ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

C. BOURLET

Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 8 (1891), p. 3-63 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1891_3_8__S3_0>

SUR LES ÉQUATIONS

AUX

DÉRIVÉES PARTIELLES SIMULTANÉES

QUI CONTIENNENT

PLUSIEURS FONCTIONS INCONNUES,

PAR M. C. BOURLET,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

Les systèmes d'équations aux dérivées partielles simultanées, entre plusieurs fonctions inconnues et plusieurs variables indépendantes, n'ont été, jusqu'ici, l'objet que d'un nombre très limité de travaux.

Les premiers de ces systèmes qui ont été étudiés sont les systèmes complètement intégrables provenant des équations aux différentielles totales. Leur étude a été faite et achevée par Bouquet et M. Mayer (*voir* Iʳᵉ Partie, nº 1).

Un peu plus tard, en 1875, M. G. Darboux (1) et Mᵐᵉ de Kowalewski (2) ont, presque simultanément, donné chacun une démonstration de l'existence de l'intégrale dans ceux de ces systèmes où le nombre des équations est égal au nombre des fonctions (3).

---

(1) G. DARBOUX, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXX, p. 101 et 317.

(2) SOPHIE VON KOWALEWSKI, *Journal de Crelle*, t. 80, p. 1.

(3) Cauchy avait indiqué des démonstrations avant M. Darboux et Mᵐᵉ de Kowalewski. Ce fait a été signalé par M. Genocchi à l'occasion des articles de M. Darboux dans les *Comptes rendus*.

M. Darboux s'est contenté d'indiquer sa démonstration dans deux courtes Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Le Mémoire de M[me] de Kowalewski est plus développé. L'auteur n'y prouve l'existence d'un système d'intégrales que dans le cas où n_1, n_2, ..., n_m étant, respectivement, les ordres des dérivées de l'ordre le plus élevé des fonctions inconnues φ_1, φ_2, ..., φ_m qui figurent dans les équations proposées, ces m équations sont résolues par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial^{n_1}\varphi_1}{\partial x^{n_1}},\quad \frac{\partial^{n_2}\varphi_2}{\partial x^{n_2}},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{n_m}\varphi_m}{\partial x^{n_m}}$$

prises par rapport à une même variable x. Le théorème de M[me] de Kowalewski ne démontre donc l'existence d'un système d'intégrales dans les systèmes d'équations aux dérivées partielles, les plus généraux, où le nombre des équations est égal au nombre des fonctions inconnues, que s'il est toujours possible de trouver une transformation qui ramène le cas le plus général au précédent. Malheureusement, il n'en est rien et, comme nous le montrerons dans la II[e] Partie de ce travail, par un exemple, une telle transformation n'est pas toujours possible.

Après M[me] de Kowalewski, M. J. König a donné, dans le Tome XXIII des *Mathematische Annalen* (¹), un type de systèmes d'équations aux dérivées partielles, pour lesquels il démontre l'existence d'un système d'intégrales, et qui comprennent, comme cas particuliers, les systèmes de M[me] de Kowalewski et les équations de Bouquet et de M. A. Mayer (²).

Enfin, tout récemment, MM. Méray et Riquier ont publié dans le Tome VII de la 3[e] Série des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* (1890), un Mémoire très intéressant intitulé : *Sur la convergence des développements des intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles simultanées*.

Dans ce travail, MM. Méray et Riquier ne considèrent que des sys-

---

(¹) J. König, *Ueber die Integration simultaner Systeme partieller Differentialgleichungen mit mehreren unbekannten Funktionen*.

(²) On pourrait encore consulter utilement à ce propos la thèse présentée par M. H. Poincaré à la Faculté des Sciences de Paris en 1879.

tèmes, qu'ils nomment *immédiats*, qui sont soumis à certaines restrictions et prouvent la convergence des développements pour *certains* de ces systèmes. Je montrerai, dans ce travail, que *tout système linéaire* d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, peut être mis sous une forme canonique pour laquelle la démonstration de la convergence des développements est toujours possible; d'ailleurs, tout système partiel se ramène à un système linéaire du premier ordre (*voir* IIe et IIIe Partie) ([1]).

Le présent travail est divisé en trois Parties. Dans la Ire Partie j'établis la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système d'équations aux dérivées partielles simultanées admette comme système d'intégrales le plus général un système dépendant d'un nombre *fini* de constantes arbitraires. Cette condition avait déjà été énoncée et démontrée par M. Sophus Lie (*Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, Chap. X), mais la méthode que j'ai suivie est toute différente de celle de M. Lie et présente, en outre, l'avantage de montrer comment, pratiquement, après avoir reconnu ce cas, on ramènera l'intégration du système à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre ([2]).

J'ai réservé la IIe Partie à l'étude spéciale des systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. Je définis les systèmes *canoniques* et les systèmes linéaires canoniques *complètement intégrables :* tout système linéaire du premier ordre peut être mis sous forme canonique et tout système canonique complètement intégrable admet un système d'intégrales général dont le degré de généralité est parfaitement défini.

Enfin, la IIIe Partie sert de lien entre les deux premières et contient les conclusions dont voici le résumé : la convergence des développe-

---

([1]) Je ne parle pas ici des nombreux travaux qui ont été faits sur des systèmes *particuliers* d'équations aux dérivées partielles contenant plusieurs fonctions inconnues, car mon but principal est l'*existence* des intégrales dans les systèmes les plus généraux.

([2]) M. Roger Liouville, dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CI, p. 1135, a donné une *vague* indication de ceci. Il dit : *Les solutions communes à deux ou plusieurs équations aux dérivées partielles s'obtiendront en intégrant un système d'équations aux différentielles totales qu'il est facile de former*. Je n'ai pas eu connaissance d'un Mémoire de M. Liouville où cette indication soit plus développée.

ments des intégrales, d'un système quelconque, calculés au moyen des équations mêmes de ce système est établie. Le degré de généralité du système le plus général d'intégrales n'est précisé, en toute rigueur, que dans deux cas : 1° quand le système ne dépend que d'un nombre fini de constantes arbitraires; 2° quand le système proposé peut être ramené à un système linéaire du premier ordre canonique complètement intégrable.

PREMIÈRE PARTIE (1).

1. Je rappellerai d'abord un certain nombre de théorèmes dont j'aurai besoin dans le cours de cette exposition (2).

Définition. — Étant donné un système de mn équations aux dérivées partielles du premier ordre, entre les m fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ et les n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$(1) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = f_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, n),$$

où f_{ik} désignent des fonctions de $u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n$, on dit que ce système est *complètement intégrable*, si les fonctions f_{ik} satisfont, identiquement, aux relations

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_h} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_1} f_{1h} + \ldots + \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_m} f_{mh} = \frac{\partial f_{ih}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{ih}}{\partial u_1} f_{1k} + \ldots + \frac{\partial f_{ih}}{\partial u_m} f_{mk}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m; \quad k, h = 1, 2, \ldots, n).$$

(1) *Voir* S. LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, Chap. X.

(2) *Voir* BOUQUET, *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. III, p. 265, 1872; A. MAYER, *Mathematische Annalen*, t. 5, p. 448, et *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 1re série, t. XI; GOURSAT, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles*, Chap. II et III.

Ces relations peuvent s'écrire, symboliquement,

$$X_h(f_{ik}) \equiv X_k(f_{ih}), \tag{2}$$

en posant

$$X_h(\ ) = \frac{\partial}{\partial x_h} + f_{1h}\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + f_{mh}\frac{\partial}{\partial u_m}.$$

D'ailleurs, il est aisé de se rendre compte que ces identités expriment que les deux valeurs des dérivées secondes $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_h}$, qu'on peut calculer au moyen des équations (1), sont identiques.

THÉORÈME I. — *Étant donné le système* COMPLÈTEMENT INTÉGRABLE

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = f_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

dans lequel f_{ik} *désigne une fonction de* $u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$ *régulière au voisinage des valeurs* $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ *de ces variables, il existe* UN SEUL *système de fonctions* $u_1, u_2, \ldots, u_m$, *holomorphes au voisinage du point* $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, *se réduisant, respectivement, à* $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0$ *pour* $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $\ldots$, $x_n = x_n^0$, *et vérifiant les équations* (3).

Remarque. — Ce théorème montre que le système (3) admet un système d'intégrales dépendant de m constantes arbitraires $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0$. D'ailleurs, c'est le système *le plus général* d'intégrales holomorphes du système (3), car, si l'on considère un système quelconque d'intégrales holomorphes du système (3), et si $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0$ sont les valeurs de ces intégrales, pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$, il existe, d'après le théorème I, un système d'intégrales et *un seul* satisfaisant à ces conditions : c'est donc, nécessairement, le système considéré.

THÉORÈME II. — *Un système complètement intégrable se transforme en un système complètement intégrable, lorsqu'on effectue un changement quelconque de variables indépendantes.*

THÉORÈME III. — *Pour trouver les intégrales* $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *du système* (3), *qui, pour* $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ *se réduisent, respectivement,* *à* $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0$, *on procédera de la façon suivante : on effectuera, d'abord, le changement de variables*

$$(4) \qquad x_1 = x_1^0 + y_1, \qquad x_k = x_k^0 + y_1 y_k \qquad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

dans le système (3). *On remplacera ainsi ce système par un nouveau système complètement intégrable*

$$(5) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial y_k} = \mathrm{F}_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, n),$$

et aux intégrales précédentes du système (3) *correspondront des intégrales du système* (5), *qui, pour* $y_1 = 0$, *se réduiront respectivement à* $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0$, *quelles que soient les valeurs de* $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

On considère alors le système d'équations différentielles ordinaires

$$(5') \qquad \frac{du_1}{dy_1} = \mathrm{F}_{11}, \qquad \frac{du_2}{dy_1} = \mathrm{F}_{21}, \qquad \ldots, \qquad \frac{du_m}{dy_1} = \mathrm{F}_{m1},$$

déduit du système (5) *en prenant les équations de ce système pour lesquelles* $k = 1$, *et l'on obtient les intégrales cherchées du système* (5), *et, par suite, celles du système* (3) *en déterminant les intégrales du système* (5'), *où l'on considère* $y_2, y_3, \ldots, y_n$ *comme des paramètres arbitraires, qui, pour* $y_1 = 0$, *se réduisent respectivement aux constantes données* $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0$.

Ce théorème ramène donc l'intégration du système complètement intégrable (3) à celle d'un système d'équations différentielles ordinaires.

2. Nous établirons, maintenant, la proposition préliminaire suivante :

Théorème IV. — *Étant donné le système de mn équations aux dérivées partielles du premier ordre*

$$(6) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = f_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, n),$$

où f_{ik} *désignent des fonctions de* $u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$ *et les p relations distinctes*

$$(7) \qquad \varphi_h(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

s'il existe des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *de* $x_1, \ldots, x_n$ *vérifiant à la fois les équations* (6) *et* (7), *ces fonctions satisferont à un système complètement intégrable de la forme*

$$(8) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = F_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r; \quad k = 1, 2, \ldots, n), \qquad r < m,$$

et à $m - r$ *relations de la forme*

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_{r+1} = \psi_1 \quad (u_1, u_2, \ldots, u_r; x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m \quad = \psi_{m-r}(u_1, u_2, \ldots, u_r; x_1, \ldots, x_n) \end{array} \right.$$

et, réciproquement, toutes les solutions des systèmes (8) *et* (9) *satisferont aux systèmes* (6) *et* (7).

En effet, tout système de fonctions vérifiant les équations (6), vérifiera aussi les relations qui expriment que les deux valeurs de $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_h}$, calculées au moyen des équations (6), sont égales

$$(10) \qquad X_h(f_{ik}) = X_k(f_{ih}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad k, h = 1, 2, \ldots, n).$$

Si parmi ces relations il y en a un certain nombre qui ne sont pas des conséquences des équations (7), nous les joindrons aux équations (7), de façon à former, avec ces équations, un système

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{p+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{p+q} = 0$$

de $p + q$ relations distinctes. On pourra résoudre ces $p + q$ relations par rapport à $p + q$ des quantités $u_1, u_2, \ldots, u_m$, car sans cela il y aurait une relation entre les n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soient

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_{m-p-q+1} = \varpi_1(u_1, \ldots, u_{m-p-q}, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m = \varpi_{p+q}(u_1, \ldots, u_{m-p-q}, x_1, \ldots, x_n). \end{array} \right.$$

Ces relations résolues, portons ces valeurs de $u_{m-p-q+1}, \ldots, u_m$ dans les équations (6). Toutes celles de ces équations pour lesquelles l'indice i est inférieur à $m - p - q + 1$ prendront la forme

$$(12) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \mathfrak{F}_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m - p - q; \; k = 1, 2, \ldots, n),$$

où $\mathcal{F}_{ik}$ désigne la fonction des seules quantités $u_1, \ldots, u_{m-p-q}, x_1, \ldots, x_n$ que l'on déduit de f_{ik} en y faisant la substitution (11).

Toutes celles des équations (6) pour lesquelles l'indice i est supérieur à $m-p-q$ donneront, après y avoir remplacé les dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ $(i < m-p-q+1)$ par les quantités $\mathcal{F}_{ik}$, des relations entre $u_1, u_2, \ldots, u_{m-p-q}, x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne contenant plus de dérivées.

1° Si toutes ces relations sont vérifiées *identiquement*, le système (12) sera *complètement intégrable*, car les relations qui expriment que ce système est complètement intégrable, sont précisément les relations qu'on obtient en remplaçant $u_{m-p-q+1}, \ldots, u_m$ par leurs valeurs, tirées de (11), dans les relations (10), qui, par suite, seront identiquement vérifiées. Dans ce cas, le théorème est démontré, car, tout système d'intégrales satisfaisant à (6) et (7) satisfait évidemment aux équations (11) et (12), et réciproquement.

2° Si toutes ces relations ne sont pas vérifiées identiquement, nous écrirons toutes celles qui sont distinctes; soient

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_{p+q+1}(u_1, \ldots, u_{m-p-q}, x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_{p+q+s}(u_1, \ldots, u_{m-p-q}, x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{array}\right.$$

Elles formeront, avec le système (12), un ensemble d'équations tout pareil à l'ensemble des systèmes (6) et (7). Nous pourrons donc traiter les systèmes (12) et (13) comme nous avons traité les systèmes (6) et (7), et, comme l'ensemble des équations (11), (12) et (13) est évidemment équivalent à l'ensemble des équations (6) et (7), en continuant de la sorte, nous arriverons soit à un système de relations distinctes entre $u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n$, dont le nombre est *supérieur à m*, et, alors, les systèmes (6) et (7) dont les solutions devraient vérifier ces relations, sont incompatibles, soit à deux systèmes de la forme (8) et (9), dont l'ensemble sera équivalent à celui des deux systèmes (6) et (7).

