ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JULES CELS

Sur les équations différentielles linéaires ordinaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 8 (1891), p. 341-415
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1891_3_8__341_0>

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ORDINAIRES,

PAR M. JULES CELS,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

INTRODUCTION.

1. On sait que Lagrange, en cherchant un facteur intégrant d'une équation différentielle linéaire ordinaire, trouva une équation connue aujourd'hui sous le nom « d'adjointe de Lagrange », dont l'intégration est intimement liée à celle de la proposée. Il mit aussi en évidence la réciprocité des deux équations en énonçant cette propriété fondamentale : *Si l'on prend l'adjointe d'une certaine équation et si l'on prend l'adjointe de cette nouvelle équation, on retrouve l'ancienne.*

Plus tard, Jacobi étudia de plus près la correspondance entre les solutions d'une équation et celles de son adjointe de Lagrange; il arriva au résultat suivant : Soit une équation (E) d'ordre n admettant les n solutions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ formant un système fondamental. Soit le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix};$$

les solutions de l'adjointe de Lagrange de l'équation (E) sont les divers quotients des mineurs correspondants aux éléments de la dernière ligne du déterminant Δ par ce déterminant. La réciprocité se trouvait précisée de la façon suivante : Si l'on désigne les n expressions dont il vient d'être parlé par $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et si l'on considère le déterminant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ u'_1 & u'_2 & \ldots & u'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont au signe près les divers quotients des mineurs correspondants aux éléments de la dernière ligne du déterminant Δ_1 par ce déterminant.

2. En lisant attentivement la démonstration de Jacobi, je me suis demandé pourquoi l'on prenait la dernière ligne du déterminant Δ plutôt qu'une autre, la démonstration paraissant être visiblement la même pour les autres lignes. C'est cette remarque qui m'a conduit à toutes mes recherches.

Considérons donc les quotients des mineurs correspondants aux éléments de la $k^{\text{ième}}$ ligne du déterminant Δ par ce déterminant. Ces expressions en nombre n sont évidemment solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre n, dont les coefficients sont des fonctions des coefficients de l'équation (E) et des dérivées de ces coefficients. Soit (E_1) cette équation. Cette équation différentielle aura de l'intérêt si elle est réciproque avec l'équation (E). J'ai repris la démonstration de Jacobi en y changeant peu de chose, et j'ai vu qu'il en était ainsi.

Il existe donc pour une équation d'ordre n, outre l'équation adjointe de Lagrange, $n-1$ autres équations adjointes. Toutes ces équations adjointes correspondent en quelque sorte aux n lignes du déterminant fondamental relatif à l'équation (E).

Ce résultat acquis, il restait à former ces équations : la chose n'était pas très difficile; soit en effet une équation d'ordre $n-1$, (A), admettant $n-1$ solutions communes avec l'équation (E), d'après la composition des coefficients d'une équation en fonction des solutions, on voit que les coefficients de l'équation (A) seront les solutions des adjointes correspondant aux différentes lignes du déterminant fondamental de l'équation (E). Il suffira donc d'écrire que cette équation a $(n-1)$ solutions communes avec l'équation (E) pour avoir n relations desquelles il suffira d'éliminer $n-1$ des quantités pour avoir l'équation que l'on veut obtenir. Dans la démonstration que j'ai donnée dans la première partie, j'ai un peu modifié cette méthode, mais le fond reste le même.

Ces équations obtenues, il fallait préciser exactement leur rôle dans l'intégration de l'équation (E). Or leur définition même montre que, si l'on connaît l'intégrale générale de l'une d'elles, on connaîtra l'intégrale générale de la proposée; enfin on montre bien facilement que, quand on connaît plusieurs solutions particulières de l'une d'elles, il est facile d'avoir les solutions particulières correspondantes de l'adjointe de Lagrange, et, par suite, de simplifier, comme l'on sait, l'intégration de la proposée.

3. Quelque temps après avoir obtenu ces résultats, j'étudiais dans le Livre de M. Darboux [1] l'exposition de la méthode que Laplace a imaginée pour les équations linéaires aux dérivées partielles du deuxième ordre. On sait qu'à une équation de cette nature on peut faire correspondre une suite doublement infinie d'équations de même forme, cette correspondance étant telle que, si l'on connaît une solution particulière d'une des équations, on peut trouver la solution correspondante d'une autre équation de la suite par des opérations qui, le plus souvent, sont des différentiations. L'intérêt de cette méthode se détache avec une très grande netteté. On établit, par exemple, qu'une équation de la forme étudiée s'intègre quand une certaine fonction h des coefficients est nulle; alors, par la correspondance, on étend ce résultat, puisque la quantité h varie quand on passe d'une équation à une autre. C'est là, je crois, le fond de la méthode : *Tous les caractères qui permettent d'intégrer l'équation* (E) *deviennent, par la considération de la suite doublement infinie correspondante, des caractères d'une application beaucoup plus générale.*

J'ai eu l'idée d'imaginer une méthode analogue pour les équations différentielles linéaires ordinaires.

Soit (E) une équation, prenons son adjointe de Lagrange (E_1), pour cette équation (E_1) prenons son adjointe de la première ligne (E_2);

(1) *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. II.

pour celle-ci, l'adjointe de Lagrange, etc.; enfin formons une autre suite en prenant d'abord pour l'équation (E) l'adjointe de la première ligne, puis, pour cette nouvelle équation, l'adjointe de Lagrange, etc.

Cette suite doublement infinie est telle que, si l'on a l'intégrale générale d'une équation de la suite, on a, sans nouvelle intégration, l'intégrale générale de l'équation (E). Enfin, si l'on a une solution particulière d'une équation paire, par exemple, on a, sans *nouvelle intégration*, les solutions correspondantes de toutes les équations paires.

Ces propriétés tiennent évidemment à la réciprocité qui existe entre une équation et l'une de ses adjointes; il aurait été impossible de former de pareilles suites sans la notion des adjointes.

Il ne s'agissait plus maintenant que de trouver des caractères qui permissent d'intégrer l'équation (E), on augmenterait leur généralité par la considération de la suite d'équations. J'ai songé d'abord aux caractères que M. Halphen a si bien précisés dans son Mémoire [1]. Mais pour étendre ces caractères, il aurait fallu aborder le problème général du changement des invariants quand on passe d'une équation à l'une de ses adjointes, en même temps qu'il aurait fallu indiquer les changements apportés dans les racines des équations déterminantes relatives aux différents points critiques. La question, vue ainsi, m'a paru trop vaste et trop difficile pour être abordée dès le début. La difficulté aurait été d'autant plus grande pour moi, que rien ne m'aurait guidé dans cette recherche. J'ai préféré appliquer d'abord ma méthode à des classes particulières d'équations afin d'apercevoir sur ces exemples simples le mécanisme des différentes déductions. Après cela, j'emploierai tous mes efforts pour la solution de la question au point de vue le plus général.

4. J'ai pris d'abord les équations qui généralisent l'équation de Gauss sur la série hypergéométrique. Dans ce cas, toutes les équations de la suite ont la même forme. Le caractère que je transforme est tout à fait élémentaire, c'est le suivant : on connaît une solution de l'équation lorsque le terme en z manque; cette solution est, en effet, une constante. Je cherche donc la transformation apportée dans le coefficient du terme en z par l'emploi de la suite.

[1] *Mémoires de l'Institut. Savants étrangers*, t. XXVIII.

L'expression de ce coefficient dans l'équation E_{2p} est une équation algébrique en p; je suis alors conduit à deux résultats qui sont principaux pour cette étude, à savoir : qu'aux plus petites racines entières négatives et positives (en valeur absolue) correspondent des polynômes comme solutions de la proposée ou de l'adjointe de Lagrange de la proposée.

En cherchant à vérifier directement ces résultats, j'ai trouvé cette propriété simple : Lorsque toutes les racines de l'équation déterminante du point ∞ sont entières et négatives, il faut et il suffit que les logarithmes disparaissent dans les développements des intégrales *autour du point critique* ∞ pour que l'intégrale générale soit un polynôme.

J'ai encore étendu ce résultat par ma méthode, en cherchant les équations qui ont, dans leur suite correspondante, une équation dont l'intégrale générale est un polynôme. Je suis arrivé ainsi au résultat le plus important de cette étude, à savoir : que l'équation s'intègre sous forme finie ou par des quadratures lorsque les racines de l'équation déterminante du point ∞ sont entières et que des conditions algébriques nettement indiquées sont remplies. Un des corollaires de cette proposition est intéressant, c'est le suivant : Lorsque toutes les racines de l'équation déterminante du point ∞ sont entières et positives, pour que l'intégrale générale soit une fraction rationnelle, il faut et il suffit que les logarithmes disparaissent dans les développements des intégrales autour du point critique ∞. Enfin l'application de ces résultats à une équation déjà considérée par M. Goursat conduit à une proposition très simple qui décide des cas où l'intégration se fait par ma méthode.

Cette étude est terminée par l'application spéciale de la méthode à l'équation du deuxième ordre. Je suis conduit à une formule contenant des dérivées à indice quelconque qui exprime l'intégrale générale de cette équation.

5. J'ai ensuite appliqué la méthode à l'équation

$$(a) \qquad x^{n-1}\frac{d^n z}{dx^n} + \mathrm{A}\,x^{n-2}\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + \mathrm{L}\frac{dz}{dx} + x^{n-1}z = 0,$$

qui généralise dans les ordres supérieurs l'équation de Bessel

$$x\frac{d^2 z}{dx^2}+\mathrm{A}\frac{dz}{dx}+xz=0.$$

L'équation (a) s'intègre quand elle a l'une des deux formes

$$x^{n-1}\frac{d^n z}{dx^n}+x^{n-1}z=0, \tag{b}$$

$$x^{n-1}\frac{d^n z}{dx^n}+\mathrm{A}x^{n-2}\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}+x^{n-1}z=0, \tag{c}$$

et ce sont ces deux résultats que j'ai étendus par ma méthode.

Une équation a la forme (b) lorsque les racines de l'équation déterminante du point o sont

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad (n-1);$$

l'extension est celle-ci :

Dans la suite, correspondant à l'équation (a), il y a une équation de la forme (b) lorsque les racines de l'équation déterminante du point o pour l'équation (a) sont

$$0,\quad 1+pn,\quad 2+pn,\quad \ldots,\quad (n-1)+pn,$$

p étant un entier positif ou négatif.

J'arrive de même à montrer que, dans la suite correspondant à l'équation (a), il y a une équation de la forme (c) lorsque les racines de l'équation déterminante du point o, pour l'équation (a), sont

$$1+pn,\quad 2+pn,\quad \ldots,\quad (n-2)+pn,\quad (n-1)+qn$$

ou

$$(n-1)+pn,\quad (n-2)+pn,\quad \ldots,\quad 2+pn,\quad 1+qn,$$

p et q étant deux entiers positifs ou négatifs.

L'intégration se fait donc facilement dans ces deux cas, et ces résultats donnent l'intégration pour les équations du deuxième et du troisième ordre dans tous les cas où l'intégrale générale est uniforme autour du point critique o; il n'en est pas de même pour les équations d'ordre supérieur, parce que, dans une équation d'ordre n, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale générale soit uniforme autour du point critique o sont, ainsi que je l'établis, que les racines de l'équation déterminante du point o soient respectivement $1, 2, \ldots, (n-1)$, à un multiple de n près, qui n'est pas le même pour toutes les intégrales.

6. J'aborde ensuite le cas où la suite d'équations correspondant à l'équation (E) est telle qu'on y trouve une équation qui lui est identique. Le cas le plus intéressant est celui où la suite est véritablement périodique, c'est-à-dire où $(E) = (E_{2n})$; dans ce cas, j'intègre et je montre que ces équations appartiennent à la classe de celles que l'on peut ramener aux équations linéaires à coefficients constants, par un changement de fonction suivi d'un changement de variable.

7. J'indique ensuite qu'il existe autant de méthodes de correspondance doublement infinie qu'il y a de combinaisons de lignes deux à deux dans le déterminant fondamental.

Il existe enfin des correspondances qui sont plus que doublement infinies; on les obtient en considérant, par exemple, trois lignes du déterminant fondamental. On a alors une correspondance sextuplement infinie, et, je le répète, l'intérêt de ces correspondances consiste en ce qu'elles permettent de généraliser de plus en plus les caractères d'intégration d'une équation.

Tous les résultats exposés dans ce travail m'appartiennent : ils ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans les séances du 15 juillet et 8 décembre 1890, 4 mai 1891; personne, avant moi, n'avait parlé d'équations adjointes autres que celle de Lagrange, et j'ai le premier indiqué l'existence de ces équations, leur formation et leur rôle dans ma Note du 15 juillet. Je dois cependant dire que, six mois après la publication de ma Note, le 16 décembre 1890, M. Imchenetsky a envoyé à l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg un Mémoire contenant des démonstrations détaillées sur la formation de ces adjointes et leur rôle dans l'intégration.

Qu'il me soit permis, en terminant, de remercier M. Darboux du bienveillant accueil qu'il a fait à mes recherches et des encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer pendant la durée de ce travail.

J'ai divisé l'exposition en trois Parties :

Dans la première Partie, j'expose la propriété de réciprocité des adjointes, le moyen de les former et leur rôle dans l'intégration de la proposée. A la suite, je place une théorie de l'élimination relative aux équations différentielles linéaires ordinaires, parce qu'on la déduit facilement de la considération d'une équation linéaire aux dérivées partielles que j'ai rencontrée dans mes recherches.

Dans la deuxième Partie, j'expose, dans un premier Chapitre, la méthode de correspondance doublement infinie; dans un deuxième Chapitre, l'application aux équations qui généralisent l'équation de Gauss sur la série hypergéométrique; dans un troisième Chapitre, l'application aux équations qui généralisent l'équation de Bessel.

Enfin, dans la troisième Partie, j'étudie les cas de périodicité de la suite; je forme ensuite explicitement l'adjointe de l'avant-dernière ligne et j'indique l'existence d'autres méthodes de correspondance analogues à celles de la deuxième Partie.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Lagrange a trouvé l'équation connue sous le nom d'*adjointe de Lagrange* en se proposant la question suivante :

Étant donnée l'équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$(1)\qquad a_0\frac{d^n z}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dz}{dx}+a_n z=0,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ désignent des fonctions de x, trouver une fonction y de x telle que, en multipliant le premier membre de l'équation précédente par y, le résultat soit la dérivée exacte d'une fonction linéaire de z et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$. Une suite d'intégrations par parties conduit à la formule

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int\left[a_0\frac{d^n z}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\ldots+a_n z\right]y\,dx\\
&=\int\left[a_n y-\frac{d}{dx}(a_{n-1}y)+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}(a_0 y)\right]z\,dx\\
&\quad+z\left[a_{n-1}y-\frac{d}{dx}(a_{n-2}y)+\frac{d^2}{dx^2}(a_{n-3}y)-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(a_0 y)\right]\\
&\quad+\frac{dz}{dx}\left[a_{n-2}y-\frac{d}{dx}(a_{n-3}y)+\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^{n-2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(a_0 y)\right]\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad+\frac{d^{k-1}z}{dx^{k-1}}\left[a_{n-k}y-\frac{d}{dx}(a_{n-k-1}y)+\ldots+(-1)^{n-k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(a_0 y)\right]\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad+\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}(a_0 y).
\end{aligned}\right.$$

De sorte que l'équation qui détermine y est

$$(3)\qquad a_n y-\frac{d}{dx}(a_{n-1}y)+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}(a_0 y)=0.$$

Lagrange établit ensuite la propriété fondamentale de l'équation adjointe d'une équation donnée :

Si l'on forme l'équation adjointe de la nouvelle équation, on retrouve l'ancienne.

Enfin il montre comment l'intégration complète ou partielle de l'adjointe permet de simplifier l'intégration de la proposée. Pour toutes ces considérations, ainsi que pour l'exposé des divers points de vue auxquels se sont placés les géomètres qui ont étudié cette question, nous renvoyons le lecteur au bel Ouvrage de M. Darboux (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, p. 99 et suivantes).

2. Reprenons l'équation (1) en y faisant $a_0=1$

$$(4)\qquad \frac{d^n z}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\ldots+a_n z=0.$$

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ n solutions particulières formant un système fondamental; soit de plus le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ z'_1 & z'_2 & \dots & z'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(k-1)} & z_2^{(k-1)} & \dots & z_n^{(k-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \dots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

où les indices supérieurs désignent des indices de dérivation.

Jacobi a montré que les expressions

$$y_1 = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial z_1^{(n-1)}}, \qquad \dots, \qquad y_n = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial z_n^{(n-1)}}$$

sont solutions de l'adjointe de Lagrange de l'équation (4).

Soit

$$\frac{d^n y}{dx^n} + b_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + b_{n-1}\frac{dy}{dx} + b_n y = 0 \tag{5}$$

cette adjointe; il a montré de plus que l'on avait

$$z_1 = -\frac{1}{\Delta_1}\frac{\partial\Delta_1}{\partial y_1^{(n-1)}}, \qquad \dots, \qquad z_n = -\frac{1}{\Delta_1}\frac{\partial\Delta_1}{\partial y_n^{(n-1)}},$$

Δ_1 désignant le déterminant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(k-1)} & y_2^{(k-1)} & \dots & y_n^{(k-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Cette proposition renferme celle de Lagrange concernant la réciprocité qui existe entre une équation et son adjointe, et elle montre, en outre, la liaison intime des solutions des deux équations. Elle permet enfin de déduire sans aucune quadrature l'intégrale générale d'une équation de l'intégrale générale de son adjointe. C'est la lecture de cette démonstration de Jacobi qui a déterminé toutes nos recherches.

3. Imaginons, en effet, l'équation différentielle linéaire ordinaire admettant les solutions

$$u_1 = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial z_1^{(k-1)}}, \qquad u_2 = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial z_2^{(k-1)}}, \qquad \ldots, \qquad u_n = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial z_n^{(k-1)}};$$

nous allons montrer que cette nouvelle équation est liée à l'équation donnée de la même façon qu'une équation à son adjointe de Lagrange.

