P. PAINLEVÉ

Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 8 (1891), p. 103-140
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1891_3_8__103_0>

MÉMOIRE

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

(SUITE),

PAR M. PAUL PAINLEVÉ,

CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

CHAPITRE II.

DIGRESSION SUR LES TRANSFORMATIONS RATIONNELLES DES COURBES ALGÉBRIQUES.

1. L'étude des transformations birationnelles des courbes algébriques ou des surfaces de Riemann a été l'objet, comme on sait, de travaux considérables. C'est Riemann qui, le premier, en a montré l'importance, et ses idées ont été développées depuis lors par un grand nombre de géomètres : Clebsch, MM. Nœther, F. Klein, etc.

Un des problèmes les plus intéressants qui se rattachent à cette étude consiste à former toutes les substitutions birationnelles qui transforment une courbe algébrique en elle-même ou en une autre courbe donnée. M. Scharwz [1] a montré que, si le genre p de la courbe est supérieur à l'unité, il ne peut exister de telles substitutions dépendant d'un paramètre arbitraire. M. F. Klein a complété ce théorème, en indiquant que ces substitutions sont alors en nombre limité. Sa démonstra-

---

[1] SCHWARZ, *Journal de Crelle*, t. 87.

tion, qui repose sur les propriétés des groupes fuchsiens, se trouve développée dans un Mémoire de M. Poincaré (1), Mémoire qui renferme en même temps une application du théorème à l'intégration des équations différentielles du premier ordre, dont l'intégrale générale n'a que des points critiques fixes. Plus récemment, M. Hurwitz (2) a étudié les groupes de substitutions birationnelles qui transforment en lui-même un *domaine algébrique*. Enfin, ces propositions ont été étendues par M. E. Picard (3) aux transformations birationnelles des surfaces.

Je me propose d'établir ici, au sujet des transformations *simplement rationnelles* des courbes algébriques, certains théorèmes qui correspondent aux précédents (4).

Soient

$$f(y, z) = 0, \tag{1}$$

$$F(y_1, z_1) = 0 \tag{2}$$

les équations de deux courbes indécomposables, la première de genre p et de degré n en z, la seconde de genre p' et de degré n' en z_1.

Supposons qu'il existe une substitution rationnelle permettant de passer de (1) à (2) :

$$\left\{ \begin{aligned} y &= \varphi(y_1, z_1) = a_0 + a_1 z_1 + \ldots + a_{n'-1} z'^{n-1}, \\ z &= \psi(y_1, z_1) = b_0 + b_1 z_1 + \ldots + b_{n'-1} z_1^{n'-1}. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Les a_i, b_j désignent des fonctions rationnelles de y, et les fonctions φ et ψ sont telles que le point (y, z) parcourt la courbe (1) quand le point (y_1, z_1) parcourt la courbe (2). Autrement dit, à un point de (2) correspond rationnellement un point de (1), mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

En premier lieu, je dis que φ *et* ψ *ne peuvent renfermer algébriquement un paramètre arbitraire* t, *si le genre* p *de* (1) *est supérieur à l'unité*.

(1) H. Poincaré, *Sur un théorème de M. Fuchs* (*Acta mathematica*, t. VII).

(2) Hurwitz, *Nachrichten von der Universität zu Gœttingen*, 20 avril 1887.

(3) E. Picard, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. V; 1889).

(4) *Voir* à ce sujet une Note *Sur les transformations rationnelles des courbes algébriques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, octobre 1887).

Pour le voir, il suffit de répéter le raisonnement par lequel M. E. Picard [1] démontre le théorème de M. Schwarz.

Soit $J_i(y, z)$ une intégrale abélienne de première espèce de la courbe (1)

$$J_i(y, z) = \int \frac{P_i(y, z)\,dy}{f'_z}.$$

Donnons au paramètre t une valeur quelconque, et remplaçons dans J_i, y et z en fonction de y_1 et z_1 d'après les équations (3). L'intégrale J_i devient une intégrale de première espèce de la courbe (2)

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} J_i(y, z) &= \int \frac{P_i(y, z)}{f'_z}\,dy = J'_i(y_1, z_1) \\ &= \lambda_1 \int \frac{P'_1(y_1, z_1)}{F'_{z_1}}\,dy_1 + \lambda_2 \int \frac{P'_2(y_1, z_1)}{F'_{z_1}}\,dy_1 + \ldots + \lambda_{p'} \int \frac{P'_{p'}(y_1, z_1)}{F'_{z_1}}\,dy_1. \end{aligned} \right.$$

A priori, les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ peuvent dépendre algébriquement de t, puisque φ et ψ sont supposées fonctions algébriques de t; s'il en est ainsi, un au moins de ces coefficients devient infini pour une certaine valeur t_0 de t. Laissons constants y_1, z_1 dans le second membre de l'égalité (4) et faisons tendre t vers t_0. Le point (y, z) se déplace sur la courbe (1) et tend vers une position limite (y', z'); par suite, le premier membre de l'équation (4) reste fini, puisque J_i est une intégrale de première espèce. Au contraire, le second membre croît indéfiniment. Les λ_j ne sauraient donc dépendre de t.

Nous avons dit toutefois que le second membre de (4) devait croître pour $t = t_0$ indéfiniment. Il convient de le démontrer d'une manière plus précise.

Supposons que λ_j soit infini pour $t = t_0$, d'ordre μ_j, et appelons μ le plus grand des nombres μ_j. On peut écrire le second membre de (4)

$$\frac{1}{(t - t_0)^{\mu}}(\lambda'_1 J'_1 + \lambda'_2 J'_2 + \ldots + \lambda'_{p'} J'_{p'}),$$

les λ'_j restant finis pour $t = t_0$ et n'étant pas tous nuls.

Donnons à y_1, z_1 des valeurs qui, pour $t = t_0$, n'annulent pas le

---

[1] E. PICARD, *Mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables* (*loc. cit.*).

facteur de $\frac{1}{(t-t_0)^\mu}$. Cela est toujours possible, sinon les p' intégrales J' vérifieraient identiquement une relation linéaire et homogène à coefficients constants, et ne seraient pas indépendantes. Dans ces conditions, le second membre de (4) croît indéfiniment quand t tend vers t_0.

D'après cela, nous pouvons écrire

$$(5)\qquad \frac{P_i(y, z)\,dy}{f'_z} = \frac{\lambda_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + \lambda_{p'} P'_{p'}(y_1, z_1)}{F'_{z_1}}\,dy_1,$$

et, de même, en considérant une seconde intégrale abélienne de première espèce J_k de (1),

$$(6)\qquad \frac{P_k(y, z)\,dy}{f'_z} = \frac{\mu_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + \mu_{p'} P'_{p'}(y_1, z_1)}{F'_{z_1}}\,dy_1.$$

(Dans ces égalités, les λ_j, μ_j sont des constantes.) D'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{P_i(y, z)}{P_k(y, z)} = \frac{\lambda_1 P'_1(y_1, z_1) + \lambda_2 P'_2(y_1, z_1) + \ldots + \lambda_{p'} P'_{p'}(y_1, z_1)}{\mu_1 P'_1(y_1, z_1) + \mu_2 P'_2(y_1, z_1) + \ldots + \mu_{p'}(y_1, z_1)}.$$

Laissons fixe le point (y_1, z_1) et faisons varier t : le point (y, z) décrit la courbe (1) et vérifie la relation

$$P_i(y, z) + h P_k(y, z) = 0,$$

où h est une constante, ce qui est impossible, les deux polynômes P_i, P_k correspondant à deux intégrales J distinctes.

Les substitutions rationnelles (3) ne sauraient donc renfermer algébriquement un paramètre arbitraire. C. Q. F. D.