Pour avoir la solution la plus générale des systèmes (6) et (7), il suffira donc de trouver la solution la plus générale des deux systèmes (8) et (9). On cherchera, à cet effet, le système le plus général de fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_r$, satisfaisant au système (8), et on prendra pour $u_{r+1}, \ldots, u_m$ les valeurs correspondantes données par les relations (9). Le système (8) étant complètement intégrable, le théorème I nous apprend que le système d'intégrales le plus général dépend de r constantes arbitraires, et le théorème III nous fournit le moyen de *trouver ces intégrales*.

3. Avant de nous occuper du cas le plus général d'un système d'équations aux dérivées partielles simultanées, nous traiterons, d'abord, le cas simple d'un système d'équations aux dérivées partielles entre une fonction inconnue z et deux variables indépendantes x et y.

Il est clair que, s'il existe une intégrale z satisfaisant à un tel système, cette intégrale vérifiera toutes les équations que l'on peut en déduire en dérivant une ou plusieurs fois les équations qui forment ce système, soit par rapport à x, soit par rapport à y; on pourra donc *adjoindre* ces équations au système proposé. Supposons qu'en opérant ainsi on puisse arriver à un système équivalent au système proposé, mais tel que, si m est l'ordre des dérivées de l'ordre le plus élevé qu'il contient, il y ait $(m+1)$ équations de ce système qui soient résolubles par rapport aux $(m+1)$ dérivées partielles d'ordre m de z. Je dis que, dans ce cas, si les équations ne sont pas incompatibles, l'intégrale générale du système dépendra d'un nombre *fini* de constantes arbitraires.

En effet, après avoir résolu $(m+1)$ équations par rapport aux $(m+1)$ dérivées d'ordre m, portons les valeurs de ces dérivées dans toutes les autres équations. Nous obtiendrons ainsi un système d'équations aux dérivées partielles équivalent au système proposé et de la forme suivante

$$(14) \qquad p_{m,0} = f_0, \qquad p_{m-1,1} = f_1, \qquad \ldots, \qquad p_{0,m} = f_m,$$

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \ldots, p_{m-1,0}, \ldots, p_{0,m-1}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_q(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \ldots, p_{m-1,0}, \ldots, p_{0,m-1}) = 0, \end{array} \right.$$

où on a posé

$$\frac{\partial^m z}{\partial x^p \, \partial y^{m-p}} = p_{p,m-p},$$

et où $f_0, f_1, \ldots, f_m, \varphi_1, \ldots, \varphi_q$ désignent des fonctions de x, y, z, et des dérivées de z jusqu'à l'ordre $(m-1)$ inclusivement. Prenons alors pour nouvelles fonctions inconnues toutes les dérivées de z jusqu'à l'ordre $(m-1)$ inclusivement, et considérons le système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre et de relations suivant

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial z}{\partial x} = p_{10}, & \dfrac{\partial z}{\partial y} = p_{01}, \\ \dfrac{\partial p_{10}}{\partial x} = p_{20}, & \dfrac{\partial p_{10}}{\partial y} = p_{11}, \\ \dfrac{\partial p_{01}}{\partial x} = p_{11}, & \dfrac{\partial p_{01}}{\partial y} = p_{02}, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial p_{m-2,0}}{\partial x} = p_{m-1,0}, & \dfrac{\partial p_{m-2,0}}{\partial y} = p_{m-2,1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial p_{0,m-2}}{\partial x} = p_{1,m-2}, & \dfrac{\partial p_{0,m-2}}{\partial y} = p_{0,m-1}; \end{array}\right.$$

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial p_{m-1,0}}{\partial x} = f_0, & \dfrac{\partial p_{m-1,0}}{\partial y} = f_1, \\ \dfrac{\partial p_{m-2,1}}{\partial x} = f_1, & \dfrac{\partial p_{m-2,1}}{\partial y} = f_2, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial p_{0,m-1}}{\partial x} = f_{m-1}, & \dfrac{\partial p_{0,m-1}}{\partial y} = f_m; \end{array}\right.$$

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi_1(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \dots, p_{0,m-1}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \varphi_q(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \dots, p_{0,m-1}) = 0. \end{array}\right.$$

Les deux systèmes (14), (15) et (16), (17), (18) sont équivalents, c'est-à-dire qu'à toute intégrale du système (14), (15) correspond un système d'intégrales du système (16), (17), (18), et réciproquement. Car, si z' est une intégrale du système (14), (15), on aura évidemment un système d'intégrales du système (16), (17), (18), en adjoignant à z' les fonctions p_{ik} définies par les relations

$$p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z'}{\partial x^i \, \partial y^k} \qquad (i + k \leqq m - 1).$$

Réciproquement soit z', p'_{ik} un système d'intégrales du système (16), (17), (18), les équations (16) expriment que l'on a

$$p'_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z'}{\partial x^i \partial y^k} \qquad (i + k \leqq m - 1),$$

et en portant ces valeurs dans les équations (17) et (18), qui sont vérifiées par hypothèse, on trouve précisément les équations qui expriment que z' est une intégrale du système (14), (15).

Pour trouver l'intégrale la plus générale du système (14), (15), nous sommes donc ramenés à intégrer de la façon la plus générale le système (16), (17), (18). Le théorème IV nous apprend que le système le plus général d'intégrales dépend d'un nombre *fini* r de constantes arbitraires, et nous connaissons, de plus, le moyen de ramener la recherche de ce système à l'intégration d'un système de r équations différentielles ordinaires du premier ordre.

Remarque. — Le nombre r des constantes arbitraires est au plus égal à $\frac{m(m+1)}{2}$; car le cas le plus favorable est celui où les fonctions φ des relations (18) sont identiquement nulles et où le système (16), (17) est complètement intégrable. Dans ce cas, le théorème I nous montre qu'on peut prendre arbitrairement les valeurs initiales de z et p_{ik} (pour $i + k \leqq m - 1$), c'est-à-dire qu'il y a $\frac{m(m+1)}{2}$ constantes arbitraires.

4. *Inversement,* je dis que, si une fonction z de x et y contient un nombre fini r de constantes arbitraires, on pourra déterminer un nombre m tel que toutes les dérivées partielles de z puissent s'exprimer en fonction des dérivées d'ordre inférieur à m. Soit, en effet,

$$z = \varphi(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_r) \tag{19}$$

cette fonction, et soit μ le *plus petit* nombre entier tel que l'on ait

$$\frac{\mu(\mu+1)}{2} \geqq r.$$

Écrivons les équations suivantes :

$$(20)\quad \begin{cases} p_{1,0} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \\ p_{0,1} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ p_{\mu-1,0} - \dfrac{\partial^{\mu-1}\varphi}{\partial x^{\mu-1}} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ p_{0,\mu-1} - \dfrac{\partial^{\mu-1}\varphi}{\partial y^{\mu-1}} = 0 \end{cases}$$

et

$$(21)\quad \begin{cases} p_{\mu,0} - \dfrac{\partial^{\mu}\varphi}{\partial x^{\mu}} = 0, \\ p_{\mu-1,1} - \dfrac{\partial^{\mu}\varphi}{\partial x^{\mu-1}\partial y} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ p_{0,\mu} - \dfrac{\partial^{\mu}\varphi}{\partial y^{\mu}} = 0. \end{cases}$$

Les équations (19) et (20) sont au nombre de $\frac{\mu(\mu+1)}{2}$. Supposons d'abord que, parmi ces équations, il y en ait r qui puissent être résolues par rapport à $a_1, a_2, \dots, a_r$, c'est-à-dire qu'il y en ait r telles que le déterminant fonctionnel des premiers membres par rapport à a_1, $a_2, \dots, a_r$ ne soit pas identiquement nul. On pourra alors tirer de ces r équations $a_1, a_2, \dots, a_r$ en fonction de z, x, y et p_{ik} $(i+k \leqq \mu-1)$ et, en portant ces expressions dans les équations (21), on en conclura que les $\mu+1$ dérivées d'ordre μ de z s'expriment en fonction de x, y, z et des dérivées d'ordre inférieur à μ.

Supposons, en second lieu, que tous les déterminants fonctionnels de r quelconques des premiers membres des équations (19) et (20) par rapport à $a_1, a_2, \dots, a_r$ soient identiquement nuls; ces déterminants seront les mêmes que si les premiers membres ne contenaient pas les quantités p_{ik} et, par suite, expriment qu'il existe des relations entre r quelconques des fonctions φ, $\frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial x^i \partial y^k}$ $(i+k \leqq \mu-1)$. Remarquons, d'ailleurs, que ces relations ne sont certainement pas résolubles par rapport aux μ dérivées de l'ordre $\mu - 1$; car, sans cela, la fonction φ satisferait à un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre $\mu - 1$ dont μ équations sont résolues par rapport aux dérivées d'ordre $\mu - 1$ et, par suite, contiendrait au plus $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ constantes arbitraires, ce qui n'est pas, puisque $r > \frac{\mu(\mu-1)}{2}$ (¹). Soit alors $(r-k)$ le nombre des fonctions φ, $\frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial x^i \partial y^k}$ qui sont distinctes (considérées comme fonctions de $a_1, a_2, \ldots, a_r$) : si toutes les dérivées de l'ordre μ s'expriment en fonction de ces $(r-k)$ dérivées, le théorème sera démontré; sinon, joignons à ces dérivées celles des dérivées de l'ordre μ qui forment avec elles un système de fonctions distinctes et continuons de la sorte : nous arriverons, nécessairement, soit à prouver que toutes les dérivées d'un certain ordre de φ s'expriment en fonctions des dérivées d'ordre inférieur, soit à trouver un nombre m tel qu'il existe r des fonctions φ, $\frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial x^i \partial y^k}$ $(i+k \leqq m-1)$ dont le déterminant fonctionnel par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_r$ est différent de zéro. On pourra alors résoudre r des équations

$$\varphi = 0, \qquad p_{i,k} - \frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial x^i \partial y^k} = 0$$

par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_r$ et, en portant ces valeurs dans les équations

$$p_{0,m} = \frac{\partial^m \varphi}{\partial y^m}, \qquad p_{1,m-1} = \frac{\partial^m \varphi}{\partial x \, \partial y^{m-1}}, \qquad \ldots, \qquad p_{m,0} = \frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m},$$

on en conclura que toutes les dérivées de l'ordre m de z s'expriment en fonction des dérivées d'ordre inférieur.

5. Abordons maintenant le cas général.

Considérons un système (A) d'équations aux dérivées partielles

---

(¹) Nous supposons, évidemment, que les r constantes qui figurent dans la fonction φ sont *essentielles* (wesentlich), c'est-à-dire qu'on ne peut pas diminuer leur nombre.

Voir S. LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, Chap. I.

simultanées entre p fonctions inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_p$ et n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Imaginons que, en adjoignant aux équations du système (A) les équations qu'on en déduit en les dérivant un nombre quelconque de fois par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on puisse former un système (B), équivalent au système (A), tel que, si $s_1, s_2, \ldots, s_p$ sont, respectivement, les ordres des dérivées d'ordre le plus élevé de $z_1, z_2, \ldots, z_p$ qui figurent dans le système (B), un certain nombre des équations de ce système puissent être résolues par rapport à *toutes* les dérivées d'ordre s_1 de z_1, d'ordre s_2 de z_2, ..., d'ordre s_p de z_p. Je dis que, dans ce cas, le système (B) et conséquemment le système (A) admettent comme système le plus général d'intégrales, un système dépendant d'un nombre fini de constantes arbitraires, à moins qu'il ne soit formé d'équations incompatibles.

En effet, en tirant du système (B) les valeurs des dérivées d'ordre s_1, $s_2, \ldots, s_p$ de $z_1, z_2, \ldots, z_p$, en fonction des dérivées d'ordres respectivement inférieurs, et en portant ces valeurs dans les équations restantes, on pourra mettre le système (B) sous la forme suivante

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} z_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} = f^i_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} \qquad (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = s_i;\ i=1,2,\ldots,p), \\ \varphi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_q = 0, \end{cases}$$

où les fonctions $f^i_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ et φ_k désignent des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de $z_1, z_2, \ldots, z_p$ et leurs dérivées d'ordres respectivement inférieurs à $s_1, s_2, \ldots, s_p$, et où, pour chaque indice i, on donne à α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ toutes les valeurs entières, positives ou nulles satisfaisant à l'égalité

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = s_i.$$

Cela étant, introduisons, comme nouvelles fonctions inconnues, toutes les dérivées de $z_1, z_2, \ldots, z_p$ d'ordres respectivement inférieurs à $s_1, s_2, \ldots, s_p$ en posant

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} z_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} = p^i_{\alpha_1,\alpha_2,}$$

pour

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n \leqq s_i - 1.$$

Le système

$$(\mathrm{C})\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial p^i_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_n}}{\partial x_k}=f^i_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_n}\quad(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_n=s_i-1),\\&\frac{\partial p^i_{\beta_1,\ldots,\beta_k,\ldots,\beta_n}}{\partial x_k}=p^i_{\beta_1,\ldots,\beta_k+1,\ldots,\beta_n}\qquad(\beta_1+\ldots+\beta_k+\ldots+\beta_n<s_i-1),\\&\qquad\qquad\varphi_1=0,\qquad\ldots,\qquad\varphi_q=0,\end{aligned}\right.$$

où $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$; $z_1, \ldots, z_p$ et des quantités $p^i_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ est évidemment *équivalent* au système (B), c'est-à-dire qu'à tout système d'intégrales de (C) correspond un système d'intégrales de (B) et inversement. Nous avons vu, d'ailleurs, que le système le plus général d'intégrales de (C) dépendait d'un nombre fini r de constantes arbitraires, et qu'on peut ramener sa recherche à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. Il en sera donc de même pour le système (A).

Remarque. — Posons

$$\omega_q=1+\sum_{i=1}^{i=q}\frac{n(n+1)\ldots(n+i-1)}{1.2\ldots i}.$$

On voit alors aisément que le nombre r est au plus égal à

$$[\omega_{s_1-1}+\omega_{s_2-1}+\ldots+\omega_{s_p-1}].$$

6. Réciproquement, considérons p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de r paramètres arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_r$,

$$(22)\qquad z_1=\varphi_1(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_r),\quad\ldots,\quad z_p=\varphi_p(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_r)$$

(les paramètres sont évidemment supposés *essentiels*).

Je dis qu'on peut trouver p nombres $s_1, s_2, \ldots, s_p$ tels que les dérivées d'ordre $s_1, s_2, \ldots, s_p$ de $z_1, z_2, \ldots, z_p$, par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, puissent s'exprimer en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_p$ et des dérivées de ces fonctions d'ordres respectivement inférieurs à $s_1, s_2, \ldots, s_p$.