Des propriétés élémentaires relatives au déterminant Δ donnent

$$\sum u_1 z_1 = 0, \quad \sum u_1 z'_1 = 0, \quad \ldots, \quad \sum u_1 z_1^{(k-2)} = 0, \quad \sum u_1 z_1^{(k-1)} = 1, \quad \sum u_1 z_1^{(k)} = 0, \quad \ldots, \quad \sum u_1 z_1^{(n-1)} = 0.$$

Différentiant successivement 1, 2, ..., $(n-1)$ fois, nous obtenons

$$\begin{array}{llllll}
\sum u'_1 z_1 = 0, & \sum u'_1 z'_1 = 0, & \ldots, & \sum u'_1 z_1^{(k-2)} = 0, & \sum u'_1 z_1^{(k-1)} \quad 0, \ \ldots, & \sum u'_1 z_1^{(n-2)} = 0,\\
\sum u''_1 z_1 = 0, & \sum u''_1 z'_1 = 0, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ \ldots, & \sum u''_1 z_1^{(k-1)} = 0, \ \ldots, & \sum u''_1 z_1^{(n-3)} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \ \ldots, & \ldots\ldots\ldots,\\
\sum u_1^{(k-2)} z_1 = 0, & \sum u_1^{(k-2)} z'_1 = 0, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ \ldots, & & \sum u_1^{(k-2)} z_1^{(n-k+1)} = 0,\\
\sum u_1^{(k-1)} z_1 = 1, & \sum u_1^{(k-1)} z'_1 = 0, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \sum u_1^{(k-1)} z_1^{(n-k)} = 0, & \\
\sum u_1^{(k)} z_1 = 0, & \sum u_1^{(k)} z'_1 = 0, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \sum u_1^{(k)} z_1^{(n-k-1)} = 0, & \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \\
\sum u_1^{(n-2)} z_1 = 0, & \sum u_1^{(n-1)} z'_1 = 0, & & & & \\
\sum u_1^{(n-1)} z_1 = 0. & & & & &
\end{array}$$

La première colonne du Tableau précédent montre que l'on a

$$z_1 = -\frac{1}{\Delta_2}\frac{\partial\Delta_2}{\partial u_1^{(k-1)}}, \qquad z_2 = -\frac{1}{\Delta_2}\frac{\partial\Delta_2}{\partial u_2^{(k-1)}}, \qquad \ldots, \qquad z_n = -\frac{1}{\Delta_2}\frac{\partial\Delta_2}{\partial u_n^{(k-1)}},$$

Δ_2 étant le déterminant

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ u'_1 & u'_2 & \ldots & u'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(k-1)} & u_2^{(k-1)} & \ldots & u_n^{(k-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

La propriété de liaison et de réciprocité est donc démontrée.

L'équation qui a pour solutions les expressions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sera appelée l'équation correspondant à la $k^{\text{ième}}$ ligne du déterminant fondamental de l'équation donnée ou l'*adjointe de la $k^{\text{ième}}$ ligne*.

Relativement à ces équations, nous venons d'établir cette propriété fondamentale :

I. *Étant donnée une équation différentielle linéaire ordinaire, il y a autant d'adjointes que d'unités dans l'ordre de cette équation.*

Si l'on prend l'adjointe de la $k^{\text{ième}}$ ligne d'une certaine équation et que l'on prenne ensuite l'adjointe de la $k^{\text{ième}}$ ligne de la nouvelle équation, on retrouve l'ancienne.

Remarque. — Sous le nom d'*adjointe de Lagrange* de l'équation (1), on désigne l'équation (3); dans tout ce qui suit, nous conserverons cette dénomination, mais en remarquant toutefois que les solutions de cette adjointe de Lagrange ne sont solutions de l'adjointe de la dernière ligne qu'à un facteur près.

4. Proposons-nous de former l'adjointe de la $k^{\text{ième}}$ ligne pour l'équation

$$(1) \qquad a_0 \frac{d^n z}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dz}{dx} + a_n z = 0.$$

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ n solutions formant un système fondamental, et soit le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_n \\ z'_1 & z'_2 & \ldots & z'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(k-1)} & z_2^{(k-1)} & \ldots & z_n^{(k-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \ldots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Reportons-nous à la formule (2); elle montre que, si y_1 est solution de l'adjointe de Lagrange

$$a_n y - \frac{d}{dx}(a_{n-1}y) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(a_0 y) = 0,$$

l'équation

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} 0 = z&\left[a_{n-1}y_1 - \frac{d}{dx}(a_{n-2}y_1) + \frac{d^2}{dx^2}(a_{n-3}y_1) + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(a_0 y_1)\right] \\ &+ \frac{dz}{dx}\left[a_{n-2}y_1 - \frac{d}{dx}(a_{n-3}y_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(a_0 y_1)\right] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{d^{k-1}z}{dx^{k-1}}\left[a_{n-k}y_1 - \frac{d}{dx}(a_{n-k-1}y_1) \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(a_0 y_1)\right] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{d^{n-1}z}{dz^{n-1}} a_0 y_1 \end{aligned} \right.$$

admet $(n-1)$ solutions communes avec l'équation (1). En effet, pour toutes les solutions de l'équation (6), le deuxième membre de l'identité (2) où $y = y_1$ est nul. Le premier membre doit donc s'annuler aussi. Appelons $z_2, \ldots, z_n$ ces $(n-1)$ solutions communes. L'équation

$$\Theta = \begin{vmatrix} z_2 & z_3 & \ldots & z_n & Z \\ z'_2 & z'_3 & \ldots & z'_n & Z' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_2^{(k-1)} & z_3^{(k-1)} & \ldots & z_n^{(k-1)} & Z^{(k-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_2^{(n-1)} & z_3^{(n-1)} & \ldots & z_n^{(n-1)} & Z^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0,$$

qui a comme solutions $z_2, \ldots, z_n$, est la même que l'équation (6), à un facteur près. En développant cette équation $\Theta = 0$, on la met sous la forme

$$(7)\qquad \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\frac{\partial\Theta}{\partial Z^{(n-1)}} + \frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}\frac{\partial\Theta}{\partial Z^{(n-2)}} + \ldots + z\frac{\partial\Theta}{\partial Z} = 0.$$

En remarquant que

$$\frac{\partial\Theta}{\partial Z^{(n-1)}} = \frac{\partial\Delta}{\partial z_1^{(n-1)}}, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial Z^{(n-2)}} = \frac{\partial\Delta}{\partial z_1^{(n-2)}}, \qquad \ldots,$$

l'équation (7) peut s'écrire

$$(7)\quad \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\frac{\partial\Delta}{\partial z_1^{(n-1)}}+\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}\frac{\partial\Delta}{\partial z_1^{(n-2)}}+\ldots+\frac{d^{k-1}z}{dx^{k-1}}\frac{\partial\Delta}{\partial z_1^{(k-1)}}+\ldots+z\frac{\partial\Delta}{\partial z_1}=0.$$

L'identification des équations (6) et (7) nous donne l'égalité

$$\frac{\dfrac{\partial\Delta}{\partial z_1^{(n-1)}}}{a_0 y_1}=\frac{\dfrac{\partial\Delta}{\partial z_1^{(k-1)}}}{a_{n-k}y_1-\dfrac{d}{dx}(a_{n-k-1}y_1)+\ldots+(-1)^{n-k}\dfrac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(a_0 y_1)},$$

mais (¹)

$$a_0 y_1=\frac{\partial\Delta}{\partial z_1^{(n-1)}}\frac{1}{\Delta}\qquad\text{ou}\qquad\frac{\dfrac{\partial\Delta}{\partial z_1^{(n-1)}}}{a_0 y_1}=\Delta;$$

donc

$$\Delta=\frac{\dfrac{\partial\Delta}{\partial z_1^{(k-1)}}}{a_{n-k}y_1-\dfrac{d}{dx}(a_{n-k-1}y_1)+\ldots+(-1)^{n-k}\dfrac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(a_0 y_1)},$$

$$(8)\quad \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial z_1^{(k-1)}}=a_{n-k}y_1-\frac{d}{dx}(a_{n-k-1}y_1)+\ldots+(-1)^{n-k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(a_0 y_1).$$

Cette formule (8) montre comment on obtient les quantités u en fonctions des quantités correspondantes y.

On obtiendra donc l'adjointe de la $k^{\text{ième}}$ ligne en éliminant y entre les équations

$$u=a_{n-k}y-\frac{d}{dx}(a_{n-k-1}y)+\ldots+(-1)^{n-k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(a_0 y),$$

$$a_n y-\frac{d}{dx}(a_{n-1}y)+\frac{d^2}{dx^2}(a_{n-2}y)+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}(a_0 y),$$

ou entre les deux équations

$$(8\ bis)\left\{\begin{aligned} &u=a_{n-k}y-\frac{d}{dx}(a_{n-k-1}y)+\ldots+(-1)^{n-k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(a_0 y),\\ &\frac{d^k u}{dx^k}=\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(a_{n-k+1}y)-\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}(a_{n-k+2}y)+\ldots+(-1)^{k-1}(a_n y).\end{aligned}\right.$$

(¹) Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, loc. cit.

Il n'est pas inutile de remarquer que cette élimination conduit à une équation d'ordre n.

On peut donc adopter la règle pratique suivante :

II. *Pour former l'adjointe de la $k^{ième}$ ligne de l'équation*

$$a_0 \frac{d^n z}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n z = 0,$$

on considère l'adjointe de Lagrange

$$a_n y - \frac{d}{dx} a_{n-1} y + \frac{d^2}{dx^2}(a_{n-2} y) + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-k} \frac{d^k}{dx^k}(a_{n-k} y) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(a_0 y);$$

on la sépare en deux entre le $k^{ième}$ et le $k+1^{ième}$ terme; on égale les deux tronçons (commençant tous deux par un terme positif) *à* $\frac{d^k u}{dx^k}$,

$$\frac{d^k u}{dx^k} = \frac{d^k}{dx^k}(a_{n-k} y) - \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(a_{n-k-1} y) + \ldots + (-1)^{n-k} \frac{d^n}{dx^n}(a_0 y),$$
$$\frac{d^k u}{dx^k} = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(a_{n-k+1} y) + \ldots + (-1)^{k-1} a_n y;$$

on remplace la première équation par l'intégrale répétée k fois,

$$u = a_{n-k} y - \frac{d}{dx}(a_{n-k-1} y) + \ldots + (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(a_0 y);$$

enfin on élimine y entre ces deux équations.

5. Quand on connaît l'intégrale générale d'une quelconque des équations adjointes, on connaît l'intégrale générale de la proposée. Cela résulte évidemment de la proposition I.

Quand on connaît une intégrale particulière de l'adjointe de la $k^{\text{ième}}$ ligne, on peut en général, à l'aide des formules (8 *bis*), en déduire la solution correspondante de l'adjointe de Lagrange. En effet, supposons pour fixer les idées que $(n-k)$ soit un nombre plus grand que $(k-1)$, on a

$$n - k = (k-1) + (n - 2k + 1).$$

Différentions la deuxième des équations 8 *bis* $(n - 2k + 1)$ fois, nous obtenons ainsi $n - 2k + 3$ équations entre $y, y', \ldots, y^{(n-k)}$, c'est-à-dire $k - 2$ équations de moins que d'inconnues. En différentiant $k - 2$ fois la première des équations (8 *bis*) et la dernière de celles que nous venons d'obtenir, nous aurons autant d'équations que d'inconnues entre y et ses dérivées. En général, nous pourrons résoudre ce système d'équations linéaires par rapport à $y, y', \ldots, y^{(n-k)}$; donc, comme nous l'avons annoncé, nous aurons en général la valeur correspondante de y.

6. Nous allons former l'adjointe de la première ligne d'une équation parce qu'elle nous servira souvent dans la suite.

D'après la règle II, il faut éliminer y entre les équations

$$u = a_{n-1}y - \frac{d}{dn}(a_{n-2}y) + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(a_0 y), \qquad \frac{du}{dx} = a_n y;$$

on obtient alors

$$u - \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{du}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{a_{n-2}}{a_n}u'\right) + \ldots + (-1)^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{a_0}{a_n}u'\right) = 0.$$

7. Reprenons l'équation (1), ses n solutions $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et le déterminant Δ; posons

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial z_i^{k-1}} = x_k^i,$$

les expressions x_k^i où i reste fixe et k prend les valeurs $1, 2, \ldots, n$ sont successivement solutions de chacune des adjointes et ces solutions sont correspondantes.

D'après ce que nous avons établi relativement à la formation des équations, nous avons

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{ll}
x_1^i & = a_{n-1}y_i - \dfrac{d}{dx}(a_{n-2}\,y_i) + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(a_0 y_i), \\
x_2^i & = a_{n-2}y_i - \dfrac{d}{dx}(a_{n-3}\,y_i) + \ldots + (-1)^{n-2}\dfrac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(a_0 y_i), \\
\multicolumn{2}{l}{\dotfill,} \\
x_k^i & = a_{n-k}y_i - \dfrac{d}{dx}(a_{n-k-1}y_i) + \ldots + (-1)^{n-k}\dfrac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(a_0 y_i), \\
\multicolumn{2}{l}{\dotfill,} \\
x_{n-1}^i & = a_1 y_i - \dfrac{d}{dx}(a_0 y_i), \\
x_n^i & = a_0 y_i.
\end{array}\right.$$

De là, nous tirons les formules suivantes

$$(10)\quad \begin{cases} x_n^i \;\; = a_0 y_i, \\ x_{n-1}^i = a_1 y_i - \dfrac{dx_n^i}{dx}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_{n-k}^i = a_k y_i - \dfrac{dx_{n-k+1}^i}{dx}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_2^i \;\; = a_{n-2} y_i - \dfrac{dx_3^i}{dx}, \\ x_1^i \;\; = a_{n-1} y_i. \end{cases}$$

D'autre part,

$$\frac{dx_1^i}{dx} = a_n y_i;$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{dx_1^i}{dx} &= a_n y_i, \\ \frac{dx_2^i}{dx} &= a_{n-1} y_i - x_1^i, \\ \frac{dx_3^i}{dx} &= a_{n-2} y_i - x_2^i, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{dx_n^i}{dx} &= a_1 y_i - x_{n-1}^i; \end{aligned}$$

remplaçant y_i par $\dfrac{x_n^i}{a_0}$, il vient

$$\frac{dx_1^i}{a_n x_n^i} = \frac{dx_2^i}{a_{n-1} x_n^i - a_0 x_1^i} = \frac{dx_3^i}{a_{n-2} x_n^i - a_0 x_2^i} = \dots = \frac{dx_n^i}{a_1 x_n^i - a_0 x_{n-1}^i} = \frac{dx}{a_0}.$$

En désignant, d'une façon générale, par X_k la solution de l'adjointe de la $k^{\text{ième}}$ ligne, on a les relations

$$(11)\quad \frac{dX_1}{a_n X_n} = \frac{dX_2}{a_{n-1} X_n - a_0 X_1} = \frac{dX_3}{a_{n-2} X_n - a_0 X_2} = \dots = \frac{dX_n}{a_1 X_n - a_0 X_{n-1}} = \frac{dx}{a_0}.$$

8. Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(12)\quad \begin{cases} a_n X_n \dfrac{\partial f}{\partial X_1} + (a_{n-1} X_n - a_0 X_1) \dfrac{\partial f}{\partial X_2} \\ \qquad + (a_{n-2} X_n - a_0 X_2) \dfrac{\partial f}{\partial X_3} + \dots + (a_1 X_n - a_0 X_{n-1}) \dfrac{\partial f}{\partial X_n} + a_0 \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

où x, X_1, ..., X_n sont des variables indépendantes, f une fonction inconnue de ces variables. A l'aide de ce qui précède, on peut trouver la solution générale de cette équation en fonction de z_1, z_2, ..., z_n; le résultat ainsi trouvé est simple. Au lieu de suivre cette voie, nous partirons du résultat que nous nous contenterons de vérifier et nous en déduirons une nouvelle démonstration de la règle II.

Soient toujours z_1, ..., z_n n solutions de l'équation (1) formant un système fondamental. L'expression

$$Y_i = X_1 z_i + X_2 \frac{dz_i}{dx} + X_3 \frac{d^2 z_i}{dx^2} + \ldots + X_{n-1} \frac{d^{n-2} z_i}{dx^{n-2}} + X_n \frac{d^{n-1} z_i}{dx^{n-1}} = \text{const.}$$

est une solution de l'équation (12), z_i étant une des quantités z_1, ..., z_n. Il suffit de le vérifier. En substituant, on a

$$\begin{aligned} & a_n X_n z_i + (a_{n-1} X_n - a_0 X_1) \frac{dz_i}{dx} \\ & \quad + (a_{n-2} X_n - a_0 X_2) \frac{d^2 z_i}{dx^2} + \ldots + (a_1 X_n - a_0 X_{n-1}) \frac{d^{n-1} z_i}{dx^{n-1}} \\ & \quad + a_0 \left(X_1 \frac{dz_i}{dx} + X_2 \frac{d^2 z_i}{dx^2} + \ldots + X_n \frac{d^n z_i}{dx^n} \right). \end{aligned}$$

Après avoir supprimé les termes qui se détruisent, il vient

$$X_n \left(a_n z_i + a_{n-1} \frac{dz_i}{dx} + a_{n-2} \frac{d^2 z_i}{dx^2} + \ldots + a_0 \frac{d^n z_i}{dx^n} \right),$$

résultat qui est évidemment nul.

On a donc, pour l'équation aux dérivées partielles, les solutions suivantes

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 z_1 + X_2 \dfrac{dz_1}{dx} + X_3 \dfrac{d^2 z_1}{dx^2} + \ldots + X_{n-1} \dfrac{d^{n-2} z_1}{dx^{n-2}} + X_n \dfrac{d^{n-1} z_1}{dx^{n-1}} = \text{const.}, \\ X_1 z_2 + X_2 \dfrac{dz_2}{dx} + X_3 \dfrac{d^2 z_2}{dx^2} + \ldots + X_{n-1} \dfrac{d^{n-2} z_2}{dx^{n-2}} + X_n \dfrac{d^{n-1} z_2}{dx^{n-1}} = \text{const.}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_1 z_n + X_2 \dfrac{dz_n}{dx} + X_3 \dfrac{d^2 z_n}{dx^n} + \ldots + X_{n-1} \dfrac{d^{n-2} z_n}{dx^{n-2}} + X_n \dfrac{d^{n-1} z_n}{dx^{n-1}} = \text{const.} \end{array} \right.$$

Comme on le sait, ces équations, résolues par rapport à X_1, X_2, ..., X_n, donneront les solutions des équations (11); or l'expression de X_k, tirée des équations (13), est l'intégrale générale de l'adjointe de la $k^{\text{ième}}$ ligne. Donc les solutions correspondantes des adjointes sont liées par les équations (11). Comme il est facile de remonter des équations (11) aux équations (9), on retrouve ainsi la règle II.

9. On vient d'établir le résultat suivant :

III. *Si l'on considère l'équation aux dérivées partielles*

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} & a_n x_n \frac{\partial f}{\partial x_1} + (a_{n-1}x_n - a_0 x_1)\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ & \quad + (a_{n-2}x_n - a_0 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_3} + \ldots + (a_1 x_n - a_0 x_{n-1})\frac{\partial f}{\partial x_n} + a_0 \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \end{aligned}\right.$$

où $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des variables indépendantes, f une fonction inconnue de ces variables, l'expression

$$Y_i = x_1 z_i + x_2 \frac{dz_i}{dx} + x_3 \frac{d^2 z_i}{dx^2} + \ldots + x_{n-1}\frac{d^{n-2} z_i}{dx^{n-2}} + x_n \frac{d^{n-1} z_i}{dx^{n-1}} = \text{const.}$$

est une intégrale de l'équation (12), *pourvu que z_i soit une solution de l'équation différentielle linéaire ordinaire*

$$(1)\qquad a_n z + a_{n-1}\frac{dz}{dx} + a_{n-2}\frac{d^2 z}{dx^2} + \ldots + a_0 \frac{d^n z}{dx^n} = 0.$$

D'après cela, chaque fois qu'on aura une solution de l'équation (1), on pourra en déduire une solution de l'équation (12); la réciproque est vraie sous certaines conditions.

