefficient de Y^X dans l'équation réduite soit l'unité, autrement dit que l'on ait

$$\frac{dY}{dX} = J(X) + Y^X.$$

On peut, à l'aide d'une quadrature, ramener la même équation à la suivante

$$\frac{dY}{dX} = P(X)Y^X;$$

et, à l'aide de deux quadratures, à la suivante

$$\frac{dY}{dX} = Y^{Q(X)}.$$

Ces diverses formes mettent en évidence des cas d'intégration.

Pour terminer, il nous reste à examiner le cas où la fonction $y' = F[y, (x)]$ n'admet qu'un point singulier α. La transformation

$$y = \alpha + \frac{1}{z}$$

le rejette à l'infini. Nous disposons encore de la substitution

$$z = AY + B, \qquad x = \varphi(X).$$

Laissons d'abord $x = X$, et développons l'équation en Y

$$\begin{aligned}\frac{A\,dY}{dx} + \frac{dA}{dx}Y + \frac{dB}{dx} &= \rho[AY + B, (x)] \\ &= \rho(B) + \frac{\rho'(B)}{1}AY + \frac{\rho''(B)}{1.2}A^2Y^2 + \ldots \\ &= C_0 + C_1Y + C_2Y^2 + C_3Y^3 + \ldots;\end{aligned}$$

ρ représente une fonction holomorphe de $z = AY + B$; $\rho'(B)$, $\rho''(B)$, ... ses dérivées par rapport à z où l'on fait $z = B$. Déterminons B de façon à annuler le coefficient C_2 de Y^2; il faut pour cela que

$$\rho''(B) = 0.$$

Ceci exige que ρ'' ne soit pas indépendant de z (l'équation serait alors une équation de Riccati), et aussi que ρ'' ne soit pas égal à e^g, g étant une fonction holomorphe de z. Si cette circonstance se présente, on dispose de B de façon que $\frac{C_4 C_2}{C_3}$ soit égal à une constante donnée, ce qui exige que

$$\frac{\rho''\rho^{IV}}{\rho'''^2} = \gamma,$$

ou encore que

$$\frac{g'' + g'^2}{g'^2} = \gamma,$$

$$-\frac{g''}{g'^2} = 1 - \gamma = \delta.$$

Il n'y a d'exception que si $-\frac{g''}{g'^2} \equiv \delta_1$, δ_1 ne dépendant que de x. Si δ_1 n'est pas nul, $g = \frac{1}{\delta_1} \mathrm{L}(mz+n)$; mais, par hypothèse, g est holomorphe. Le seul cas exceptionnel est donc celui où δ_1 est nul. Nous le traiterons dans un instant. Dans le cas général, une fois B calculé, on assujettit A à la condition que le rapport des coefficients de Y^i et Y^j, dans le développement de $\frac{dY}{dx}$, soit égal à l'unité. Quand l'équation en $t = z - \mathrm{B}$ n'est pas de la forme

$$t' = mt + nt^{\nu},$$

la valeur de A se calcule sans quadrature, en prenant i et j différents de 1. La réduction s'achève dès lors sans difficulté en égalant à X le rapport des coefficients de $Y^{i'}$, $Y^{j'}$, à moins que tous ces rapports ne soient constants.

Revenons au cas où l'équation en z s'écrit

$$\frac{dz}{dx} = m + nz + pe^{kz}$$

[c'est le cas où $\delta_1 = g''(z) \equiv 0$]. On fait

$$z = \frac{t}{k};$$

il vient alors

$$\frac{dt}{dx} = d_0 + d_1 t + de^t.$$

On pose ensuite

$$t = \mathrm{Y} + \mathrm{B},$$

et on assujettit B à la condition

$$\frac{d_1}{e^{\mathrm{B}} d} = 1;$$

par suite

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dx} = \mathrm{D}(e^t + t + \mathrm{D}_0);$$

on fait alors $\mathrm{D}_0 = \mathrm{X}$, à moins que D_0 ne soit constant. Si $d_1 = 0$, B ne peut se calculer ainsi, mais l'équation

$$\frac{dt}{dx} = d_0 + de^t$$

se ramène à une équation linéaire en posant $u = e^t$.

En définitive, soit

$$\frac{dy}{dx} = F[y, (x)]$$

une équation du premier ordre, où F représente une fonction analytique quelconque de y et x. Nous venons d'indiquer une méthode pour ramener, à l'aide d'une substitution (2), cette équation à des formes canoniques, c'est-à-dire à des formes dont un nombre limité seulement appartiennent à la même classe.

Les seules équations qui ne soient pas susceptibles d'une telle réduction sont celles qui admettent un groupe continu de substitutions (2). Ces dernières correspondent toutes, par une transformation (2), à des équations à coefficients constants. La seule équation de Riccati mise à part, elles se ramènent, sans quadratures, à l'une des formes

$$\frac{dY}{dX} = M(X)N(Y),$$

$$\frac{dY}{dX} = AY + BY^{\alpha}$$

et, par suite, s'intègrent à l'aide de deux quadratures [1].

6. Nous allons appliquer maintenant ces propriétés de la transformation (2) à la recherche des cas où l'intégrale de l'équation

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = R[y, (x)] = \frac{P[y, (x)]}{Q[y, (x)]}$$

ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles.

Quelle modification apporte dans l'intégrale la substitution

$$(2) \qquad y = \frac{h(x_1)y_1 + h_1}{k(x_1)y_1 + k_1}, \qquad x = \varphi(x_1)?$$

---

[1] La même méthode s'applique à la recherche des équations d'ordre supérieur qu'admettent un groupe continu de transformations de la forme $y = \frac{hy_1 + h_1}{ky_1 + k_1}$, $x = \varphi(x_1)$, le groupe dépendant d'une ou plusieurs constantes arbitraires. Mais c'est là un point que je me réserve de développer ailleurs.