Choisissons, en effet, p nombres entiers positifs ou nuls, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$, tels qu'on ait

$$r \leqq \omega_{\sigma_1-1}+\omega_{\sigma_2-1}+\ldots+\omega_{\sigma_p-1}$$

et

$$r > \omega_{\sigma_1-2}+\ldots+\omega_{\sigma_k-2}+\ldots+\omega_{\sigma_p-2}.$$

Écrivons toutes les équations suivantes :

$$(23)\quad p^i_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}-\frac{\partial^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n}\varphi_i}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}=0\quad(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n\overline{\gtrless}\sigma_{i-1};\ i=1,2,\ldots,p)$$

et

$$(24)\quad p^i_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}-\frac{\partial^{\sigma_i}\varphi_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}=0\quad(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\sigma_i;\ i=1,2,\ldots,p).$$

Le nombre total des équations (22) et (23) est égal à

$$(\omega_{\sigma_1-1}+\ldots+\omega_{\sigma_p-1})$$

et, par suite, est supérieur à r. Si, parmi ces équations, on peut en trouver r résolubles par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_r$, on tirera de ces équations $a_1, a_2, \ldots, a_r$ en fonction de $x_1, \ldots, x_n$; $z_1, \ldots, z_p$ et des quantités $p^i_{\beta_1,\ldots,\beta_n}$, et, en portant ces valeurs dans les équations (24), on aura exprimé les dérivées d'ordre σ_i des fonctions z_i en fonction de x_k, z_i et des dérivées, d'ordre inférieur à σ_i, de z_i.

Si ceci est impossible, c'est qu'il existe au moins une relation entre r quelconques des quantités $\frac{\partial^{\beta_1+\ldots+\beta_n}\varphi_i}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}$. D'ailleurs, il est impossible que ces relations puissent être résolues par rapport à toutes les dérivées d'ordre $\sigma_i - 1$ des fonctions z_i; car sans cela les fonctions φ_i ne contiendraient, au plus, que $(\omega_{\sigma_1-2}+\ldots+\omega_{\sigma_p-2})$ constantes arbitraires, et les r constantes $a_1, a_2, \ldots, a_r$ ne seraient pas *essentielles*.

Si toutes les dérivées d'ordre σ_i des fonctions φ_i s'expriment au moyen de ces fonctions elles-mêmes et de leurs dérivées d'ordre inférieur à σ_i, le théorème est démontré, sinon nous adjoindrons aux équations (23) et (22) les équations (24), qui contiennent dès lors des dérivées $\frac{\partial^{\sigma_i}\varphi_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$ qui ne peuvent pas s'exprimer en fonction des dérivées $\frac{\partial^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n}\varphi_i}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}(\beta_1+\ldots+\beta_n\overline{\gtrless}\sigma_{i-1})$.

Si le système ainsi obtenu est résoluble par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_r$, on pourra exprimer les dérivées d'ordre (σ_i+1) des fonctions z_i en fonction des précédentes, sinon.... En continuant de la sorte, on arrivera, soit à montrer que toutes les dérivées d'ordre s_i des fonctions φ_i s'expriment au moyen de φ_i et de leurs dérivées d'ordre inférieur à s_i, soit à trouver des nombres $s_1, s_2, \ldots, s_p$, tels que r équations du système

$$(25)\quad \begin{cases} p^i_{\beta_1,\ldots,\beta_n} - \dfrac{\partial^{\beta_1+\ldots+\beta_n}\varphi_i}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\beta_n}} = 0 & (\beta_1+\ldots+\beta_n \lesseqgtr s_i - 1;\ i = 1, 2, \ldots, p), \\ z_i - \varphi_i = 0 \end{cases}$$

soient résolubles par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_r$, et, en portant ces valeurs dans les équations

$$p^i_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} - \frac{\partial^{s_i}\varphi_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} = 0 \qquad (\alpha_1+\ldots+\alpha_n = s_i;\ i = 1, 2, \ldots, p),$$

on aura exprimé les dérivées d'ordre s_i des fonctions z_i au moyen de x_k, z_i et des dérivées d'ordres respectivement inférieurs à s_i.

7. Pour compléter enfin ce qui précède, nous démontrerons la proposition suivante :

Théorème V. — *Étant donné un système* (A) *d'équations algébriques aux dérivées partielles simultanées entre* p *fonctions* $z_1, z_2, \ldots, z_p$ *et* n *variables indépendantes* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *admettant au moins un système d'intégrales, toute équation algébrique aux dérivées partielles entre les mêmes fonctions qui est vérifiée par le système le* PLUS GÉNÉRAL *d'intégrales holomorphes du système* (A) *est nécessairement une conséquence algébrique des équations du système* (A) *ou des équations qu'on peut former en les dérivant un nombre quelconque de fois par rapport à* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soit, en effet, $F = 0$ une équation algébrique admettant *toutes* les intégrales *holomorphes* du système (A). Adjoignons au système (A) *toutes* les équations (en nombre infini) qu'on peut en déduire par des dérivations. Nous formerons ainsi un système (S) d'équations aux dérivées partielles, en nombre infini, qui sera équivalent au système (A). Si le système (A) admet au moins un système d'intégrales, le système (S) sera compatible et l'on pourra le résoudre par rapport à certaines des dérivées des fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$, que nous appellerons dérivées de la *première catégorie*, de manière à exprimer ces dérivées en fonction des autres que nous appellerons dérivées de la *seconde catégorie*. Même on peut toujours faire cette résolution de telle façon qu'une dérivée quelconque de la première catégorie soit exprimée en fonction de dérivées de la seconde catégorie dont les ordres soient au plus égaux au sien.

Les coefficients des développements, suivant les puissances croissantes de $(x_k - x_k^0)$, des intégrales du système (A), holomorphes au voisinage du point $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, sont, à des facteurs numériques près, les valeurs des dérivées des fonctions z_i pour $x_k = x_k^0$; nous obtiendrons alors les intégrales les plus générales en donnant aux dérivées de la seconde catégorie des *valeurs arbitraires*, pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$, et en prenant pour les dérivées de la première catégorie, pour $x_k = x_k^0$, les valeurs correspondantes fournies par le système (S).

En effet, nous montrerons plus loin que les développements ainsi calculés pour $z_1, z_2, \ldots, z_p$ sont convergents *quelles que soient* les valeurs initiales des dérivées de la seconde catégorie, pourvu que ces valeurs initiales restent comprises dans des domaines convenablement choisis. Il est clair, d'ailleurs, que ces développements vérifient le système (A); car, si

$$(\mathrm{A}) \qquad f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_q = 0$$

sont les équations du système (A) et si $(f_1), (f_2), \ldots, (f_q)$ désignent les fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qu'on déduit de $f_1, f_2, \ldots, f_q$, en y substituant à $z_1, z_2, \ldots, z_p$ les développements précédents, les fonctions $(f_1), (f_2), \ldots, (f_q)$ seront identiquement nulles, puisqu'en vertu des conditions initiales ces fonctions, *ainsi que toutes leurs dérivées*, sont nulles pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$.

Cela étant, remplaçons dans la fonction F toutes les dérivées de la première catégorie qu'elle contient en fonction des dérivées de la seconde catégorie. Si le résultat de cette substitution n'était pas identiquement nul, l'équation $\mathrm{F} = 0$ fournirait une relation entre les dérivées de la seconde catégorie qu'on ne pourrait, par conséquent, prendre arbitrairement. L'équation $\mathrm{F} = 0$ n'admettrait donc pas *toutes* les intégrales du système (A).

Ce théorème, joint aux résultats que nous avons trouvés dans les paragraphes précédents, nous permet d'énoncer la proposition suivante :

La condition NÉCESSAIRE *et* SUFFISANTE *pour qu'un système* (A) *d'équations aux dérivées partielles simultanées entre p fonctions* $z_1, z_2, \ldots, z_p$ *et*

n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ admette, comme système LE PLUS GÉNÉRAL *d'intégrales un système dépendant d'un nombre* FINI *de constantes arbitraires, ou soit incompatible, est, qu'en adjoignant aux équations de ce système certaines des équations qu'on peut en déduire en les dérivant une ou plusieurs fois par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on puisse former un second système (B), équivalent au système (A), tel qu'on puisse tirer de ce système* TOUTES *les dérivées des fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$, respectivement, d'ordres $s_1, s_2, \ldots, s_p$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_p$ et de leurs dérivées d'ordres respectivement inférieurs à $s_1, s_2, \ldots, s_p$.*

Lorsque cette condition est remplie, on peut ramener l'intégration du système (A) à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaire du premier ordre.

Nous allons appliquer la méthode que nous venons d'exposer à quelques exemples :

8. *Exemple I* [1]. — Soit à intégrer les deux équations

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial x};$$

on voit immédiatement qu'on a

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}.$$

Prenons comme nouvelles fonctions les dérivées premières et secondes, et nous sommes ramené au système

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \dfrac{\partial z}{\partial x} = p, & \dfrac{\partial z}{\partial y} = q, & & \\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial x} = r, & \dfrac{\partial p}{\partial y} = s, & \dfrac{\partial q}{\partial x} = s, & \dfrac{\partial q}{\partial y} = t, \\[2mm] \dfrac{\partial r}{\partial x} = s, & \dfrac{\partial r}{\partial y} = t, & \dfrac{\partial t}{\partial x} = r, & \dfrac{\partial t}{\partial y} = s, \\[2mm] \dfrac{\partial s}{\partial x} = t, & \dfrac{\partial s}{\partial y} = r, & & \end{array} \right.$$

---

(1) *Voir* VALYI, *Journal de Crelle*, t. 95.

avec

$$(B) \qquad r = q, \qquad t = p.$$

L'application de notre méthode (théorème IV) nous conduit au système complètement intégrable

$$(C) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = p, & \dfrac{\partial z}{\partial y} = q, & \dfrac{\partial p}{\partial x} = q, & \dfrac{\partial p}{\partial y} = s, \\ \dfrac{\partial q}{\partial x} = s, & \dfrac{\partial q}{\partial y} = p, & \dfrac{\partial s}{\partial x} = p, & \dfrac{\partial s}{\partial y} = q, \end{cases}$$

et la transformation de du Bois-Reymond (théorème III)

$$x = u, \qquad y = uv$$

donne le système différentiel suivant

$$\frac{dz}{du} = p + qv, \qquad \frac{dp}{du} = q + sv,$$
$$\frac{dq}{du} = s + pv, \qquad \frac{ds}{du} = q + qv,$$

dont on tire, en intégrant, pour z,

$$z = C_1 + C_2 e^{u(1+v)} + e^{-\frac{u(1+v)}{2}} \left[C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} u(1-v) + C_4 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} u(1-v) \right].$$

En remontant aux anciennes variables, on en conclut que l'intégrale générale du système proposé est

$$z = C_1 + C_2 e^{x+y} + e^{-\frac{x+y}{2}} \left[C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} (x-y) + C_4 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} (x-y) \right],$$

où C_1, C_2, C_3, C_4 désignent quatre constantes arbitraires

Exemple II. — Considérons le système

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = f'(z), \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = a \frac{\partial z}{\partial y},$$

où $f'(z)$ désigne la dérivée d'une fonction de z. On a immédiatement les trois dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a f'(z), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f'(z), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{a} f'(z).$$

Le système auxiliaire est alors

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$
$$\frac{\partial p}{\partial x} = a f'(z), \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = f'(z), \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = f'(z), \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{a} f'(z)$$

avec

$$p = aq.$$

Il se ramène au système complètement intégrable

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{p}{a},$$
$$\frac{\partial p}{\partial x} = a f'(z), \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = f'(z).$$

Posons $x = u$, $y = uv$, et il nous reste à intégrer le système différentiel

$$\frac{dz}{du} = p\left(1 + \frac{v}{a}\right), \qquad \frac{dp}{du} = f'(z)\,(a + v);$$

on en conclut que l'intégrale générale z dépend de deux constantes arbitraires et est fournie par la relation

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{2}{a} f(z) + C}} = ax + y + C_1.$$

Exemple III. — Soient les deux équations

$$z^2 \frac{\partial^2 \log z}{\partial x\, \partial y} = a z^3, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0;$$

on en tirefacilement

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -3 a z^2 \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -3 a z^2 \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}};$$

on est amené au système

$$(\mathrm{A})\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial z}{\partial x}=p, && \frac{\partial z}{\partial y}=q,\\ &\frac{\partial p}{\partial x}=-3az^2\frac{p}{q}, && \frac{\partial p}{\partial y}=0,\\ &\frac{\partial q}{\partial x}=0, && \frac{\partial q}{\partial y}=-3az^2\frac{q}{p},\end{aligned}\right.$$

avec la relation

$$(\mathrm{B})\qquad pq+az^3=0.$$

Si l'on écrit les conditions d'intégrabilité du système (A), on trouve la condition nouvelle

$$2pq+3az^3=0,$$

qui, jointe à la condition (B) et au système (A), nous montre qu'il faudrait avoir $z=0$. La seule intégrale du système proposé est donc $z=0$.

Exemple IV. — Soit à intégrer le système

$$\frac{\partial^2\log z}{\partial x\,\partial y}=az,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

On en tire immédiatement les quatre dérivées du troisième ordre en fonction des autres

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}=2az\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=2az\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}.$$

Il nous faut donc prendre comme nouvelles fonctions les dérivées premières p, q et les dérivées secondes r, s, t. En appliquant la méthode générale, on est alors ramené au double système

$$
(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x}=p, && \frac{\partial z}{\partial y}=q,\\
&\frac{\partial p}{\partial x}=r, && \frac{\partial p}{\partial y}=az^2+\frac{pq}{z},\\
&\frac{\partial q}{\partial x}=az^2+\frac{pq}{z}, && \frac{\partial q}{\partial y}=r,\\
&\frac{\partial r}{\partial x}=3aqz+\frac{pr}{z}, && \frac{\partial r}{\partial y}=3apz+\frac{qr}{z}
\end{aligned}\right.
$$

et

$$
(\mathrm{B})\qquad s=az^2+\frac{pq}{z},\qquad t=r.
$$

Le système (A) est complètement intégrable, comme il est aisé de le vérifier; l'intégrale générale du système proposé dépend donc de quatre constantes arbitraires.

Le changement de variables $x=u$, $y=uv$ nous conduit alors au système d'équations différentielles suivant :

$$
(\mathrm{C})\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dz}{\partial u}=p+qv,\\
&\frac{dp}{du}=r+v\left(az^2+\frac{pq}{z}\right),\\
&\frac{dq}{du}=az^2+\frac{pq}{z}+rv,\\
&\frac{dr}{du}=3az(q+pv)+\frac{r}{z}(p+qv).
\end{aligned}\right.
$$

Soit $\mathfrak{p}(u)$ la fonction elliptique de M. Weierstrass, qui dépend de deux constantes arbitraires g_2 et g_3, et est définie par l'équation différentielle

$$
\frac{d\,\mathfrak{p}(u)}{du}=\sqrt{4\mathfrak{p}^3(u)-g_2\mathfrak{p}(u)-g_3};
$$

en posant

$$
\theta=\sqrt{\frac{a}{2}}\,u(1+v)+\alpha,\qquad \tau=\sqrt{\frac{a}{2}}\,u(1-v)+\beta,
$$

l'intégrale générale du système (C) est

$$z = \wp(\theta) - \wp(\tau),$$
$$p = \sqrt{2a\wp^3(\theta) - \frac{ag_2}{2}\wp(\theta) - \frac{ag_3}{2}} - \sqrt{2a\wp^3(\tau) - \frac{ag_2}{2}\wp(\tau) - \frac{ag_3}{2}},$$
$$q = \sqrt{2a\wp^3(\theta) - \frac{ag_2}{2}\wp(\theta) - \frac{ag_3}{2}} + \sqrt{2a\wp^3(\tau) - \frac{ag_2}{2}\wp(\tau) - \frac{ag_3}{2}},$$
$$r = 3a[\wp^2(\theta) - \wp^2(\tau)].$$

L'intégrale générale du système proposé est donc

$$\text{(I)} \qquad z = \wp\left[\sqrt{\frac{a}{2}}(x+y) + \alpha\right] - \wp\left[\sqrt{\frac{a}{2}}(x-y) + \beta\right],$$

intégrale qui dépend bien de quatre constantes arbitraires g_2, g_3, α, β.