En effet, soit une intégrale quelconque de l'équation (12), cette intégrale sera $\varphi(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$; supposons-la holomorphe dans le voisinage de $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, en la développant suivant les puissances croissantes de la variable, on aura

$$\begin{aligned} \varphi(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \text{const.} + x_1 \sum_0^n z_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y_i}\right)_0 + x_2 \sum_0^n \frac{dz_i}{dx} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y_i}\right)_0 + \ldots \\ + x_n \sum_0^n \frac{d^{n-1} z_i}{dx^{n-1}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y_i}\right)_0 + \ldots . \end{aligned}$$

Supposons que les termes du premier degré, dans le développement, ne soient pas tous nuls ; leur expression

$$x_1\sum_0^n z_i\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y_i}\right)_0 + x_2\sum_0^n\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y_i}\right)_0\frac{dz_i}{dx}+\ldots+x_n\sum_0^n\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y_i}\right)_0\frac{d^{n-1}z_i}{dx^{n-1}}$$

est de la forme Y. Donc

$$\sum_0^n z_i\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y_i}\right)_0$$

est une intégrale de l'équation (1). D'où ce résultat :

IV. *Si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ est une solution de l'équation* (12) *holomorphe dans le voisinage de $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, on obtient une solution de l'équation* (1) *en prenant le coefficient de x_1 dans le développement de f par rapport aux puissances croissantes de $x_1, \ldots, x_n$, toutes les fois que ce coefficient n'est pas nul.*

Les résultats III et IV permettent de ramener la recherche des solutions communes à un système d'équations différentielles linéaires ordinaires, à la recherche des solutions communes à un système d'équations différentielles linéaires aux dérivées partielles du premier ordre et cette question se fait, comme l'on sait, par la théorie des systèmes complets [1].

S'il s'agit d'équations algébriques, on leur fait correspondre d'abord des équations différentielles linéaires ordinaires à coefficients constants.

Un exemple éclaircira tout à fait les considérations précédentes. Cherchons, par exemple, les conditions *nécessaires et suffisantes* pour que trois équations différentielles linéaires ordinaires, dont la plus élevée est du cinquième ordre, aient deux solutions communes.

Soient donc les équations

$$(a)\qquad a_0\xi^{\mathrm{V}} + a_1\xi^{\mathrm{IV}} + a_2\xi''' + a_3\xi'' + a_4\xi' + a_5\xi = 0,$$

$$(b)\qquad b_0\xi^{\mathrm{V}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b_5\xi = 0,$$

$$(c)\qquad c_0\xi^{\mathrm{V}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_5\xi = 0.$$

[1] *Voir* GOURSAT, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 55 et suiv.

où $a_0 \neq 0$. Soient les équations correspondantes

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} (a_1x_1 - a_0x_2)\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + (a_2x_1 - a_0x_3)\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + (a_3x_1 - a_0x_4)\dfrac{\partial f}{\partial x_3} \\ \qquad + (a_4x_1 - a_0x_5)\dfrac{\partial f}{\partial x_4} + a_5x_1\dfrac{\partial f}{\partial x_5} + a_0\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

$$(\mathrm{B})\quad (b_1x_1 - b_0x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

$$(\mathrm{C})\quad (c_1x_1 - c_0x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

Je remplace les équations (B) et (C) par les combinaisons $b_0(\mathrm{A}) - a_0(\mathrm{B})$, $c_0(\mathrm{A}) - a_0(\mathrm{C})$. J'obtiens ainsi

$$(\alpha)\quad \alpha_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \alpha_3\frac{\partial f}{\partial x_3} + \alpha_4\frac{\partial f}{\partial x_4} + \alpha_5\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0,$$

$$(\beta)\quad \beta_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \beta_5\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0,$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_5, \beta_1, \ldots, \beta_5$ sont fonctions de x seulement

$$\alpha = a_1b_0 - a_0b_1, \quad \ldots.$$

Si les équations (a), (b), (c) ont deux solutions communes, d'après le résultat III, il en est de même des équations (A), (B), (C), et par suite des équations (A), (α), (β). Si donc on complète le système, on doit obtenir quatre équations, puisqu'il y a six inconnues.

Remarquons que la parenthèse

$$(\alpha, \beta) = 0.$$

Considérons

$$(\mathrm{A}, \alpha) = \sum_{n=1}^{n=5} \gamma_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

et supposons que, dans le matrix

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \end{vmatrix},$$

tous les déterminants ne soient pas nuls. Soit

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Alors, si l'on pose

$$(\mathrm{A}, \beta) = \sum_{n=1}^{n=5} \delta_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \qquad [\mathrm{A}, (\mathrm{A}, \alpha)] = \sum_{n=1}^{n=5} \varepsilon_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

on voit que les conditions nécessaires sont les suivantes :

Il faut que, dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ \gamma_1 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \gamma_5 \\ \delta_1 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \delta_5 \\ \varepsilon_1 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot & \varepsilon_5 \end{vmatrix},$$

tous les mineurs obtenus, en supprimant une colonne quelconque et soit la dernière ou l'avant-dernière ligne, soient nuls.

Ces conditions sont *suffisantes*. En effet, si elles sont remplies, les équations (A), (α), (β), (A, α) forment un système complet, et les trois dernières équations peuvent être résolues par rapport à $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, puisque $\delta \neq 0$. Alors l'équation (A) pourra être résolue par rapport à $\frac{\partial f}{\partial x}$, puisque $a_0 \neq 0$. Or les coefficients des nouvelles équations sont holomorphes dans le voisinage de $x = x_0$ et de $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$; donc, d'après le théorème de Mayer sur les systèmes complets, il y aura deux solutions communes holomorphes dans ce voisinage et se réduisant à x_4 et x_5 pour $x = x_0$ et $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; d'après le résultat IV, on déduira de ces deux intégrales deux solutions de la forme Y_1, Y_2. Ces solutions sont indépendantes, car, si l'on avait $\lambda \mathrm{Y}_1 + \mu \mathrm{Y}_2 = 0$, en y faisant $x = x_0$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, on aurait $\lambda x_4 + \mu x_5 = 0$, ce qui est impossible, puisque x_4 et x_5 sont des variables indépendantes. Enfin, des expressions Y_1 et Y_2, on déduira deux solutions communes, indépendantes pour les équations (a), (b), (c), d'après le résultat IV.

10. On peut rapprocher la notion des équations adjointes d'une équation linéaire de la notion du système adjoint à un autre système. C'est M. Picard qui m'en a donné l'idée.

Soit un système linéaire d'équations

$$\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx} &= a_1 z_1 + b_1 z_2 + \ldots + l_1 z_n,\\
\frac{dz_2}{dx} &= a_2 z_1 + b_1 z_2 + \ldots + l_2 z_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{dz_n}{dx} &= a_n z_1 + b_n z_2 + \ldots + l_n z_n.
\end{aligned}$$

On sait qu'on appelle système adjoint à ce système le système

$$\begin{aligned}
\frac{dZ_1}{dx} &= - a_1 Z_1 - a_2 Z_2 - \ldots - a_n Z_n,\\
\frac{dZ_2}{dx} &= - b_1 Z_1 - b_2 Z_2 - \ldots - b_n Z_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{dZ_n}{dx} &= - l_1 Z_1 - l_2 Z_2 - \ldots - l_n Z_n.
\end{aligned}$$

Les solutions de ces deux systèmes ont entre elles une liaison remarquable. Pour la mettre en évidence, multiplions les premières équations par $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, les deuxièmes par $z_1, \ldots, z_n$, et ajoutons; il vient

$$\sum Z_1 \frac{dz_1}{dx} + \sum z_1 \frac{dZ_1}{dx} = \sum \frac{d}{dx}(Z_1 z_1 + Z_2 z_2 + \ldots + Z_n z_n) = 0$$

ou

$$Z_1 z_1 + Z_2 z_2 + \ldots + Z_n z_n = \text{const.}$$

Si donc on a les solutions du premier système

$$\begin{array}{cccc}
z_1^1, & z_2^1, & \ldots, & z_n^1,\\
z_1^2, & z_2^2, & \ldots, & z_n^2,\\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,\\
z_1^n, & z_2^n, & \ldots, & z_n^n.
\end{array}$$

on en déduira celles du deuxième par les égalités

$$\begin{aligned}
&Z_1 z_1^1 + Z_2 z_2^1 + \ldots + Z_n z_n^1 = \text{const.},\\
&Z_1 z_1^2 + Z_2 z_2^2 + \ldots + Z_n z_n^2 = \text{const.},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&Z_1 z_1^n + Z_2 z_2^n + \ldots + Z_n z_n^n = \text{const.}
\end{aligned}$$

qui donneront

$$Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots, \quad Z_n.$$

Cela posé, soit l'équation linéaire

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^n z}{dx_n} + \frac{a_1}{a_0}\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_0}\frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{a_n}{a_0} z = 0,$$

pour avoir les notations précédentes, posons

$$z = z_1, \qquad \frac{dz}{dx} = z_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dz^{n-1}}{dx^{n-1}} = z_n.$$

L'équation linéaire est équivalente au système

$$(a) \qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dz_n}{dx} = -\frac{a_1}{a_0} z_n - \frac{a_2}{a_0} z_{n-1} - \ldots - \frac{a_n}{a_0} z_1,\\
&\frac{dz_{n-1}}{dx} = z_n,\\
&\frac{dz_{n-2}}{dx} = z_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{dz_1}{dx} = z_2.
\end{aligned}\right.$$

Le système adjoint à ce système est

$$(b) \qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dZ_n}{dx} = \frac{a_1}{a_0} Z_n - Z_{n-1},\\
&\frac{dZ_{n-1}}{dx} = \frac{a_2}{a_0} Z_n - Z_{n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{dZ_1}{dx} = \frac{a_{n-1}}{a_0} Z_n - Z_1,\\
&\frac{dZ_1}{dx} = \frac{a_n}{a_0} Z_n.
\end{aligned}\right.$$

Entre les Z et les z, on a les relations

$$Z_1 z_1 + Z_2 z_2 + \ldots + Z_n z_n = \text{const.}$$

ou

$$Z_1 z + Z_2 \frac{dz}{dx} + Z_3 \frac{d^2 z}{dx^2} + \ldots + Z_n \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} = \text{const.}$$

Si donc $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont n solutions de l'équation (E), nous aurons

$$\begin{aligned} &Z_1 \xi_1 + Z_2 \frac{d\xi_1}{dx} + Z_3 \frac{d^2\xi_1}{dx^2} + \ldots + Z_n \frac{d^{n-1}\xi_1}{dx^{n-1}} = \text{const.}, \\ &Z_1 \xi_2 + Z_2 \frac{d\xi_2}{dx} + Z_3 \frac{d^2\xi_2}{dx^2} + \ldots + Z_n \frac{d^{n-1}\xi_2}{dx^{n-1}} = \text{const.}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &Z_1 \xi_n + Z_2 \frac{d\xi_n}{dx} + Z_3 \frac{d^2\xi_n}{dx^2} + \ldots + Z_n \frac{d^{n-1}\xi_n}{dx^{n-1}} = \text{const.} \end{aligned}$$

Ces égalités montrent que si, dans les équations (6), on élimine tous les Z, sauf Z_n, on a l'adjointe de Lagrange de l'équation (E); si l'on élimine tous les Z, sauf Z_k, on a l'adjointe de la $k^{\text{ième}}$ ligne de l'équation (E).

Remarque. — Le système (b) n'est autre que le système (11) du n° 7.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

EXPOSITION D'UNE MÉTHODE DE CORRESPONDANCE DOUBLEMENT INFINIE.

1. On sait que Laplace [1] a indiqué une méthode qui fait correspondre à une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles

[1] Voir *Leçons*, etc., *loc. cit.*, par M. Darboux, t. II, p. 23 et suiv.

du deuxième ordre de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0, \tag{E}$$

où a, b, c sont des fonctions de x et de y, z une fonction inconnue de ces variables, une double infinité d'autres équations de même forme

$$\ldots,\quad (E_{-p}),\quad \ldots,\quad (E_{-1}),\quad (E),\quad (E_1),\quad \ldots,\quad (E_q),\quad \ldots,$$

cette correspondance étant d'ailleurs telle, que, si l'on connaît une solution de l'une quelconque de ces équations, on connaîtra la solution correspondante dans toutes les équations.

2. Nous allons montrer comment il est possible, en partant des équations formées dans la première Partie, d'imaginer une méthode analogue pour les équations différentielles linéaires ordinaires.

Soit donc une équation différentielle linéaire ordinaire

$$a\frac{d^n z}{dx^n} + b\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + c\frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \ldots + h\frac{dz}{dx} + lz = 0. \tag{E}$$

Considérons son adjointe de Lagrange

$$\frac{d^n}{dx^n}(az) - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(bz) + \ldots + (-1)^n lz = 0 \tag{E_1}$$

ou

$$a_1\frac{d^n z_1}{dx^n} + b_1\frac{d^{n-1} z_1}{dx^{n-1}} + \ldots + h_1\frac{dz_1}{dx} + l_1 z_1 = 0. \tag{E_1}$$

Considérons ensuite, pour cette équation (E_1), l'adjointe de la première ligne; soit

$$a_2\frac{d^n z_2}{dx^n} + b_2\frac{d^{n-1} z_2}{dx^{n-1}} + \ldots + h_2\frac{dz_2}{dx} + l_2 z_2 = 0, \tag{E_2}$$

continuons de cette façon, c'est-à-dire formons l'adjointe de Lagrange de l'équation (E_2); soit l'équation (E_3); puis l'adjointe de la première ligne pour l'équation (E_3) et ainsi de suite; nous obtenons une suite d'équations

$$(E),\quad (E_1),\quad \ldots,\quad (E_p),\quad \ldots.$$

Il est incontestable, à cause du résultat I de la première Partie, que la connaissance de l'intégrale générale de l'équation (E) détermine l'intégrale générale de l'équation (E_1) ; celle-ci détermine l'intégrale générale de l'équation (E_2) et ainsi de suite. Donc, de l'intégrale générale de l'équation (E), on peut déduire l'intégrale générale de l'équation (E_p).

Comme dans la méthode de Laplace, nous pouvons encore former une autre suite infinie en partant de l'équation (E). En effet, prenons l'adjointe de la première ligne pour l'équation (E). Soit

$$(E_{-1}) \qquad a_{-1}\frac{d^n z_{-1}}{dx^n} + b_{-1}\frac{d^{n-1} z_{-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + h_{-1}\frac{dz_{-1}}{dx} + l_{-1}z_{-1} = 0.$$

Prenons ensuite l'adjointe de Lagrange de l'équation (E_{-1}), soit

$$(E_{-2}) \qquad a_{-2}\frac{d^n z_{-2}}{dx^n} + b_{-2}\frac{d^{n-1} z_{-2}}{dx^{n-1}} + \ldots + h_{-2}\frac{dz_{-2}}{dx} + l_{-2}z_{-2} = 0,$$

et ainsi de suite; nous formerons une suite infinie d'équations

$$(E), \quad (E_{-1}), \quad \ldots, \quad (E_{-q}),$$

qui, pour les mêmes raisons que précédemment, est telle que la connaissance de l'intégrale générale de l'équation (E) détermine l'intégrale générale d'une quelconque des équations.

En définitive, nous avons formé une suite doublement infinie d'équations

$$\ldots, \quad [E_{-(2q+1)}], \quad (E_{-2q}), \quad \ldots, \quad (E_{-1}), \quad (E), \quad (E_1), \quad \ldots, \quad (E_{2p}), \quad (E_{2p+1}), \quad \ldots.$$

La propriété fondamentale est :

I. *Étant donnée l'équation* (E) *et la suite doublement infinie qui lui correspond, si l'on connaît l'intégrale générale de l'une quelconque des équations de la suite, on pourra trouver, sans intégration nouvelle, l'intégrale générale de l'équation* (E).

En effet, supposons que l'on connaisse l'intégrale générale de l'équation (E_{2p+1}) par exemple, et considérons la suite

$$(E_{2p+1}), \quad (E_{2p}), \quad \ldots, \quad (E_1), \quad (E).$$

L'équation (E_{2p+1}) est, nous venons de le voir, l'adjointe de Lagrange de l'équation (E_{2p}) : donc l'équation (E_{2p}) est l'adjointe de Lagrange de l'équation (E_{2p+1}) ; l'équation (E_{2p-1}) est l'adjointe de la première ligne pour l'équation (E_{2p}), ainsi de suite jusqu'à l'équation (E). L'intégrale générale de l'équation (E_{2p+1}) détermine donc celle de l'équation (E). Le raisonnement serait très peu différent si, au lieu de l'équation (E_{2p+1}), l'on avait pris une des équations

$$(E_{2p}), \quad [E_{-(2q+1)}], \quad (E_{-2q}).$$

Remarque. — La proposition I qui donne de l'intérêt à la méthode développée tient uniquement à la réciprocité qui existe entre une équation et son adjointe. Grâce à cela, les solutions des diverses équations de la suite se déduisent d'une certaine manière quand on s'avance suivant un certain sens dans la suite; elles se déduisent d'une manière analogue quand on retourne en arrière.

3. On peut aller plus loin et montrer qu'il y a une correspondance univoque entre toutes les équations d'ordre pair

$$\ldots, \quad (E_{-2q}), \quad [E_{-2(q-1)}], \quad \ldots, \quad (E_{-2}), \quad (E), \quad (E_2), \quad \ldots, \quad (E_{2p}), \quad \ldots,$$

c'est-à-dire que d'une solution particulière de l'une quelconque des équations de cette suite, on peut déduire la solution correspondante de l'équation (E).

Considérons, en effet, les trois équations

$$(E), \quad (E_1), \quad (E_2),$$

l'équation (E_2) est l'adjointe de la première ligne pour l'équation (E_1), tandis que (E) est l'adjointe de Lagrange de l'équation (E_1); dans ces conditions, nous avons vu dans la première Partie (n° 6) que l'on a

$$z = \frac{1}{l_1} \frac{d}{dx} z_2.$$

La considération de la suite

$$(E_2), \quad (E_3), \quad (E_4)$$

entraînerait la formule

$$z_2 = \frac{1}{l_3} \frac{d}{dx} z_4.$$

Nous arrivons ainsi à

$$z = \frac{1}{l_1}\frac{d}{dx}\frac{1}{l_3}\frac{d}{dx}\frac{1}{l_5}\cdots\frac{d}{dx}\frac{1}{l_{2p-1}}\frac{d}{dx}z_{2p}. \tag{1}$$

Supposons maintenant que l'on connaisse une solution particulière de l'équation (E_{-2q}). Soit la suite

$$(E_{-2q}),\quad (E_{-2q+1}),\quad (F_{-2q+2}).$$

L'équation (E_{-2q+1}) est l'adjointe de Lagrange de l'équation (E_{-2q}), et l'équation (E_{-2q+2}) est l'adjointe de la première ligne pour l'équation (E_{-2q+1}). Donc

$$z_{-2q} = \frac{1}{l_{-(2q-1)}}\frac{d}{dx}z_{-2(q-1)}.$$

D'où la formule

$$z_{-2q} = \frac{1}{l_{-(2q-1)}}\frac{d}{dx}\frac{1}{l_{-(2q-3)}}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\frac{1}{l_{-1}}\frac{d}{dx}z, \tag{2}$$

ou enfin

$$z = \int l_{-1}\,dx\int l_{-3}\,dx\ldots\int l_{-(2q-1)}z_{-2q}\,dx. \tag{3}$$

Remarque. — Cette dernière solution renferme des constantes arbitraires, mais il existera toujours des valeurs de ces constantes, telle que la formule (3) donne bien une intégrale de l'équation donnée.