Cette proposition établie, nous allons examiner successivement les cas où le genre de la courbe (1) est nul, égal à l'unité, ou supérieur à l'unité.

Auparavant, je ferai la remarque suivante :

Quand on connait une substitution rationnelle qui transforme une courbe donnée en elle-même, on peut en déduire d'autres qui jouissent de la même propriété.

Soit, en effet,

$$(3) \qquad \begin{cases} y = \varphi(y_1, z_1), \\ z = \psi(y_1, z_1) \end{cases}$$

une telle substitution. Remplaçons dans les égalités (3) y_1 par $\varphi(y_2, z_2)$ et z_1 par $\psi(y_2, z_2)$, nous aurons

$$(3)' \qquad \begin{cases} y = \varphi_1(y_2, z_2), \\ z = \psi_1(y_2, z_2). \end{cases}$$

Quand le point (y_2, z_2) parcourt la courbe (1), le point (y_1, z_1) et, par suite, le point (y, z) parcourent la même courbe. Les égalités (3)' définissent donc une transformation rationnelle de la courbe (1) en elle-même. On en obtiendra une nouvelle en remplaçant, dans les équations (3)', y_2 et z_2 par $\varphi(y_3, z_3)$, $\psi(y_3, z_3)$, ... On trouve ainsi un nombre indéfini de transformations, à moins qu'on n'arrive à la transformation

$$y = y_n, \qquad z = z_n.$$

Plus généralement, supposons que la substitution (3) permette de passer de la courbe (1) à la courbe (2). S'il existe une substitution rationnelle

$$y = \varpi(Y, Z),$$
$$z = \chi(Y, Z),$$

qui transforme la courbe (1) en elle-même, en remplaçant Y par $\varphi(y_1, z_1)$ et Z par $\psi(y_1, z_1)$, on obtient une nouvelle substitution qui transforme (1) en (2).

De même, si la substitution

$$y_1 = \varpi_1(Y_1, Z_1),$$
$$z_1 = \chi_1(Y_1, Z_1)$$

transforme la courbe (2) en elle-même, quand on remplace, dans les égalités (3), y_1 par $\varpi_1(Y_1, Z_1)$ et z_1 par $\chi_1(Y_1, Z_1)$, la substitution transforme (1) en (2).

Toutes ces remarques sont analogues à des propositions connues de la théorie des transformations birationnelles. Mais il convient de signaler une différence importante : Étant donnés deux systèmes de substitutions qui transforment la courbe (1) en la courbe (2), on peut toujours passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle qui transforme la courbe (1) ou la courbe (2) en elle-même. Ceci n'est plus vrai pour les transformations simplement rationnelles. Connaissant deux transformations rationnelles de la courbe (1) en la courbe (2), on n'en saurait déduire une transformation rationnelle de la courbe (1) [ou de la courbe (2)] en elle-même, à moins, toutefois, qu'une des transformations ne soit birationnelle.

J'ajoute que, si l'on étudie les transformations rationnelles d'une courbe en une autre, il est loisible d'effectuer sur les deux courbes une transformation birationnelle quelconque.

2. Cela posé, supposons d'abord que le genre p de la courbe (1) soit nul. On peut écrire

$$y = g(t), \qquad z = h(t), \tag{7}$$

avec

$$t = k(y, z),$$

g, h, k étant des fonctions rationnelles.

D'après les formules (3), t sera fonction rationnelle de y_1, z_1, et inversement, si t est une fonction rationnelle du point analytique (y_1, z_1), les égalités (7) définissent une correspondance rationnelle entre les deux courbes.

On peut toujours passer d'une courbe de genre 0 *à une courbe quelconque par une infinité de substitutions rationnelles; ces substitutions dépendent d'une fonction rationnelle arbitraire du point* (y_1, z_1) *de la seconde courbe.*

Si la transformation est birationnelle, le genre de (2) est également nul; y_1 et z_1 s'expriment rationnellement en t_1; t doit être fonction rationnelle de t_1 et réciproquement, c'est-à-dire que

$$t_1 = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}.$$

Passons maintenant au cas où $p = 1$, et ramenons la courbe (1) à la forme

$$z = \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}.$$

L'égalité (5) devient

$$(5')\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \dfrac{\lambda_1 P'_1(y_1, z_1) + \lambda_2 P'_2(y_1, z_1) + \ldots + \lambda_{p'} P'_{p'}(y_1, z_1)}{F'_{z_1}} dy_1 \\ \qquad = H(y_1, z_1)\, dy_1. \end{cases}$$

La fonction de y_1

$$y = \varphi(y_1, z_1)$$

doit vérifier l'équation (5'), et inversement, quand l'équation (5') admet une intégrale algébrique $y(y_1)$, qui s'exprime rationnellement en y_1, z_1, cette intégrale $\varphi(y_1, z_1)$ correspond à une transformation rationnelle de (1) en (2). Posons, en effet,

$$y = \varphi(y_1, z_1);$$

il vient

$$z = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} = \frac{dy}{dy_1} \frac{F'_{z_1}}{\lambda_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + \lambda_{p'} P'_{p'}(y_1, z_1)} = \psi(y_1, z_1),$$

ψ étant rationnel en y_1, z_1.

Si l'équation (5') admet une telle intégrale, J'_i a toutes ses périodes de la forme

$$m\omega + n\omega',$$

m et n désignant deux entiers.

Inversement, si les périodes de J'_i se réduisent à deux, ω et ω', la fonction elliptique $\operatorname{sn}\mu t$, dont les périodes sont ω et ω', est une fonction rationnelle de (y_1, z_1), quand on y remplace t par $J'_i(y_1, z_1)$, de même que $\operatorname{cn}\mu t$, $\operatorname{dn}\mu t$. Si donc x^2 désigne le module de ces fonctions elliptiques, il existe une substitution rationnelle

$$\begin{aligned} Y &= \varphi(y_1, z_1), \\ Z &= \psi(y_1, z_1), \end{aligned}$$

qui permet de passer de la courbe

$$Z^2 = (1 - Y^2)(1 - x^2 Y^2)$$

à la courbe (2) et qui vérifie l'équation

$$\frac{1}{\mu} \frac{dY}{\sqrt{(1-Y^2)(1-x^2Y^2)}} = H(y_1, z_1)\, dy_1.$$

Comparons cette équation à l'équation (5'). Si elle admet une intégrale y rationnelle en y_1, z_1, en appelant α, β les périodes de l'intégrale

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

on a

$$\omega = m\alpha + n\alpha',$$
$$\omega' = m'\alpha' + n'\alpha',$$

ce qui nous montre que Y est liée à y par l'égalité

$$y = \varphi_\nu(Y),$$

qui définit une transformation d'ordre quelconque ν des fonctions elliptiques : k^2 est lié à x^2 par la relation qui correspond à cette valeur de ν.

Si l'équation (5') admet une intégrale algébrique en y_1, z_1, on a

$$\omega = \frac{m\alpha + n\alpha'}{r},$$
$$\omega' = \frac{m'\alpha' - n'\alpha'}{r},$$

r désignant un entier.

Posons donc

$$y = \operatorname{sn}\frac{t}{r}, \qquad \eta = \operatorname{sn} t;$$

η est une fonction rationnelle de y_1, z_1; y est lié à η par la relation qui donne $\operatorname{sn}\frac{t}{r}$ en fonction de $\operatorname{sn} t$. Il suffit de multiplier par r le second membre de (5') pour que son intégrale soit rationnelle en y_1, z_1.

En définitive, pour que la courbe (2) soit la transformée rationnelle d'une courbe de genre (1), il faut et il suffit qu'une des intégrales J'_i de première espèce de la courbe (2) n'ait que deux périodes distinctes.