Il y a un cas particulier intéressant : c'est celui où l'on a

$$g_2^3 = 27g_3^2.$$

Dans ce cas, la fonction $\wp(u)$ dégénère et l'intégrale (I) prend la forme

$$\text{(II)} \qquad z = \frac{8h^2}{a(e^{h(x+y)+\alpha} - e^{-h(x+y)-\alpha})^2} - \frac{8h^2}{a(e^{h(x-y)+\beta} - e^{-h(x-y)-\beta})^2},$$

où h, α, β désignent trois constantes arbitraires.

D'autre part, il est aisé de vérifier que les deux fonctions

$$z_1 = \frac{8h^2}{a(e^{h(x+y)+\alpha} - e^{-h(x+y)-\alpha})^2},$$
$$z_2 = \frac{8k^2}{a(e^{k(x-y)+\beta} - e^{-k(x-y)-\beta})^2},$$

qui dépendent chacune de deux constantes arbitraires, sont aussi des intégrales du système proposé. On voit donc que, pour $h = k$, la différence $z_1 - z_2$ est une intégrale. Les intégrales z_1 et z_2 se déduisent de l'intégrale (II) en donnant une valeur infiniment grande à l'une des deux constantes α ou β. On peut, d'ailleurs, trouver immédiatement ces deux intégrales en cherchant les intégrales du système (C) qui vérifient les deux relations

$$q = \varepsilon q, \qquad r = \varepsilon a z^2 + \frac{p^2}{z},$$

où l'on a posé $\varepsilon = \pm 1$. Ce sont aussi les intégrales générales des deux systèmes

$$\frac{\partial^2 \log z}{\partial x\, \partial y} = a z, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial z}{\partial x}.$$

DEUXIÈME PARTIE.

9. *Définitions.*

I. Étant donné un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, *linéaire*, entre m fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ et n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, résolu par rapport à un certain nombre des dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \psi_{ik}, \tag{1}$$

nous dirons que ce système est mis sous forme *canonique* ou, plus brièvement, est *canonique* si les fonctions ψ_{ik} de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; u_1, $u_2, \ldots, u_m$, et des dérivées de $u_1, u_2, \ldots, u_m$ (qui contiennent, d'ailleurs, linéairement ces dérivées) satisfont aux conditions suivantes :

1° ψ_{ik} ne contient que des dérivées par rapport aux variables x_h dont l'indice h est *égal ou supérieur à* k;

2° Si une dérivée $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}$ d'une fonction u_j par rapport à la variable x_k figure dans ψ_{ik}, l'indice j de cette fonction est *supérieur à* i.

Un système canonique pourra donc être écrit sous la forme

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = a_{oo}^{ik} + \sum_{j>i} a_{jk}^{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{h>k} a_{sh}^{ik} \frac{\partial u_s}{\partial x_h}, \tag{2}$$

où les quantités a_{sh}^{ik} sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; u_1,

II. Étant donné le système canonique (2), nous dirons que la variable x_r est *principale* ou *paramétrique par rapport à la fonction* u_i suivant que la dérivée $\frac{\partial u_i}{\partial x_r}$ figure dans un des premiers membres des équations (2) ou n'y figure pas.

Nous dirons, de même, qu'une dérivée d'ordre quelconque de u_i est *paramétrique* si *toutes* les variables par rapport auxquelles cette dérivée a été prise sont *paramétriques;* dans le cas contraire, nous dirons que cette dérivée est *principale.*

D'une manière plus précise, une dérivée sera *simplement, doublement, ..., r-uplement principale* suivant qu'elle contiendra 1, 2, ..., r variables principales distinctes ou confondues.

III. Enfin un système canonique (2) sera dit *complètement intégrable* si les relations, qu'on obtient en écrivant que les deux valeurs d'une dérivée seconde *doublement principale* d'une fonction u_i sont égales, sont identiquement vérifiées en tenant compte des équations (2) elles-mêmes et des équations dérivées.

Pratiquement, voici comment on pourra vérifier si un système est complètement intégrable : on dérivera, une fois, par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, toutes les équations (2). On obtiendra ainsi un système dont les premiers membres contiendront, au moins une fois, toutes les dérivées principales du second ordre des fonctions $u_1, \ldots, u_m$. Nous prendrons alors dans ce système un système (A) d'équations dont les premiers nombres contiennent *une seule fois* les dérivées principales des fonctions $u_1, \ldots, u_m$. Désignons par (B) le système formé par les équations du second ordre restantes. Il est clair que les systèmes (2) et (A) pourront être résolus par rapport à toutes les dérivées principales du premier et du second ordre des fonctions u_i.

En portant les valeurs ainsi trouvées des dérivées principales en fonction des dérivées paramétriques dans le système (B), les équations de ce système devront être *identiquement* vérifiées [1].

---

[1] Les expressions *principales* et *paramétriques* sont empruntées à MM. Méray et Riquier (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. VIII, p. 23; 1890).

MM. Méray et Riquier nomment *passifs* les systèmes que nous avons appelés *complètement intégrables.* Nous avons trouvé qu'il y avait intérêt à conserver l'expression *complètement intégrable* qui avait déjà été employée dans des conditions analogues.

10. THÉORÈME VI. — *Tout système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre,* LINÉAIRE, *entre m fonctions* $u_1, \ldots, u_m$ *et n variables* $x_1, \ldots, x_n$ *peut (avec un choix convenable de la notation) être mis sous forme* CANONIQUE.

Soit, en effet, (A) un système d'équations aux dérivées partielles linéaires. Tirons de ce système le plus grand nombre de dérivées des fonctions $u_1, \ldots, u_m$ par rapport à la variable x_1 qu'on en puisse tirer en fonction des autres. Nous pourrons toujours supposer, sans restriction, qu'on puisse ainsi tirer $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_p}{\partial x_1}$ en fonction de $x_1, \ldots, x_n$; $u_1, \ldots, u_m$, de $\frac{\partial u_{p+1}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial x_1}$ et des dérivées par rapport à $x_2, \ldots, x_n$. En portant ces valeurs de $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_p}{\partial x_1}$ dans les équations restantes du système (A), nous obtiendrons des équations linéaires et ne contenant plus aucune dérivée par rapport à x_1 : soit (B) le système ainsi obtenu et (G_1) le système formé par les équations résolues par rapport à $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_p}{\partial x_1}$. L'ensemble de (G_1) et (B) est évidemment équivalent au système (A), et (G_1) satisfait aux conditions d'un système canonique.

Supposons alors que (B) contienne des dérivées par rapport à x_2 et résolvons d'abord le système (B) par rapport au plus grand nombre des dérivées $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u_p}{\partial x_2}$ par rapport auxquelles on peut résoudre : nous pouvons toujours supposer qu'on puisse ainsi tirer

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u_{p'}}{\partial x_2} \qquad (p' \leqq p),$$

et, en portant les valeurs de ces dérivées dans les équations restantes, on aura un système qui ne contiendra plus que des dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_2}$ pour lesquelles i est supérieur à p. Résolvons encore ce système par rapport aux dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_2}$ qu'il contient, nous tirerons ainsi $\frac{\partial u_{p+1}}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u_{p+q}}{\partial x_2}$ en fonction de $u_1, \ldots, u_m$; $x_1, \ldots, x_n$, des dérivées $\frac{\partial u_{p+q+1}}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial x_2}$ et des dérivées par rapport aux variables $x_3, \ldots, x_n$. Par cette opération, nous aurons remplacé le système (B) par un système (G_2) canonique, formé d'équations résolues par rapport aux dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_2}$ et un système (C) ne contenant plus que des dérivées par rapport aux variables $x_3, x_4, \ldots, x_n$.

Supposons que le système (C) contienne des dérivées par rapport à x_3 :

1° Nous en tirerons toutes les dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_3}$, pour lesquelles

$$i \leqq p';$$

soit

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial u_{p''}}{\partial x_3} \qquad (p'' \leqq p')$$

qu'on peut tirer, et nous porterons leurs valeurs dans les équations restantes, qui ne contiendront plus que des dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_3}$, pour lesquelles i est supérieur à p';

2° Des équations restantes, nous tirerons les dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_3}$, pour lesquelles

$$p' < i \leqq p,$$

qu'on peut tirer; soit

$$\frac{\partial u_{p'+1}}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial u_{p'+k}}{\partial x_3} \qquad (p'+k \leqq p),$$

et nous porterons leurs valeurs dans les équations restantes;

3° Nous tirerons de celles-ci les dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_3}$, pour lesquelles

$$p < i \leqq p + q;$$

soit

$$\frac{\partial u_{p+1}}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial u_{p+q'}}{\partial x_3} \qquad (q' \leqq q);$$

4° Nous tirerons les dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_3}$, où

$$i > p + q;$$

soit

$$\frac{\partial u_{p+q+1}}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial u_{p+q+h}}{\partial x_3}.$$

Nous décomposerons ainsi (C) en deux systèmes (G_3) et (D) : (G_3) étant canonique et résolu par rapport aux dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_3}$, (D) ne contenant plus que des dérivées par rapport à $x_4, \ldots, x_n$. L'ensemble des systèmes (G_1), (G_2), (G_3), (D) est évidemment équivalent au système (A); en continuant la résolution de la sorte, on voit bien que l'on finira par remplacer le système (A) par un système (G_1), (G_2), ..., (G_r) canonique équivalent, (G_k) désignant un groupe d'équations résolues par rapport aux dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$.

Remarque. — Le procédé que nous venons d'exposer semblerait tomber en défaut si, au bout de k opérations, par exemple, on trouvait un système (G_1), (G_2), ..., (G_k), (L) équivalent au système (A), et tel que le système (L) ne contienne plus aucune dérivée des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$, mais, dans ce cas, les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ vérifiant le système (A) seraient liées par les relations (L), qu'on pourra résoudre par rapport à un certain nombre d'entre elles, de façon à les exprimer en fonction des autres et des variables $x_1, \ldots, x_n$. En portant ces valeurs dans les équations (G_1), ..., (G_k), on aura un système (A′) linéaire, contenant un nombre moindre de fonctions, on mettra le système (A′) sous forme canonique, et finalement le système (A) sera remplacé par l'ensemble d'un système canonique (Γ) et d'un système (R) de relations ne contenant aucune dérivée.

Il suffira donc d'étudier le système (Γ).

THÉORÈME VII. — *Dans tout système canonique, les dérivées secondes,* SIMPLEMENT PRINCIPALES, *des fonctions inconnues peuvent être calculées au moyen des équations du système en fonction des dérivées premières et des dérivées secondes paramétriques et chacune d'elles a une valeur* BIEN DÉTERMINÉE.

Soit, en effet, le système canonique

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \psi_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Supposons que les variables $x_{r+1}, \ldots, x_n$ soient paramétriques pour *toutes* les fonctions, et rangeons les équations de ce système en un Tableau rectangulaire, de telle façon que l'équation

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \psi_{ik}$$

occupe la ligne de rang i et la colonne de rang k. Le Tableau aura ainsi m lignes et r colonnes; d'ailleurs, certaines des cases de ce Tableau pourront être inoccupées. Remarquons, tout d'abord, que toutes les dérivées simplement principales $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_h}$ où l'indice h est supérieur à r seront immédiatement fournies en fonction des dérivées premières et des dérivées paramétriques par

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_h} = \frac{d}{dx_h}(\psi_{ik}),$$

car le second membre ne contiendra que des dérivées premières ou des dérivées secondes paramétriques.

Supposons en second lieu que h soit inférieur ou égal à r. Dans le second membre de l'équation (B), il pourra figurer certaines dérivées secondes simplement principales, car x_h est principale pour certaines fonctions. Supposons, par exemple, qu'il y figure la dérivée $\frac{\partial^2 u_s}{\partial x_l \partial x_h}$. Le système étant canonique, l sera plus grand ou égal à k.

1° Soit $l = k$. Reportons-nous alors à la colonne de rang h dans laquelle figure l'équation

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial u_s}{\partial x_h} = \psi_{sh},$$

et dérivons par rapport à x_k

$$\text{(D)} \qquad \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_k \partial x_h} = \frac{d}{dx_k}(\psi_{sh}).$$

Remarquons que, puisque $\frac{\partial u_s}{\partial x_k}$ figure dans ψ_{ik}, c'est que $s > i$ et l'équation (C) se trouve dans une ligne plus basse que l'équation (A).

Le second membre de l'équation (D) peut contenir des dérivées principales. Supposons qu'il contienne $\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_t \partial x_k}$; t sera égal ou supérieur à h.

(a). $t = h$: alors $p > s > i$, et nous serons ramenés à la colonne de rang k, mais dans une ligne de rang supérieur à i.

(b). $t > h$: nous serons ramenés à considérer l'équation

$$\frac{\partial u_p}{\partial x_k} = \psi_{pk}$$

de la colonne de rang k, et si l'équation

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_k \partial x_t} = \frac{d}{dt}(\psi_{pk})$$

contient, dans le second membre, une dérivée principale, il nous faudra revenir à la colonne t de rang *supérieur à* h.

2° Soit $l > k$. Considérons l'équation (C) et dérivons-la par rapport à x_l :

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_h \partial x_l} = \frac{d}{dx_l}(\psi_{sh}).$$

Si dans le second membre il existe des dérivées secondes simplement principales, on sera ramené à considérer une équation de la colonne de rang l, où $l > k$.

Remarquons qu'en continuant de la sorte le cas $l = k$, $t = h$ [1°, (a)] ne pourra pas se présenter indéfiniment, car, puisque à chaque fois on est ramené à une équation située dans une ligne de rang plus élevé, on arrivera au moins, au bout de m opérations, à considérer une colonne de rang supérieur à h ou k.