La suite des équations d'ordre impair possède la même propriété que celle des équations d'ordre pair.

En effet, de la signification des équations

$$[E_{-(2q-1)}],\quad (E_{-2q}),\quad [E_{-(2q+1)}]$$

on tire

$$z_{-(2q-1)} = \frac{1}{l_{-2q}}\frac{d}{dx}z_{-(2q+1)};$$

ou, en répétant,

$$z_1 = \frac{1}{l}\frac{d}{dx}\frac{1}{l_{-2}}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\frac{1}{l_{-2q}}\frac{d}{dx}z_{-(2q+1)}. \tag{4}$$

De même la considération des équations

$$(E_{2p-1}),\quad (E_{2p}),\quad (E_{2p+1})$$

donne

$$z_{2p+1} = \frac{1}{l_{2p}} \frac{d}{dx} z_{2p-1}$$

et, par suite,

$$(5) \qquad z_{2p+1} = \frac{1}{l_{2p}} \frac{d}{dx} \frac{1}{l_{2p-2}} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \frac{1}{l_2} \frac{d}{dx} z_1,$$

ou encore

$$(6) \qquad z_1 = \int l_2\, dx \int l_4\, dx \ldots \int l_{2p} z_{2p+1}\, dx.$$

Pour nous résumer, voici toute la méthode exposée dans le résultat suivant :

II. *On peut à une équation donnée* (E) *faire correspondre une suite doublement infinie d'équations*

$(E_{-(2q+1)})$, (E_{-2q}), ..., (E_{-1}), (E), (E_1), ..., (E_{2p}), (E_{2p+1}), ...

La connaissance de l'intégrale générale de l'une quelconque des équations de la suite détermine l'intégrale générale de l'équation (E); *la connaissance d'une solution particulière d'une équation d'ordre pair détermine la solution correspondante de l'équation* (E), *sans quadrature, si cette équation d'ordre pair est à droite; par des quadratures, si elle est à gauche; enfin, la connaissance d'une solution particulière d'une équation d'ordre impair détermine la connaissance d'une solution particulière de l'adjointe de Lagrange de la proposée sans quadratures, si cette équation est à gauche de la suite; avec des quadratures, si elle est à droite.*

4. Dans certains cas, la méthode précédente ne fera pas correspondre à une équation une infinité d'autres équations. On va indiquer les cas où cela se produit.

Remarquons d'abord qu'une équation a toujours une adjointe de Lagrange, même si les coefficients l, h, ..., par exemple, sont nuls. Il n'en est pas de même quand on considère l'adjointe de la première ligne. Celle-ci n'existe plus, en effet, lorsque $l = 0$.

On ne pourra donc pas obtenir l'adjointe de la première ligne d'une équation dans laquelle il manque le terme en z.

La suite des équations sera terminée à droite, à la première équation d'ordre impair qui n'aura pas de terme en z. Elle sera terminée à gauche à la première équation d'ordre pair qui n'aura pas de terme en z. Dans le premier cas, l'équation (E_{2p+1}) a comme solution particulière une constante, d'où une solution correspondante pour l'équation (E_1); dans le second cas, on aura une solution correspondante pour l'équation (E).

Quand les circonstances dont nous venons de parler se produisent, on peut encore continuer l'application de la méthode, soit qu'on étudie l'équation (E_{2p+1}) en posant $\frac{dz_{2p+1}}{dx} = u$, soit qu'on débarrasse l'équation (E) de la solution trouvée, quand il y en a une, ou que l'on prenne une intégrale première de l'équation (E) quand on connaît une solution de l'adjointe de Lagrange.

CHAPITRE II.

APPLICATION AUX ÉQUATIONS QUI GÉNÉRALISENT L'ÉQUATION DE GAUSS RELATIVE A LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE.

---

1. Les équations qui généralisent l'équation de Gauss relative à la série hypergéométrique sont de la forme

$$\text{(E)} \qquad a\frac{d^n z}{dx^n} + b\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + h\frac{dz}{dx} + lz = 0,$$

dans laquelle a est un polynôme de degré n au plus, b un polynôme de degré $n - 1$ au plus, etc., l une constante.

Si nous calculons l'adjointe de Lagrange de l'équation (E), nous trouvons

$$\text{(E}_1\text{)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & a\frac{d^n z_1}{dx^n} + \left(n\frac{da}{dx} - b\right)\frac{d^{n-1} z_1}{dx^{n-1}} \\ & \quad + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2 a}{dx^2} - (n-1)\frac{db}{dx} + c\right]\frac{d^{n-2} z_1}{dx^{n-2}} + \ldots = 0. \end{aligned} \right.$$

D'où ce premier résultat :

I. *L'équation* (E_1) *a la même forme que l'équation* (E).

L'adjointe de la première ligne pour l'équation (E_1) est [1]

$$(E_2)\quad \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(a_1 z_2') - \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(b_1 z_2') + \ldots + (-1)^{n-1} h_1 z_2' + (-1)^n l_1 z_2 = 0$$

ou encore

$$a_1 \frac{d^n z_2}{dx^n} + \left[(n-1)\frac{da_1}{dx} - b_1\right]\frac{d^{n-1} z_2}{dx^{n-1}} + \left[\frac{(n-1)(n-2)}{12}\frac{d^2 a_1}{dx^2} + (n-2)\frac{db_1}{dx} + c_1\right]\frac{d^{n-2} z_2}{dx^{n-2}} + \ldots = 0;$$

d'où ce résultat :

II. *L'équation* (E_2) *a la même forme que l'équation* (E_1).

III. *Le coefficient de* z_2 *dans l'équation* (E_2) *est le même au signe près que celui de* z_1 *dans l'équation* (E_1).

Ces résultats montrent que toutes les équations de la suite sont du même type que l'équation (E); il nous reste à former l'équation (E_{2p}).

Si, dans l'équation (E_2), nous remplaçons a_1, b_1, c_1, ... par leurs valeurs en fonction de a, b, c, ..., nous trouvons

$$(E_2)\qquad a\frac{d^n z_2}{dx^n} + \left(-\frac{da}{dx} + b\right)\frac{d^{n-1} z_2}{dx^{n-1}} + \left(\frac{d^2 a}{dx^2} - \frac{db}{dx} + c\right)\frac{d^{n-2} z_2}{dx^{n-2}} + \ldots = 0.$$

On passera de l'équation (E_2) à l'équation (E_4), de la même façon que l'on passe de l'équation (E) à l'équation (E_2).

En se fondant sur la loi qui permet de passer de l'équation (E) à l'équation (E_2), on peut écrire sur une même ligne les valeurs absolues des coefficients de a, $\frac{da}{dx}$, $\frac{d^2 a}{dx^2}$, ..., dans les premiers, deuxièmes, troisièmes, ... termes pour les différentes équations. On a le Tableau

[1] *Voir*, dans la première Partie, au n° 6.

suivant :

	a.	$\frac{da}{dx}$.	$\frac{d^2 a}{dx^2}$.	$\frac{d^3 a}{dx^3}$.	....	$\frac{d^n a}{dx^n}$
Pour (E_2)..........	1	1	1	1	...	1
» (E_4)..........	1	2	3	4	...	n
» (E_6)..........	1	3	6	10	...	.
»	.	.	.	..	...	.
» (E_{2p}).........	1	p	$\frac{p(p+1)}{1.2}$	$\frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}$	...	.
» $[E_{2(p+1)}]$	1	$p+1$	....	....	...	.
» $[E_{2(p+2)}]$	1		....	....	...	.

dans lequel on obtient le terme d'une ligne en prenant la somme du terme correspondant et de tous ceux qui le précèdent dans la ligne immédiatement supérieure. Au reste, l'écriture du Tableau précédent est rendue tout à fait facile, en remarquant que les termes en diagonale forment un triangle arithmétique.

Remarquant ensuite que les coefficients de b, $\frac{db}{dx}$, $\frac{d^2 b}{dx^2}$, $\cdots$ sont les mêmes en valeur absolue que ceux de a, $\frac{da}{dx}$, $\ldots$, on voit que l'équation (E_{2p}) est

$$(7)\quad (E_{2p})\quad \left\{\begin{aligned} & a\frac{d^n z_{2p}}{dx^n} + \left(-p\frac{da}{dx} + b\right)\frac{d^{n-1} z_{2p}}{dx^{n-1}} \\ & \quad + \left[\frac{p(p+1)}{1.2}\frac{d^2 a}{dx^2} - p\frac{db}{dx} + c\right]\frac{d^{n-2} z_{2p}}{dx^{n-2}} + \ldots \\ & \quad + \left[(-1)^n\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!}\frac{d^n a}{dx^n}\right. \\ & \qquad \left. + (-1)^{n-1}\frac{p(p+1)\ldots(p+n-2)}{(n-1)!}\frac{d^{n-1} b}{dx^{n-1}} + \ldots + l\right] z_{2p} = 0. \end{aligned}\right.$$

Par un procédé tout pareil, on formerait l'équation (E_{2q}) ; on obtiendrait une équation qui se déduirait de l'équation (E_{2p}) en changeant p en $-q$.

Enfin on formerait l'équation (E_{2p+1}) en prenant l'adjointe de Lagrange de l'équation (E_{2p}).

Les formules (1), (2), (5), données dans le premier Chapitre, deviennent, dans ce cas particulier,

$$z = \frac{d^p}{dx^p} z_{2p}, \tag{8}$$

$$z_{-2q} = \frac{d^q}{dx^q} z, \tag{9}$$

$$z_{2p+1} = \frac{d^p}{dx^p} z_1. \tag{10}$$

Comme nous l'avons fait remarquer, la suite des équations se termine lorsqu'une des quantités l s'annule; les formules précédentes ne sont donc valables que sous certaines conditions. Ainsi, la formule (8), par exemple, n'est valable qu'autant qu'aucune des quantités l_1, l_3, ..., l_{2p-1} ne s'annule.

2. Lorsque l'équation (2) n'a pas de termes en z, elle admet comme solution particulière une constante. C'est ce caractère d'intégration que nous allons étendre par la considération de notre suite. Cherchons donc si, dans la suite, à droite, il y a une équation pour laquelle il manque le terme en z. Ce fait se produira pour la première fois pour une équation d'ordre impair. En effet, si $l_{2p} = 0$, comme, d'après le résultat III, $l_{2p-1} = l_{2p}$, il faut que $l_{2p-1} = 0$. En écrivant $l_{2p} = l_{2p-1} = 0$, nous trouvons l'équation

$$\left\{\begin{aligned} &(-1)^n \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!} \frac{d^n a}{dx^n} \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{p(p+1)\ldots+(p+n-2)}{(n-1)!} \frac{d^{n-1} b}{dx^{n-1}} + \ldots + l = 0, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

que nous appellerons l'*équation algébrique correspondant à l'équation* (E). Cette équation est l'équation déterminante du point critique ∞ quand l'intégrale générale est régulière autour de ce point. Si cette équation a des racines entières positives et si ξ est la plus petite, on a

$$l_{2\xi-1} = 0;$$

l'équation $(E_{2\xi-1})$ a pour solution particulière une constante, et, à cause de la formule (10), l'équation (E_1) a pour solution un polynôme de degré $\xi - 1$. Si l'équation (11) a des racines entières négatives et si ζ est la plus petite en valeur absolue, l'équation $(E_{-2\zeta})$ a pour solution une constante et, à cause de la formule (9), l'équation (E) aura pour solution particulière un polynôme de degré ζ.

D'où les résultats :

IV. *La plus petite racine entière positive* ξ *de l'équation algébrique correspondante indique, pour l'adjointe de Lagrange de l'équation proposée, une solution qui est un polynôme de degré* $\xi - 1$.

V. *La plus petite racine entière négative* (en valeur absolue) $-\zeta$ *de l'équation algébrique correspondante indique, pour l'équation proposée, une solution qui est un polynôme de degré* ζ.

Effectuons la vérification de ces résultats. Posons

$$\begin{aligned}
a &= \alpha x^n \quad + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n,\\
b &= \beta x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \beta_2 x^{n-3} + \ldots + \beta_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
h &= \gamma x \quad + \gamma_1,\\
l &= \lambda.
\end{aligned}$$

Soit

$$(11\,bis)\left\{\begin{aligned}
f(p) &= \alpha p(p-1)\ldots(p-n+1) + \beta p(p-1)\ldots(p-n+2) + \ldots + \eta p + \lambda,\\
f_1(p) &= \alpha_1 p(p-1)\ldots(p-n+1) + \beta_1 p\ldots(p-n+2) + \ldots + \eta_1 p = p\,F_1(p),\\
f_2(p) &= \alpha_2 p(p-1)\ldots(p-n+1) + \ldots + \varepsilon_2 p(p-1) = p(p-1)\,F_2(p),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_{n-1}(p) &= \alpha_{n-1} p\ldots(p-n+1) + \beta_{n-1} p\ldots(p-n+2) = p(p-1)\ldots(p-n+2)\,F_{n-1}(p),\\
f_n(p) &= \alpha_n p\ldots p(p-n+1) = p(p-1)\ldots(p-n+1)\,F_n(p).
\end{aligned}\right.$$

Si, dans l'équation (E), nous substituons le polynôme

$$A_0 x^\zeta + A_1 x^{\zeta-1} + A_2 x^{\zeta-2} + \ldots + A_{\zeta-1} x + A_\zeta,$$

nous trouvons, pour déterminer les coefficients, les égalités

$$(12)\left\{\begin{aligned}
&A_0 f(\zeta) = 0,\\
&A_1 f(\zeta-1) + A_0 f_1(\zeta) = 0,\\
&A_2 f(\zeta-2) + A_1 f_1(\zeta-1) + A_0 f_2(\zeta-2) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&A_q f(\zeta-q) + A_{q-1} f_1(\zeta-q+1) + \ldots + A_{q-n} f_n(\zeta-q+n) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_\xi f(0) + A_{\zeta-1} f(1) + \ldots + A_{\zeta-n} f(n) = 0.
\end{aligned}\right.$$

Si $f(\zeta) = 0$ et si $0, 1, 2, \ldots, (\zeta - 1)$ ne sont pas racines de l'équation $f(p) = 0$, on pourra déterminer de proche en proche, à l'aide des équations (12), tous les coefficients du polynôme. Ce polynôme ainsi déterminé, substitué à la place de z dans l'équation (E), donnera un résultat identiquement nul et, par suite, sera solution de cette équation. Mais l'équation $f(p) = 0$ n'est autre que l'équation (11), où l'on a changé p en $-p$; nous avons donc vérifié le résultat V. La vérification du résultat IV se ferait en substituant un polynôme dans l'adjointe de Lagrange de la proposée.

3. Nous allons maintenant démontrer un résultat que nous étendrons par la considération de notre suite.

VI. *Si toutes les racines de l'équation déterminante du point* ∞ *sont negatives, pour que l'équation* (E) *admette comme intégrale générale un polynôme,* il faut et il suffit que *les logarithmes disparaissent dans le développement de l'intégrale générale autour du point critique* ∞.

D'après les équations (12), il est bien évident que, si $f(p) = 0$ a toutes ses racines positives et si les logarithmes disparaissent, il y aura une expression de la forme

$$A_0 x^{\xi} + A_1 x^{\xi-1} + \ldots + A_{\xi-1} x + A_{\xi}$$

qui satisfera à l'équation, n des quantités A étant arbitraires; réciproquement, si l'intégrale générale de l'équation (E) est un polynôme, les logarithmes disparaissent dans les développements autour du point critique ∞.

Nous allons former les conditions nécessaires et suffisantes pour que les logarithmes disparaissent dans les développements autour du point critique ∞, et cela en supposant les racines entières et quelconques.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ les racines de l'équation déterminante du point ∞ changées de signe et rangées par ordre de grandeur décroissante. Ces racines étant toutes entières, nous avons, autour du point critique ∞, le développement suivant pour l'intégrale générale :

$$\begin{aligned}
A_{\alpha_1} x^{\alpha_1} + A_{\alpha_1-1} x^{\alpha_1-1} + A_{\alpha_1-2} x^{\alpha_1-2} + \ldots + A_{\alpha_2} x^{\alpha_2} + A_{\alpha_2-1} x^{\alpha_2-1} + \ldots + A_{\alpha_3} x^{\alpha_3} + A_{\alpha_3-1} x^{\alpha_3-1} \ldots \\
+ \log x [B_{\alpha_2} x^{\alpha_2} + B_{\alpha_2-1} x^{\alpha_2-1} + \ldots \\
+ \log^2 x [C_{\alpha_3} x^{\alpha_3} + C_{\alpha_3-1} x^{\alpha_3-1} + \ldots \\
+ \log^3 x [\ldots
\end{aligned}$$

Les équations permettant de déterminer les coefficients sont

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} A_{\alpha_1} f(\alpha_1)=0, \\ A_{\alpha_1-1} f(\alpha_1-1)+A_{\alpha_1} f_1(\alpha_1)=0, \\ A_{\alpha_1-2} f(\alpha_1-2)+A_{\alpha_1-1} f_1(\alpha_1-1)+A_{\alpha_1} f_2(\alpha_1)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{\alpha_2-1} f(\alpha_2-1)+\ldots+A_{\alpha_2-1+n} f_n(\alpha_2-1+n)=0, \\ B_{\alpha_2} f'(\alpha_2)+A_{\alpha_2} f(\alpha_2)+A_{\alpha_2+1} f_1(\alpha_2+1)+\ldots+A_{\alpha_2+n} f_n(\alpha_2+n)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \left\{\begin{array}{l} B_{\alpha_2} f(\alpha_2)=0, \\ B_{\alpha_2-1} f(\alpha_2-1)+B_{\alpha_2} f_1(\alpha_2)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Pour que les logarithmes disparaissent, il faut et il suffit que

$$B_{\alpha_2}=C_{\alpha_3}=D_{\alpha_4}=\ldots=0;$$

mais, d'après les équations précédentes, on voit que

$$\begin{array}{l} B_{\alpha_2}=A_{\alpha_1} u_1, \\ C_{\alpha_3}=A_{\alpha_1} u_2 \quad +A_{\alpha_2} v_1 \\ D_{\alpha_4}=A_{\alpha_1} u_3 \quad +A_{\alpha_2} v_2 \quad +A_{\alpha_3} w_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_{\alpha_n}=A_{\alpha_1} u_{n-1}+A_{\alpha_2} v_{n-2}+A_{\alpha_3} w_{n-3}+\ldots+A_{\alpha_{n-1}} \varpi_1. \end{array}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes sont donc

$$(14)\qquad u_1=u_2=\ldots=u_{n-1}=v_1=\ldots=v_{n-2}=\ldots=\varpi_1=0;$$

en tout

$$1+\ldots+(n-1) \quad \text{ou} \quad \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{conditions.}$$

Si ces conditions sont satisfaites, le développement uniforme qui représentera l'intégrale générale renfermera les n constantes arbitraires $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_n}$. Étudions de plus près les expressions de u_1, u_2, ...