Pour que la courbe (2) soit la transformée rationnelle d'une courbe *donnée* (1) de genre 1, il faut de plus que, parmi les intégrales J'_i à deux périodes, il en existe une dont les périodes ω et ω' satisfassent à la condition

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m\omega + n\omega'}{m'\omega' + n'\omega'};$$

α et β sont les périodes de l'intégrale de première espèce de (1), m, n, m', n' des entiers.

La question qui nous occupe ne diffère donc pas du problème de la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques. Je renvoie, pour cette question, aux travaux bien connus de MM. Weierstrass, E. Picard, Poincaré, etc.

On peut décider algébriquement si la courbe (2) est une transformée d'ordre ν d'une courbe de genre 1 : j'entends par transformation d'ordre ν une transformation (3) telle qu'à tout point (y, z) de (1) correspondent ν points (y_1, z_1) de (2). Mais on ne sait pas, en général, déterminer une limite supérieure de ν.

Le genre de (2) est au moins égal à 1, puisque cette courbe possède une intégrale de première espèce. Si $p' = 1$, on peut ramener la courbe (2) à la forme

$$z_1 = \sqrt{(1 - y_1^2)(1 - k_1^2 y_1^2)},$$

et l'équation (5') s'écrit

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} = \frac{\lambda\, dy_1}{\sqrt{(1 - y_1^2)(1 - k_1^2 y_1^2)}}.$$

On retombe ainsi sur le problème de la transformation des fonctions elliptiques. Pour qu'on puisse passer rationnellement de (1) à (2), il faut et il suffit que k_1^2 vérifie une des équations modulaires relatives à k^2.

Ceci a lieu en particulier si $k = k_1$. Il vient, en faisant $\lambda = \frac{1}{\mu}$,

$$\frac{\mu\, dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} = \frac{dy_1}{\sqrt{(1 - y_1^2)(1 - k^2 y_1^2)}};$$

on doit avoir

$$\mu\omega = m\omega + n\omega,$$
$$\mu\omega' = m'\omega + n'\omega'.$$

Si l'on pose

$$\frac{\omega'}{\omega} = \alpha + i\beta,$$

on trouve

$$\mu = m + n\alpha + in\beta = n' + m'\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - im'\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

ou bien

$$(a) \qquad n(\alpha^2+\beta^2)+m'=0,$$

$$(b) \qquad m+n\alpha-n'-\frac{m'\alpha}{\alpha^2+\beta^2}=0.$$

Dans le cas général, $\alpha^2+\beta^2$ est incommensurable; l'égalité (a) exige que m' et n soient nuls, et l'égalité (b) que $m=n'$. On a alors

$$\mu=m=n'$$

et on peut écrire

$$y=\operatorname{sn} t,$$
$$y_1=\operatorname{sn}(mz+C);$$

y_1 est donné en fonction de y et de $\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$ par les formules de multiplication et d'addition des fonctions elliptiques.

Dans le cas particulier où $(\alpha^2+\beta^2)$ est commensurable, il peut exister d'autres transformations de la courbe (1) en elle-même. On voit immédiatement que, si $(\alpha^2+\beta^2)$ et α sont deux nombres commensurables (autrement dit si α et β^2 sont commensurables), il existe une infinité de transformations rationnelles de la courbe (1) en elle-même; ces transformations correspondent aux valeurs des nombres m, n, m', n', μ obtenues de la manière suivante :

On pose

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{c}{d}, \qquad \alpha=\frac{c'}{d'}$$

$\left(\frac{c}{d}, \frac{c'}{d'}\text{ étant irréductibles}\right)$, et on prend pour n un multiple quelconque des entiers d, d' $\left(\text{ou } d, \frac{d'}{2} \text{ si } d' \text{ est pair}\right)$. Appelons D le plus petit commun multiple de ces deux nombres; on a

$$n=\nu D=qd=q'd' \quad \left(\text{ou } q'\frac{d'}{2}\right);$$

on fait ensuite

$$m'=-qc$$

et

$$m=n'+2q'c' \quad (\text{ou } m=n'+q'c', \text{ si } d' \text{ est pair});$$

l'entier n' est choisi arbitrairement.

Les nouvelles transformations dépendent de deux entiers arbitraires ν et n' et se confondent avec les premières pour $\nu = 0$. Cette classe exceptionnelle de courbes de genre 1 correspond aux fonctions elliptiques qui admettent la multiplication complexe.

En résumé, *une courbe de genre* (1) *se laisse toujours transformer en elle-même rationnellement d'une infinité de manières. Ces transformations dépendent d'un paramètre* C *et d'un entier* μ *arbitraires. Quand le module* k^2 *de la courbe est un module singulier pour lequel les fonctions elliptiques admettent la multiplication complexe, ces transformations dépendent d'un second entier arbitraire.*

Si la transformation est birationnelle, $\lambda = 1$, et la transformation ne dépend plus, comme on sait, que de la constante arbitraire C. On obtient toutes les transformations rationnelles de la courbe (1) en elle-même, en opérant la substitution birationnelle la plus générale sur toutes les substitutions rationnelles obtenues en laissant constant le paramètre C.

Ce point établi, supposons qu'on ait trouvé une transformation rationnelle de la courbe (1) en une courbe (2) de genre p'. On peut en déduire une infinité d'autres qui dépendent d'un paramètre et d'un entier arbitraires, en se servant des transformations de (1) en elle-même. Dans certains cas, la substitution la plus générale qui transforme (1) en (2) renferme d'autres entiers arbitraires, mais elle ne saurait dépendre d'un second paramètre C' continu.

Pour le voir, revenons à l'égalité

$$(5') \qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{\lambda_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + \lambda_{p'} P'_{p'}(y_1, z_1)}{F'_{z_1}}\, dy_1.$$

Les λ_i satisfont aux $2p'$ égalités

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \omega_1^1 + \lambda_2 \omega_2^2 + \ldots + \lambda_{p'} \omega_{p'}^2 = m_1 \omega + n_1 \omega', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_1 \omega_1^{2p'} + \lambda_2 \omega_2^{2p'} + \ldots + \lambda_{p'} \omega_{p'}^{2p'} = m_{2p'} \omega + n_{2p'} \omega'. \end{array}$$

Dans ces équations les $\omega_i^1, \ldots, \omega_i^{2p'}$ désignent les $2p'$ périodes élémentaires de J'_i, les m_i, n_i des entiers.

Admettons qu'on ait trouvé un système de nombres m_i, n_i pour lesquels les équations précédentes soient compatibles. Ces équations ne sont pas indéterminées, sinon on pourrait se donner arbitrairement au moins un des λ, et les autres en dépendraient algébriquement, ce que nous savons absurde [1]. D'autre part, les λ_i une fois déterminés, l'équation (5') définit une transformation (3) qui ne contient que la constante C. C'est donc le seul paramètre continu qui figure dans la transformation la plus générale.

Nous arrivons ainsi aux conclusions suivantes :

On ne peut passer rationnellement, en général, d'une courbe de genre 1 *à une courbe de genre p'. Une telle transformation, quand elle existe, dépend d'une seule constante et d'un entier ou de plusieurs entiers arbitraires (en nombre au plus égal à $2p'$).*

3. J'ai insisté sur le cas de $p = 1$ pour bien marquer les différences essentielles qui le distinguent du cas où p est quelconque, que nous allons maintenant étudier.

Tout d'abord, p' est au moins égal à p, car les p intégrales distinctes J_i de première espèce relatives à (1) se transforment en p intégrales distinctes de première espèce de la courbe (2).

Si μ désigne l'ordre de la transformation (3), il est même facile d'établir une relation entre μ, p et p'.