On en conclut que, par la suite, on arrivera finalement soit à une dérivée seconde, simplement principale, qui s'exprime en fonction des dérivées paramétriques, soit à considérer une équation de la colonne de rang r,

$$\text{(F)} \qquad \frac{\partial u_q}{\partial x_r} = \psi_{qr}.$$

En dérivant par rapport à x_j, on obtient

$$\text{(H)} \qquad \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_r \partial x_j} = \frac{d}{dx_j}(\psi_{qr}).$$

Si le second membre contient des dérivées principales, elles seront ou bien de la forme $\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_{r+\alpha}}$ qui sont connues, ou bien de la forme $\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_r}\cdot$ Dans ce dernier cas, on sera ramené à considérer une équation de la colonne j, qui pourra, tout au plus, vous conduire à une équation de la colonne r située dans une ligne de rang supérieur à q, et au bout d'un certain nombre d'opérations on arrivera nécessairement à quitter la colonne de rang r, c'est-à-dire à exprimer les dérivées en fonction des dérivées simplement principales connues de la forme

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\,\partial x_{r+\alpha}}\cdot$$

On voit par là qu'on pourra ranger les dérivées secondes, simplement principales, en une ou plusieurs séries, telles que la $(p+1)^{\text{ième}}$ dérivée d'une série s'exprime au moyen des p premières, et, par suite, qu'on pourra calculer toutes les dérivées de proche en proche, et que leurs valeurs seront *bien déterminées*.

11. Lemme. — *Si l'on désigne par* μ, α_1, α_2, $\ldots$, α_n, β_1, β_2, $\ldots$, β_m *des constantes positives quelconques, par* ε *une constante positive plus petite que* 1, *et si l'on pose, pour abréger,*

$$\tau = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_m u_m,$$

$$\Theta(\tau) = \frac{1}{1-\tau},$$

le système différentiel total, complètement intégrable suivant

$$\frac{\beta_i}{\alpha_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\mu\Theta(\tau)}{1-\varepsilon\Theta(\tau)} \qquad (i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n), \tag{3}$$

admet un système d'intégrales holomorphes au voisinage du point $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, *qui, pour* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ *se réduisent à zéro, et dont toutes les dérivées ont des valeurs essentiellement réelles et* POSITIVES *pour* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

(Nous renverrons le lecteur, pour la démonstration de ce lemme, au Mémoire déjà cité de MM. Méray et Riquier, p. 47.)

12. Théorème VIII. — *Étant donné, d'une part, le système canonique* COMPLÈTEMENT INTÉGRABLE *d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre*

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = a_{00}^{ik} + \sum_{j>i} a_{jk}^{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{h>k} a_{sh}^{ik} \frac{\partial u_s}{\partial x_h} \tag{2}$$

entre m fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ et n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et, d'autre part, m fonctions arbitraires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, holomorphes au voisinage du point $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$, telles que φ_i ne contienne que celles des variables x_k qui sont PARAMÉTRIQUES POUR LA FONCTION *u_i et se réduisent respectivement à $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0$, pour $x_k = x_k^0$.*

Si les coefficients a_{sh}^{ik} sont holomorphes au voisinage des valeurs $x_k = x_k^0$, $u_i = u_i^0$, il existe UN SEUL *système de fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$, holomorphes au voisinage du point $x_k = x_k^0$, vérifiant le système (2) et telles que u_i se réduise à φ_i lorsqu'on y remplace les variables x_k, qui sont principales pour elle, respectivement par x_k^0.*

Remarquons, tout d'abord, que nous pouvons toujours supposer que les fonctions φ_i sont identiquement nulles et de même que $x_k^0 = 0$; car cela revient à remplacer dans les équations (2) les quantités u_i par $u_i - \varphi_i$, $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ par $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$, et ensuite x_k par $x_k - x_k^0$, et il est clair qu'une telle transformation conserve au système sa forme canonique et le transforme en un nouveau système complètement intégrable [1].

Cela étant, on voit que, s'il existe un système d'intégrales, holomorphe au voisinage du point $x_k = 0$, vérifiant le système (2) et tel que u_i se réduise identiquement à zéro, quand on y annule les variables principales, les coefficients des développements de ces intégrales seront fournis par les conditions initiales jointes aux équations (2). En effet, les coefficients de ces développements sont, à des facteurs numériques près, les valeurs des dérivées des fonctions u_i

---

[1] Il faut cependant que les dérivées $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ des fonctions φ_i soient holomorphes au voisinage du point $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$.

pour $x_1 = \ldots = x_n = 0$

$$\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} u_i}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}}\right)_{x_1=\ldots=x_n=0}.$$

En vertu des conditions initiales, les valeurs de toutes les dérivées paramétriques seront égales à zéro pour $x_1 = \ldots = x_n = 0$. En différentiant convenablement les équations

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = a_{00}^{ik} + \ldots$$

par rapport à des variables paramétriques pour u_i, puis en faisant $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, et en remplaçant les fonctions u_i et leurs dérivées paramétriques par zéro, on aura toutes les valeurs des dérivées simplement principales pour $x_1 = \ldots = x_n = 0$, et ces dérivées seront *bien déterminées,* en vertu du théorème VII, puisque le système (2) est *canonique.*

Si l'on différentie, ensuite, les équations une fois par rapport à *une* variable principale et un nombre quelconque de fois par rapport à des variables paramétriques, elles fourniront les dérivées doublement principales en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ des fonctions u_i, de leurs dérivées paramétriques et de leurs dérivées simplement principales, et, comme le système est *complètement intégrable,* elles fourniront une seule valeur pour chacune de ces dérivées. En annulant alors toutes les variables, les fonctions et leurs dérivées paramétriques, et en donnant aux dérivées simplement principales les valeurs calculées, on aura ainsi les valeurs des dérivées doublement principales pour $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

En différentiant les équations (2) *deux* fois par rapport à des variables principales, et un nombre quelconque de fois par rapport à des variables paramétriques, elles fourniront les valeurs des dérivées triplement principales en fonction de $x_1, \ldots, x_n$, de $u_1, \ldots, u_m$ et de leurs dérivées paramétriques, simplement et doublement principales. D'ailleurs, le système étant complètement intégrable, il est aisé de se rendre compte que l'on n'obtiendra ainsi qu'*une seule* valeur pour chacune de ces dérivées. En annulant les variables, les fonctions u_i et leurs dérivées paramétriques, et en donnant aux dérivées simplement et doublement principales leurs valeurs calculées précédemment, on obtiendra ainsi les valeurs de toutes les dérivées triplement principales pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

En continuant de la sorte, on calculera, évidemment, sans ambiguïté, les valeurs initiales de toutes les dérivées principales.

Ceci nous montre, d'abord, que s'il existe un système de fonctions u_i satisfaisant à l'énoncé, il en existera *un seul*. D'autre part, il est aisé de se rendre compte que, si les développements formés avec les coefficients calculés comme nous venons de l'indiquer sont *convergents*, les fonctions régulières u_i qu'ils représentent vérifient les équations (2). En effet, désignons par $\mathcal{F}_{ik}$ la fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que l'on obtient en remplaçant les quantités u_i dans les expressions

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - a_{00}^{ik} - \sum_{j>i} a_{jk}^{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \sum_{h>k} a_{hs}^{ik} \frac{\partial u_s}{\partial x_h}$$

par ces développements. Les fonctions $\mathcal{F}_{ik}$ seront, d'après la manière même dont nous avons calculé les coefficients des développements, nulles *ainsi que toutes leurs dérivées* pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$; elles sont donc *identiquement nulles*, puisqu'elles sont holomorphes.

Pour démontrer le théorème, il ne reste donc plus qu'à démontrer la convergence de ces développements.

Nous rappellerons d'abord la proposition suivante : Étant donnée une fonction $f(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)$ des variables x_k et u_i holomorphe au voisinage des valeurs $x_k = 0$, $u_i = 0$ dans un domaine de rayon ρ, soit M une quantité positive supérieure ou égale au plus grand des modules des diverses valeurs que la fonction acquiert lorsque les variables prennent toutes les valeurs possibles dans des domaines de rayons ρ autour de leurs valeurs initiales. La fonction suivante

$$M\Theta(\tau) = \frac{M}{1-\tau}, \qquad \text{où} \qquad \tau = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_m u_m,$$

et dans laquelle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m$ désignent des quantités positives au moins égales à $\frac{1}{\rho}$, est *majorante* pour la fonction $f(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)$, au point $x_k = 0$, $u_i = 0$, c'est-à-dire que pour $x_k = 0$, $u_i = 0$, la fonction $M\Theta(\tau)$, *ainsi que toutes ses dérivées*, acquièrent des valeurs réelles, positives, respectivement supérieures ou égales aux modules des valeurs de la fonction $f(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)$ et de ses dérivées correspondantes pour $x_k = 0$, $u_i = 0$.

Cela étant, désignons par p_{ik} le nombre total des termes qui se trouvent sous les *deux* signes Σ dans le second membre de l'équation $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = a_{00}^{ik} + \ldots$ du système (2) et considérons le système auxiliaire suivant

$$(2') \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \mu \frac{\alpha_k}{\beta_i} \Theta(\tau) + \frac{\varepsilon}{p_{ik}} \Theta(\tau) \left(\sum_{j>i} \frac{\beta_j}{\beta_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{h>k} \frac{\beta_s}{\beta_i} \frac{\alpha_k}{\alpha_h} \frac{\partial u_s}{\partial x_h} \right),$$

où, dans chaque équation, sous les signes Σ, les indices j, s et h ne prennent que les valeurs qu'ils ont, sous les mêmes signes, dans l'équation correspondante du système (2) et où ε désigne une quantité positive plus petite que 1. On voit, immédiatement, que si, dans les seconds membres des équations de ce système, on remplace les quantités $\frac{\beta_s}{\alpha_h} \frac{\partial u_s}{\partial x_h}$, $\frac{\beta_j}{\alpha_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$ par $\frac{\beta_i}{\alpha_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$, on retrouve des équations du système (3) du lemme. On en conclut que le système (2′) admet toutes les intégrales du système (3) et, par suite, qu'il admet un système d'intégrales $u_1 = \varphi_1$, $u_2 = \varphi_2, \ldots, u_m = \varphi_m$, holomorphes au voisinage du point $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, qui, pour ce point, se réduisent à zéro et dont toutes les dérivées ont des valeurs positives pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Soit, alors, ρ le rayon du domaine de régularité des fonctions a_{hs}^{ik} autour du point $x_k = 0$, $u_i = 0$ et M une quantité positive égale ou supérieure au plus grand des modules des diverses valeurs de *toutes* ces fonctions dans ce domaine; je dis qu'on peut choisir les constantes μ, α_k et β_i, de façon que l'on ait, à la fois,

$$\frac{\varepsilon}{p_{ik}} \frac{\beta_j}{\beta_i} \geqq \mathrm{M} \quad (j > i), \qquad \frac{\varepsilon}{p_{ik}} \frac{\beta_s}{\beta_i} \frac{\alpha_k}{\alpha_h} \geqq \mathrm{M} \quad (h > k)$$

avec

$$\mu \frac{\alpha_k}{\beta_i} \geqq \mathrm{M}, \qquad \alpha_k \geqq \frac{1}{\rho}, \qquad \beta_i \geqq \frac{1}{\rho}.$$

En effet, désignons par η la plus petite des quantités $\frac{\varepsilon}{p_{ik}}$ et posons $\mathrm{N} = \frac{\mathrm{M}}{\eta}$, si on prend

$$\beta_1 = \frac{1}{\rho}, \qquad \beta_2 = \frac{\mathrm{N}}{\rho}, \qquad \ldots, \qquad \beta_m = \frac{\mathrm{N}^{m-1}}{\rho},$$

on vérifiera les inégalités

$$\beta_i \geqq \frac{1}{\rho}, \qquad \frac{\varepsilon}{p_{ik}} \frac{\beta_j}{\beta_i} \geqq \mathrm{M} \qquad (j > i)$$

(car on peut toujours supposer $\mathrm{N} > 1$). Soit, ensuite, r l'indice de celle des variables qui peuvent être principales par rapport à l'une quelconque des fonctions u_i dont l'indice est le plus élevé; k ne pourra alors prendre que les valeurs $1, 2, \ldots, r$. D'autre part, la plus petite valeur que puisse acquérir le quotient $\frac{\beta_s}{\beta_i}$ est évidemment $\frac{1}{\mathrm{N}^{m-1}}$; on satisfera donc certainement aux inégalités

$$\alpha_k \geqq \frac{1}{\rho}, \qquad \frac{\varepsilon}{p_{ik}} \frac{\beta_s}{\beta_i} \frac{\alpha_k}{\alpha_h} \geqq \mathrm{M} \qquad (h > k),$$

en prenant

$$\alpha_k \geqq \frac{1}{\rho}, \qquad \frac{\alpha_k}{\alpha_h} \geqq \mathrm{N}^m \qquad (h > k),$$

ce que l'on réalisera en prenant

$$\alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{\rho},$$

$$\alpha_r = \frac{\mathrm{N}^m}{\rho}, \qquad \alpha_{r-1} = \frac{\mathrm{N}^{2m}}{\rho}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_1 = \frac{\mathrm{N}^{rm}}{\rho}.$$

Enfin, le plus petit des quotients $\frac{\alpha_k}{\beta_i}$ étant égal à $\frac{1}{\mathrm{N}^{m-1}}$, en prenant

$$\mu = \mathrm{M}\mathrm{N}^{m-1},$$

on vérifiera les inégalités

$$\frac{\alpha_k}{\beta_i} \mu \geqq \mathrm{M}.$$

Les constantes μ, α_k et β_i étant ainsi choisies, on voit alors immédiatement qu'un terme quelconque dans une des équations (2′) a pour coefficient une fonction majorante, au point $x_k = 0$, $u_i = 0$, pour le coefficient du terme correspondant dans l'équation correspondante du système (2).

De là on conclut immédiatement que les développements des intégrales $v_1, v_2, \ldots, v_m$ du système (2′) ont des coefficients positifs et qu'un coefficient quelconque de v_i est une quantité positive supérieure ou égale au module du coefficient correspondant calculé pour le développement de l'intégrale u_i du système (2). En effet, les dérivées paramétriques de v_i sont supérieures aux dérivées paramétriques correspondantes calculées pour u_i (pour $x_k = 0$), car les premières sont positives et les secondes sont nulles. Désignons par v_i^0 ce que devient v_i quand on y annule toutes les variables principales par rapport à u_i. Il existe un système d'intégrales $v_1, \ldots, v_m$ du système (2') telles que, lorsqu'on annule les variables principales, elles se réduisent respectivement à $v_1^0, \ldots, v_m^0$, et, en faisant un raisonnement identique au raisonnement fait précédemment, on montrerait qu'il n'existe *qu'un seul* système satisfaisant à ces conditions, et que les coefficients des développements sont fournis par les équations (2') jointes aux conditions initiales [1]. Les dérivées principales des fonctions $v_1, \ldots, v_m$ pourront donc être calculées au moyen des dérivées paramétriques, de la même façon que nous l'avons fait pour $u_1, \ldots, u_m$ dans le système (2); et l'on voit que l'expression d'une dérivée principale de v_i, pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ se déduit de l'expression de la dérivée correspondante de u_i en y remplaçant les dérivées des fonctions $u_1, \ldots, u_m$ par les dérivées correspondantes de $v_1, \ldots, v_m$ et les coefficients par des quantités positives, supérieures ou égales à leurs modules. Une dérivée quelconque de v_i est donc une quantité positive supérieure ou égale au module de la dérivée correspondante de u_i, calculée pour $x_k = 0$.