Des équations (13) nous tirons

$$A_{\alpha_1-1}=-A_{\alpha_1}\frac{f_1(\alpha_1)}{f(\alpha_1-1)}.$$

D'après les formules (11 *bis*), $f_1(\alpha_1)$ contient le facteur α_1; en le mettant en évidence, on arrive à

$$A_{\alpha_1-1} = \alpha_1 j A_{\alpha_1}.$$

De même

$$A_{\alpha_1-2} = \alpha_1(\alpha_1 - 1) j_1 A_{\alpha_1},$$

et ainsi de suite; nous arrivons à

$$B_{\alpha_2} = A_{\alpha_1}.\alpha_1(\alpha_1 - 1)\ldots(\alpha_2 - 1) U_1.$$

On verrait de la même façon que

$$C_{\alpha_3} = A_{\alpha_1}.\alpha_1(\alpha_1 - 1)\ldots(\alpha_3 - 1) U_2 + A_{\alpha_2}.\alpha_2(\alpha_2 - 1)\ldots(\alpha_3 - 1) V_1.$$

Par suite, pour que les logarithmes disparaissent autour du point critique ∞, il faut et il suffit que les expressions

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{lllll} \alpha_1\ldots(\alpha_2 - 1) U_1, & & & & \\ \alpha_1\ldots(\alpha_3 - 1) U_2, & \alpha_2\ldots(\alpha_3 - 1) V, & & & \\ \alpha_1\ldots(\alpha_4 - 1) U_3, & \alpha_2\ldots(\alpha_4 - 1) V_2, & \alpha_3\ldots(\alpha_4 - 1) W_1, & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ \alpha_1\ldots(\alpha_n - 1) U_{n-1}, & \alpha_2\ldots(\alpha_n - 1) V_{n-2}, & \alpha_3\ldots(\alpha_n - 1) W_{n-2}, & \ldots, & \alpha_{n-1}\ldots(\alpha_n - 1) \mathfrak{P}_1 \end{array}\right.$$

soient nulles.

Dans les cas où toutes les racines de l'équation déterminante du point ∞ sont négatives, tous les nombres α sont positifs; donc, dans la suite des nombres de $\alpha_1, \ldots$ à α_n, il n'y en a aucun de nul. Par suite, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale générale soit un polynôme sont

$$(16)\qquad U_1 = U_2 = \ldots = U_{n-1} = V_1 = \ldots = V_{n-2} = \ldots = \mathfrak{P}_1 = 0.$$

L'extension que nous allons faire par l'emploi de notre suite est celle-ci : si les racines de l'équation déterminante du point ∞ sont entières et si les conditions (16) sont satisfaites, l'équation (E) s'intègre soit par des quadratures, soit même sous forme entièrement finie.

Auparavant, il est nécessaire d'établir une série de résultats préliminaires.

4. Dans ce qui va suivre, nous considérerons toujours la suite d'équations

$$(\mathrm{S}) \qquad \ldots(\mathrm{E}_{-2q}),\quad (\mathrm{E}_{-2q+1}),\quad \ldots,\quad (\mathrm{E}),\quad \ldots,\quad (\mathrm{E}_{2p-1}),\quad (\mathrm{E}_{2p}),\quad \ldots,$$

où l'équation (E_{2p}) a l'expression donnée par la formule (7) que p soit positif ou négatif, et où l'équation (E_{2p+1}) est toujours l'adjointe de Lagrange de l'équation (E_{2p}). On sait que les formules de récurrence (8), (9), (10) n'existent plus quand une des quantités l s'annule. Si donc nous voulons nous servir de la suite (S), lorsque ce fait se produit, il convient d'expliquer sa signification exacte. Supposons donc $l_{2p-1} = 0$. Si cette quantité n'était pas nulle, l'équation (E_{2p}) serait l'adjointe de la première ligne pour l'équation (E_{2p-1}); il n'en est plus ainsi lorsqu'elle est nulle. Pour avoir la signification de l'équation (E_{2p}), supposons d'abord que l_{2p-1} ne soit pas nul. Puisque l'équation (E_{2p}) est l'adjointe de la première ligne de l'équation (E_{2p-1}), l'équation (E_{2p}) s'écrit [1]

$$(\mathrm{E}_{2p}) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(a_{2p-1} z'_{2p}) - \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(b_{2p-1} z'_{2p}) + \ldots \\ &\qquad + (-1)^{n-1} h_{2p-1} z'_{2p} + (-1)^n l_{2p-1} z_{2p} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si $l_{2p-1} = 0$, elle devient

$$(\mathrm{E}_{2p}) \quad \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(a_{2p-1} z'_{2p}) - \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(b_{2p-1} z'_{2p}) + \ldots + (-1)^{n-1} l_{2p-1} z'_{2p} = 0.$$

Sous cette forme, on voit qu'elle est l'adjointe de Lagrange de l'équation (E_{2p-1}) où z'_{2p-1} est considérée comme l'inconnue.

D'après cette remarque, nous pourrons toujours nous servir de la suite (S). En effet, supposons que nous voulions passer de l'intégrale générale de l'équation (E_{2q}) à l'intégrale générale de l'équation (E) en supposant que, dans la suite

$$(\mathrm{E}),\quad \ldots,\quad (\mathrm{E}_{2p-2}),\quad (\mathrm{E}_{2p-1}),\quad (\mathrm{E}_{2p}),\quad \ldots,\quad (\mathrm{E}_{2q}),$$

une des quantités l s'annule, par exemple l_{2p-1}.

La formule (8) permet de déduire les n solutions de l'équation (E_{2p})

---

[1] *Voir* Ire Partie, n° 6.

des n solutions de l'équation (E_{2q}) ; puisque (E_{2p-1}) est l'adjointe de Lagrange de l'équation (E_{2p}) où $\frac{dz_{2p}}{dx}$ est l'inconnue, nous aurons les valeurs des dérivées premières des $n-1$ solutions de l'équation (E_{2p-1}), et par suite, en ajoutant la solution qui est une constante, nous pourrons trouver les n solutions de l'équation (E_{2p-1}). Puisque l'équation (E_{2p-2}) est l'adjointe de Lagrange de l'équation (E_{2p-1}), on pourra calculer toutes les solutions de l'équation (E_{2p-2}). Enfin, de toutes les solutions de l'équation (E_{2p-2}) on pourra déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

VII. *Quand on connaîtra l'intégrale générale d'une équation de la suite* (S), *on en déduira l'intégrale générale d'une quelconque des équations de la suite soit sous forme finie, soit avec des quadratures; l'une ou l'autre de ces circonstances se produira suivant le nombre des quantités* l *qui s'annuleront dans l'intervalle qui sépare les deux équations.*

5. On peut encore simplifier le passage des solutions d'une équation aux solutions d'une autre en étudiant de plus près la suite (S).

Supposons toujours $l_{2p-1}=0$, et soient les équations (E_{2p-2}), (E_{2p-1}), (E_{2p}). Soient $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, const. les solutions de l'équation (E_{2p-1}). Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & \text{const.} \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_{n-1} & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)}, & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} & 0 \end{vmatrix};$$

puisque l'équation (E_{2p-2}) est l'adjointe de Lagrange de l'équation (E_{2p-1}), on obtient ses solutions en multipliant par $\frac{1}{a}$ le quotient des mineurs relatifs aux éléments de la dernière ligne par le déterminant total.

Soit encore le déterminant

$$\begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_{n-1} \\ y''_1 & y''_2 & \cdots & y''_{n-1} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix};$$

puisque l'équation (E_{2p}) est l'adjointe de Lagrange de l'équation (E_{2p-1}) où $\frac{dz_{2p-1}}{dx}$ est considérée comme l'inconnue, on voit que l'on obtiendra les valeurs de $\frac{dz_{2p}}{dx}$ en multipliant par $\frac{1}{a}$ les divers quotients des mineurs relatifs aux éléments de la dernière ligne par le déterminant total. Les valeurs ainsi obtenues se retrouvent toutes parmi les solutions de l'équation (E_{2p-2}).

Donc la formule

$$z_{2p-2} = \frac{d}{dx} z_{2p}$$

s'étend à toutes les solutions de l'équation (E_{2p}), sauf à la solution qui est une constante. Ainsi d'une solution de l'équation (E_{2p}) on pourra déduire une solution de l'équation (E_{2p-2}); mais la réciproque n'est pas vraie.

Considérons maintenant l'équation (E) et la suite correspondant à cette équation

$$\ldots, (E), (E_1), (E_2), \ldots, (E_{2p-2}), (E_{2p-1}), (E_{2p}), \ldots, (E_{2(p+q)-2}), (E_{2(p+q)-1}), (E_{2(p+q)}), \ldots.$$

Soit

$$l_{2p-1} = 0, \qquad l_{2(p+q)-1} = 0.$$

La formule

$$z = \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} z_{2p-2}$$

s'étend à toutes les solutions de l'équation (E_{2p-2}); mais la formule

$$z_{2p-2} = \frac{d}{dx} z_{2p}$$

ne s'étend qu'à $(n-1)$ solutions de l'équation (E_{2p}) [*la solution de l'équation* (E_{2p}) *qui n'est pas comprise est une constante*]. De même, la formule

$$(\alpha) \qquad z_{2p} = \frac{d^q}{dx^q} z_{2(p+q)}$$

ne s'étend qu'à $(n-1)$ solutions de l'équation $(E_{2(p+q)})$ [*la solution de l'équation* $(E_{2(p+q)})$, *qui est une constante, n'est pas comprise*]; donc la formule

$$(\beta)\qquad z = \frac{d^{p+q}}{dx^{p+q}} z_{2(p+q)}$$

s'étendra à $(n-1)$ solutions de l'équation $(E_{2(p+q)})$ pourvu que, parmi les valeurs de z_{2p} données par la formule (α), il ne se trouve pas de constante; autrement dit, pourvu que l'équation $(E_{2(p+q)})$ n'admette pas de solutions qui soit un polynôme de degré q ou de degré inférieur; dans ce dernier cas, la formule (β) ne s'étendrait qu'à $(n-2)$ solutions de l'équation $(E_{2(p+q)})$.

De toutes ces considérations il est facile de tirer le résultat suivant :

VIII. *La formule* $z = \dfrac{d^p}{dx^p} z_{2p}$ *s'applique à toutes les solutions de l'équation* (E_{2p}) *qui ne sont pas des polynômes de degré inférieur à* p.

6. Étudions la variation des racines de l'équation déterminante du point ∞ quand on passe d'une équation de la suite à une autre.

IX. *Quand on passe d'une équation à son adjointe de Lagrange, la racine* ξ *de l'équation déterminante du point critique* ∞ *est changée en* $1-\xi$.

En effet, l'équation déterminante du point critique ∞ pour l'équation (E) est

$$\alpha p(p+1)\ldots(p+n-1) - \beta p\ldots(p+n-2) + \ldots + (-1)^n\lambda = 0.$$

Celle relative au point ∞ pour l'équation (E_1) est

$$\alpha r(r+1)\ldots(r+n-1) - (n^2\alpha - \beta)r\ldots(r-n+2)$$
$$+\left[\frac{n^2(n-1)^2}{12}\alpha - (n-1)^2\beta + \gamma\right] r\ldots(r-n+3) + \ldots.$$

Il faut vérifier, par exemple, que le coefficient de α reste le même quand on pose $p = 1 - r$; autrement dit, que le produit

$$p(p+1)\ldots(p+n-1)$$

se transforme en

$$r(r+1)\ldots(r+n-1) - n^2 r(r+1)\ldots(r+n-2) + \frac{n^2(n-1)^2}{12} r\ldots(r+n-3) + \ldots,$$

quand on change p en $1-r$.

La démonstration est facile, nous nous contenterons de l'indiquer. On vérifie le résultat pour $n = 2$ et on montre que, s'il est vrai pour n, il est vrai pour $n + 1$.

On démontrerait de même :

X. *Quand on passe d'une équation à son adjointe de la première ligne, les racines de l'équation déterminante du point critique* ∞ *changent de signe.*

(Si l'adjointe de la première ligne n'existait pas, on changerait la première partie de l'énoncé en disant : Quand on passe d'une équation d'ordre impair à l'équation suivante d'ordre pair à droite dans la suite S.)

Les résultats IX et X donnent, quand on les combine, les suivants :

XI. *Quand on passe de l'équation* (E) *à l'équation* (E_{2p}), *les racines de l'équation déterminante du point* ∞ *diminuent de* p; *elles augmentent de* q *quand on passe de l'équation* (E) *à l'équation* (E_{-2q}).

Voici enfin un autre résultat, que nous nous contentons encore d'indiquer.

XII. *Les racines des équations* $f(p) = 0$, $F_1(p) = 0$, $F_2(p) = 0$, ..., $F_n(p) = 0$ (*voir* les formules 11 *bis*) *sont changées de signe quand on passe d'une équation à son adjointe de la première ligne; elles augmentent de* p *quand on passe de l'équation* (E) *à l'équation* (E_{2p}).

Soient les équations (E) et (E_{2p}). Soit $F_1^{(0)}(q)$ l'expression du polynôme F_1 pour l'équation (E). Soit $F_1^{(p)}(s)$ l'expression du polynôme F_1 pour l'équation (E_{2p}). D'après le résultat (XII), nous avons

$$F_1^{(p)}(q+p) = F_1^{(0)}(q).$$

Donc le résultat de la substitution de q dans $F_1^{(0)}$ est le même que le résultat de la substitution de $q + p$ dans $F_1^{(p)}$.

En particulier, si nous considérons une racine ξ de l'équation $f(r) = 0$ relative à l'équation (E) [$f(r) = 0$ est l'équation déterminante du point critique ∞ où les racines ont été changées de signe], le résultat de la substitution de ξ dans $F_1^{(0)}$ sera le même que celui de la substitution de $\xi + p$ dans $F_1^{(p)}$; mais $\xi + p$ est une racine de l'équation $f(r) = 0$ relative à l'équation (E_{2p}) (d'après le résultat XII). Nous avons donc le résultat suivant :

XIII. *Les expressions f, F_1, F_2, ..., F_n restent invariantes pour une quelconque des équations de la suite, lorsqu'on y substitue les racines de l'équation $f(r) = 0$ relatives à ces équations, ou des nombres différant entre eux comme diffèrent ces racines.*

Il suffit maintenant de regarder la composition des expressions U_1, U_2, ... pour en tirer le résultat suivant :

XIV. *Les expressions U_1, U_2, ..., $\wp_1$ restent invariantes quand on passe d'une équation de la suite à une autre.*

7. Nous sommes maintenant en mesure de faire l'extension du résultat VI.

Une équation (E) s'intégrera sous forme finie ou par des quadratures si, dans la suite qui lui correspond, on trouve une équation ayant pour intégrale générale un polynôme.

Cela ressort évidemment du résultat VII.

Il ne reste plus qu'à indiquer le moyen de reconnaître sur l'équation (E) les cas où cette intégration est possible.

Il faut et il suffit que les racines de l'équation déterminante du point ∞ soient entières et que les conditions (16) soient remplies.

S'il en est ainsi, lorsqu'on s'avance de deux rangs à droite dans la suite, les racines de l'équation déterminante du point ∞ diminuent d'une unité; il existera donc une équation (E_{2p}) telle que toutes les racines de l'équation déterminante du point ∞ soient négatives; les conditions (16) étant remplies pour l'équation (E) sont remplies d'après le résultat XIV pour l'équation (E_{2p}); donc l'équation (E_{2p}) a pour intégrale générale un polynôme.

Réciproquement, si une équation de la suite correspondant à l'équation (E) a pour intégrale générale un polynôme, les racines de l'équation déterminante du point ∞ pour cette équation sont entières et les conditions (16) sont remplies; donc les racines de l'équation déterminante du point ∞ pour l'équation (E) sont entières et, à cause du résultat XIV, les conditions (16) sont remplies. Donc :

XV. *On peut intégrer sous forme entièrement finie ou tout au moins par des quadratures une équation* (E) *qui est telle que les racines de l'équa-*

tion déterminante du point ∞ soient entières et que les conditions (16) *soient remplies.*

Nous avons déjà examiné le cas où toutes les racines de l'équation déterminante du point ∞ sont négatives. Dans ce cas, si les conditions (16) sont remplies, l'intégrale générale est un polynôme. Un autre cas intéressant est celui où toutes les racines de l'équation déterminante du point ∞ sont positives et où les conditions (16) sont remplies. Dans ce cas, l'intégrale générale est une fraction rationnelle. En effet, l'adjointe de la première ligne est telle que l'équation déterminante du point ∞ ait toutes ses racines négatives (résultat X). Les conditions (16) sont encore satisfaites pour cette équation; donc elle admet comme solutions particulières n polynômes. L'intégrale générale de l'équation donnée est donc une fraction rationnelle.

Les considérations précédentes permettent encore d'intégrer une équation (E) lorsque, dans la suite correspondant à cette équation, se trouve une équation ayant comme solutions particulières $n-1$ polynômes. On verrait facilement, parmi les conditions (16), celles qui doivent être remplies pour qu'il en soit ainsi.

On simplifie enfin l'intégration de l'équation (E) lorsque, dans sa suite, on rencontre une équation admettant des polynômes comme solutions particulières, et il est encore facile de voir, parmi les conditions (16), celles qui doivent être remplies pour qu'il en soit ainsi.

8. Appliquons ces considérations à une équation déjà considérée par M. Goursat [1] :

$$(17)\quad (x^n - x^{n-1})\frac{d^n z}{dx^n} + (\mathrm{A}x^{n-1} - \mathrm{A}_1 x^{n-2})\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \ldots + (\mathrm{L}x - \mathrm{L}_1)\frac{dz}{dx} + \mathrm{M}z = 0.$$

L'équation déterminante du point critique ∞ est

$$r(r+1)\ldots(r+n-1) - \mathrm{A}r(r+1)\ldots(r+n-2) + \ldots + (-1)^{n-1}\mathrm{L}r + (-1)^n\mathrm{M} = 0.$$

L'équation aux racines changées de signe est

$$f(r) = r(r-1)\ldots(r-n+1) + \mathrm{A}r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + \mathrm{L}r + \mathrm{M} = 0.$$

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, t. XII, p. 275 et suiv.