Soient en effet m et m' les degrés des courbes (1) et (2), et considérons toutes les courbes C, de degré $(m-3)$, qui passent par les points doubles A de la courbe (1). Ces courbes *adjointes* ont pour équation

$$A_1P_1(y, z) + A_2P_2(y, z) + \ldots + A_pP_p(y, z) = 0.$$

L'une quelconque de ces courbes se transforme par la substitution (3) en une courbe adjointe C' de (2), ainsi qu'il résulte des théorèmes établis dans le premier paragraphe.

Une courbe C rencontre la courbe (1) en $(2p-2)$ points, distincts des points A. D'autre part, à chaque point (y_1, z_1) de (2) correspond

(1) Ceci nous montre que le déterminant des coefficients des λ est différent de zéro au moins pour un système de p' des équations précédentes : par exemple, pour celui des p' premières équations. [Autrement, d'ailleurs, il existerait des intégrales de première espèce J' de la courbe (2) sans périodes.] Une fois connus les $2p'$ entiers m_1, n_1, $\ldots$, $m_{p'}$, $n_{p'}$, les λ sont donc déterminés. Il en résulte que la transformation (3) ne saurait dépendre de plus de $2p'$ entiers arbitraires (en dehors de la constante C).

un seul point (y, z) de (1), sauf pour des points (y', z') exceptionnels, et à chaque point (y, z) de (1) correspondent μ points (y_1, z_1), sauf pour des points (y', z') exceptionnels. Choisissons donc une courbe C qui ne passe par aucun de ces points (y', z') : aux $(2p-2)$ points communs à C et à (1) correspondent $(2p-2)\mu$ points communs à C' et à (2). Ces points sont distincts; autrement, à un point (y_1, z_1) correspondraient plusieurs points (y, z); il en résulte qu'on doit avoir

$$(2p-2)\mu = 2p'-2, \qquad \text{ou bien} \qquad \mu = \frac{p'-1}{p-1}.$$

Ceci nous montre, comme nous le savions déjà, que $p=p'$ si $\mu=1$, mais aussi que la réciproque est vraie : *toute substitution rationnelle qui transforme une courbe en une courbe de même genre est nécessairement birationnelle* [1].

De plus, si $(p'-1)$ est un nombre premier, la courbe (2) ne saurait être la transformée rationnelle que d'une courbe de genre 2. Si $(p'-1)$ admet des diviseurs, $p-1$ doit être un de ces diviseurs. Enfin, μ ne peut dépasser $p'-1$.

Nous allons démontrer maintenant qu'il n'existe qu'un nombre fini de substitutions (3) permettant de passer de la courbe (1) à la courbe (2), quand p est supérieur à 1.

Nous savons en effet qu'une telle substitution vérifie l'égalité

$$\frac{P_1(y, z)}{P_2(y, z)} = \frac{\Sigma\lambda_i P'_i(y_1, z_1)}{\Sigma\mu_i P'_i(y_1, z_1)}.$$

Cette équation, jointe à l'équation (1), détermine algébriquement y et z en fonction de y_1, z_1. Par exemple, si on élimine z, il reste une équation en y, y_1, z_1. Quand on exprime qu'une racine de cette équation est fonction rationnelle du point y_1, z_1 de (2)

$$y = a_0(y_1) + a_1 z_1 + \ldots + a_{n'} z_1^{n'}$$

et qu'il en est de même de z, on obtient un certain nombre de conditions algébriques entre les λ_i, μ_i. Si ces relations sont incompatibles, il n'existe pas de substitution (3) répondant à la question. Si elles

---

[1] Cette proposition a déjà été établie par Weber (*Journal de Crelle*, 1879).

sont compatibles et déterminées, il existe un nombre fini de telles transformations. D'autre part, elles ne peuvent être indéterminées; autrement, une infinité de substitutions, dépendant algébriquement d'un paramètre, transformeraient (1) en (2).

La démonstration, ainsi présentée, ne comporte pas d'exception. Nous allons toutefois en indiquer une seconde, qui met en évidence quelques particularités intéressantes.

Parmi les courbes C adjointes à (1), choisissons-en deux qui aient, sur (1), un point commun et un seul. La chose est toujours possible quand (1) n'est pas hyperelliptique. C'est là un fait bien connu dont on se rend compte aisément ainsi :

Quand il n'existe pas deux courbes C répondant à la courbe imposée, c'est que toutes les courbes C passant par un point M_1 de (1) ont avec cette courbe au moins un second point commun N_1 (en dehors des points multiples A). Par suite, toutes les courbes C qui ont un point fixe M_1 sur la courbe (1) ont, par le fait même, un second point fixe N_1 sur cette courbe.

Assujettissons les courbes C à passer par $(p-2)$ points fixes M_1, M_2, ..., M_{p-1}, pris sur (1) en dehors des points A. L'équation du faisceau de courbes ainsi obtenu est de la forme

$$R + tS = 0,$$

et ces courbes ont sur (1) $(p-2)$ autres points fixes, $N_1, N_2, \ldots, N_{p-2}$. Quand t varie, le nombre des points variables de l'intersection de (1) et de (C) est

$$m(m-3) - [(m-1)(m-2) - 2p + 2p - 4] = 2.$$

Les coordonnées de ces deux points d'intersection sont données par des équations de la forme

$$y = g(t) + h(t)\sqrt{R(t)},$$
$$z = g_1(t) + h_1(t)\sqrt{R(t)},$$

avec cette condition

$$t = -\frac{R(y, z)}{S(y, z)},$$

c'est-à-dire que la courbe (1) se ramène, par une transformation birationnelle, à la forme hyperelliptique.

Inversement, quand (1) est de l'espèce hyperelliptique, deux courbes C n'ont jamais un point commun avec (1) sans en avoir un second.

Il suffit de vérifier le fait, en supposant l'équation de (1) ramenée à la forme

$$T = \sqrt{R(t)};$$

les courbes C sont alors décomposables en droites

$$t = t_0,$$

et si l'une passe par le point (t_0, T_0) de (1), elle passe aussi par le point $(t_0, -T_0)$.

Supposons donc, en premier lieu, que la courbe (1) ne rentre pas dans cette classe exceptionnelle, et soient

$$H(y, z) = 0, \qquad K(y, z) = 0$$

les équations de deux courbes C qui ont sur la courbe (1) un point commun et un seul M_0 ou (y_0, z_0) (en dehors des A). Ces deux équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} P_2(y, z) - P_1(y, z) = 0, \\ P_3(y, z) - P_1(y, z) = 0, \end{aligned}$$

P_3, P_2, P_1 étant linéairement indépendants. Comme nous l'avons démontré, la substitution (3) vérifie les égalités

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{P_2(y, z)}{P_1(y, z)} &= \frac{\mu_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + \mu_{p'}(y_1, z_1)}{\lambda_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + \lambda_{p'}(y_1, z_1)}, \\ \frac{P_3(y, z)}{P_1(y, z)} &= \frac{\nu_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + \nu_{p'}(y_1, z_1)}{\lambda_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + \lambda_{p'}(y_1, z_1)}, \end{aligned} \right.$$

où les λ_i, μ_i, ν_i sont des constantes convenablement choisies.

Pour toutes valeurs des y_1, z_1 vérifiant l'équation (2), ces deux équations (8) doivent être compatibles avec l'équation (1). Si nous exprimons qu'il en est ainsi, nous formons un certain nombre de conditions algébriques auxquelles doivent satisfaire les λ, μ, ν.