Les développements des fonctions $v_1, \ldots, v_m$ étant convergents, il en est donc de même des développements calculés pour $u_1, \ldots, u_m$.

13. *Corollaire.* — Le système d'intégrales holomorphes dont l'existence est démontrée par le théorème VII est le système d'intégrales holomorphes *le plus général* qui vérifie le système canonique, complètement intégrable (2).

En effet, soit $u'_1, u'_2, \ldots, u'_m$ un système quelconque d'intégrales du système (2) holomorphes au voisinage du point $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$. Soit φ_i ce que devient u'_i lorsque l'on remplace dans cette fonction les

---

(1) Remarquons que le système (2') n'est pas nécessairement complètement intégrable. Mais ici cette condition n'est pas nécessaire, puisque nous savons d'avance qu'il existe au moins un système d'intégrales $v_1, \ldots, v_m$ satisfaisant aux conditions initiales.

variables principales pour u_i par les valeurs initiales : le théorème VII nous apprend qu'il existe un système d'intégrales du système (2), holomorphes au voisinage du point $x_k = x_k^0$, et un *seul* tel que u_i se réduise à φ_i lorsqu'on y remplace les variables principales par leurs valeurs initiales. Ce système est donc, nécessairement, le système u'_1, $u'_2, \ldots, u'_m$.

Il pourra arriver qu'un même système linéaire d'équations aux dérivées partielles du premier ordre puisse être mis de plusieurs manières sous forme canonique complètement intégrable.

A chacune de ces manières correspond, au moyen du théorème VII, une forme du système le plus général d'intégrales, mais ces diverses formes ne sont pas *distinctes*.

Ainsi, considérons, par exemple, le système

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= v + \mathrm{H}\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= u + \mathrm{H}\frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \right.$$

où H désigne une constante non nulle. Il est susceptible des deux formes canoniques, complètement intégrables, suivantes :

$$\text{(B)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \quad v + \mathrm{H}\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{u}{\mathrm{H}} + \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \right.$$

et

$$\text{(C)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{v}{\mathrm{H}} + \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \quad u + \mathrm{H}\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \right.$$

La forme (B) montre que le système admet un système d'intégrales tel que, pour $x = x_0$, u et v se réduisent respectivement à deux fonctions données à l'avance de y, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$. La forme (C) nous apprend qu'on peut trouver deux intégrales u et v qui, pour $y = y_0$, se réduisent à deux fonctions arbitraires de x, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$. En vertu de notre corollaire, on pourra toujours déterminer les fonctions φ_1 et φ_2 de façon que le système d'intégrales correspondant à la forme (B) coïncide avec tel système holomorphe que l'on voudra correspondant à la forme (C) et réciproquement.

14. Ce qui précède nous prouve donc que, étant donné un système linéaire canonique complètement intégrable, pour que ce système admette un système d'intégrales régulières satisfaisant à des conditions initiales données, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer les fonctions arbitraires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ que contient l'intégrale générale définie par le théorème VII, de façon à vérifier ces conditions.

Considérons, par exemple, le système (A) du n° 13. Rien ne prouve qu'il existe un système d'intégrales u et v de ce système et tel que, pour $x = x_0$, u se réduise à une fonction donnée de y, $\varphi(y)$, et, pour $y = y_0$, v se réduise à $\psi(x)$. M. Méray [1] a, effectivement, montré que, si $H \lesseqgtr 1$, il existe un système d'intégrales satisfaisant à ces conditions, mais que, si $H > 1$, il n'en *existe pas*.

On peut, cependant, donner un énoncé un peu plus général du théorème VII, de la façon suivante :

Supposons que les variables $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ soient paramétriques par rapport à TOUTES *les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Soient alors*

$$\varpi_1(x_{r+1}, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad \varpi_r(x_{r+1}, \ldots, x_n)$$

r fonctions des seules variables $x_{r+1}, \ldots, x_n$ holomorphes au voisinage du point $x_{r+1}^0, \ldots, x_n^0$ ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre. Le système (2) admet un système d'intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_m$, régulières au voisinage du point $x_1^0, \ldots, x_n^0$ et telles que u_i se réduise à une fonction donnée à l'avance φ_i des variables paramétriques pour u_i, lorsqu'on y remplace SES *variables principales x_k respectivement par les fonctions ϖ_k.*

Ce cas se ramène immédiatement au cas du théorème VII, en faisant le changement de variables

$$x_1 = x'_1 + \varpi_1, \quad \ldots, \quad x_r = x'_r + \varpi_r, \quad x_{r+1} = x'_{r+1}, \quad \ldots, \quad x_n = x'_n.$$

---

(1) *Voir* MÉRAY, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CVI, p. 648, et MÉRAY et RIQUIER, *loc. cit.*

15. Un cas particulier très intéressant des systèmes canoniques est le suivant : Considérons le système

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}=\psi_{1,1}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r}=\psi_{1,r}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{r+1}}=\psi_{1,r+1},\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}=\psi_{2,1}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_r}=\psi_{2,r}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_{r+1}}=\psi_{2,r+1},\\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1}=\psi_{m,1}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_r}=\psi_{m,r}, & \dfrac{\partial u_p}{\partial x_{r+1}}=\psi_{p,r+1}, \end{cases}$$

dans lequel les variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont *principales* pour *toutes* les fonctions $u_1, \ldots, u_m$; les variables $x_{r+2}, x_{r+3}, \ldots, x_n$ sont *paramétriques* pour *toutes* ces fonctions, et la variable x_{r+1} est principale pour $u_1, u_2, \ldots, u_p$ et paramétrique pour $u_{p+1}, \ldots, u_m$. Si un tel système est complètement intégrable, il admet, en vertu du théorème VII, un système d'intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_m$ tel que, pour $x_1=x_1^0$, $x_2=x_2^0, \ldots, x_r=x_r^0, x_{r+1}=x_{r+1}^0$, $u_1, u_2, \ldots, u_p$ se réduisent à p fonctions arbitraires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ des variables $x_{r+2}, \ldots, x_n$, et, pour $x_1=x_1^0, \ldots, x_r=x_r^0$, $u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_m$ se réduisent à $(m-p)$ fonctions arbitraires $\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}, \ldots, \varphi_m$ des variables x_{r+1}, $x_{r+2}, \ldots, x_n$. Faisons alors le changement de variables suivant

$$x_1=x_1^0+y_1,\qquad x_2=x_2^0+y_1y_2,\qquad \ldots,\qquad x_r=x_r^0+y_1y_r,$$
$$x_{r+1}=x_{r+1}^0+y_{r+1},\qquad \ldots,\qquad x_n=x_n^0+y_n,$$

le système se transformera en

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial y_1}=\chi_{1,1} & \ldots, & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_r}=\chi_{1,r}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_{r+1}}=\chi_{1,r+1},\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y_1}=\chi_{2,1}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_r}=\chi_{2,r}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_{r+1}}=\chi_{2,r+1},\\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \dfrac{\partial u_m}{\partial y_1}=\chi_{m,1}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_m}{\partial y_r}=\chi_{m,r}, & \dfrac{\partial u_p}{\partial y_{r+1}}=\chi_{p,r+1}, \end{cases}$$

et le nouveau système (5) admet un système d'intégrales $u'_1, u_2, \ldots, u'_m$ correspondant au système d'intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_m$ de (4), tel que, pour $y_1=0$, $u'_1, u'_2, \ldots, u'_p$ se réduisent à $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$, et, pour

$y_1 = 0$, $y_{r+1} = 0$, $u'_{p+1}, \ldots, u'_m$ se réduisent à $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_m$, et cela, *quelles que soient les valeurs attribuées à* $y_2, y_3, \ldots, y_r$, pourvu qu'elles soient finies ($\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p, \Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_m$ désignent ce que deviennent les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_m$, quand on y fait le changement de variables). Or, si l'on considère le système

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} = \chi_{11}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_{r+1}} = \chi_{1,r+1}, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial y_1} = \chi_{m,1}, & \dfrac{\partial u_p}{\partial y_{r+1}} = \chi_{p,r+1}, \end{array}\right.$$

où l'on considère $y_2, y_3, \ldots, y_r$ comme des paramètres, ce système admet un système d'intégrales régulier et *un seul* tel que, pour $y_1 = 0$, $y_{r+1} = 0$, $u_1, \ldots, u_p$ se réduisent à $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$, et, pour $y_1 = 0$, $u_{p+1}, \ldots, u_m$ se réduisent à $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_m$: c'est donc, nécessairement, le système $u'_1, u'_2, \ldots, u'_m$.

L'intégration du système (4) est donc ramenée à l'intégration du système plus simple (6).

Dans le cas où $p = m$, on a les systèmes de M. J. König (1), dont l'intégration se ramène donc à un système de m équations, c'est-à-dire un système de la forme de ceux de Mme de Kowalewski, où le nombre des équations est égal au nombre des fonctions inconnues.

16. Il est naturel de chercher alors s'il ne serait pas possible, *dans tous les cas,* de trouver un changement de variables tel qu'on puisse transformer un système quelconque linéaire en un autre système qui soit susceptible de prendre la forme canonique (4).

Nous montrerons d'abord qu'il suffit d'essayer un changement de variables linéaires. Soit, en effet,

$$(7)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \psi_{ik}$$

un système linéaire d'équations aux dérivées partielles du premier

(1) J. König, *Mathematische Annalen,* t. 23, p. 520.

ordre. On peut toujours supposer que ψ_{ik} ne contient pas explicitement les variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, car, s'il n'en était pas ainsi, il suffirait d'introduire n fonctions nouvelles $t_1, t_2, \ldots, t_n$, et de considérer le système

$$(7') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} = (\psi_{ik}), \\ \dfrac{\partial t_h}{\partial x_k} = 0 \qquad (h \neq k), \qquad \dfrac{\partial t_k}{\partial x_k} = 1 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

où (ψ_{ik}) désigne ce que devient ψ_{ik} quand on y remplace respectivement $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Le système (7') est évidemment équivalent au système (7), pourvu qu'on prenne la valeur initiale de t_h égale à la valeur initiale de x_h.

Supposons donc que le système (7) ne contienne pas explicitement $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et faisons un changement de variables *linéaires*

$$(8) \qquad \begin{cases} y_1 = \alpha_1^1 x_1 + \alpha_2^1 x_2 + \ldots + \alpha_n^1 x_n, \\ y_2 = \alpha_1^2 x_1 + \alpha_2^2 x_2 + \ldots + \alpha_n^2 x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = \alpha_1^n x_1 + \alpha_2^n x_2 + \ldots + \alpha_n^n x_n. \end{cases}$$

Pour effectuer ce changement, il suffira de remplacer, dans les équations (7), $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}$ par

$$\alpha_k^1 \frac{\partial u_i}{\partial y_1} + \alpha_k^2 \frac{\partial u_i}{\partial y_2} + \ldots + \alpha_k^n \frac{\partial u_i}{\partial y_n},$$

et l'on obtiendra aussi un nouveau système linéaire (L) dans lequel les coefficients des dérivées sont des fonctions linéaires des quantités α_k. S'il est impossible de résoudre le système (L) par rapport à $\dfrac{\partial u_1}{\partial y_1}, \dfrac{\partial u_2}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial y_1}$, c'est que le déterminant des coefficients de ces m dérivées dans m quelconques des équations du système (L) est identiquement nul, *quelles que soient les valeurs des quantités* α_k^s. D'ailleurs, il est clair que, si cette résolution est impossible pour $\dfrac{\partial u_1}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial y_1}$, elle le sera aussi pour $\dfrac{\partial u_1}{\partial y_k}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial y_k}$, car rien ne distingue jusqu'ici y_1 et y_k. Imaginons, maintenant, qu'on fasse un changement de variables quelconque

$$y_1 = \varpi_1(x_1, \ldots, x_n), \qquad \ldots, \qquad y_n = \varpi_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Cela revient à remplacer dans le système (L) α_k^s par $\dfrac{\partial \varpi_s}{\partial x_k}$ et, par suite, si la résolution est impossible après avoir fait la transformation (8), elle le sera aussi après la transformation (9). Si la résolution du système (L) par rapport à $\dfrac{\partial u_1}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial y_1}$ est possible, pour des valeurs convenablement choisies des quantités α_k^s, on pourra remplacer le système (L) par l'ensemble du groupe (G_1) de m équations résolues par rapport à $\dfrac{\partial u_1}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial y_1}$, et d'un système (L′) ne contenant plus de dérivées par rapport à y_1. Il faudra ensuite chercher à remplacer les variables $y_2, \ldots, y_n$ par de nouvelles variables $z_2, \ldots, z_n$, de façon que le système (L′) se transforme en un système résoluble par rapport à $\dfrac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_2}$, et, d'après ce que nous venons de voir, il suffira de chercher une formation linéaire; et ainsi de suite. Comme une suite de transformations linéaires peut être remplacée par une transformation linéaire *unique*, on en conclut que, si le système (7) ne peut pas être ramené à la forme (4) par une transformation linéaire, aucune transformation plus générale ne pourra le faire.

17. Il est maintenant aisé de montrer qu'il n'est pas toujours possible de ramener un système linéaire quelconque à la forme (4) par un changement de variables. Il nous suffira, à cet effet, de donner l'exemple suivant, où cela n'est pas toujours possible.

Considérons le système

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial v}{\partial x} = X', \\[2ex] a'\dfrac{\partial u}{\partial y} + b'\dfrac{\partial v}{\partial y} = Y', \end{cases}$$

où a, b, a', b' sont des constantes, X′ la dérivée d'une fonction de x et Y′ la dérivée d'une fonction de y. Effectuons le changement

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} x' = \alpha x + \beta y, \\ y' = \alpha' x + \beta' y, \end{cases}$$

on a

$$\alpha a \frac{\partial u}{\partial x'} + \alpha' a \frac{\partial u}{\partial y'} + \alpha b \frac{\partial v}{\partial x'} + \alpha' b \frac{\partial v}{\partial y'} = (\mathrm{X}'),$$

$$\beta a' \frac{\partial u}{\partial x'} + \beta' a' \frac{\partial u}{\partial y'} + \beta b' \frac{\partial v}{\partial x'} + \beta' b' \frac{\partial v}{\partial y'} = (\mathrm{Y}'),$$

(X'), (Y') désignant ce que deviennent X' et Y' par la transformation. Le déterminant des coefficients de $\frac{\partial u}{\partial x'}$ et $\frac{\partial v}{\partial x'}$ est égal à

$$\alpha\beta \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

Donc, si $ab' - ba'$ est différent de zéro, on pourra résoudre par rapport à $\frac{\partial u}{\partial x'}$ et $\frac{\partial v}{\partial x'}$; mais, si $ab' - ba'$ était égal à zéro, ce serait *impossible*.