Soit, en même temps,

$$\varphi(r) = r(r-1)\ldots(r-n+1) + A_1 r\ldots(r-n+2) + \ldots + L_1 r = r\,\Phi(r).$$

Considérons une racine simple ξ de l'équation déterminante du point ∞, cette racine étant telle que $\xi - 1$, $\xi - 2$, ... ne soient pas racines. Nous aurons, pour le développement de l'intégrale correspondante autour du point critique ∞, l'expression

$$A_0 t^{\xi} + A_1 t^{\xi-1} + A_2 t^{\xi-2} + \ldots,$$

les coefficients étant déterminés par les égalités

$$\begin{aligned}
&A_0 f(\xi) = 0,\\
&A_1 f(\xi-1) - A_0\varphi(\xi) = 0,\\
&A_2 f(\xi-2) - A_1\varphi(\xi-1) = 0,\\
&A_3 f(\xi-3) - A_2\varphi(\xi-2) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

de sorte que l'expression de l'intégrale est

$$A_0\Bigg[t^{\xi} + \frac{\varphi(\xi)}{f(\xi-1)}t^{\xi-1} + \frac{\varphi(\xi)\varphi(\xi-1)}{f(\xi-1)f(\xi-2)}t^{\xi-2} + \frac{\varphi(\xi)\varphi(\xi-1)\varphi(\xi-2)}{f(\xi-1)f(\xi-2)f(\xi-3)}t^{\xi-3} + \ldots\Bigg].$$

Cherchons maintenant les cas où les conditions (16) sont satisfaites. Supposons donc que les racines de l'équation $f(r) = 0$ soient entières et rangées par ordre de grandeur décroissante. Soient

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n.$$

On voit bien facilement que

$$\begin{aligned}
&U_1 = \Phi(\alpha_1)\Phi(\alpha_1-1)\ldots\Phi(\alpha_2+1), && U_2 = U_3 = \ldots = U_n = 0,\\
&V_1 = \Phi(\alpha_2)\Phi(\alpha_2-1)\ldots\Phi(\alpha_3+1), && V_2 = \ldots = V_{n-1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\Psi_1 = \Phi(\alpha_{n-1})\Phi(\alpha_{n-1}-1)\ldots\Phi(\alpha_n+1).
\end{aligned}$$

Donc, pour que les conditions (16) soient satisfaites, il faut et il suffit que les racines de l'équation $\varphi(r) = 0$ (à part la racine 0) soient entières et comprises, l'une entre α_1 et α_2 sans être égale à α_2, l'autre entre α_2 et α_3, sans être égale à α_3, etc. Si l'on remarque que l'équation $\varphi(r) = 0$ est l'équation déterminante relative au point critique o, on a le résultat suivant :

XVI. *Si les racines de l'équation déterminante du point critique* ∞, *changées de signe et rangées par ordre de grandeur décroissante, sont* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; *si les racines de l'équation déterminante du point critique* o (*à part la racine* o), *rangées aussi par ordre de grandeur décroissante, sont* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$; *si, de plus, les* α *et les* β *sont des entiers, et qu'enfin* β_1 *soit compris entre* α_1 *et* α_2, *sans être égal à* α_2, β_2 *entre* α_2 *et* α_3, *sans être égal à* α_3, *etc.*, l'équation (17) s'intègre soit sous forme finie, soit par des quadratures; *si tous les* α *sont des nombres positifs, l'intégrale générale est un polynôme; si tous les* α *sont des nombres négatifs, l'intégrale générale est une fraction rationnelle.*

Nous venons d'examiner le cas où l'équation (17) a, dans sa suite, une équation ayant comme intégrales particulières n polynômes; l'équation donnée s'intégrerait aussi s'il y avait dans la suite une équation admettant comme solutions particulières $n-1$ polynômes. Un des cas où cette circonstance se produirait serait le suivant : $n-2$ des nombres β seraient compris entre α_2 et α_3, α_3 et α_4, etc., l'autre nombre β étant infini. On intégrerait ainsi dans un cas où l'intégrale générale ne serait pas régulière autour du point critique o. Nous ne développons pas le cas où l'intégration de l'équation (17) serait simplifiée, quand, dans la suite correspondante, il y aurait une équation ayant comme solutions particulières des polynômes. Ces cas sont rendus évidents par ce qui précède.

Appliquons la méthode à un exemple. Soit l'équation

$$(x^3 - x^2)\frac{d^3z}{dx^3} + (x^2 - 2x)\frac{d^2z}{dx^2} + (-6x + 2)\frac{dz}{dx} + 6z = 0.$$

L'équation déterminante du point ∞ est

$$r(r+1)(r+2) - r(r+1) - 6r - 6 = 0;$$

elle admet les racines -3, -1 et 2.

L'équation déterminante du point critique o est

$$r(r-1)(r-2)+2r(r-1)-2r=0;$$

elle admet, à part la racine o, les racines 2 et -1.

Les racines de l'équation déterminante du point ∞ changées de signe sont

$$3,\quad 1,\quad -2,$$

et celles relatives du point o sont comprises l'une entre 3 et 1, l'autre entre 1 et -2; nous pouvons donc appliquer le résultat (XVI).

Considérons la suite

$$(\mathrm{E}),\quad (\mathrm{E}_1),\quad (\mathrm{E}_2),\quad (\mathrm{E}_3),\quad (\mathrm{E}_4),$$

où

$$\mathrm{E}_3=(x^3-x^2)\frac{d^3z_3}{dx^3}+(11x^2-6x)\frac{d^2z_3}{dx^2}+(24x-4)\frac{dz_3}{dx}=0,$$

$$\mathrm{E}_4=(x^3-x^2)\frac{d^3z_4}{dx^3}+(-5x^2+2x)\frac{d^2z_4}{dx^2}+8x\frac{dz_4}{dx}=0.$$

D'après le résultat XI, les racines de l'équation déterminante du point ∞ pour l'équation (E_4) seront

$$-5,\quad -3,\quad 0;$$

cette équation a donc pour solutions une constante, un polynôme du troisième degré et un du cinquième. On trouve très facilement

$$\frac{dz_4}{dx}=x^4-4x^3,\qquad \frac{dz_4}{dx}=6x^2-4x+1.$$

L'équation (E_3) étant l'adjointe de Lagrange de l'équation (E_4), où $\frac{dz_4}{dx}$ est considérée comme l'inconnue, les solutions de l'équation (E_3) sont données par les formules

$$\frac{dz_3}{dx}=\frac{1}{x^3-x^2}(x^4-4x^3)e^{-\int\frac{3x^2-2x}{x^3-x^2}dx},$$

$$\frac{dz_3}{dx}=\frac{1}{x^3-x^2}(6x^2-4x+1)e^{-\int\frac{3x^2-2x}{x^3-x^2}dx};$$

nous trouvons ainsi

$$\frac{dz_3}{dx}=\frac{x^4-4x^3}{x^4(x-1)^4},\qquad \frac{dz_3}{dx}=\frac{6x^2-4x+1}{x^4(x-1)^4}.$$

D'après ce que nous avons dit au n° 5, les solutions de l'équation (E_2) seront

$$z_2 = x^4 - 4x^3, \qquad z_2 = 6x^2 - 4x + 1$$

et

$$\frac{1}{x^3 - x^2} \begin{vmatrix} \displaystyle\int \frac{x^4 - 4x^3}{x^4(x-1)^4}\,dx & \displaystyle\int \frac{6x^2 - 4x + 1}{x^4(x-1)^4}\,dx \\ \dfrac{x^4 - 4x^3}{x^4(x-1)^4} & \dfrac{6x^2 - 4x + 1}{x^4(x-1)^4} \end{vmatrix} e^{\int \frac{11x^2 - 6x}{x^3 - x^2}}.$$

Cette dernière intégrale devient

$$Z_2 = (6x^2 - 4x + 1)\int \frac{x^4 - 4x^3}{x^4(x-1)^4}\,dx - (x^4 - 4x^3)\int \frac{6x^2 - 4x + 1}{x^4(x-1)^4}\,dx;$$

les quadratures renfermant chacune une constante, on a l'intégrale générale de l'équation (E_2) par la formule

$$Z_2 = \text{const.}\left[(6x^2 - 4x + 1)\int \frac{x^4 - 4x^3}{x^4(x-1)^4}\,dx - (x^4 - 4x^3)\int \frac{6x^2 - 4x + 1}{x^4(x-1)^4}\,dx\right].$$

Pour avoir l'intégrale générale de l'équation (E), on n'a qu'à prendre la dérivée. On trouve

$$Z = \text{const.}\left[(12x - 4)\int \frac{x^4 - 4x^3}{x^4(x-1)^4}\,dx - (4x^3 - 12x^2)\int \frac{6x^2 - 4x + 1}{x^4(x-1)^4}\right].$$

Les calculs une fois effectués, z renfermera des expressions algébriques et des logarithmes.

9. Il y a des équations qui se rattachent à la forme (17). Ce sont celles de la forme

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &[y^n - y^{(n-q)}]\frac{d^n z}{dy^n} + [Ay^{(n-1)} - A_1 y^{(n-q-1)}]\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}} + \ldots \\ &\qquad + [Iy^{q+1} - I_1 y]\frac{d^{q+1}z}{dy^{q+1}} + Jy^q\frac{d^q z}{dy^q} + \ldots + Nz = 0. \end{aligned}\right.$$

On passe d'une équation du type (18) à une équation du type (17) par le changement de variables

$$y^q = x.$$

10. Revenons à l'équation (E). Nous allons appliquer notre méthode à la solution de quelques problèmes.

Formons, par exemple, l'équation la plus générale de la forme (E), qui admet comme intégrales particulières n polynômes de degrés consécutifs p, $(p+1)$, ..., $(p+n)$. Si nous considérons la suite qui correspond à l'équation cherchée, il y aura dans cette suite une équation qui aura comme intégrales des polynômes de degrés $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$. Comme elle est de la forme de Gauss, elle sera

$$(\mathrm{E}) = a\frac{d^n z}{dx^n} = 0,$$

a étant un polynôme de degré n.

On obtiendra l'équation cherchée en prenant l'équation (E_{2p}) correspondant à cette équation. On a ainsi

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} & a\frac{d^n z}{dx^n} - p\frac{da}{dx}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \frac{p(p+1)}{1.2}\frac{d^2 a}{dx^2}\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + \ldots \\ & \qquad + (-1)^n\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!}\frac{d^n a}{dx^n}z = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour toutes les valeurs entières et positives de p, cette équation aura n intégrales qui seront des polynômes de degrés p, $(p+1)$, ..., $(p+n)$. Pour les valeurs négatives de p comprises entre 0 et $(-n)$, l'équation (19) s'intégrera par des quadratures, et, pour les valeurs négatives de p comprises entre $-n$ et $-\infty$, l'intégrale générale de l'équation (19) sera une fraction rationnelle.

On trouve de la même façon l'équation la plus générale de la forme (E), qui admet comme intégrales particulières α polynômes de degrés consécutifs p, $(p+1)$, ..., $(p+\alpha-1)$. En effet, si l'on prend la suite qui correspond à l'équation cherchée, dans cette suite il y aura une équation admettant comme solutions des polynômes de degrés 0, 1, 2, ..., $(\alpha-1)$. Cette équation est donc

$$a\frac{d^n z}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-\alpha}\frac{d^\alpha z}{dx^\alpha} = 0,$$

a étant un polynôme de degré n, a_1 un polynôme de degré $(n-1)$, etc. Donc, l'équation admettant comme solutions particulières α polynômes de degrés consécutifs p, $(p+1)$, ..., $(p+\alpha-1)$ est la transformée (E_{2p}) de cette équation, c'est-à-dire l'équation

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} & a\frac{d^n z}{dx^n}+\left(-p\frac{da}{dx}+a_1\right)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\left[\frac{p(p+1)}{1\cdot 2}\frac{d^2 a}{dx^2}-p\frac{da_1}{dx}+a_2\right]\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}+\ldots \\ &\qquad +\left[(-1)^n\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!}\frac{d^n a}{dx^n}+\ldots \right.\\ &\qquad\qquad \left. +(-1)^\alpha\frac{p(p+1)\ldots(p+\alpha-1)}{\alpha!}\frac{d^\alpha a_{n-\alpha}}{dx^\alpha}\right]z=0,\end{aligned}\right.$$

où p a des valeurs entières positives.

En particulier, le type le plus général d'équations qui admettent comme solutions $(n-1)$ polynômes de degrés consécutifs est

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} & a\frac{d^n z}{dx^n}+\left(-p\frac{da}{dx}+a_1\right)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\left[\frac{p(p+1)}{1\cdot 2}\frac{d^2 a}{dx^2}-p\frac{da_1}{dx}\right]\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}+\ldots \\ &+\left[(-1)^n\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!}\frac{d^n a}{dx^n}+(-1)^{n-1}\frac{p\ldots(p+n-2)}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}a_1}{dx^{n-1}}\right]z=0.\end{aligned}\right.$$

M. Hermite a considéré déjà cette équation sous une autre forme qu'il est bien facile de retrouver.

Dans l'équation (19), faisons $p=1$; nous avons l'équation admettant comme solutions particulières n polynômes de degrés $1, 2, \ldots, n$,

$$a\frac{d^n z}{dx^n}-\frac{da}{dx}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\frac{d^2 a}{dx^2}\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n a}{dx^n}z=0.$$

L'équation de Gauss, qui admet comme solutions particulières les polynômes de degrés $1, 2, \ldots, (n-1)$, pourra s'écrire

$$a\frac{d^n z}{dx^n}+\left(-\frac{da}{dx}+b\right)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\frac{d^2 a}{dx^2}\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n a}{dx^n}z=0,$$

b étant un polynôme de degré $n-1$. Il suffira de prendre la transformée $(E_{2(p-1)})$ de cette équation pour retrouver la forme de M. Hermite.

Il résulte de notre étude que l'équation (21) s'intègre pour toutes les valeurs entières de p, positives ou négatives.

11. Parmi les équations qui se rattachent aux équations de forme (E), nous citerons les suivantes :

$$(\alpha y^n + \alpha_1 y^{n+p} + \ldots + \alpha_n y^{n+np}) \frac{dz^n}{dy^n}$$
$$+ (\beta y^{n-1} + \beta_1 y^{(n-1+p)} + \ldots + \beta_{n-1} y^{(n-1)+(n-1)p}) \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}} + \ldots;$$

on passe de ce type d'équations à une équation de la forme (E), en posant

$$x = y^{-p}.$$

12. Étudions le cas particulier de l'équation du second ordre

$$a \frac{d^2 z}{dx^2} + b \frac{dz}{dx} + cz = 0, \tag{22}$$

où a est un polynôme de second degré, b un polynôme du premier degré, c une constante. Dans ce cas, il suffit que l'équation algébrique correspondant à cette équation ait une racine entière pour que l'on puisse calculer l'intégrale générale. En effet, si c'est une racine négative, on a immédiatement un polynôme comme solution de la proposée; si c'est une racine positive, on a un polynôme comme solution de l'adjointe de Lagrange et, par suite, une solution de la proposée. L'autre solution s'obtiendra par quadratures.

Plaçons-nous dans le cas où l'équation algébrique correspondant à l'équation (E) a une racine entière positive n, cette racine étant la plus petite s'il y en a une autre.

Considérons la suite d'équations

$$(E), \quad \ldots, \quad (E_{2n-2}), \quad (E_{2n-1}), \quad (E_{2n}), \quad \ldots.$$

L'équation (E_{2n-1}) est alors

$$(E_{2n-1}) = a \frac{d^2 z_{2n-1}}{dx^2} + \left[(n+1)\frac{da}{dx} - b\right] \frac{dz_{2n-1}}{dx} = 0,$$

avec la condition

$$\frac{n(n+1)}{2} \frac{d^2 a}{dx^2} - n \frac{db}{dx} + c = 0. \tag{23}$$

L'équation (E_{2n-1}) a pour solution particulière une constante, et l'équation (E_{2n-2}), étant l'adjointe de Lagrange de (E_{2n-1}), a la solution correspondante

$$\frac{\text{const.}}{a}\, e^{\int\left[(n+1)\frac{a'}{a}-\frac{b}{a}\right]dx} = \text{const.}\, a^n e^{-\int\frac{b}{a}dx}.$$

On déduit de là la solution correspondante de l'équation (E),

$$z = \text{const.}\, \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\, a^n e^{-\int\frac{b}{a}dx}. \tag{24}$$

Cette formule convient, à la condition que n soit la plus petite racine entière positive de l'équation (23).

Nous allons montrer que, dans tous les cas, la formule (24) donne une solution de l'équation (22), pourvu que n soit solution de l'équation (23). En effet, posons

$$y = a^n e^{-\int\frac{b}{a}dx};$$

nous avons

$$\frac{dy}{dx} = na^{n-1}\frac{da}{dx}e^{-\int\frac{b}{a}dx} - ba^{n-1}e^{-\int\frac{b}{a}dx},$$

$$a\frac{dy}{dx} = \left(n\frac{da}{dx} - b\right)y.$$

Différentions n fois en appliquant la formule de Leibnitz; on a

$$a\frac{d^{n+1}y}{dx^n} + n\frac{da}{dx}\frac{d^ny}{dx^n} + \frac{n(n-1)}{12}\frac{d^2a}{dx^2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$
$$= \left(n\frac{da}{dx} - b\right)\frac{d^ny}{dx^n} + n\left(n\frac{d^2a}{dx^2} - \frac{db}{dx}\right)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

ou

$$a\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + b\frac{d^ny}{dx^n} + \left[-\frac{n(n+1)}{12}\frac{d^2a}{dx^2} - n\frac{db}{dx}\right]\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = 0$$

et, à cause de l'équation (23),

$$a\frac{d^{n+1}y}{dz^{n+1}} + b\frac{d^ny}{dx^n} + c\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = 0,$$

ce qui montre bien que $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ est solution de l'équation (22).

Remarque. — Dans certains cas, la formule (24) peut devenir illusoire; ces cas se présenteraient si $a^n e^{-\int \frac{b}{a} dx}$ était un polynôme de degré inférieur à $n-1$.

Appliquant la formule (24) à l'équation de Gauss mise sous sa forme ordinaire

$$x(1-x)\frac{d^2 z}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dz}{dx} - \alpha\beta z = 0,$$

on trouve

$$z = \text{const.}\,\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}\, x^\alpha (1-x)^\alpha e^{\int \frac{(\alpha+\beta+1)x-\gamma}{x(1-x)} dx},$$

ou

$$z = \text{const.}\,\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}\, x^{(\alpha-\gamma)}(1-x)^{\gamma-\beta-1}.$$

L'intégrale générale est donc

$$z_1 = C_1 \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}\, x^{(\alpha-\gamma)}(1-x)^{\gamma-\beta-1} + C_2 \frac{d^{\beta-1}}{dx^{\beta-1}}\, x^{(\beta-\gamma)}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}.$$

CHAPITRE III.

APPLICATION AUX ÉQUATIONS QUI GÉNÉRALISENT L'ÉQUATION DE BESSEL.