L'intégrale est définie par une relation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} F(y, x) &\equiv y^n + \gamma_{(n-1)} y^{n-1} + \gamma_{(n-2)} y^{n-2} + \ldots + \gamma_1 y + \gamma_0 \\ &\equiv y^n + (\alpha_{n-1}\gamma_i + \beta_{n-1}) y^{n-1} + \ldots \\ &\qquad + \gamma_i y^i + \ldots + (\alpha_1\gamma_i + \beta_1) y + \alpha_0\gamma_i + \beta_0 = 0, \end{aligned}\right.$$

γ_i vérifiant l'équation

$$\frac{d\gamma_i}{dx} = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

Après la substitution, elle devient

$$\begin{gathered}(hy_1 + h_1)^n + (\alpha_{n-1}\gamma_i + \beta_{n-1})(hy_1 + h_1)^{n-1}(ky_1 + k_1) + \ldots \\ + \gamma_i (hy_1 + h_1)^i (ky_1 + k_1)^{n-i} + \ldots + (\alpha_0\gamma_i + \beta_0)(ky_1 + k_1)^n = 0,\end{gathered}$$

ou encore

$$y_1^n + g_{(n-1)} y_1^{n-1} + \ldots + g_i y_1^i + \ldots + g_1 y_1 + g_0 = 0,$$

les g_i étant des fonctions de x_1. On voit que g_i se calcule en fonction de γ_i par les formules

$$g_i = \frac{A\gamma_i + B}{A_1\gamma_i + B_1}, \qquad x = \varphi(x_1);$$

par exemple, si $i = 0$,

$$g_0 = \frac{h_1^n + \beta_{(n-1)} h_1^{n-1} k_1 + \ldots + \beta_1 h_1 k_1^{n-1} + \gamma_0(\alpha_{(n-1)} h_1^{n-1} k_1 + \alpha_{n-2} h_1^{n-2} k_1^2 + \ldots + k_1^n)}{h^n + \beta_{(n-1)} h^{n-1} k + \ldots + \beta h k^{n-1} + \gamma_0(\alpha_{n-1} h^{n-1} k + \alpha_{n-2} h^{n-2} k + \ldots + k^n)},$$

quand on remplace x par $\varphi(x_1)$.

Ceci étant, on peut disposer de la substitution (2) soit pour simplifier l'équation (1), soit pour simplifier *a priori* la forme de l'équation (3). La remarque suivante permet d'introduire des substitutions (2) qui contribuent en même temps à ce double résultat.

Pour fixer les idées, faisons $i = 0$ dans l'équation (3). Elle devient

$$y^n + (\alpha_{n-1}\gamma_0 + \beta_{n-1}) y^{n-1} + (\alpha_{n-2}\gamma_0 + \beta_{n-2}) y^{n-2} + \ldots + (\alpha_1\gamma_0 + \beta_1) y + \gamma_0 = 0,$$

avec

$$\gamma_0' = M\gamma_0^2 + N\gamma_0 + P,$$

ou encore

$$\gamma_0 = \frac{f(x) + C\varphi(x)}{f_1(x) + C\varphi_1(x)}$$

(C désigne une constante).

Admettons que le dénominateur Q de (1) ait une racine $y=0$ d'ordre λ : quand une valeur y d'une intégrale s'annule, λ autres valeurs de la même intégrale s'annulent en même temps. Si donc, pour $x=x_0$, γ_0 s'annule,

$$\gamma_0(x_0)=\frac{f(x_0)+C\varphi(x_0)}{f_1(x_0)+C\varphi_1(x_0)}=0,$$

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\lambda$ s'annulent par le fait même, c'est-à-dire que $\beta_1(x_0)$, $\beta_2(x_0), \ldots, \beta_\lambda(x_0)$ sont nuls quel que soit x_0, donc nuls identiquement. On voit aussitôt que ceci subsiste dans le cas particulier où γ_0 ne dépend pas de C.

De même, quand Q a une racine infinie d'ordre λ (autrement dit quand le degré de Q est inférieur de $\lambda+2$ unités au degré de P), les coefficients $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_{n-\lambda}$ sont nuls : $\gamma_{n-1}, \gamma_{n-2}, \ldots, \gamma_{(n-\lambda)}$ sont indépendants de la constante d'intégration.

Plus généralement, soit $y=a$ une racine d'ordre λ de Q. Écrivons l'équation (3) ainsi

$$\begin{aligned}&y^n+\beta_{n-1}y^{n-1}+\beta_{n-2}y^{n-2}+\ldots\\&\quad+\beta_1 y+\gamma_0(\alpha_{n-1}y^{n-1}+\alpha_{n-2}y^{n-2}+\ldots+\alpha_1 y+1)\equiv \mathrm{H}(y)+\gamma_0\mathrm{K}(y)=0.\end{aligned}$$

La racine $y=a$ doit être racine d'ordre $(\lambda+1)$ de cette équation, quel que soit γ_0. Il faut et il suffit pour cela que

$$\frac{\mathrm{H}(a)}{\mathrm{K}(a)}=\frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{K}'(a)}=\frac{\mathrm{H}''(a)}{\mathrm{K}''(a)}=\ldots=\frac{\mathrm{H}^\lambda(a)}{\mathrm{K}^\lambda(a)},$$

$\mathrm{H}^i(a)$, $\mathrm{K}^i(a)$ désignant des dérivées d'indice i de H et K par rapport à y, où l'on fait $y=a$.

Ces remarques faites, voici comment il convient d'employer la substitution (2).

On commence par rendre respectivement infinie et nulle les deux racines de Q d'indice le plus élevé. On dispose encore de la transformation

$$y=\mathrm{A}\mathrm{Y},\qquad x=\varphi(\mathrm{X}).$$

Si l'équation (1) est une équation donnée, on se sert de cette transformation pour la ramener à sa forme la plus simple, par exemple à l'une des formes canoniques étudiées plus haut. S'il s'agit, au contraire, de déterminer toutes les équations (1) dont le coefficient différentiel est de degré donné et dont l'intégrale générale est définie par une équation (3), on peut diriger le calcul de la même manière, ou encore se servir de la substitution pour simplifier cette équation (3). Quel que soit le procédé adopté, on obtient des conditions où ne figurent que des invariants de (1). Il suffit de remplacer ces invariants par leurs valeurs en fonction des coefficients d'une équation quelconque de la classe, pour avoir les conditions auxquelles doit satisfaire l'équation cherchée la plus générale.