Pour tout système λ, μ, ν [1] répondant à ces conditions, les équa-

---

[1] Nous supposons écartées les solutions où

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_j} = \frac{\mu_i}{\mu_j} = \frac{\nu_i}{\nu_j},$$

et aussi celles où les λ, μ, ν sont nuls.

tions (8) et (1) ont au moins une solution (y, z) commune. Ce point y, z varie avec y_1, z_1, sinon on aurait constamment

$$\frac{\Sigma \mu_i P'_i(y_1, z_1)}{\Sigma \lambda_i P'_i(y_1, z_1)} = \frac{P(y_0, z_0)}{Q(y_0, z_0)} = 1,$$

et les polynômes P'_i vérifieraient une relation linéaire et homogène dont les coefficients (constants) ne seraient pas tous nuls.

D'autre part, les équations (8) et (1) ne peuvent avoir, pour un point quelconque de (2) (y_1, z_1), plus d'une solution (y, z) commune, puisqu'elles n'ont qu'une solution commune pour les valeurs (y_1, z_1) qui correspondent à (y_0, z_0).

Les valeurs (y, z) de cette solution commune s'expriment donc rationnellement en fonction de y_1, z_1.

J'ajoute que deux systèmes distincts de solutions λ, μ, ν correspondent à deux transformations (3) distinctes. En disant que les deux systèmes (λ, μ, ν), (λ', μ', ν') sont distincts, j'entends que les λ, μ, ν ne sont pas respectivement proportionnels aux λ', μ', ν'.

En effet, si les deux substitutions (3) coïncidaient, on aurait

$$\int \frac{P_1(y, z)\,dz}{f'(z)} = \frac{C\Sigma\lambda_i P'_i(y_1, z_1)\,dz_1}{F_{z_1}} = \frac{C'\Sigma\lambda'_i P'_i(y_1, z_1)\,dz_1}{F_{z_1}},$$

identité qui exige que

$$C\lambda_i = C'\lambda'_i.$$

On verrait de même que

$$C\mu_i = C'\mu'_i,$$
$$C\nu_i = C'\nu'_i.$$

Donc à deux systèmes λ, μ, ν distincts correspondent deux substitutions (3) distinctes.

Il en résulte que les relations qui lient les rapports des λ, μ, ν sont ou incompatibles ou déterminées. Ces relations, qui sont algébriques, ne sauraient admettre qu'un nombre fini de solutions : il n'existe donc qu'un nombre fini de substitutions (3) transformant (1) en (2), et la méthode précédente permet de les calculer algébriquement.

4. On peut donner plus de symétrie au raisonnement employé en

introduisant la courbe gauche à laquelle M. Nœther a donné le nom de *courbe normale*.

Regardons les p quantités

$$P_1(y, z), \quad P_2(y, z), \quad \ldots, \quad P_p(y, z)$$

comme les p coordonnées homogènes d'un certain point N dans l'espace à $(p - 1)$ dimensions. Quand le point (y, z) décrit la courbe (1), le point N décrit une courbe gauche Γ dans l'espace à $(p - 1)$ dimensions. Cette courbe Γ est la *courbe normale* attachée à la courbe (1).

A chaque point (y, z) de (1) correspond un point de Γ et un seul.

Réciproquement, si la courbe (1) n'est pas hyperelliptique, à chaque point de Γ correspond un point de (1) et un seul.

En effet, soient

$$\alpha_1 = \frac{P_2}{P_1}, \qquad \alpha_2 = \frac{P_3}{P_1}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{p-1} = \frac{P_p}{P_1}$$

les rapports des coordonnées homogènes d'un point de Γ. Les courbes C,

$$\begin{aligned} P_2 - \alpha_1 P_1 &= 0, \\ P_3 - \alpha_2 P_1 &= 0, \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots, \\ P_p - \alpha_{p-1} P_1 &= 0 \end{aligned}$$

ont (en dehors des points A) un point commun M situé sur (1) et *un seul;* autrement, toutes les courbes C qui ont un point commun sur (1) en auraient par le fait même un second, et la courbe serait hyperelliptique.

D'après cela, il y a une correspondance birationnelle entre les courbes (1) et Γ.

Remarquons que la courbe Γ n'est définie qu'à une transformation homographique près.

Si l'on élimine (y, z) entre les égalités qui expriment les p coordonnées P_i, on obtient $(p - 2)$ relations homogènes entre ces coordonnées. Ces relations, que nous appellerons les relations (α), sont les équations de Γ.

On peut de même attacher à la courbe (2) une courbe gauche Γ' de l'espace à $(p'-1)$ dimensions, définies par $(p'-2)$ relations homogènes entre les P_i, relations que nous désignerons par la lettre (β).

Admettons qu'il existe une substitution (3) transformant (1) en (2). Les P_i deviennent des fonctions de y_1, z_1, qui continuent à vérifier les relations (α); d'autre part, on a

$$\frac{P_2(y,z)}{P_1(y,z)}=\frac{\mu_1 P'_1(y_1,z_1)+\mu_2 P'_2(y_1,z_1)+\ldots+\mu_{p'}P'_{p'}(y_1,z_1)}{\lambda_1 P'_1(y_1,z_1)+\ldots+\lambda_{p'}P'_{p'}(y_1,z_1)},$$

$$\frac{P_3(y,z)}{P_1(y,z)}=\frac{\nu_1 P'_1(y_1,z_1)+\ldots+\nu_{p'}P'_{p'}(y_1,z_1)}{\lambda_1 P'_1(y_1,z_1)+\ldots+\lambda_{p'}P'_{p'}(y_1,z_1)}.$$

On voit donc que les coordonnées d'un point de la courbe Γ s'expriment homographiquement en fonction des coordonnées d'un point de Γ'.

Analytiquement, on voit qu'en remplaçant dans les équations (α) les P_i par des fonctions linéaires et homogènes des P'_j (les coefficients étant des constantes convenablement choisies), les $(p-2)$ relations entre les P'_j ainsi formées doivent être des conséquences des relations (β). Ce fait s'exprimera par des relations algébriques entre les λ, μ, ν.

Inversement, quand les points de la courbe Γ correspondent homographiquement aux points de Γ', par des formules telles que

$$P_1=\lambda_1 P'_1+\lambda_2 P'_2+\ldots+\lambda_{p'}P'_{p'},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

cette correspondance homographique définit une substitution rationnelle transformant la courbe (1) en la courbe (2).

Dans ce cas, en effet, à chaque point de (2) correspond un et seul point de (Γ'), à chaque point de Γ' un et seul point de Γ, enfin à chaque point de Γ un et seul point de (1). Chaque point (y,z) de (1) est donc défini rationnellement en fonction d'un point (y_1,z_1) de (2). Le raisonnement n'excepte pas le cas où la courbe (2) serait de l'espèce hyperelliptique.

Quand la substitution (3) est birationnelle, $p=p'$, et la correspondance homographique entre les deux courbes (Γ) et (Γ') est réciproque.

Inversement, si $p=p'$, la substitution (3) est nécessairement birationnelle, car la correspondance entre Γ et Γ' est réciproque : à un point (y, z) de (1) correspond un point de Γ, à ce point un point de Γ', à ce dernier enfin un point (y_1, z_1) de (2), si cette courbe (2) n'est pas hyperelliptique.

Ce cas, où (2) serait hyperelliptique, ne peut d'ailleurs se présenter. Pour le voir, ramenons l'équation (2) à la forme

$$z_1^2 = \mathrm{R}(y_1).$$

Les polynômes P'_i ne renfermant pas z_1, les rapports $\frac{\mathrm{P}_i}{\mathrm{P}_1}$ s'exprimeraient rationnellement en y_1, et comme les coordonnées (y, z) d'un point de (1) sont des fonctions rationnelles de $\frac{\mathrm{P}_i}{\mathrm{P}_1}$, elles s'exprimeraient elles-mêmes rationnellement en fonction d'un paramètre. La courbe (1) serait donc de genre zéro, tandis que p est plus grand que 1 par hypothèse.