---

1. L'équation différentielle linéaire ordinaire connue sous le nom d'*équation de Bessel* est

$$\text{(E)} \qquad x\frac{d^2 z}{dx^2} + m\frac{dz}{dx} + xz = 0;$$

nous allons appliquer notre méthode à l'étude de cette équation. Son adjointe de Lagrange est

$$(\text{E}_1) \qquad \frac{d^2}{dx^2}(xz_1) - \frac{d}{dx}(mz_1) + xz_1 = 0, \qquad x\frac{d^2 z_1}{dx^2} + (2-m)\frac{dz_1}{dx} + xz_1 = 0,$$

$$(\text{E}_1) \qquad x\frac{d^2 z_1}{dx^2} + m_1\frac{dz_1}{dx} + xz_1 = 0,$$

L'adjointe de la première ligne pour l'équation (E_1) est

$$(E_2) \qquad \frac{d}{dx}(z_2') - m_1 \frac{z_2'}{x} + z_2 = 0,$$

$$x \frac{d^2 z_2}{dx^2} - m_1 \frac{dz_2}{dx^2} + xz_2 = 0,$$

$$(E_2) \qquad x \frac{d^2 z_2}{dx^2} + (m-2) \frac{dz_2}{dx} + xz_2 = 0.$$

Par suite, nous avons

$$(E_{2p}) \qquad x \frac{d^2 z_{2p}}{dx^2} + (m-2p) \frac{dz_{2p}}{dx} + xz_{2p} = 0.$$

Appliquant la formule (1) du Chapitre I de la deuxième Partie, on a

$$z = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \cdots \frac{d}{dx} z_{2p},$$

les dérivations étant en nombre p.

Si m est un entier positif $2p$, on voit que l'équation (E_{2p}) est

$$x \frac{d^2 z}{dx^2} + xz = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} + z = 0;$$

elle admet les deux intégrales $\sin x$ et $\cos x$.

Donc :

I. *L'équation*

$$x \frac{d^2 z}{dx^2} + 2p \frac{dz}{dx} + xz = 0,$$

où p est un entier positif, admet les deux solutions

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \cdots \frac{d}{dx} \cos x, \quad \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \cdots \frac{d}{dx} \sin x,$$

le nombre des dérivations étant p.

De même :

II. *L'équation*

$$x \frac{d^2 z}{dx^2} - 2q \frac{dz}{dx} + xz = 0,$$

où q est un entier positif, admet les deux solutions

$$\int x\,dx \int x\,dx \ldots \int \cos x\,dx, \quad \int x\,dx \int x\,dx \ldots \int \sin x\,dx,$$

le nombre d'intégrations étant q.

L'intégrale de cette dernière équation

$$x\frac{d^2 z}{dx^2} - 2q\frac{dz}{dx} + xz = 0,$$

où q est un entier positif, peut se mettre sous une autre forme. En effet, l'adjointe de la première ligne pour cette équation est

$$x\frac{d^2 z}{dx^2} + 2q\frac{dz}{dx} + xz = 0.$$

Si z_1 et z_2 sont deux intégrales de cette équation, deux intégrales de la première sont

$$z'_1 e^{\int \frac{2q}{x}dx} = x^{2q} z'_1 \qquad \text{et} \qquad x^{2q} z'_2.$$

Donc :

III. *Les intégrales de l'équation*

$$x\frac{d^2 z}{dx^2} - 2q\frac{dz}{dx} + xz = 0,$$

où q est un nombre entier positif, sont

$$x^{2q}\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\cdots\frac{d}{dx}\cos x, \quad x^{2q}\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\sin x.$$

le nombre des dérivations étant $q+1$.

2. Ces résultats ont pu être établis parce que l'équation de Bessel ne change pas de forme par la transformation indéfinie qui a été employée. Il suffit alors de prendre l'équation la plus simple de la suite pour intégrer les autres. Il existe des équations d'ordre supérieur au deuxième qui se traitent d'une façon analogue : ce sont les

suivantes

$$(\mathrm{E}) \qquad x^{n-1}\frac{d^n z}{dx^n} + a x^{n-2}\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + b x^{n-3}\frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \ldots + h\frac{dz}{dx} + x^{n-1} z = 0,$$

où a, b, …, h sont des constantes.

L'adjointe de Lagrange d'une telle équation est

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}z_1) - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(a x^{n-2} z_1) + \ldots + (-1)^n x^{n-1} z_1,$$

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \left\{\begin{aligned} & x^{n-1}\frac{d^n z_1}{dx^n} - [n(n-1) - a]x^{n-2}\frac{d^{n-1} z_1}{dx^{n-1}} \\ & + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)(n-2) - (n-1)(n-2)a + b\right]\frac{d^{n-2} z_1}{dx^{n-2}} + \ldots . \end{aligned}\right.$$

Elle a la même forme que l'équation (E). Écrivons-la

$$(\mathrm{E}_1) \qquad x^{n-1}\frac{d^n z_1}{dx^{n-1}} + a_1 x^{n-2}\frac{d^{n-1} z_1}{dx^{n-1}} + \ldots + x^{n-1} z_1 = 0.$$

L'adjointe de la première ligne pour cette équation (E_1) est

$$(\mathrm{E}_2) \qquad \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(z_2') - \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\frac{a_1 z_2'}{x}\right) + \ldots + (-1)^n z_2 = 0,$$

$$(\mathrm{E}_2) \qquad \left\{\begin{aligned} & x^{n-1}\frac{d^n z_2}{dx^n} - a_1 x^{n-2}\frac{d^{n-1} z_2}{dx^{n-1}} + [(n-2)a_1 + b_1]x^{n-3}\frac{d^{n-2} z_2}{dx^{n-2}} \\ & - [(n-2)(n-3)a_1 + 2(n-3)b_1 + c_1]x^{n-4}\frac{d^{n-3} z_2}{dx^{n-3}} + \ldots = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation ayant encore la même forme que l'équation (E), on voit qu'il en est de même de toutes les équations de la suite.

La formule qui permet de passer de la solution de l'équation (E_{2p}) à la solution de l'équation (E) est

$$z = \frac{1}{x^{n-1}}\frac{d}{dx}\frac{1}{x^{n-1}}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}z_{2p},$$

le nombre de dérivations étant p.

3. L'équation (E) s'intègre facilement dans les deux cas suivants :

1° Si, dans la suite qui lui correspond, on trouve l'équation

$$(a) \qquad x^{n-1}\frac{d^n z}{dx^n} + x^{n-1} z = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^n z}{dx^n} + z = 0;$$

2° Si, dans la suite qui lui correspond, on trouve l'équation

$$x^{n-1}\frac{d^n z}{dx^n} + np\,x^{n-2}\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + x^{n-1} z = 0,$$

c'est-à-dire

$$(b) \qquad x\frac{d^n z}{dx^n} + np\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + xz = 0,$$

p étant un nombre entier.

Il suffit de montrer que les équations (a) et (b) s'intègrent. L'équation (a) est une équation à coefficients constants; on l'intègre par les n expressions $e^{\alpha x}$, α étant racine de l'équation algébrique $r^n + 1 = 0$.

Pour l'intégration de l'équation (b), posons $z = ye^{\lambda x}$, on en tire

$$\frac{dz}{dx} = e^{\lambda x}\left(\frac{dy}{dx} + \lambda y\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} = e^{\lambda x}\left[\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + (n-1)\lambda\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + (n-1)\lambda^{n-2}\frac{dy}{dx} + \lambda^{n-1} y\right],$$

$$\frac{d^n z}{dx^n} = e^{\lambda x}\left(\frac{d^n y}{dx^n} + n\lambda\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + n\lambda^{n-1}\frac{dy}{dx} + \lambda^n y\right).$$

L'équation transformée sera

$$x\frac{d^n y}{dx^n} + (n\lambda x + np)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots$$
$$+ [n\lambda^{n-1} x + n(n-1)p\lambda^{n-2}]\frac{dy}{dx} + [x(\lambda^n + 1) + np\lambda^{n-1}]y = 0.$$

Si l'on prend pour λ une valeur λ_1 racine de l'équation $\lambda^n + 1 = 0$, l'équation devient

$$(c) \qquad \left\{\begin{aligned} & x\frac{d^n y}{dx^n} + (n\lambda_1 x + np)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots \\ & \qquad + [n\lambda_1^{n-1} x + n(n-1)p\lambda_1^{n-2}]\frac{dy}{dx} + np\lambda_1^{n-1} y = 0; \end{aligned}\right.$$

elle est de la forme que nous avons étudiée au Chapitre II de la deuxième Partie. Son équation algébrique correspondante est

$$n\lambda_1^{n-1} r - np\lambda_1^{n-1} = 0;$$

elle a la racine $+p$.

Si p est un nombre négatif, l'équation (c) a pour solution particulière un polynôme de degré p; soit P_{λ_1} ce polynôme, l'équation (b) aura pour solution l'expression $P_{\lambda_1} e^{\lambda_1 x}$. On obtiendra ainsi les n solutions de l'équation (b), puisqu'il y a n valeurs pour λ_1. Dans le cas où p est un nombre positif, l'adjointe de Lagrange de l'équation (c) a pour solution un polynôme de degré $p - 1$, soit Q_{λ_1} ce polynôme. Si donc $y_1, \ldots, y_{n-1}$ désignent n solutions de l'équation (c) convenablement choisies, on a

$$Q_{\lambda_1} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_{n-1}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}.$$

Mais, z_1 étant la solution correspondante à y_1 dans l'équation (b), on a

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 e^{-\lambda_1 x}, \\ y_1' &= z_1' e^{-\lambda_1 x} - \lambda_1 z_1 e^{-\lambda_1 x}, \\ y_1'' &= z_1'' e^{-\lambda_1 x} - 2\lambda_1 z_1' e^{-\lambda_1 x} + \lambda_1^2 z_1 e^{-\lambda_1 x}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En remarquant qu'on peut, dans un déterminant, remplacer une ligne par une combinaison linéaire des autres, on voit que

$$Q_{\lambda_1} = \frac{e^{-(n-1)\lambda_1 x}\begin{vmatrix} z_1 & \ldots & z_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n-2)} & \ldots & z_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix}}{e^{-n\lambda_1 x}\begin{vmatrix} z_1 & \ldots & z_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n-1)} & \ldots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}.$$

Donc

$$\frac{\begin{vmatrix} z_1 & \cdots & z_{n-1} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdots \\ z_1^{(n-2)} & \cdots & z_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 & \cdots & z_n \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ z_1^{(n-1)} & \cdots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}} = Q_{\lambda_1} e^{-\lambda_1 x}.$$

De sorte que l'adjointe de Lagrange de l'équation (b) admet la solution $Q_{\lambda_1} e^{-\lambda_1 x}$. Puisque λ_1 prend n valeurs, on a toutes les solutions de l'adjointe de Lagrange de l'équation (b) et, par suite, toutes les solutions de l'équation (b).

4. Après avoir reconnu que l'équation (E) s'intègre lorsqu'elle a, dans la suite qui lui correspond, une équation identique à (a) ou à (b), il nous reste à indiquer le moyen de reconnaître *a priori* les cas où il en est ainsi.

On établit par la comparaison des racines des équations déterminantes les résultats suivants :

IV. *Quand on passe d'une équation* (E) *à son adjointe de Lagrange, les racines de l'équation déterminante du point critique* o *sont changées de signe.*

V. *Quand on passe d'une équation* (E) *à son adjointe de la première ligne, les racines de l'équation déterminante du point* o (*la racine* o *exceptée*) *sont changées de signes et augmentées de n.*

L'application répétée de ces résultats fournit le suivant :

VI. *Quand on passe de l'équation* (E) *à l'équation* (E_{2p}), *les racines de l'équation déterminante du point* o (*la racine* o *exceptée*) *augmentent de pn; quand on passe de l'équation* (E) *à l'équation* (E_{-2q}), *elles diminuent de qn.*

Considérons le cas où une équation donne naissance à une suite renfermant l'équation

$$(a) \qquad x^{n-1}\frac{d^n z_{2p}}{dx^n} + x^{n-1} z = 0.$$

Les racines de l'équation déterminante du point o pour cette équation sont $1, 2, \ldots, (n-1)$; on peut en déduire les racines de l'équation déterminante du point o pour l'équation donnée. On arrive ainsi au résultat suivant :

VII. *Quand les racines de l'équation déterminante du point critique* o (*la racine* o *exceptée*) *sont*

$$1 - pn, \quad 2 - pn, \quad (n-1) - pn.$$

1° *si p est un nombre entier positif, les solutions de l'équation* (E) *sont données par*

$$z = \frac{1}{x^{n-1}} \frac{d}{dx} \frac{1}{x^{n-2}} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} e^{\alpha x},$$

le nombre des dérivations étant p et α étant racine de l'équation $r^n + 1 = 0$;
2° *si p est un nombre négatif, elles sont données par la formule*

$$\int x^{n-1}\,dx \int x^{n-1}\,dx \ldots \int e^{\alpha x}\,dx,$$

le nombre d'intégrations étant p.

Dans le second cas, on peut éviter les quadratures par la considération de l'adjointe de la première ligne de l'équation (E). En effet, son équation déterminante aura les racines

$$pn + (n-1), \quad pn + (n-2), \quad \ldots, \quad pn + 1,$$

et l'on sera ramené au premier cas.

Considérons maintenant les cas où une équation donne naissance à une suite renfermant l'équation

$$(b) \qquad x^{n-1} \frac{d^n z}{dx^n} + nq\, x^{n-2} \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + x^{n-1} z = 0.$$

Les racines de l'équation déterminante du point o sont

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n-2, \quad (n-1) - nq.$$

Donc :

VIII. *Pour qu'une équation* (E) *donne naissance à une suite renfermant l'équation* (b), *il faut et il suffit que les racines de l'équation déterminante du point* o *soient*

$$1 - pn, \quad 2 - pn, \quad (n-2) - pn, \quad (n-1) - p'n,$$

ou

$$(n-1)-pn, \quad (n-2)-pn, \quad 2-pn, \quad 1-p'n,$$

p et p' étant des entiers quelconques positifs ou négatifs.

Les résultats I et III intègrent l'équation du second ordre dans tous les cas où l'intégrale générale est uniforme autour du point critique o; mais, comme nous allons le voir, les résultats VII et VIII n'intègrent pas l'équation du $n^{\text{ième}}$ ordre dans tous les cas où l'intégrale générale est uniforme autour du point critique o. Cependant, dans ces cas, l'équation du troisième ordre se trouve intégrée.

5. Étudions donc l'intégrale de l'équation (E) autour du point critique o. L'équation déterminante du point critique o est

$$f(r) = +r(r-1)\ldots(r-n+1)+ar\ldots(r-n+2)\ldots+hr = 0.$$

Voyons d'abord la forme des développements. Soit ξ une racine non entière de cette équation et supposons qu'il n'y ait pas d'autres racines dont la différence avec ξ soit un nombre entier.

Déterminons les coefficients du développement

$$x^{\xi}+A_1x^{\xi+1}+A_2x^{\xi+2}+\ldots+A_{n-1}x^{\xi+n-1}+A_nx^{\xi+n}+A_{n+1}x^{\xi+n+1}+\ldots.$$

On a les équations

$$\begin{aligned}
&f(\xi)=0,\\
&A_1=A_2=\ldots=A_{n-1}=0,\\
&A_nf(\xi+n)+\xi=0,\\
&A_{n+1}=\ldots=A_{2n-1}=0,\\
&A_{2n}f(\xi+2n)+\xi A_n=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et par suite le développement

$$x^{\xi}-\frac{\xi}{f(\xi+n)}x^{\xi+n}+\frac{\xi(\xi+n)}{f(\xi+n)f(\xi+2n)}x^{\xi+2n}$$
$$-\frac{\xi(\xi+n)(\xi+2n)}{f(\xi+n)f(\xi+2n)f(\xi+3n)}x^{\xi+3n}+\ldots.$$

Cherchons maintenant les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale générale soit uniforme autour du point critique o.

Nous pouvons toujours supposer les racines de l'équation déterminante du point o positives, car, si elles ne l'étaient pas, il suffirait de prendre dans la suite qui correspond à l'équation (E) une équation à droite (E_{2p}), dont les racines seraient positives, et les conditions qui expriment que l'intégrale générale de l'équation (E) est uniforme autour du point critique o sont les mêmes que celles qui expriment que l'équation (E_{2p}) remplit les mêmes conditions.

Soient donc o, α, β, ... les racines entières rangées par ordre de grandeur croissante, nous aurons le développement

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots + a_\alpha x^\alpha + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_\beta x^\beta + \ldots \\ + \log t\,(b_\alpha x^\alpha + b_{\alpha+1} x^{\alpha+1}) + \ldots \\ + \log^2 t\,(c_\beta x^\beta + c_{\beta+1} x^{\beta+1}) + \ldots \\ + \ldots \end{aligned}$$

les équations qui déterminent les coefficients sont

$$\begin{gathered} a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0, \\ a_n f(n) + n a_0 = 0, \\ a_{n+1} = \ldots = a_{2n-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_\alpha f(\alpha) + b_\alpha f'(\alpha) + \alpha a_{\alpha-n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{gathered}$$

il faut d'abord $b_\alpha = 0$, et, puisque $f(\alpha) = 0$, il faut que $a_{\alpha-n} = 0$, c'est-à-dire que $\alpha - n$ soit, à un multiple près de n, un des nombres 1, 2, ..., $(n-1)$. En continuant, on verrait que β doit être, à un multiple près de n, un des nombres 0, 1, ..., $(n-1)$, sans que ce dernier nombre puisse être le même que celui qui correspond à α.

Donc :

IX. *Pour que l'intégrale générale de l'équation* (E) *soit uniforme autour du point critique* o, *il faut et il suffit que les racines de l'équation déterminante du point* o (*non compris la racine* o) *soient respectivement* 1, 2, ..., $(n-1)$, *à un multiple de* n *près, positif ou négatif, qui n'est pas le même pour toutes les intégrales.*

Ce dernier résultat, rapproché des résultats VII et VIII, montre bien ce que nous avons annoncé. Il n'y a que l'équation du troisième ordre qui soit intégrée lorsque son intégrale générale est uniforme autour du point critique o.

TROISIÈME PARTIE.

1. Nous avons vu, dans la deuxième Partie, qu'à une équation différentielle linéaire ordinaire

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{d^n z}{dx^n} + b\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + lz = 0,$$

on pouvait faire correspondre une suite doublement infinie d'équations

$$(\mathrm{E}_{-q}), \quad \ldots, \quad (\mathrm{E}), \quad \ldots, \quad (\mathrm{E}_p), \quad \ldots.$$

Un cas intéressant est celui qui se présente lorsque, dans la suite, on retrouve une équation identique à l'équation (E).

Si, par exemple, la première équation identique à (E) est (E_{4n+3}), on voit que l'équation (E_1), qui est l'adjointe de Lagrange de l'équation (E), est identique à l'équation (E_{4n+2}), qui est aussi l'adjointe de Lagrange de l'équation (E_{4n+3}). En suivant de proche en proche, on voit que l'équation (E_{2n+1}) est identique à l'équation (E_{2n+2}). Donc, dans la suite, il y a une équation qui est identique à son adjointe de la première ligne.

Si cette première équation identique à l'équation (E) est (E_{4n+1}), l'équation (E_{2n}) est identique à l'équation (E_{2n+1}). Donc, dans la suite, il y a une équation qui est identique à son adjointe de Lagrange.