Quand le dénominateur Q de R, dans (1), n'a qu'une racine, on la rejette d'abord à l'infini. On dispose ensuite de la substitution

$$y = AY + B, \qquad x = \varphi(X)$$

pour simplifier, suivant les cas, les équations (1) ou (3).

Nous allons appliquer ces procédés généraux de calcul à plusieurs exemples particuliers.

7. Reprenons, en premier lieu, l'étude des équations

$$y' = R[y, (x)] = \frac{P[y, (x)]}{Q[y, (x)]}, \tag{1}$$

dont l'intégrale générale ne prend que deux valeurs autour des points critiques mobiles.

L'intégrale s'écrit

$$y^2 + (\alpha\gamma_0 + \beta) + \gamma_0 = 0,$$

et l'équation (1), qui lui correspond, a son coefficient différentiel de degré $\nu = 4$ ou $\nu = 3$.

Soit d'abord $\nu = 4$. Le dénominateur Q a ses deux racines distinctes; car si $y = \alpha$ est racine double de Q, trois valeurs d'une intégrale particulière deviennent égales ensemble à α, ce qui est impossible dans le cas actuel. D'une manière générale, *quand l'intégrale d'une équation* (1) *ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, l'ordre de multiplicité des racines de* Q *est au plus égal à n* — 1.

Ramenons donc d'abord l'équation (1) à la forme

$$y' = \frac{a_4 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0}{y}; \tag{1)'$$

l'intégrale vérifie alors l'équation

$$y^2 - \gamma = 0$$

avec

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P,$$

c'est-à-dire que l'équation (1)' doit coïncider avec la suivante

$$2yy' = My^4 + Ny^2 + P.$$

Cette équation, ramenée à la forme canonique de seconde espèce, devient

$$\frac{dY}{dX} = \frac{A(X)(Y^4 + XY^2 + 1)}{Y}.$$

Pour qu'une équation (1) ($\nu = 4$) soit de la classe considérée, il faut et il suffit que, dans sa forme réduite

$$\frac{dY}{dX} = \frac{A(X)(Y^4 + J_3Y^3 + XY^2 + J_1Y + 1)}{Y},$$

les invariants J_1 et J_3 soient nuls. Signalons le cas particulier où le coefficient J_2 de Y^2 serait indépendant de x; l'équation correspondante

$$\frac{dY}{dx} = \frac{A(x)(Y^4 + CY^2 + 1)}{Y}$$

s'intègre par deux quadratures.

Passons aux équations $\nu = 3$. On ramène d'abord l'équation considérée à la suivante

$$y' = a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0,$$

et son intégrale s'écrit

$$y^2 + \alpha y + \gamma_0 = 0.$$

Posons

$$y = z - \frac{\alpha}{2},$$

l'intégrale prend la forme

$$y^2 = \gamma$$

avec

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

L'équation en z s'écrit donc

$$2zz' = Mz^4 + Nz^2 + P,$$

et pour que $\nu = 3$, il faut que le second membre soit divisible par z (donc que P soit nul), ou encore que M soit nul : le second cas se ramène au premier en changeant z en $\frac{1}{z}$, et l'équation étudiée est de l'espèce

$$z' = Az^3 + Bz,$$

équation que nous avons déjà signalée et qui s'intègre par deux quadratures. Dans la forme canonique

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + J,$$

qui lui correspond,

$$J = 0.$$

8. Voici donc traité, bien aisément, un exemple qui n'était pas exempt de difficulté avant l'introduction de la substitution (2). Abordons maintenant l'étude plus compliquée des équations (1) dont l'intégrale générale ne prend que trois valeurs autour des points critiques mobiles.

Le degré ν du coefficient différentiel de (1) peut être alors égal à 3, 4, 5 ou 6. Considérons, en premier lieu, le cas où $\nu = 6$, les quatre racines du dénominateur Q étant distinctes.

Réduisons d'abord l'équation à la forme

$$(2) \qquad y' = \frac{a_6 y^6 + a_5 y^5 + a_4 y^4 + \ldots + a_1 y + a_0}{y(y-1)(y-\alpha)}.$$

L'intégrale s'écrira

$$y^3 + Ay^2 - B\gamma y - \gamma = 0$$

ou

$$\gamma = \frac{y^3 + Ay^2}{By + 1}$$

avec

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P$$

(γ dépend toujours de la constante d'intégration, sinon y ne renfermerait pas de constante).

Les fonctions $A(x)$, $B(x)$ sont liées, de plus, par l'égalité

$$AB + 2(A + B) + 3 = 0,$$

qui exprime que $y = 1$ est racine de Q. L'équation en y doit coïncider avec la suivante :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} 2By(y-1)\left(y - \frac{A}{B}\right)y' = {} & My^6 + 2MAy^5 + y^4(MA^2 + NB + B') \\ & + y^3[N(AB+1) + AB' - BA'] \\ & + y^2(NA + PB^2 - A') + 2PBy + P. \end{aligned}\right.$$