Nous sommes conduits ainsi aux propositions suivantes :

On ne peut passer rationnellement d'une courbe (1) *de genre supérieur à* 1 *à une courbe hyperelliptique* (2), *si la courbe* (1) *n'est elle-même hyperelliptique.*

Toute transformation rationnelle qui permet de passer d'une courbe (1) *de genre supérieur à* 1 *et non hyperelliptique à une autre courbe* (2) *de même genre p est nécessairement birationnelle.*

Ce théorème, nous l'avons démontré plus haut dans tous les cas.

Pour qu'il existe une substitution rationnelle qui permette de passer d'une courbe (1) *non hyperelliptique à une autre courbe* (2) *du même genre p, il faut et il suffit que les deux courbes* (1) *et* (2) *admettent la même courbe normale.*

Remarquons en passant que la méthode précédente fournit un moyen de calculer les modules d'une courbe algébrique ou d'une surface de Riemann. Ces modules ne sont autre chose que les invariants de la courbe Γ relatifs à la substitution homographique la plus générale.

Observons, au point de vue de la marche du calcul, qu'on peut choisir $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$, liés par une des relations (α) :

$$\mathrm{H}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3) = 0.$$

de telle façon que $\frac{P_i}{P_1}$ s'exprime rationnellement en fonction de $\frac{P_2}{P_1}, \frac{P_3}{P_1}$. Cette courbe $H = 0$, de degré $p+1$, introduite par Clebsch, correspond birationnellement à (1) et son équation se calcule aisément. Si l'on pose

$$\frac{P_2}{P_1} = Y, \qquad \frac{P_3}{P_1} = Z,$$

pour que (1) corresponde rationnellement à (2), il faut et il suffit qu'on puisse disposer des constantes λ, μ, ν, de telle façon qu'en faisant

$$Y = \frac{\Sigma\mu_i P'_i(y_1, z_1)}{\Sigma\lambda_i P'_i(y_1, z_1)}, \qquad Z = \frac{\Sigma\nu_i P'_i(y_1, z_1)}{\Sigma\lambda_i P'_i(y_1, z_1)}$$

dans l'équation

$$H_1(Y, Z) = 0,$$

l'équation ainsi obtenue soit une conséquence de

$$F(y_1, z_1) = 0. \tag{2}$$

5. Au lieu de faire usage de la courbe normale de M. Nœther, on pouvait avoir recours à certaines considérations indiquées par M. Poincaré dans le Mémoire déjà cité ([1]).

Écrivons l'équation des courbes adjointes C

$$A_1 P_1(y, z) + A_2 P_2(y, z) + \ldots + A_p P_p(y, z) = 0$$

et de même, l'équation des courbes adjointes C'

$$B_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + B_{p'} P_{p'}(y_1, z_1) = 0.$$

Soient

$$\Theta\,(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0,$$
$$\Theta_1(B_1, B_2, \ldots, B_{p'}) = 0$$

les deux relations algébriques et homogènes qui expriment, la première, que la courbe C est tangente à (1), la seconde, que C' est tangente à (2).

Désignons par (y, z) les coordonnées du point de contact de C et de (1). Nous aurons

$$y = R(A_1, A_2, \ldots, A_p),$$
$$z = R_1(A_1, A_2, \ldots, A_p),$$

R et R_1 étant deux fonctions rationnelles. Toutefois, cette dernière proposition cesse d'être exacte si les courbes C ne peuvent avoir un point de contact avec (1) sans en avoir plusieurs. C'est précisément ce qui arrive pour les courbes hyperelliptiques.

Supposons en effet que la courbe (1) soit hyperelliptique et ramenée à la forme

$$z^2 = R(y).$$

Les courbes C ont alors pour équation

$$A_1 + A_2 y + \ldots + A_p y^{p-1} = 0.$$

La relation $\Theta = 0$ exprime alors que cette équation a une racine double en y. A tout système de $A_1, A_2, \ldots, A_p$, vérifiant cette condition correspond une seule valeur de y, mais deux valeurs de z :

$$z = \pm z_0.$$

Inversement, si toutes les courbes C tangentes à la courbe (1) ont avec cette courbe plusieurs points de contact, la courbe est hyperelliptique.

Soit en effet M un point de contact de (1) et de C. Par hypothèse, toutes les courbes C tangentes en M à la courbe (1) ont avec cette courbe au moins un second point de contact N.

Je dis en premier lieu que ce point N est le même pour toutes les courbes C tangentes à (1) en M.

Pour le voir, désignons par (y_0, z_0) les coordonnées de M, par (y, z) celles de N.

Le point (y_0, z_0) étant un point de contact de (1) et de C, ses coordonnées satisfont aux égalités

$$A_1 P_1(y_0, z_0) + \ldots + A_p P_p(y_0, z_0) = 0,$$
$$A_1 \frac{dP_1(y_0, z_0)}{dy} + \ldots + A_p \frac{dP_p(y_0, z_0)}{dy} = 0.$$

Le symbole

$$\frac{d\,P_i(y_0, z_0)}{dx}$$

représente, dans cette dernière équation, la valeur que prend la fonction

$$\frac{\partial P_i(y, z)}{\partial y} - \frac{\partial P_i(y, z)}{\partial z} \frac{\dfrac{\partial f(y, z)}{\partial y}}{\dfrac{\partial f(y, z)}{\partial z}}$$

quand on y fait $y = y_0$, $z = z_0$.

Par hypothèse, le point (y, z) doit vérifier, par le fait même, les relations analogues

$$\sum A_i P_i(y, z) = 0.$$

$$\sum A_i \frac{d\,P_i(y, z)}{dy} = 0,$$

Ces égalités doivent donc être des conséquences des précédentes, quels que soient les A_i, ce qui exige qu'on ait

$$(h) \qquad P_i(y, z) = \lambda P_i(y_0, z_0) + \mu \frac{d\,P_i(y_0, z_0)}{dy}$$

et de même

$$\frac{d\,P_i(y, z)}{dy} = \lambda' P_i(y_0, z_0) + \mu' \frac{d\,P_i(y_0, z_0)}{dy}$$

pour toutes les valeurs de i, $i = 1, 2, \ldots, p$.

On en déduit aussitôt

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{P_1(y, z)\dfrac{d\,P_2(y_0, z_0)}{dy} - P_2(y, z)\dfrac{d\,P_1(y_0, z_0)}{dy}}{P_1(y_0, z_0)\dfrac{d\,P_2(y_0, z_0)}{dy} - P_2(y_0, z_0)\dfrac{d\,P_1(y_0, z_0)}{dy}} \\
&= \frac{P_2(y, z)\dfrac{d\,P_3(y_0, z_0)}{dy} - P_3(y, z)\dfrac{d\,P_2(y_0, z_0)}{dy}}{P_2(y_0, z_0)\dfrac{d\,P_3(y_0, z_0)}{dy} - P_3(y_0, z_0)\dfrac{d\,P_2(y_0, z_0)}{dy}} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les quantités y_0, z_0 étant données, ces équations sont de la forme

$$P_1(y, z) + \alpha P_2(y, z) + \beta P_3(y, z) = 0,$$

α, β désignant des constantes. Une telle relation ne peut jamais se réduire à une identité. Elle détermine donc sur la courbe (1) des points particuliers N qui correspondent au point M.

Pour rappeler ce fait, désignons par (y'_0, z'_0) les coordonnées d'un de ces points N.