Il suit de là que les équations qui donneront naissance à une suite présentant les caractères que nous venons d'examiner seront celles que l'on déduit des équations qui sont identiques, soit à leur adjointe de la première ligne, soit à leur adjointe de Lagrange, en appliquant notre méthode de correspondance.

Les équations qui sont identiques à leur adjointe de Lagrange ont été étudiées par M. Darboux et M. Bertrand [1]; on pourrait étudier

[1] Darboux, *Leçons*, etc., *loc. cit.*, IIe Volume.

d'une façon à peu près analogue celles qui sont égales à leur adjointe de la première ligne.

2. Lorsque, dans la suite, la première équation identique à l'équation (E) est l'équation (E_{2p}), il se présente une véritable périodicité, et l'on peut, en général, intégrer l'équation proposée par des quadratures.

En effet, nous avons établi la formule [*voir* deuxième Partie, Chap. I, formule (1)]

$$z = \frac{1}{l_1}\frac{d}{dx}\frac{1}{l_3}\cdots\frac{d}{dx}\frac{1}{l_{2p-1}}\frac{d}{dx}z_{2p}.$$

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ n solutions de l'équation (E) formant un système fondamental; puisque l'équation (E_{2p}) est identique à l'équation (E), nous avons, en posant

$$\frac{1}{l_1}\frac{d}{dx}\frac{1}{l_3}\cdots\frac{d}{dx}\frac{1}{l_{2p-1}}\frac{d}{dx}z_i = \mathrm{H}(z_i),$$

les égalités

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(z_1) &= \alpha_1^1 z_1 + \alpha_1^2 z_2 + \ldots + \alpha_1^n z_n,\\
\mathrm{H}(z_2) &= \alpha_2^1 z_1 + \alpha_2^2 z_2 + \ldots + \alpha_2^n z_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathrm{H}(z_n) &= \alpha_n^1 z_1 + \alpha_n^2 z_2 + \ldots + \alpha_n^n z_n.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}(\mathrm{A}z_1 + \mathrm{B}z_2 + \ldots + \mathrm{L}z_n)\\
&\quad = z_1(\mathrm{A}\alpha_1^1 + \mathrm{B}\alpha_2^1 + \ldots + \mathrm{L}\alpha_n^1) + z_2(\mathrm{A}\alpha_1^2 + \ldots + \mathrm{L}\alpha_n^2) + \ldots.
\end{aligned}$$

Pour que l'intégrale

$$\mathrm{A}z_1 + \mathrm{B}z_2 + \ldots + \mathrm{L}z_n$$

se reproduise multipliée par un facteur constant quand on effectue sur elle l'opération H, on doit avoir

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{A}(\alpha_1^1 - s) & + \mathrm{B}\alpha_2^1 & + \ldots + \mathrm{L}\alpha_n^1 & = 0,\\
\mathrm{A}\alpha_1^2 & + \mathrm{B}(\alpha_2^2 - s) & + \ldots + \mathrm{L}\alpha_n^2 & = 0,\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots,\\
\mathrm{A}\alpha_1^n & + \mathrm{B}\alpha_2^n & + \ldots + \mathrm{L}(\alpha_n^n - s) & = 0.
\end{array}$$

Il faut que A, B, ..., L aient des solutions qui ne soient pas toutes nulles; donc

$$R(s) = \begin{vmatrix} (\alpha_1^1 - s) & \alpha_2^1 & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & (\alpha_2^2 - s) & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & (\alpha_n^n - s) \end{vmatrix} = 0.$$

Soit s_i une racine simple de cette équation $R(s) = 0$.

D'après ce qui vient d'être dit, l'équation

$$H(z) = s_i z$$

a une solution commune avec l'équation (E). Écrivons cette condition; en éliminant de proche en proche, nous arriverons évidemment à cette conclusion que la solution commune doit aussi être solution de

$$A\frac{dz}{dx} = (B + s_i)z,$$

A et B étant des fonctions de x, mais ne dépendant pas de s. Donc une intégrale sera de la forme

$$(1) \qquad z = e^{\int \frac{B+s}{A} dx},$$

s ayant une valeur numérique convenablement déterminée. Si nous substituons cette valeur dans l'équation (E), on voit que nous aurons une équation de degré n en s; les coefficients doivent être des constantes, puisque nous devons retrouver l'équation $R(s) = 0$. Cette équation aura n solutions $s_1, s_2, \dots, s_n$, et en portant ces valeurs, supposées différentes, dans l'expression (1), nous aurons les n solutions de l'équation.

Il pourrait se faire que l'équation en s obtenue ait des racines multiples. On traitera ce cas comme cas limite. Plaçons-nous, par exemple, dans le cas d'une racine double.

Supposons d'abord deux racines voisines s_1 et $s_1 + \varepsilon$, elles donnent naissance aux deux intégrales

$$z_1 = e^{\int \frac{B+s_1}{A} dx} = f(s_1), \qquad z_2 = f(s_1 + \varepsilon).$$

L'expression

$$\frac{f(s_1+\varepsilon)-f(s_1)}{\varepsilon}$$

est encore une intégrale : donc, lorsque ε tend vers o, l'expression

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = \frac{B+s_1}{A} e^{\int \frac{B+s_1}{A} dx}$$

est l'autre intégrale.

Il est donc bien certain que l'on peut intégrer une équation (E) lorsque cette équation peut donner naissance à une suite périodique.

Reprenons, dans le cas général, l'expression de l'intégrale

$$z_1 = e^{\int \frac{B+s}{A} dx} = e^{\int \frac{B}{A} dx} e^{\int \frac{s}{A} dx}.$$

Considérons l'équation qui aurait comme solutions ces expressions multipliées par $e^{-\int \frac{B}{A} dx}$; elles seront $e^{\int \frac{s}{A} dx}$. Faisons dans cette équation le changement de variables $\frac{dx}{A} = dy$. Nous aurons une équation qui aura des solutions de la forme

$$e^{\int s\, dy} = e^{sy}.$$

Ce sera une équation à coefficients constants.

Donc les équations qui donnent naissance à une suite périodique peuvent toujours se ramener à des équations à coefficients constants à l'aide d'un changement fonctionnel suivi d'un changement de variable. Ces dernières équations ont été étudiées par M. Halphen [1].

Il serait d'ailleurs facile de voir que les équations à coefficients constants donnent naissance à une suite périodique de deux en deux.

3. Nous allons donner une application dans le cas du second ordre. Soit une équation du second ordre

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + h\frac{dz}{dx} + kz = 0.$$

---

(1) *Mémoires de l'Institut* (*Savants étrangers*), année 1884, t. XXVIII.

Considérons la suite correspondant à cette équation $\left(\text{je supposerai que, dans toutes les équations, le coefficient de } \frac{d^2 z}{dx^2} \text{ est } 1\right)$

$$\ldots,\quad (E),\quad (E_1),\quad \ldots,\quad (E_{2n}),$$

avec

$$(E_p) = \frac{d^2 z}{dx^2} + h_p \frac{dz}{dx} + k_p z = 0,$$

on a les récurrences

$$h_1 = -h, \qquad h_2 = -\frac{d}{dx}\log k_1 - h_1,$$

$$k_1 = k - \frac{d}{dx}h, \qquad k_2 = k_1.$$

En ajoutant les formules

$$\begin{aligned} k_1 &= k - \frac{d}{dx}h, \\ k_2 &= k_1, \\ k_3 &= k_2 - \frac{d}{dx}h_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ k_{2n-1} &= k_{2n-2} - \frac{d}{dx}h_{2n-2}, \end{aligned}$$

on a

$$k_{2n-1} = k_{2n} = k - \frac{d}{dx}(h + h_2 + \ldots + h_{2n-2}).$$

De même, en ajoutant les formules

$$\begin{aligned} -(h + h_1) &= 0, \\ h_1 + h_2 &= -\frac{d}{dx}\log k_1, \\ -(h_2 + h_3) &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ h_{2n-1} + h_{2n} &= -\frac{d}{dx}\log k_{2n-1}, \end{aligned}$$

on a

$$h_{2n} = h - \frac{d}{dx}\log k_1 k_3 \ldots k_{2n-1}.$$

Par suite, pour que

$$k_{2n} = k, \qquad h_{2n} = h,$$

il faut et il suffit que

$$\frac{d}{dx}(h_1 + h_2 + \ldots + h_{2n-2}) = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \log k_1 k_3 \ldots\ldots\ldots k_{2n-1} = 0,$$

ou bien

$$h + h_2 + \ldots + h_{2n-2} = \text{const.},$$

$$k_1 k_3 \ldots\ldots\ldots k_{2n-1} = \text{const.},$$

puisque $h_{2n} = - h_{2n-1}$; ces conditions équivalent à

$$h_1 + h_3 + \ldots + h_{2n-1} = \text{const.},$$

$$k_1 k_3 \ldots\ldots\ldots k_{2n-1} = \text{const.}$$

Suite périodique de 2 *en* 2. — L'équation qui donnera naissance à une suite périodique de 2 en 2 sera, en appliquant le résultat précédent, celle pour laquelle $h = \text{const.}$, $k = \text{const.}$; alors, pour une valeur convenable de s, elle aura une solution commune avec

$$sz = \frac{1}{k_1} \frac{d}{dx} z \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{ds} z = sz,$$

c'est-à-dire que les solutions seront de la forme e^{sx}. On arrive ainsi à un résultat bien connu.

Suite périodique de 4 *en* 4. — Pour que l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + h \frac{dz}{dx} + kz = 0$$

donne naissance à une suite périodique de 4 en 4, il faut et il suffit

(2) $$h_1 + h_3 = -2a, \qquad k_1 k_3 = b,$$

mais

$$k_3 = k_4 = k, \qquad k_1 = k - \frac{d}{dx} h;$$

donc

(3) $$k\left(k - \frac{d}{dx} h\right) = b.$$

D'autre part,

$$h_3 = -\frac{d}{dx}\log k - h,$$
$$h_1 = -h.$$

Portant dans (2), on a

$$\frac{d}{dx}\log k + 2h = 2a,$$

(4) $$h = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\log k + a.$$

Si nous portons, dans l'équation (3), nous avons l'équation qui donne k

(5) $$\left(k + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\log k\right) = \frac{b}{k};$$

posons $k = e^u$, nous avons

$$e^u + \frac{1}{2}\frac{d^2 u}{dx^2} = be^{-u};$$

en multipliant par $\frac{du}{dx}$ et en intégrant, on a

$$\frac{1}{4}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + e^u + be^{-u} + c = 0;$$

d'où, en revenant à la variable k,

$$\left(\frac{dk}{dx}\right)^2 + 4k^3 + 4bk + ck^2 = 0,$$
$$dx = \frac{dk}{\sqrt{-4k^3 - ck^2 - 4bk}}.$$

Mettons cette quadrature elliptique sous la forme ordinaire; posons

$$k = -u + \alpha.$$

Nous avons sous le radical

$$4u^3 - u^2(12\alpha + 4c) + u(12\alpha^2 + 8\alpha c + 4b) + (-4\alpha^3 - 4c\alpha^2 - 4b\alpha);$$

prenant $c = -3\alpha$, on a

$$4u^3 - u(12\alpha^2 - 4b) + 8\alpha^3 - 8b\alpha;$$

posant

$$g_2 = 12\alpha^2 - 4b, \qquad g_3 = 8\alpha(b - \alpha^2),$$

on a

$$-dx = \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}}.$$

Donc

$$u = \mathfrak{p}(x) \qquad \text{et} \qquad k = -\mathfrak{p}(x) + \alpha.$$

Appliquant la formule (4), on a

$$h = +\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{p}'(x)}{\alpha - \mathfrak{p}(x)} + a.$$

L'équation qui donne naissance à une suite périodique de quatre en quatre est donc

$$(6) \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} + \left[\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{p}'(x)}{\alpha - \mathfrak{p}(x)} + a\right]\frac{dz}{dx} + [\alpha - \mathfrak{p}(x)]z = 0,$$

où $\mathfrak{p}(x)$ est la fonction de M. Weierstrass, g_2 et g_3 étant arbitraires.

La quantité α dépend de ces g_2 et g_3. Quant à a, c'est aussi une constante arbitraire.

Intégrons cette équation. Elle a une solution commune avec l'équation

$$\frac{1}{k_1}\frac{d}{dx}\frac{1}{k_3}\frac{d}{dx}z = sz$$

ou

$$\frac{1}{k_1 k_3}\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{k'_3}{k_1 k_3^2}\frac{dz}{dx} = sz,$$

mais

$$k_1 k_3 = b, \qquad k_3 = k.$$

La solution est donc commune aux équations

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{1}{k}\frac{dk}{dx}\frac{dz}{dx} = bsz,$$

$$\left(h + \frac{1}{k}\frac{dk}{dx}\right)\frac{dz}{dx} + (k + bs)z = 0,$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{1}{k}\frac{dk}{dx} + a\right)\frac{dz}{dx} + (k + bs)z = 0.$$

Les solutions sont donc de la forme

$$z = e^{-\int \frac{k+bs}{\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\log k + \alpha}\,dx}.$$

Pour déterminer s, il faut substituer cette valeur de z dans l'équation; après réduction, on trouve

$$bs^2 + \left(\frac{3\alpha}{4} - \alpha^2 b\right)s + 1 = 0,$$

et l'on a ainsi les solutions.

4. Nous allons nous proposer maintenant de former l'adjointe de l'avant-dernière ligne.

Soit l'équation

$$\frac{d^n z}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n z = 0. \tag{7}$$

Pour avoir cette adjointe (¹), il faut éliminer y entre les deux équations

$$u = a_1 y - \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} a_2 y - \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} a_3 y + \ldots + (-1)^{n-2} a_n y.$$

La seconde équation peut s'écrire

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\left(a_1 \frac{dy}{dx} + \frac{da_2}{dx} y - a_3 y\right) + \frac{d^{n-4}}{dx^{n-4}} a_4 y + \ldots.$$

En remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur tirée de la première équation, il vient

$$\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}(a_2 u) = \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\left(a_1 a_2 + \frac{da_2}{dx} - a_3\right) y + \frac{d^{n-4}}{dx^{n-4}} a_4 y - \ldots.$$

(¹) *Voir* dans la première Partie.

Si donc nous posons

$$a_1 a_2 + \frac{da_2}{dx} - a_3 = \alpha,$$

$$a_1 \alpha + \frac{d\alpha}{dx} + a_4 = \beta,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$a_1 \lambda + \frac{d\lambda}{dx} + (-1)^n a_n = \theta,$$

nous concluons qu'on a l'équation adjointe de l'avant-dernière ligne en éliminant y entre les deux équations

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}(a_2 u) + \frac{d^{n-4}}{dx^{n-4}}(\alpha u) + \dots + \lambda u = \theta y,$$

$$u = a_1 y - \frac{dy}{dx}.$$

Deux cas sont à distinguer :

1° $\theta \neq 0$. — En posant symboliquement

$$\theta y = \mathrm{F}(u) = \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + f(u),$$

on voit que l'adjointe de l'avant-dernière ligne est

$$\frac{d}{dx}\frac{\mathrm{F}(u)}{\theta} - \frac{a_1}{\theta}\mathrm{F}(u) + u = 0,$$

$$\frac{1}{\theta}\frac{d}{dx}\mathrm{F}(u) - \left(\frac{\theta'}{\theta^2} + \frac{a_1}{\theta}\right)\mathrm{F}(u) + u = 0,$$

$$(8) \qquad \frac{d^n}{dx^n}u + \frac{d}{dx}f(u) - \left(\frac{d}{dx}\log\theta + a_1\right)\left[\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + f(u)\right] + \theta u = 0.$$

En prenant l'adjointe de l'avant-dernière ligne de cette dernière équation, on doit retrouver l'équation proposée. Par un calcul très facile, on arrive à montrer que l'adjointe de l'avant-dernière ligne de l'équation (8) est

$$(9) \qquad \frac{d^n z}{dx^n} + \frac{d}{dx}\varphi(z) + a_1\left[\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \varphi(z)\right] \pm \theta z = 0,$$

$\varphi(z)$ étant l'adjointe de Lagrange de l'expression $f(u)$.

L'équation proposée pourra donc se mettre identiquement sous la forme (9).

2° $\theta = 0$. — Puisque l'équation proposée se met identiquement sous la forme (9) dans le cas où $\theta = 0$, elle s'écrit

$$\frac{d^n z}{dx^n} + \frac{d}{dx}\varphi(z) + a_1\left[\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \varphi(z)\right] = 0. \tag{10}$$

Donc l'équation aura les $(n-1)$ solutions communes de l'équation

$$\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \varphi(z) = 0.$$

On verrait facilement que, dans ce cas, il n'existe pas d'adjointe de l'avant-dernière ligne, parce que les n expressions qui devraient être solutions de cette adjointe ne forment pas un système fondamental.

5. La méthode de correspondance que nous avons exposée dans la deuxième Partie est basée sur la considération de l'adjointe de la première ligne et de l'adjointe de Lagrange; il est clair qu'on pourrait, par exemple, en établir une autre basée sur l'emploi de l'adjointe de Lagrange et l'adjointe de l'avant-dernière ligne. On aurait ainsi une méthode tout à fait pareille. Dans ce cas, la suite serait terminée lorsqu'une des quantités θ serait nulle. La considération de la périodicité dans cette suite donnerait des conclusions tout à fait pareilles à celles précédemment développées. On étudierait par ce procédé les équations identiques à leur adjointe de Lagrange ou à leur adjointe de l'avant-dernière ligne et celles qui s'en déduisent par la méthode. Enfin les équations qui donneraient naissance à une suite véritablement périodique rentreraient toujours dans la classe d'équations qui se ramènent aux équations à coefficients constants par un changement fonctionnel suivi d'un changement de variable.

On peut encore aller plus loin et former des correspondances autres que celles-là. Considérons, par exemple, dans les équations du troisième ordre et des ordres supérieurs, les adjointes de Lagrange, de la première et de l'avant-dernière ligne. On peut réaliser avec ces équations une correspondance sextuplement infinie. En effet, une infinité d'équations seraient obtenues en prenant, par exemple, l'adjointe de

Lagrange de l'équation donnée, l'adjointe de la première ligne pour cette deuxième équation, l'adjointe de l'avant-dernière ligne pour cette troisième équation, l'adjointe de Lagrange pour cette quatrième équation et ainsi de suite. On obtiendrait les cinq autres infinités d'équations en prenant les autres arrangements des trois lignes. Cette correspondance serait évidemment telle que la connaissance de l'intégrale générale de l'une quelconque des équations entraînerait celle de toutes les autres. Il y aurait en plus des correspondances univoques entre les solutions de certaines équations.

Cette méthode serait évidemment plus puissante que celle dont nous nous sommes servi pour étendre des caractères d'intégration; à un autre point de vue, si l'on savait intégrer une équation particulière du troisième ordre, on pourrait par cette méthode trouver un type plus général que l'on saurait intégrer et qui renfermerait plusieurs entiers arbitraires.