D'où l'on conclut sans peine

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & A = \frac{a_5}{2a_6}, \qquad B = \frac{a_1}{2a_0}, \qquad M = \frac{a_5}{\alpha}, \qquad P = a_1, \\ & N\left(\frac{a_5 a_1}{4a_0 a_6} - 1\right) = \frac{a_1}{a_0}\left(\frac{a_5 a_4}{2a_6} - a_3 + \frac{a_1 a_2}{2a_0}\right) - \frac{a_5^4}{8\alpha a_6^3} - \frac{a_1^4}{8a_0^3}, \end{aligned}\right.$$

avec les conditions

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{a_5}{a_6} = \alpha\frac{a_1}{a_0}, \\ & \frac{a_5 a_1}{a_6 a_0} + 4\left(\frac{a_5}{a_6} + \frac{a_1}{a_0}\right) + 12 = 0, \\ & 2\frac{d}{dx}\left(\frac{a_5 a_1}{a_6 a_0}\right) = \frac{4a_1}{a_0}\left(\frac{a_4 a_5}{a_6} - \frac{a_2 a_1}{a_0}\right) - \frac{a_5^4}{4\alpha a_6^3} + \frac{a_1^4}{4a_0^3}, \\ & \frac{d\alpha}{dx}\left(\frac{3}{4}\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{1}{\alpha}\right) = 2a_3 + \left(\frac{a_5}{2a_6} + \frac{2a_0}{a_1}\right)\left(\frac{a_5^3}{4\alpha a_6^2} - \frac{a_1 a_4}{a_0}\right) + \left(\frac{a_1}{2a_0} + \frac{2a_6}{a_5}\right)\left(\frac{a_1^3}{4a_0^2} - \frac{a_2 a_1}{a_0}\right). \end{aligned}\right.$$

Les coefficients a_i, α de l'équation (2) sont des invariants de l'équation la plus générale de la classe. Nous avons ainsi les $(\nu - 2) = 4$ conditions auxquelles doivent satisfaire les invariants de l'équation (1) $(\nu = 6)$ pour que son intégrale ne prenne que trois valeurs autour des points critiques mobiles. Quand ces conditions sont réalisées, l'équation se ramène par la transformation

$$\gamma = \frac{y^3 + Ay^2}{By + 1}$$

à l'équation

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P,$$

A, B, M, N, P s'exprimant en fonction des invariants de (1) par les formules (4).

Si l'on veut ramener l'équation (2) à une forme canonique de seconde espèce, il convient de distinguer plusieurs cas.

Quand la quatrième racine α de Q dépend de x, on pose

$$X = \alpha(x),$$

et l'équation devient

$$\frac{dY}{dX} = G(X)\frac{(Y^6 + J_5 Y^5 + J_4 Y^4 + \ldots + J_1 Y + J_0)}{Y(Y-1)(Y-X)};$$

les J vérifient les relations obtenues en remplaçant dans les équations (5) α par X, a_i par (GJ_i), $\frac{da_i}{dx}$ par $\frac{d(GJ_i)}{dX}$.

Si α est une constante, les conditions (5) nous montrent que A et B sont constants.

L'équation (2) peut alors s'écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(y^6 + c_5 y^5 + b_4 y^4 + \ldots + b_2 y^2 + c_1 b_0 y + b_0)}{y(y-1)(y-\alpha)};$$

les b sont des fonctions de x, et α, c_1, c_5 des constantes qui vérifient les relations

$$c_5 = \alpha c_1, \qquad c_5 c_1 + 4(c_5 + c_1) + 12 = 0.$$

Les deux autres relations (5) deviennent

$$c_5\alpha + \frac{2b_3}{\frac{c_1 c_5}{4}+1} = \frac{4}{c_1} b_4,$$

$$\frac{2\alpha b_3}{\frac{c_1 c_5}{4}+1} + c_1 b_0 = \frac{4}{c_1} b_2.$$

Si b_0 n'est pas constant, on pose $b_0(x) = X$; si b_0 est constant, on pose $b_2(x) = X$; enfin, si b_0 et b_2 sont constants, b_3 et b_4 le sont également et l'équation est de la même classe qu'une équation à coefficients constants.

Examinons maintenant les équations $\nu = 6$, telles que Q ait des racines multiples : l'ordre de multiplicité ne peut dépasser 2. Supposons d'abord que Q ait une seule racine double, et ramenons l'équation à la forme

$$(2)' \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_6 y^6 + a_5 y^5 + \ldots + a_1 y + a_0}{y(y-1)}.$$

L'intégrale satisfait à la relation

$$y^3 + A y^2 - \gamma = 0$$

avec

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P;$$

de plus, B vérifie la condition

$$3 + 2A = 0 \qquad \text{ou} \qquad A = -\tfrac{3}{2},$$

qui exprime que $y = 1$ est racine de Q; on peut donc poser

$$\gamma = 2y^3 - 3y^2,$$

et l'équation $(2)'$ doit coïncider avec la suivante

$$(3)' \qquad 6y(y-1)y' = 4My^6 - 12My^5 + 9My^4 + 2Ny^3 - 3Ny^2 + P,$$

ce qui exige qu'on ait

$$(4)' \qquad \left\{\begin{aligned} M &= \frac{3a_6}{2}, \\ N &= 3a_3, \\ P &= 6a_0 \end{aligned}\right.$$

avec les conditions

$$(5)' \qquad a_5 = -3a_6 = -\tfrac{4}{3}a_4, \qquad 3a_3 + 2a_2 = 0, \qquad a_1 = 0.$$

Quand ces dernières conditions sont remplies, l'équation se ramène par la transformation

$$\gamma = 2y^3 - 3y^2$$

à l'équation

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

Supposons enfin que Q ait deux racines doubles. Ramenons l'équation à la forme

$$y' = \frac{a_6 y^6 + \ldots + a_1 y + a_0}{y^2}.$$

L'intégrale est donnée par la formule

$$y^3 - \gamma = 0$$

avec

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

L'équation considérée est donc de la forme

$$y^2 y' = a_6 y^6 + a_3 y^3 + a_0.$$

Nous avons énuméré ainsi toutes les équations qui répondent à la question et pour lesquelles $\nu = 6$. Soit maintenant $\nu = 5$: si les trois racines de Q sont distinctes, on peut écrire ainsi l'équation donnée