1°
$$ab' - ba' \neq 0;$$

on pourra alors ramener le système (A) à la forme

$$(\mathrm{C}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x'} = \mathrm{A} + \mathrm{B} \dfrac{\partial u}{\partial y'} + \mathrm{C} \dfrac{\partial v}{\partial y'}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x'} = \mathrm{A}' + \mathrm{B}' \dfrac{\partial u}{\partial y'} + \mathrm{C}' \dfrac{\partial v}{\partial y'}, \end{cases}$$

qui est canonique et complètement intégrable.

L'intégrale générale dépendra donc de deux fonctions arbitraires d'une seule variable.

Il est aisé de voir que, dans ce cas, l'intégrale générale est donnée par

$$u = \frac{[\mathrm{X} + \varphi(y)]\, b' - [\mathrm{Y} + \psi(x)]\, b}{ab' - ba'},$$

$$v = \frac{[\mathrm{Y} + \psi(x)]\, a - [\mathrm{X} + \varphi(y)]\, a'}{ab' - ba'},$$

où $\psi(x)$ et $\varphi(y)$ sont deux fonctions arbitraires.

2°
$$ab' - ba' = 0;$$

supposons $a \neq 0$. On pourra alors écrire le système (A) sous la forme

$$
\text{(D)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{X'}{a} - \frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial x}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{Y'}{a'} - \frac{b'}{a'}\frac{\partial v}{\partial y},
\end{aligned}
\right.
$$

qui est canonique et complètement intégrable. On voit que, dans ce cas, on peut prendre arbitrairement la fonction v. Le système le plus général d'intégrales dépend d'une fonction arbitraire de *deux* variables et d'une constante arbitraire. On voit sans difficulté que, dans ce cas, l'intégrale générale est

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{X}{a} + \frac{Y}{a'} + C + \frac{b}{a}\psi(x, y), \\
v &= \psi(x, y),
\end{aligned}
$$

où ψ désigne une fonction arbitraire et C une constante arbitraire.

Remarque I. — Dans l'exemple précédent, lorsque $ab' - ba' = 0$, on ne peut pas trouver un changement de variables tel que les nouvelles équations soient résolubles par rapport à $\frac{\partial u}{\partial x'}$ et $\frac{\partial v}{\partial x'}$.

Ceci nous prouve que le théorème de Mme de Kowalewski ne démontre pas l'existence des intégrales dans *tous* les cas où, dans le système à intégrer, le nombre des équations est égal au nombre des fonctions inconnues. Dans son Mémoire (*Journal de Crelle*, t. 80, p. 25) Mme de Kowalewski suppose que cette transformation soit possible en faisant, d'ailleurs, remarquer qu'elle ne peut assurer que cela soit toujours possible [1].

Remarque II. — Il semble que, dans le cas de $ab' - ba' = 0$, on pourrait résoudre le système (A) par rapport à $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ et considérer x comme principale pour u, et y comme principale pour v, et qu'on pourrait démontrer la convergence des développements calculés pour u et v en prenant, arbitrairement, les valeurs initiales des dérivées

---

[1] Mme de Kowalewski dit : « So bleibt, allerdings, noch zu untersuchen ob ein Gleichungssystem, von nicht normaler form, stets... auf ein normales zurückgeführt werden könne, worauf ich hier *nicht eingehen kann* ».

paramétriques. On aurait alors un système d'intégrales général dépendant de *deux* fonctions arbitraires d'*une* variable. Il n'en est rien, car il est aisé de se rendre compte que les dérivées simplement principales ne seraient pas *bien déterminées*. Si l'on cherche à calculer $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x}$, on constate que les deux équations qui les fournissent

$$a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}+b\,\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}=0,$$
$$a'\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}+b'\,\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}=0$$

sont identiques, en vertu de la condition $ab'-ba'=0$. L'une de ces deux dérivées secondes serait donc *indéterminée*. Ceci nous montre, une fois de plus, l'intérêt qu'il y a à ne considérer que des systèmes *canoniques* pour lesquels ceci est impossible.

TROISIÈME PARTIE.

18. Théorème IX. — *L'intégration d'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles simultanées, entre p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ et n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, peut être ramenée à l'intégration d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles simultanées du premier ordre.*

Désignons respectivement par $s_1, s_2, \ldots, s_p$ les ordres des dérivées de l'ordre le plus élevé des fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$, qui figurent dans les équations du système proposé (A). Introduisons comme nouvelles fonctions inconnues toutes les dérivées des fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ jusqu'à l'ordre s_1 inclusivement, pour z_1, s_2 pour z_2, ..., s_p pour z_p, et remplaçons, dans les équations, $\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} z_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$ par $p^i_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$. Nous aurons ainsi des relations

$$\varphi_1=0,\qquad \varphi_2=0,\qquad \ldots,\qquad \varphi_q=0$$

entre les quantités z et p. Écrivons, d'abord, les équations suivantes

$$(1)\qquad \frac{\partial z_i}{\partial x_1} = p^i_{1,0,\ldots,0,0}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial z_i}{\partial x_n} = p^i_{0,0,\ldots,0,1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$(2)\qquad \frac{\partial p^i_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_n}}{\partial x_k} = p^i_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_n} \quad (\alpha_1+\alpha_2\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_n < s_i;\ i=1,2,\ldots,p),$$

qui expriment que les quantités p sont les dérivées des fonctions z. Cela étant, dérivons chacune des relations $\varphi_h = 0$ par rapport à x_1, x_2, $\ldots$, x_n, et écrivons celles de ces équations qui sont algébriquement distinctes entre elles et distinctes des équations (1) et (2). Nous obtiendrons ainsi un système

$$(3)\qquad \psi_1 = 0, \qquad \psi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \psi_l = 0$$

d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre entre les fonctions z et p et les variables x_k. Je dis que, si l'on sait intégrer le système linéaire du premier ordre (B), formé par les équations (1), (2) et (3), on saura intégrer le système proposé (A). Soit, en effet, z_1, z_2, $\ldots$, z_p un système d'intégrales du système (A). On aura, évidemment, un système d'intégrales du système (B) [(1), (2), (3)], en prenant

$$z_i = Z_i \qquad \text{et} \qquad p^i_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} Z_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Réciproquement, soit Z_i, $P^i_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ un système d'intégrales du système (B). Puisque ces fonctions vérifient les équations (1) et (2), on aura

$$(4)\qquad P^i_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} Z_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial y_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Désignons par Φ_1, Φ_2, $\ldots$, Φ_q les fonctions de x_1, x_2, $\ldots$, x_n qu'on obtient en remplaçant dans φ_1, φ_2, $\ldots$, φ_q les fonctions z_i et $p^i_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ respectivement par Z_i et $P^i_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$, puisque les équations (3) sont vérifiées, les dérivées de ces q fonctions par rapport à x_1, x_2, $\ldots$, x_n seront nulles : ces fonctions sont donc *constantes*. Si donc on choisit les valeurs initiales des intégrales du système (B) de façon que, pour ces valeurs initiales, les fonctions φ_1, φ_2, $\ldots$, φ_q soient nulles, les fonctions Φ_1, Φ_2, $\ldots$, Φ_q seront *identiquement* nulles et exprimeront, par suite, à cause des relations (4), que $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ sont des intégrales du système (A).

On en conclut qu'on obtiendra *toutes* les intégrales du système (A) en déterminant toutes les intégrales du système (B), dont les valeurs initiales vérifient les relations $\varphi_i = 0$.

Remarque I. — On peut, d'une infinité de manières, ramener ainsi l'intégration d'un système (A) à celle d'un système linéaire du premier ordre. Car on peut former une infinité de systèmes équivalents au système (A), en adjoignant à ce système un certain nombre des équations qu'on peut déduire des équations de ce système en les dérivant par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A chacun de ces systèmes correspond un système linéaire du premier ordre.

Remarque II. — Le système linéaire (B) n'est pas équivalent au système (A); il est plus général que le système (A). Dans la pratique, on pourra fréquemment trouver un système linéaire *équivalent* au système (A). Ainsi, par exemple, considérons l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Prenons comme nouvelle fonction inconnue u, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, et nous aurons le système canonique suivant, équivalent à l'équation proposée

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = u,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

19. Considérons, maintenant, un système quelconque (A) d'équations aux dérivées partielles simultanées. Si l'intégrale générale de ce système dépend d'un nombre fini de constantes arbitraires (ce que nous savons reconnaître), nous serons renseignés par les conclusions de la première Partie.

S'il n'en est pas ainsi, nous ramènerons l'intégration de ce système à celle d'un système linéaire du premier ordre. Si l'un des systèmes linéaires auxquels on ramène l'intégration du système (A) est complètement intégrable, ou peut être rendu complètement intégrable par une transformation convenablement choisie, nous connaîtrons encore le système le plus général d'intégrales, mais, si aucun de ces systèmes n'est complètement intégrable, nous ne pouvons plus *préciser* le degré de généralité du système d'intégrales le plus général; on pourra cependant montrer la convergence des développements calculés pour des intégrales.

20. Soit en effet

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \psi_{ik} \tag{5}$$

un système canonique linéaire d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, non complètement intégrable, mais dont le système le plus général d'intégrales dépend d'un nombre infini de constantes arbitraires. Adjoignons à ce système toutes les équations en nombre infini que l'on peut former en dérivant les équations de ce système un nombre quelconque de fois par rapport à certaines des variables x_1, x_2, ..., x_n. Nous formerons ainsi un système (S) d'équations, en nombre infini (*voir* théorème V de la première Partie), qui permettront d'exprimer certaines dérivées, que nous appellerons *dérivées de la première catégorie* en fonction des autres, appelées *dérivées de la seconde catégorie*. Le système (6) étant canonique, on pourra faire cette résolution de telle façon que toutes les dérivées de la seconde catégorie soient paramétriques, et que toutes les dérivées principales appartiennent à la première catégorie. D'ailleurs, comme le système (5) n'est pas complètement intégrable, un certain nombre de dérivées paramétriques appartiendront à la première catégorie et seront ainsi exprimées en fonction des autres.

Désignons par (E) l'ensemble de ces relations entre les dérivées paramétriques.

Reprenons, maintenant, la démonstration du théorème VII.

Au lieu de prendre *arbitrairement* les fonctions φ_1, φ_2 ..., φ_m, nous les choisirons de telle façon que, tout en restant holomorphes, leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées, c'est-à-dire les coefficients de leurs développements, vérifient les relations (E). En d'autres termes, nous prendrons arbitrairement toutes les valeurs initiales des dérivées de la seconde catégorie, dont le nombre est infini, et nous prendrons pour les valeurs initiales des dérivées paramétriques, appartenant à la première catégorie, les valeurs fournies par les relations (E). *Avec ces conditions,* les valeurs initiales des dérivées principales seront bien déterminées et fournies par le système (S). On voit alors, comme précédemment, que, s'il existe un système dont les dérivées de la seconde catégorie ont des valeurs initiales *données,* il en existe un seul; que, si les développements calculés pour les intégrales sont convergents, ils vérifieront les équations du système (S), et enfin que les développements sont convergents, car la démonstration de la convergence (théorème VII) ne s'appuie que sur le seul fait que le système proposé est canonique.

Nous en concluons donc que, dans tous les cas, les développements calculés pour les intégrales d'un système linéaire canonique du premier ordre, où l'on prend arbitrairement les valeurs initiales des dérivées de la seconde catégorie, sont convergents. Par conséquent, étant donné un système *quelconque* d'équations aux dérivées partielles simultanées, les développements calculés pour les intégrales au moyen des équations de ce système sont toujours, *en choisissant convenablement celles des dérivées dont on prend arbitrairement les valeurs initiales,* convergents.

21. Considérons, par exemple, l'équation

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Nous avons vu qu'elle est équivalente au système

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = u, \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{cases}$$

qui est canonique et complètement intégrable. Ce système (B) admet comme système d'intégrales le plus général un système d'intégrales φ et u qui, pour $y = y_0$, se réduisent respectivement à deux fonctions données à l'avance de la variable x, $\Phi(x)$, $\mathrm{U}(x)$.

L'intégrale générale de l'équation (A) est donc une fonction φ telle que, pour $y = y_0$, φ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ se réduisent respectivement à deux fonctions données à l'avance, $\Phi(x)$ et $\mathrm{U}(x)$. Il ne nous est pas permis d'affirmer autre chose. Ainsi, nous ne savons pas s'il existe, par exemple, une intégrale de cette équation qui, pour $x = 0$, se réduit à une fonction donnée à l'avance de y. M$^{\text{me}}$ de Kowalewski, à qui nous empruntons cet exemple, a effectivement montré que l'équation (A) n'admet pas d'intégrale qui, pour $x = 0$, se réduise à $\frac{1}{1-y}$ [1].

Il pourrait arriver qu'à un même système (A) correspondent plusieurs systèmes linéaires complètement intégrables; à chacun de ces systèmes correspondra une forme du système général d'intégrales, mais toutes les formes ne seront évidemment pas distincts.

Ainsi l'équation (A) est aussi équivalente au système canonique complètement intégrable suivant

$$(\mathrm{C})\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = u, \qquad \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = v, \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \end{array}\right.$$

auquel correspond la forme suivante de l'intégrale générale de (A) : l'intégrale φ est telle que, pour $x = x_0$, $y = y_0$, φ prenne une valeur donnée φ_0 et, pour $y = y_0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ se réduisent respectivement à deux fonctions données à l'avance de x, $\mathrm{V}(x)$ et $\mathrm{U}(x)$. Cette forme ne doit évidemment pas fournir d'autres intégrales que celles qui sont fournies par la première.

22. *Application* [2]. — Considérons le système d'équations aux déri-

---

(1) Sophie de Kowalewski (*loc. cit.*). *Voir* aussi, au sujet de cet exemple, G. Darboux, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CVI, p. 651.

(2) *Voir* au sujet de cette application : P. Appell, *Sur les séries hypergéométriques de deux variables et sur des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XC, p. 296).

vées partielles simultanées suivant

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= a_1\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a_2\frac{\partial z}{\partial x} + a_3\frac{\partial z}{\partial y} + a_4 z,\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= b_1\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b_2\frac{\partial z}{\partial x} + b_3\frac{\partial z}{\partial y} + b_4 z,\end{aligned}\right.$$

entre la fonction z et les variables x et y, et où les a et b désignent des fonctions des seules variables x et y.