Revenons alors aux égalités (h). Il est facile de voir que, dans ces égalités, μ est nul. Sinon l'égalité

$$\sum A_i \frac{d\,P_i(y_0, z_0)}{dy} = 0$$

résulterait des deux égalités

$$\sum A_i P_i(y_0, z_0) = 0,$$

$$\sum A_i P_i(y'_0, z'_0) = 0,$$

c'est-à-dire que toute courbe C passant par les deux points M et N serait tangente à la courbe (1) au point M.

Or cette supposition est inadmissible, comme on peut s'en rendre compte de la manière suivante : considérons toutes les courbes C qui passent par le point M et coupent la courbe (1) sous un angle donné α; elles rencontrent la courbe (1) en un certain nombre de points variables Q_i, qui parcourent la courbe (1) et coïncident, pour certaines courbes C, avec N. Ces courbes passent par M et N sans être tangentes à (1) au point M [1].

Donc μ est nul, et l'on a

$$P_i(y_0, z_0) = \lambda P_i(y'_0, z'_0),$$

c'est-à-dire que l'équation

$$\sum A_i P_i(y'_0, z'_0)$$

est une conséquence de l'équation

$$\sum A_i P_i(y_0, z_0);$$

---

[1] A la vérité, ce raisonnement suppose $p > 3$. Si $p = 3$, on ramène, par une transformation birationnelle, l'équation (1) à être du quatrième degré, et le théorème que nous voulons démontrer apparaît immédiatement.

toute courbe C qui passe par M passe par N. La courbe (1) est de l'espèce hyperelliptique.

Si donc nous laissons de côté la classe des courbes (1) hyperelliptiques, les coordonnées y, z des points de contact d'une courbe C avec (1) s'expriment rationnellement en fonction des A_i

$$y = R\ (A_1, A_2, \ldots, A_p),$$
$$y = R_1(A_1)\, A_2, \ldots, A_p).$$

Les quantités A_i sont assujetties à la seule relation

$$\Theta(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0.$$

Cela posé, admettons qu'il existe une substitution rationnelle (3) permettant de passer de la courbe (1) à la courbe (2).

Par cette substitution, les courbes C, définies par l'équation

$$A_1 P_1(y_1, z_1) + \ldots + A_p P_p(y, z) = 0,$$

se transforment en un faisceau de courbes C′ dépendant linéairement de p paramètres homogènes

$$A'_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + A'_{p'} P'_{p'}(y_1, z_1) = 0.$$

Dans cette équation, les A'_j sont de la forme suivante :

$$(k) \qquad A'_j = \lambda_j^1 A_1 + \lambda_j^2 A_2 + \ldots + \lambda_j^p A_p,$$

les λ_j^i désignant des constantes.

Si les courbes C sont tangentes à (1), les courbes C′ correspondantes sont tangentes à (2). Ce fait géométrique équivaut à cet autre fait analytique : si les A_i vérifient la relation

$$\Theta(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0,$$

les quantités A'_j vérifient la relation

$$\Theta_1(A'_1, A'_2, \ldots, A'_{p'}) = 0.$$

Ainsi, s'il existe une substitution rationnelle (3) qui transforme (1) en (2), il existe une transformation homographique de la forme (k), qui permet de passer de la relation

$$\Theta(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0$$

à la relation

$$\Theta_1(A'_1, A'_2, \ldots, A'_{p'}) = 0.$$

La réciproque est vraie. Pour l'énoncer sous une forme géométrique, regardons les A_1, A_2, ..., A_p comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à $(p-1)$ dimensions. L'équation homogène

$$\Theta(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0$$

représente une surface dans cet espace. De même l'équation

$$\Theta_1(A'_1, A'_2, \ldots, A'_{p'}) = 0$$

représente une surface dans l'espace à $(p'-1)$ dimensions. Si la surface $\Theta = 0$ correspond homographiquement à la surface $\Theta_1 = 0$ [par des formules telles que (k)], cette correspondance définit une transformation rationnelle de (1) en (2).

En effet, choisissons parmi les courbes C un faisceau quelconque dépendant de deux paramètres et assujetti à l'unique condition de renfermer une courbe ayant avec la courbe (1) un point de contact et un seul. Soit

$$(l) \qquad A_1 P_1(y, z) + A_2 P_2(y, z) + A_3 P_3(y, z) = 0$$

l'équation de ce faisceau.

A ces courbes C correspondent par la transformation (3) des courbes C′ dépendant de deux paramètres et dont l'équation s'écrit

$$(l') \qquad A_1 Q_1(y_1, z_1) + A_2 Q_2(y_1, z_1) + A_3 Q_3(y_1, z_1) = 0$$

avec

$$Q_1(y_1, z_1) = \sum_{i=1}^{i=p'} \alpha_i P'_i(y_1, z_1),$$

$$Q_2(y_1, z_1) = \sum_{i=1}^{i=p'} \beta_i P'_i(y_1, z_1),$$

$$Q_3(y_1, z_1) = \sum_{i=1}^{i=p'} \gamma_i P'_i(y_1, z_1),$$

les α, β, γ étant des constantes qui dépendent des λ_j^i.

Si l'on se donne un point de contact (y_1, z_1) de la courbe (2) avec la courbe (l'), la courbe (l') est déterminée, et les rapports $\frac{A_2}{A_1}, \frac{A_3}{A_1}$ sont donnés rationnellement en fonction de (y_1, z_1) par les équations

$$A_1 Q_1(y_1, z_1) + A_2 Q_2(y_1, z_1) + A_3 Q_3(y_1, z_1) = 0;$$
$$A_1 \frac{dQ_1(y_1, z_1)}{dy_1} + A_2 \frac{dQ_2(y_1, z_1)}{dy_1} + A_3 \frac{dQ_3(y_1, z_1)}{dy_1} = 0.$$

D'autre part, la courbe (l) correspondante est tangente à la courbe (1) en un point (y, z), car A_1, A_2, A_3 vérifient la relation

$$\Theta(A_1, A_2, A_3) = 0;$$

les coordonnées (y, z) du point de contact s'expriment rationnellement en fonction des rapports $\frac{A_2}{A_1}, \frac{A_3}{A_2}$, par suite, en fonction de (y_1, z_1).

Il suffira donc d'examiner si l'on peut passer de la surface $\Theta_1 = 0$ à la surface $\Theta = 0$ par une transformation homographique (k). Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les rapports des λ_j^i vérifient certaines relations algébriques, qui sont ou incompatibles ou déterminées.

Quand les deux courbes (1) et (2) sont de même genre, la correspondance homographique entre les deux surfaces $\Theta = 0$ et $\Theta_1 = 0$ de l'espace à $(p-1)$ dimensions est réciproque. Les relations (k) définissent alors les A_i en fonction linéaire et homogène des A'_j, et le raisonnement précédent montre que la transformation rationnelle de la courbe (1) en la courbe (2) est nécessairement birationnelle.

Ce raisonnement serait toutefois en défaut si la courbe (2) était hyperelliptique; mais nous avons montré que ce cas ne peut se présenter. Voici, d'ailleurs, comment on le verrait directement :

Supposons que (2) soit hyperelliptique, et ramenons-la à la forme

$$z_1^2 = R(y_1).$$

Toutes les courbes C' qui passent par le point (y_1, z_1) passent par le point $(y_1, -z_1)$; par suite, toutes les courbes C qui passent par le point (y, z) correspondant à (y_1, z_1) passent par le point (y', z') correspondant à $(y_1, -z_1)$. Ceci montre que la courbe (1) est hyperelliptique, ou bien que les points (y, z), (y', z') coïncident. Mais, dans cette dernière hypothèse, y et z s'exprimeraient rationnellement en fonction de y_1, et la courbe (1) serait de genre 0, ce qui est absurde. La courbe (1) est donc hyperelliptique.