$$(6) \qquad y' = \frac{b_5 y^5 + b_4 y^4 + \ldots + b_1 y + b_0}{y(y-1)}.$$

Son intégrale satisfait à la relation

$$\gamma = \frac{y^3 + A y^2}{B y + 1}$$

avec la condition

$$AB + 2(A + B) + 3 = 0.$$

L'équation (6) doit donc coïncider avec l'équation (3) calculée précédemment, ce qui ne peut avoir lieu que si $(y - \alpha)$ est en facteur dans les deux membres de (3). S'il en est ainsi, on a

$$\begin{aligned}
a_6 &= b_5,\\
a_5 &= b_4 - \alpha b_5,\\
a_4 &= b_3 - \alpha b_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_1 &= b_0 - \alpha b_1,\\
a_0 &= -\alpha\beta_0,
\end{aligned}$$

et les coefficients a_i satisfont aux relations (5). La première donne

$$\frac{a_5}{a_6} = \alpha \frac{a_1}{a_0},$$

c'est-à-dire

$$\alpha\left(1 + \frac{b_1}{b_0}\right) = 1 + \frac{b_4}{b_5}.$$

En remplaçant dans les trois dernières α et les a_i par leurs valeurs en fonction des b_j, on a les trois conditions nécessaires et suffisantes auxquelles sont assujettis les coefficients *invariants* de (6) pour que l'intégrale soit de la forme voulue. Je me dispense d'écrire ces conditions, qui sont sans intérêt. Deux de ces conditions sont d'espèce différentielle, et renferment l'une la dérivée de

$$\alpha = \frac{1 + \frac{b_4}{b_5}}{1 + \frac{b_1}{b_0}},$$

l'autre la dérivée de

$$\frac{a_1 a_5}{a_0 a_6} = \frac{b_0 b_5 (b_0 b_5 + b_1 b_4)}{(b_0 + b_1)(b_5 + b_4)}.$$

Quand ces conditions sont remplies, l'équation (6) se ramène à l'équation

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P,$$

par la transformation

$$\gamma = \frac{y^3 + A}{By + 1};$$

les A, B, M, N, P sont donnés par les formules (6) à l'aide des a_i, α, par suite en fonction des B_i.

Une remarque importante est la suivante : un calcul pénible vérifierait que $y = \alpha$ est une intégrale de (6); donc

$$\gamma = \frac{\alpha^3 + A}{B\alpha + 1}$$

est une intégrale de l'équation de Riccati, et cette équation s'intègre par quadratures. Mais ceci est évident *a priori :* nous faisons

$$\gamma = f(y, x)$$

dans l'équation de Riccati; elle devient

$$\frac{\partial f}{\partial y} y' = -\frac{\partial f}{\partial x} + Mf^2 + Nf + P.$$

Pour que

$$\gamma_1 = f(y_1, x)$$

soit une intégrale, il faut et il suffit que l'équation précédente soit vérifiée quand on y fait $y = y_1$; or $y = \alpha$ annule à la fois $\frac{\partial f}{\partial y}$ et le second membre de cette équation; donc

$$\gamma = f(\alpha, x)$$

est une intégrale de l'équation de Riccati. C'est là d'ailleurs un fait que nous démontrerons tout à l'heure d'une manière générale. Nous l'avons rencontré déjà dans le cas particulier où $n = 2$, $\nu = 3$.

Admettons maintenant que, ν restant égal à 5, Q ait une racine double. L'équation peut s'écrire

$$(6)' \qquad y' = \frac{b_5 y^5 + b_4 y^4 + \ldots + b_0}{y};$$

l'intégrale doit être de la forme

$$\gamma = y^2(y + A).$$

Nous pourrons toujours changer y en $-\frac{2}{3}Ay$ et poser

$$\gamma = y^2(2y - 3).$$

Si l'on se reporte aux calculs faits pour le cas de $\nu = 6$, on voit que l'équation $(6)'$ doit coïncider avec l'équation $(3)'$, ce qui exige que $(y - 1)$ soit en facteur dans le second membre de $(3)'$ et qu'on ait

$$\begin{aligned} a_6 &= b_5, \\ a_5 &= b_4 - b_5, \\ a_4 &= b_3 - b_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1 &= b_0 - b_1, \\ a_0 &= -b_0. \end{aligned}$$

Aux conditions $(5)'$ correspondent alors les conditions

$$b_4 = -2b_5, \qquad b_3 = \frac{b_5}{4}, \qquad b_2 = \frac{3b_5}{4} - 2b_0, \qquad b_1 = b_0.$$

Quand elles sont remplies, la transformation

$$\gamma = y^2(2y - 3)$$

ramène l'équation $(6)'$ à l'équation de Riccati

$$\gamma' = \frac{3b_5}{2}\gamma^2 + 3(b_2 - b_3)\gamma - 6b_0.$$

L'équation $(6)'$ admet l'intégrale $y = 1$, et l'équation en (γ) admet l'intégrale $y = -1$.

Si $\frac{b_0}{b_5}$ n'est pas une constante, l'équation $(6)'$ se trouve ramenée elle-même à une forme qu'on peut regarder comme une forme canonique de seconde espèce. Il suffit de poser

$$\frac{b_5}{b_0} = \mathrm{X},$$

et l'équation devient

$$\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{B}_0(\mathrm{X})(1 + \mathrm{Y} + \mathrm{J}_2\mathrm{Y}^2 + \mathrm{J}_3\mathrm{Y}^3 + \ldots + \mathrm{X}\mathrm{Y}^5)}{\mathrm{Y}}.$$

Les J_i, β_0, X sont des invariants liés par les relations

$$\mathrm{J}_4 = -2\mathrm{X}, \qquad \mathrm{J}_3 = \frac{\mathrm{X}}{4}, \qquad \mathrm{J}_2 = \frac{3\mathrm{X}}{4} - 2.$$

Si $\frac{b_0}{b_5}$ est constant, l'équation se ramène à une équation dont les coefficients sont constants.