Dérivons ces équations par rapport à x et y. Nous aurons

$$(\mathrm{B})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - a_1\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + a_2 a_1 + a_3\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \ldots,\\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} - a_1\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} + a_2 + a_3 b_1\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \ldots,\\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} - b_1\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} &= \left(\frac{\partial b_1}{\partial x} + b_2 a_1 + b_3\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \ldots,\\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} - b_1\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x} &= \left(\frac{\partial b_1}{\partial y} + b_2 + b_3 b_1\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \ldots.\end{aligned}\right.$$

1° Si $(a_1 b_1 - 1)$ est différent de o, on pourra résoudre les quatre équations (B) par rapport à $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$, et l'intégrale générale du système (A) dépendra d'un nombre *fini* de constantes arbitraires dont le nombre sera, *au plus*, égal à 4. Car, à cause des équations (A), on pourra, au plus, prendre arbitrairement les valeurs initiales de z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

2° Si $a_1 b_1 - 1 = 0$ identiquement, cette résolution ne sera plus possible; on pourra éliminer les dérivées du troisième ordre entre la seconde et la troisième des équations (B), et l'on obtiendra l'équation

$$(\mathrm{C})\qquad 0 = \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} + a_2 + a_3 b_1 + a_1\frac{\partial b_1}{\partial x} + b_2 a_1^2 + b_3 a_1\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \ldots.$$

a. Si le coefficient de $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ est différent de o, on pourra résoudre l'équation (C) par rapport à $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ et, par suite, exprimer toutes les valeurs des dérivées secondes en fonction de z et des dérivées premières. Le système admettra alors, comme système le plus général d'intégrales, un système dépendant, *au plus*, de *trois* constantes arbitraires; car on pourra prendre arbitrairement, au plus, les valeurs initiales de z, $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

b. Si le coefficient de $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ est identiquement nul dans l'équation (C) et que cette équation ne soit pas vérifiée identiquement, elle fournit une relation linéaire entre z, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Si les coefficients de p et q sont aussi nuls, c'est que le système (A) admet la seule intégrale évidente $z = 0$.

Si l'un des coefficients de p ou de q est différent de o, celui de q par exemple, on pourra tirer de (C) la valeur de q en fonction de p et de z,

$$q = \alpha p + \beta z,$$

et l'on pourra écrire les équations (A) sous la forme

$$(\mathrm{A}')\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial x} = a_1 \frac{\partial p}{\partial y} + a_2 p + a_3 \alpha p + (\alpha_3 \beta + a_4) z,\\ &\alpha \frac{\partial p}{\partial y} + p \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \beta(\alpha p + \beta z) + \frac{\partial \beta}{\partial y} z\\ &\qquad = b_1 \frac{\partial p}{\partial y} + (b_2 + b_3 \alpha) p + (b_3 \beta + b_4) z,\\ &\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \alpha p + \beta z. \end{aligned}\right.$$

Si $\alpha - b_1$ est différent de o, on pourra résoudre les équations (A′) par rapport à $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial y}$, et l'intégrale générale dépendra, *au plus*, de deux constantes arbitraires.

Si $\alpha - b_1 = 0$, sans que les coefficients de z et p soient identiquement nuls dans la seconde équation (A′), le système admettra soit la seule intégrale $z = 0$, soit une intégrale dépendant d'*une* constante arbitraire.

Enfin, si les coefficients de $\frac{\partial p}{\partial y}$, p et z, dans la seconde équation (A′), sont identiquement nuls, le système (A′) se réduira au système complètement intégrable

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \alpha p + \beta z,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = a_1 \frac{\partial p}{\partial y} + (a_2 + a_3\alpha)\, p + (a_3\beta + a_4)\, z,$$

et le système (A) aura une intégrale générale dépendant d'une constante arbitraire et d'une fonction arbitraire de y.

3° Supposons que les coefficients de $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ et z, dans l'équation (C), soient identiquement nuls. On aura alors, à la fois, les cinq conditions suivantes :

$$(\mathrm{D}) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_1 b_1 - 1 = 0, \\ & \frac{\partial a_1}{\partial y} + a_2 + a_3 b_1 + a_1 \frac{\partial b_1}{\partial x} + b_2 a_1^2 + b_3 a_1 = 0, \\ & \frac{\partial a_2}{\partial y} + a_3 b_2 + a_1 \frac{\partial b_2}{\partial x} + a_1 a_2 b_2 + a_1 b_4 = 0, \\ & \frac{\partial a_3}{\partial y} + a_3 b_3 + a_4 + a_1 \frac{\partial b_3}{\partial x} + a_1 a_3 b_2 = 0, \\ & \frac{\partial a_4}{\partial y} + a_3 b_4 + a_1 \frac{\partial b_4}{\partial x} + a_1 a_4 b_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Remarquons immédiatement que ces conditions ne sont pas incompatibles. En effet, si, dans les quatre dernières équations, on remplace b_1 par $\frac{1}{a_1}$, on obtient quatre équations aux dérivées partielles du premier ordre, résolubles par rapport à $\frac{\partial a_1}{\partial y}$, $\frac{\partial a_2}{\partial y}$, $\frac{\partial a_3}{\partial y}$, $\frac{\partial a_4}{\partial y}$, qui, en vertu du théorème de M^me de Kowalewski, ou encore en vertu de ce qui précède, admettront un système d'intégrales, quels que soient b_2, b_3, b_4, dépendant de quatre fonctions arbitraires de y.

Supposons donc les relations (D) vérifiées; prenons comme nouvelles fonctions inconnues $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = q$. Le système (A) sera équivalent au système canonique suivant

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = p.$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = a_1 \frac{\partial q}{\partial x} + a_2 p + a_3 q + a_4 z,$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = b_1 \frac{\partial q}{\partial x} + b_2 p + b_3 q + b_4 z,$$

qui, à cause des relations (D), est complètement intégrable. L'intégrale générale du système (A) dépendra donc, dans ce cas, de deux constantes arbitraires et d'une fonction arbitraire de y. D'une manière *plus précise,* on pourra trouver une intégrale z du système (A) telle que, pour $x = x_0$, $y = y_0$, z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ se réduisent respectivement à deux constantes données z_0 et p_0 et que, pour $y = y_0$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ se réduise à une fonction arbitraire donnée de x.

NOTE.

Dans l'*Introduction* de ce travail j'ai indiqué, très sommairement, les travaux qui ont été faits sur l'existence des intégrales des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Je vais, dans cette Note, indiquer, à grands traits, la *marche* suivie par les auteurs qui m'ont précédé. Cauchy est le premier qui s'occupa de l'existence des intégrales dans les équations différentielles et aux dérivées partielles ou qui, du moins, donna une démonstration rigoureuse de cette existence en précisant ce qu'il fallait entendre par *intégrale générale*.

Il donna, d'abord, dans ses leçons à l'École Polytechnique et dans un Mémoire lithographié de 1835, deux démonstrations pour l'existence des intégrales générales dans les équations différentielles.

La première méthode de démonstration qu'il emploie, dite des *quadratures*, est, pour ainsi dire, une méthode d'approximations successives et repose sur le principe suivant : soient

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

une équation différentielle ; L une ligne qui joint, dans le plan, les points x_0 et X. Marquons sur la ligne L des points intermédiaires x_1, $x_2, \ldots, x_m$. Pour trouver l'intégrale qui, pour $x = x_0$, se réduit à y_0, déterminons une suite de valeurs $y'_1, y'_2, \ldots, y'_m$, Y' par les relations

$$\begin{aligned}
y'_1 - y_0 &= f(x_0, y_0)(x_1 - x_0),\\
y'_{k+1} - y'_k &= f(x_k, y'_k)(x_{k+1} - x_k),\\
Y' - y'_m &= f(x_m, y'_m)(X - x_m).
\end{aligned}$$

Y' sera une valeur approchée de la valeur de l'intégrale cherchée, pour $x = X$, et quand on augmente indéfiniment le moindre des points intermédiaires, de façon que la distance de deux points consécutifs tende vers zéro, Y′ tend vers une limite Y qui est l'intégrale demandée.

Cette méthode a été reprise et exposée didactiquement, en 1837, par Coriolis ([1]), puis, plus tard, par M. Lipschitz, en 1868 ([2]), mais, jusqu'ici, elle n'avait pas paru susceptible d'une généralisation pour les équations aux dérivées partielles.

Tout récemment, M. E. Picard ([3]), dans plusieurs Mémoires remarquables, a montré qu'elle pouvait être d'une application très féconde aux équations aux dérivées partielles du second ordre linéaires.

La seconde méthode de Cauchy repose essentiellement sur un artifice imaginé par Cauchy lui-même, et qu'il a nommé *Calcul des limites* ([4]). En 1842, Cauchy ([5]) montra comment l'application de cette méthode aux équations aux dérivées partielles prouve l'existence des intégrales dans ces équations, et, depuis, *tous* les auteurs qui se sont occupés de cette question ont suivi cette méthode. C'est d'ailleurs aussi celle que j'ai suivie dans le présent travail.

Voici, brièvement, une analyse des beaux Mémoires, malheureusement trop peu connus, de Cauchy ([6]). Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction holomorphe, ainsi que ses dérivées au voisinage du point x_1^0,

---

([1]) Coriolis, *Sur le degré d'approximation qu'on obtient pour les valeurs numériques d'une variable qui satisfait à une équation différentielle, en employant pour calculer ces valeurs diverses équations aux différences plus ou moins approchées* (*Journal de Liouville*, t. II, p. 230; 1837).

([2]) Lipschitz, *Sur la possibilité d'intégrer complètement un système donné d'équations différentielles* (*Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. X, p. 149; 1876, et *Annali di Matematica*, 2e série, t. II, p. 228).

([3]) E. Picard, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CX, p. 61; *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. VI, p. 145; 1890; *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier LX; 1890.

([4]) *Voir*, pour l'application de cette méthode aux équations *différentielles* : Weierstrass, *Ueber die Theorie der analytischen Facultäten* (*Journal de Crelle*, t. 41, p. 43); Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions doublement périodiques*, p. 49.

([5]) Cauchy, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XIV, p. 1020; t. XV, p. 44, 85 et 131; t. XVI, p. 572.

([6]) Dans cette analyse, pour ne pas fatiguer le lecteur, je n'ai pas conservé les notations de Cauchy, et j'ai pris celles dont je me suis servi dans mon travail. Cauchy désignait les variables indépendantes par $x, y, z, \ldots, t$, les fonctions inconnues par $\varpi, \varpi_1, \ldots$, et il résolvait toujours les équations par rapport aux dérivées, par rapport à la variable t qu'il appelait le *temps*.

$x_2^0, \ldots, x_n^0$ dans des domaines de rayons $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$; on a, d'après le calcul des limites,

$$\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|_{(x_k=x_k^0)} < \mathrm{N}\,\frac{\mathrm{M}}{\rho_1^{\alpha_1}\rho_2^{\alpha_2}\ldots\rho_n^{\alpha_n}},$$

où l'on a posé

$$\mathrm{N} = (\alpha_1!)\,(\alpha_2!)\ldots(\alpha_n!),$$

et où M désigne le module de la plus grande valeur que peut acquérir $f(x_1, \ldots, x_n)$ quand les variables varient dans leurs domaines respectifs de régularité. Cauchy en conclut d'abord que, si l'on considère la fonction

$$u = \frac{a}{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

on aura

$$\text{(C)}\qquad \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} = \mathrm{N}\,\frac{u}{(-x_1)^{\alpha_1}(-x_2)^{\alpha_2}\ldots(-x_n)^{\alpha_n}}$$

et, par suite, que, si dans le second membre de la formule (C) on remplace u par M et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivement par $-\rho_1, -\rho_2, \ldots, -\rho_n$, on retrouve la limite supérieure de

$$\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|.$$

[Ceci, au fond, revient à déterminer une fonction *majorante* pour $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (*voir* IIe Partie, théorème VIII).]

La marche générale de la démonstration est alors tracée immédiatement. D'abord, tout système d'équations aux dérivées partielles peut, en introduisant de nouvelles fonctions, se ramener à un système d'équations linéaires et du premier ordre. Cauchy ne considère alors que des systèmes linéaires *où le nombre des équations est égal au nombre des fonctions inconnues* et qui sont résolus par rapport aux dérivées des fonctions inconnues par rapport à une *même* variable x_1 (1). Pour

(1) Dans ses Mémoires, Cauchy ne paraît pas considérer qu'il y ait lieu de s'occuper d'autres systèmes que de ceux-ci; il regarde les équations aux dérivées partielles comme provenant de la Physique mathématique, et alors la solution doit être déterminée si l'on se donne les conditions initiales à l'origine du temps.

prouver qu'il existe des intégrales $u_1, \ldots, u_m$ qui, pour $x_1 = x_1^0$, se réduisent à des fonctions données $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ de $x_2, \ldots, x_n$, il remarque d'abord qu'en remplaçant $u_1, \ldots, u_m$, respectivement, par $u_1 + \varphi_1, \ldots, u_m + \varphi_m$, tout revient à montrer qu'il existe des intégrales qui se réduisent à des constantes données pour $x_1 = x_1^0$.

A cet effet, il montre que les coefficients des développements des intégrales sont fournies par les équations elles-mêmes, jointes aux conditions initiales. Il ne reste donc qu'à montrer la convergence des développements ainsi calculés qui, alors, vérifieront évidemment les équations. Cauchy fait, d'abord, la démonstration pour une seule équation linéaire du premier ordre : il remplace les coefficients de cette équation par des fonctions majorantes et obtient une nouvelle équation auxiliaire qui admet une intégrale holomorphe qu'il calcule par la méthode des caractéristiques dont il est l'auteur. Cette intégrale ayant des coefficients positifs et supérieurs aux modules des coefficients correspondants des développements précédents, il en conclut que les développements sont convergents.

La marche est ensuite la même pour un système de m équations contenant m fonctions inconnues. Il forme un système d'équations auxiliaires, respectivement majorantes pour les équations du système proposé, et ramène la recherche des intégrales de ce système à celle de l'intégrale d'*une seule* équation, analogue à l'équation auxiliaire précédente.

On voit, d'après cette courte analyse, que la question avait été déjà très avancée par Cauchy. En réalité, les Mémoires de M. Darboux et de M^me^ de Kowalewski n'ont ajouté que peu de chose aux résultats de Cauchy. Ces deux géomètres ont eu, surtout, le grand mérite de préciser ces résultats et de simplifier les démonstrations.

La démonstration qu'a donnée M. Darboux, sans connaître celle de Cauchy, est assez voisine de cette dernière, quoiqu'elle ne nécessite pas le passage aux équations linéaires, parce que M. Darboux a employé à peu près la même fonction majorante que Cauchy.

M^me^ de Kowalewski ramène, de même que l'illustre géomètre, l'intégration d'un système quelconque à celle d'un système linéaire, mais elle a considérablement simplifié la démonstration, en remplaçant la fonction majorante de Cauchy par une fonction *plus simple*, indiquée par M. Weierstrass [1]. La fonction

$$\frac{M}{1 - \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_1^0 - x_2^0 - \ldots - x_n^0}{\rho}}$$

est, en effet, majorante pour $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ au point $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, ρ désignant la plus petite des quantités $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$.

Je ne parlerai plus du Mémoire récent de MM. Méray et Riquier, car j'ai eu maintes fois l'occasion de le citer dans le cours de ce travail.

---

(1) *Voir*, au sujet de ces fonctions majorantes, le début du beau Mémoire de M. H. Poincaré *Sur le problème des trois corps*, publié dans les *Acta mathematica*, t. XIII.