Le cas où $\nu = 4$ se traite sans plus de difficulté, en exprimant que les deux membres de l'équation (4) contiennent à la fois en facteur $y - 1$ et $y - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, et en ramenant ensuite l'équation à une forme canonique par une substitution

$$y = a\mathrm{Y},$$
$$x = \varphi(\mathrm{X}).$$

On connaît alors, en général, deux intégrales particulières de l'équation (1), qui, toutefois, peuvent se confondre dans certains cas. Mais je n'insiste pas davantage, pour ne pas multiplier les calculs, sur cette classe d'équations que nous étudierons tout à l'heure d'une autre façon, et je passe, pour terminer cette discussion, au cas où ν serait égal à 3.

Nous ramenons d'abord l'équation à la forme

$$y' = C_0 + 3C_1 y + 3C_2 y^2 + C_3 y^3.$$

Son intégrale s'écrit

$$y^3 + Ay^2 + (B - C\gamma)y + \gamma = 0,$$

et nous pouvons toujours nous servir de la substitution

$$y = hy_1 + h_1,$$

de façon que cette dernière équation devienne

$$\gamma = \frac{y^3 + y}{C_1 y + 1},$$

et en posant $C_1(x) = X$ on aura

$$\gamma = \frac{y^3 + y}{Xy + 1}$$

avec

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

Ceci suppose, toutefois, B différent de zéro et C_1 fonction de x. Dans le cas où ces conditions ne seraient pas réalisées, on donnerait à γ l'une des expressions

$$\gamma = \frac{y^3}{y+1} \qquad \text{ou} \qquad \gamma = \frac{y^3 + 1}{c_0 y + 1},$$

c_0 désignant une constante.

Prenons d'abord le cas où l'on a

$$\gamma = \frac{y^3 + y}{Xy + 1},$$

et exprimons que l'équation

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P$$

coïncide avec l'équation (1) donnée quand on y remplace γ par cette valeur. Il faudra exprimer qu'un polynôme du sixième degré est divisible par un polynôme du troisième : d'où trois équations linéaires en M, N, P, dont les coefficients dépendent de X. Ces équations ne peuvent être indéterminées; sinon on pourrait disposer arbitrairement de l'invariant unique J de l'équation, et toutes les équations

$$Y' = Y^3 + J(X),$$

par exemple, auraient leur intégrale de la forme cherchée, quelle que fût la fonction $J(X)$. Il en résulte qu'une seule valeur de M, N, P satisfait aux conditions précédentes; il n'existe donc qu'une équation (1) distincte qui soit de l'espèce cherchée, autrement dit toutes les équations qui répondent à la question se déduisent de l'une d'entre elles par une substitution

$$y = \frac{hY + h_1}{kY + k_1}, \qquad x = \varphi(X)$$

qu'on détermine par des opérations linéaires.

Pour ce qui est des cas où γ est de la forme

$$\gamma = \frac{y^3}{y+1}, \qquad \gamma = \frac{y^3+1}{c_0 y + 1},$$

on voit aussitôt qu'ils correspondent à une équation (1) de l'espèce

$$y' = N(x)(y^3 + a_0 y^2 + b_0 y + c_0),$$

a_0, b_0, c_0 étant des constantes.

Si donc l'équation (1) $(\nu = 3)$ n'est pas de la classe d'une équation à coefficients constants, il suffit, pour voir si elle fait partie des équations cherchées, de reconnaître si elle se ramène à une de ces équations particulières, par exemple à l'équation

$$y' = \frac{2y(y-1)}{x[2y(x-2)+3]},$$

dont l'intégrale générale est donnée par l'égalité

$$(xy+1)(y-1)^2[(x-2)y+1]^{-1} = \text{const.}$$

Ceci nous montre que (1) s'intègre alors algébriquement, ce qui était à prévoir, puisqu'on connaît trois intégrales particulières de l'équation. Ces trois intégrales ne sont pas distinctes quand (1) est de la classe d'une équation à coefficients constants; on reconnaît algébriquement si l'intégrale d'une telle équation

$$\frac{dy}{y^3 + a_0 y^2 + b_0 y^2 + c_0} = \mathrm{N}(x)\,dx = d\mathrm{X}$$

est une fonction à trois valeurs de X, et l'équation s'intègre alors par une quadrature.

On serait arrivé aux mêmes conclusions en se servant de la forme réduite

$$\mathrm{Y}' = \mathrm{Y}^3 + \mathrm{J}(\mathrm{X})$$

de l'équation (1). En identifiant cette équation avec celle qui se déduit de l'équation de Riccati par la substitution

$$\gamma = \frac{y^3 + \mathrm{A}y^2 + \mathrm{B}y}{\mathrm{C}y + 1},$$

on trouve, si l'on élimine M, N, P, A, B, C, que J vérifie la relation

$$(a) \qquad 7\frac{\mathrm{J}'\mathrm{J}''}{\mathrm{J}^4}\frac{\mathrm{J}^5}{\mathrm{J}'^3} - 9 = \frac{18}{5}\sqrt{7}\left(\frac{\mathrm{J}^5}{\mathrm{J}'^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Une équation de cette forme définit, comme nous le savons, les invariants J d'une même classe d'équations (1) ($\nu = 3$). Elle s'intègre sans difficulté ainsi que l'équation en y correspondante. Si l'on ramenait par une substitution

$$\mathrm{Y} = \alpha \mathrm{Y}_1, \qquad \mathrm{X} = \varphi(\mathrm{X}_1)$$

l'équation à la forme canonique de seconde espèce

$$\frac{d\mathrm{Y}_1}{d\mathrm{X}_1} = \mathrm{A}(\mathrm{X}_1)\left(\mathrm{Y}_1^3 - \frac{\mathrm{X}_1}{3}\mathrm{Y}_1 + 1\right),$$

on trouverait

$$\mathrm{X}_1 = \frac{1}{\mathrm{J}^{\frac{5}{3}}}\frac{d\mathrm{J}}{d\mathrm{X}}$$

et

$$\mathrm{A} = \mathrm{J}^{\frac{2}{3}}\frac{d\mathrm{X}}{d\mathrm{X}_1};$$

par suite, d'après (a),

$$\frac{1}{\mathrm{A}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{X}_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{9}{5} - \frac{4}{3\sqrt{7}}\mathrm{X}_1^{\frac{3}{2}}\right).$$

L'équation cherchée est donc

$$\frac{dY_1}{dX_1} = \frac{\sqrt{7}}{2X_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{9}{5} - \frac{4}{3\sqrt{7}}X_1^{\frac{3}{2}}\right)}\left(Y_1^3 - \frac{X_1}{3}Y_1 + 1\right).$$

Elle s'intègre algébriquement.

Cette réduction n'est impossible que si $\frac{J'^3}{J^5}$ est égal à une constante k, c'est-à-dire si l'équation se ramène à une équation à coefficients constants. Cette constante doit être telle que $\frac{J'^3}{J^5} = k$ satisfasse à l'équation (a); il faut pour cela et il suffit que k soit égal à $\frac{3^6.7}{2^4.5^2}$.

9. Nous avons dit tout à l'heure que, chaque fois que ν n'était pas égal à $2n$, on connaissait sans intégration au moins une intégrale de l'équation (1) et par suite de l'équation de Riccati à laquelle elle se ramène. Le fait, comme nous l'avons remarqué dans l'exemple $\nu = 5$, $n = 3$, est une conséquence même de la marche du calcul. Voici comment on peut le démontrer directement.

L'intégrale de (1) est donnée par une égalité

$$(\alpha) \qquad \frac{y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1 y}{b_{n-1}y^{n-1} + \ldots + b_0} = \gamma = \frac{hC + h_1}{kC + k_1};$$

γ vérifie une équation

$$(\beta) \qquad \gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P,$$

où nous pouvons toujours supposer $M \neq 0$, sinon on changerait y en $\frac{1}{y}$, et γ se changerait en $\frac{1}{\gamma}$. Dans ces conditions, l'équation $(\beta)'$, transformée de (β) par la substitution (α)

$$(\beta)' \qquad P(y, x)y' = Q(y, x),$$

a son second membre de degré $2n$, et l'ordre de son coefficient différentiel ne peut s'abaisser que si P et Q renferment au moins un facteur commun $(y - c)^q$. D'autre part, si ce facteur figure dans P à la puissance r, $(r + 1)$ valeurs de y deviennent égales à a, pour la valeur correspondante de γ. Donnons à x une valeur quelconque; l'intégrale de (1) qui prend pour x la valeur $c(x)$ n'admet ce point x que comme point de ramification d'ordre $r-q+1$, c'est-à-dire que les $(r-q+1)$ branches de cette intégrale constituent toutes les fonctions de x qui satisfont à l'équation (1) et prennent en x la valeur c. Mais, d'autre part, l'équation (α) définit $(r+1)$ fonctions de x qui jouissent de ces propriétés; ces $(r+1)$ fonctions coïncident donc avec les $(r-q+1)$ précédentes; autrement dit, l'équation (α) se décompose. Mais, par hypothèse, l'équation (α) est irréductible, c'est-à-dire qu'elle ne se décompose que pour des valeurs exceptionnelles de la constante C. Donc $\gamma(c)$ correspond à une valeur invariable de C quand x varie;

$$y=c$$

est donc une intégrale de (1);

$$\gamma=\frac{c^n+a_{n-1}c^{n-1}+\ldots+a_1 c}{b_{n-1}c^{n-1}+\ldots+b_1 c+1}$$

est une intégrale de (β) (1). C. Q. F. D.

Donc chaque fois que ν ne sera pas égal à $2n$, l'équation (1) s'intégrera par quadratures. On connaîtra même en général plusieurs intégrales de l'équation de Riccati. Cherchons d'abord à distinguer les cas où l'on n'en connaîtra qu'une seule.

Nous pouvons toujours admettre que cette intégrale soit $y=0$ [sinon on changerait y en $y+y_0(x)$] et que $y=\infty$ ne soit pas une intégrale; dans ces conditions, γ dépend toujours de la constante C, et nous avons

$$\gamma=\frac{y^n+a_{n-1}y^{n-1}+\ldots+a_\lambda y^\lambda}{b_{n-1}y^{n-1}+\ldots+1},$$

$$\gamma'=\mathrm{M}\gamma^2+\mathrm{N}\gamma \qquad (\mathrm{M}\neq 0).$$

En formant l'équation en y, on voit aussitôt que le coefficient de y' (de degré $2n-2$ au plus) contient en facteur $y^{\lambda-1}$, tandis que le second membre de l'équation est divisible par y^λ. Donc, si les deux

(1) On peut rattacher cette proposition au théorème déjà connu d'Euler : *On obtient une intégrale d'une équation du premier ordre en annulant son facteur intégrant. Voir* le Mémoire de M. Darboux *Sur les équations différentielles du premier ordre* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1878).

membres n'ont pas d'autres facteurs communs, on a

$$2n - \lambda + 1 = \nu$$

ou encore

$$\lambda = 2n + 1 - \nu.$$

Comme λ est au plus égal à n, ce cas ne peut se présenter que si n est inférieur ou au plus égal à $\nu - 1$.

Passons aux équations (1) pour lesquelles on connaît seulement deux intégrales particulières. Nous pouvons admettre que ces deux intégrales soient

$$y = 0, \qquad y = \infty.$$

Si ces intégrales correspondent à deux valeurs de la constante C, γ dépend de C, et l'on a

$$\gamma = \frac{y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_\lambda y^\lambda}{b_p y^p + \ldots + 1}$$

$(p < n - 1)$, avec $\dfrac{\gamma'}{\gamma} = \mathrm{N}$.

Si ces intégrales correspondent à la même valeur de C, on peut poser

$$\gamma_i = \frac{y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_0}{y^\lambda (b_{p-\lambda} y^{p-\lambda} + \ldots + b_0)}$$

avec $\gamma'_i = \mathrm{N}\gamma_i + \mathrm{P}$, $(p < n - 1)$.

Dans les deux cas, on trouve

$$\nu = n + p - \lambda + 2.$$

Toutes les équations qui n'appartiennent pas aux mêmes classes que ces équations que nous venons d'énumérer s'intègrent algébriquement. D'une manière générale, si $y = \alpha_i(x)$ est une intégrale multiple d'ordre λ_i, on a

$$\nu = 2n - \Sigma(\lambda_i - 1);$$

cette égalité est analogue à celle qu'a donnée M. Darboux pour les intégrales algébriques.

Appliquons rapidement ces remarques à l'exemple $\nu = 4$, $n = 3$. On connaîtra en général deux intégrales de l'équation (1), soit $y = 0$,

$y = \infty$. Si ces intégrales correspondent à deux valeurs de C, on a

$$\frac{y^2(y+A)}{By+1} = \gamma, \qquad \frac{\gamma'}{\gamma} = N;$$

donc

$$\frac{y'}{y} + \frac{y'+A'}{y+A} - \frac{By'+B'y}{By+1} = N$$

ou

$$\begin{aligned} & y'[2By^2+(AB+3)y+A] \\ & \quad = Ny(y+A)(By+1)+B'y(y+A)-A'y(By+1). \end{aligned}$$

Comme on dispose encore du changement de fonction $y = \alpha y_1$, on peut supposer $AB = -1$. D'autre part, si l'on prend comme forme canonique des équations ($\nu = 4$) la forme suivante

$$\frac{dY}{dX} = K(X)\frac{Y^3+J_2Y^2+J_1Y+J_0}{\left(I_2Y^2+Y-\frac{1}{2I_2}\right)},$$

(l'un des J étant égal à X), l'équation qui précède nous permet d'écrire aussitôt les conditions auxquelles sont assujettis ces invariants K, J_2, J_1, J_0. Le cas où les deux intégrales $y = 0$, $y = \infty$ correspondent à la même valeur de C se traite aussi aisément.

Pour que les racines du dénominateur soient égales, il faut que B et A (liés par la condition $AB = -1$) soient constants; l'équation se ramène alors par une quadrature aux équations à coefficients constants. La quadrature qui reste à effectuer doit être algébrique.

On formerait de même, à l'aide des égalités

$$\gamma = \frac{By+1}{y^3},$$
$$\gamma' = N\gamma + P,$$

les types des équations $\nu = 4$, $n = 3$, pour lesquelles les deux intégrales connues se confondent.

10. Je n'insiste pas davantage sur ces applications particulières. Elles suffisent à montrer comment l'introduction de la substitution

$$(3) \qquad y = \frac{hy_1+h_1}{ky_1+k_1}, \qquad x = \varphi(x_1)$$

rend relativement faciles des calculs qui autrement seraient inextricables.

Cette transformation rend d'ailleurs les mêmes services quand l'équation (1), au lieu d'être résolue par rapport à y', est de genre p quelconque.

Cherchons à reconnaître si l'intégrale de l'équation

$$F[y, y', (x)] = 0 \tag{1'}$$

ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales étant nul.

L'intégrale s'écrit alors

$$P_n(\gamma, x)y^n + P_{n-1}(\gamma, x)y^{n-1} + \ldots + P_0(\gamma, x) = 0;$$

les P_i sont des polynômes en y de degré m (si m est le degré de F en y'), et la fonction γ est définie par l'équation

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

Le coefficient de la plus haute puissance de y' dans F est de degré $\nu - 2m$, quand on fait subir à cette équation la transformation (3) la plus générale, ν est le *degré* du coefficient différentiel, par définition. Si le coefficient a une racine infinie d'ordre α, P_n et P_{n-1} ont α facteurs communs en γ. De même, si ce coefficient a une racine nulle d'ordre β, P_0 et P_1 ont β facteurs communs. Quand les coefficients de y^m, y^{m-1}, y^{m-2} admettent la racine $y = 0$, les polynômes P_0, P_1, P_2, ... admettent un facteur commun, etc.

Par exemple, si $m' = 2$ et $n = 2$, on peut toujours se servir de la transformation (3) pour rendre nulle et infinie deux racines du coefficient de y'^n. Dans ces conditions, l'intégrale s'écrira

$$\frac{A\gamma + B}{C\gamma + D}y^2 + y + \gamma = 0$$

ou bien

$$\gamma y^2 + y + \frac{A\gamma + B}{C\gamma + D} = 0$$

avec

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

Cette forme de l'intégrale se prête à des calculs assez simples. On peut se rendre compte, avec elle, de la nature des équations les plus générales de cette espèce. Le degré de leur coefficient différentiel est au plus égal à 8, c'est-à-dire que leur équation s'écrit

$$y'^2 A_4[y, (x)] + y' A_6[y, (x)] + A_8[y, (x)] = 0,$$

A_4, A_6, A_8 désignant des polynômes en y de degré 4, 6, 8.

Quand l'équation ($m' = 2$, $n = 2$) est d'une forme plus simple, on connaît en général des intégrales particulières de l'équation de Riccati auxquelles on la ramène. Le raisonnement que nous avons employé au paragraphe précédent est, en effet, susceptible d'extension. Toutefois, les choses se passent ici d'une façon plus compliquée, à cause de la double nature des points critiques de l'équation (1), points où $\frac{dy}{dx}$ est infinie, et points où $\frac{dy}{dx}$ est indéterminée. La recherche de la limite inférieure de n, au delà de laquelle l'équation de Riccati s'intègre par quadratures, nécessite une discussion détaillée [1] qui nous entraînerait trop loin des équations rationnelles en y', auxquelles nous bornerons ces applications.

---

[1] *Voir* à ce sujet une Note *Sur l'intégration algébrique des équations du premier ordre* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, mai 1891), et deux Notes *Sur les intégrales à n valeurs des équations du premier ordre* (*Comptes rendus*, janvier et février 1892).

(*A suivre.*)