Nous retrouvons ainsi, par cette seconde méthode, tous les résultats que nous avions obtenus en faisant usage de la courbe normale de M. Nœther.

6. Il nous reste à examiner avec quelque détail le cas où la courbe (1) est hyperelliptique.

Ramenons d'abord l'équation (1) à la forme

$$z^2 = R(y).$$

Pour une telle courbe,

$$P_1 = 1, \qquad P_2 = y, \qquad P_3 = y^2, \qquad \ldots, \qquad P_p = y^{p-1};$$

on doit donc avoir

$$\frac{P_2}{P_1} = y = \sum_{i=1}^{i=p'} \frac{\mu_i P'_i(y_1, z_1)}{\lambda_i P_i(y_1, z_1)}$$

et, par suite,

$$z = \sqrt{R(y)} = \sqrt{R_1(y_1, z_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \mu_i, \ldots)},$$

R_1 désignant une fonction rationnelle de y_1, z_1. Si l'on exprime, d'autre part, que $\sqrt{R_1}$ doit être une fonction rationnelle du point (y_1, z_1) de (1), on obtient certaines relations algébriques entre les rapports des λ, μ, relations qui sont incompatibles ou déterminées.

Examinons, en particulier, le cas où $p = p'$. En premier lieu, la courbe (2) est alors hyperelliptique. En effet, toutes les courbes C qui passent par le point (y_0, z_0) de (1) passent aussi par le point $(y_0, -z_0)$. Les courbes C' correspondant aux courbes C (lesquelles comprennent toutes les courbes C', puisque $p = p'$) ne peuvent donc avoir un point commun (y_1, z_1) sur (2) sans en avoir un second (y'_1, z'_1) : ces points (y_1, z_1), (y'_1, z'_1) sont les correspondants de (y_0, z_0), $(y_0, -z_0)$, et ne peuvent se confondre; car autrement, au même point (y_1, z_1) de (2) correspondraient deux points de (1). La courbe (2) est donc hyperelliptique.

J'ajoute que la correspondance entre les deux courbes est birationnelle. Soit, en effet,

$$z_1 = \sqrt{\rho(y_1)}$$

l'équation de (2). On doit avoir

$$y = \frac{Q(y_1)}{P(y_1)},$$

et aussi

$$y^{p-1} = \frac{S(y_1)}{P(y_1)},$$

P, Q, S désignant trois polynômes de degré $(p-1)$ au plus en y_1.

Ces égalités ne sauraient être compatibles que si l'on a

$$\frac{Q(y_1)}{P(y_1)} = \frac{\mu y_1 + \mu_1}{\lambda y_1 + \lambda_1},$$

λ, λ_1, μ, μ_1 étant quatre constantes. Donc

$$y = \frac{\mu y_1 + \mu_1}{\lambda y_1 + \lambda_1};$$

d'autre part,

$$z = \alpha(y_1) + z_1\beta(y_1),$$

α et β étant rationnels. Ces égalités nous montrent que y_1 et z_1 s'expriment rationnellement en y, z. La correspondance entre (1) et (2) est donc birationnelle. Nous vérifions ainsi, dans tous les cas, le théorème que nous avions établi en général au début de cette étude : quand $p = p'$ $(p > 1)$, les transformations (3) sont birationnelles.

7. Les conclusions auxquelles nous arrivons sont les suivantes :

Étant données deux courbes algébriques (1) et (2) de genre p et p', si p est supérieur à 1, il n'existe pas, en général, de substitutions rationnelles (3) permettant de passer de la courbe (1) à la courbe (2). De telles substitutions, quand elles existent, ne sont jamais qu'en nombre limité, et se calculent à l'aide d'opérations algébriques.

Le genre p' de (2) est inférieur ou égal au genre p de (1). Si $p = p'$, toute substitution rationnelle qui transforme (1) en (2) est birationnelle.

Plus généralement, μ désignant l'ordre de la substitution rationnelle (3), *on a*

$$\mu = \frac{p'-1}{p-1}.$$

Les courbes de genre 0 *et* 1 *sont les seules qui se laissent transformer en courbes du même genre par des substitutions simplement rationnelles.*

Quand la courbe (2) *est hyperelliptique, toute courbe* (1) *de genre plus grand que* 1 *dont elle est la transformée rationnelle est hyperelliptique.*

Dans ce qui précède, nous avons supposé qu'on se donnait la courbe (1) de genre p qu'il s'agissait de transformer rationnellement en la courbe (2), de genre p'.

Plus généralement, on peut chercher à résoudre le problème suivant :

Étant donnée une courbe (2) *de genre p', reconnaître si elle est la transformée rationnelle d'une courbe de genre p.*

Quand $p=1$, le problème, comme nous l'avons dit, se ramène à reconnaître si une intégrale de première espèce de la courbe (2) n'a que deux périodes.

Quand p est supérieur à 1, la question se résout algébriquement. Tout d'abord, si $p=p'$, la transformation est nécessairement birationnelle; toutes les courbes de la même *classe* que (2) sont des transformées birationnelles de cette courbe et répondent à la question. Mais nous ne regardons pas comme distinctes, dans ce qui va suivre, deux courbes qui correspondent à la même surface de Riemann. Nous cherchons seulement, parmi les courbes (1) qui se transforment rationnellement en la courbe (2), un type de chaque classe. Toutes les courbes appartenant à la même classe jouiront de la même propriété.

D'après un théorème déjà rappelé de Clebsch, toute courbe de genre p (non hyperelliptique) peut être ramenée au degré $p+1$ par une transformation birationnelle. Prenons donc comme courbe (1) la courbe de degré $(p+1)$ la plus générale à $\left[\frac{p(p-1)}{2}-p\right]$ points doubles. Son équation dépendra encore d'un certain nombre d'indéterminées α_1, α_2, ..., α_k. Donnons à ces constantes des valeurs quelconques et écrivons les équations nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une correspondance rationnelle de (2) à (1). Nous obtenons ainsi certaines relations algébriques auxquelles doivent satisfaire les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Quand ces relations sont compatibles, en remplaçant les α_i par un système quelconque de solutions, on forme l'équation d'une courbe (1) dont (2) se déduit rationnellement.

Pour chercher les courbes (1) hyperelliptiques, on procède de la même manière, en prenant leur équation sous la forme

$$y^2 = y(y-1)(y-k_1)(y-k_2)\ldots(y-k_{(2p-1)}).$$

En donnant à p les valeurs $1 + \frac{p'-1}{\mu}$ (μ étant un diviseur de $p'-1$), on détermine algébriquement toutes les courbes du genre p plus grand que 1, dont (2) est la transformée rationnelle, ou plutôt des types de toutes les classes de ces courbes.

Parmi ces courbes, en peut-il exister une infinité qui soient distinctes? autrement dit, ces courbes peuvent-elles appartenir à une infinité de classes?

Pour nous en rendre compte, assujettissons dans l'équation (1) les constantes α_i à des conditions arbitraires choisies de façon que cette équation ne dépende plus que de $(3p-3)$ indéterminées β, permettant de donner aux $(3p-3)$ modules de (1) des valeurs quelconques. Ceci est toujours possible : ces constantes forment alors elles-mêmes un système de modules de (1).

Raisonnons maintenant sur cette équation (1) comme plus haut. Les β_i doivent satisfaire à des conditions algébriques qui sont ou incompatibles, ou déterminées, ou indéterminées. Dans le premier cas, il n'existe pas de courbes de genre 1 répondant à la question; dans le second, il en existe un nombre limité et, dans le troisième, une infinité dont les modules dépendent algébriquement de paramètres arbitraires.

Je vais montrer que ce dernier cas ne saurait se présenter.

Soit, en effet,

$$f(y, z, t, u, \ldots) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la courbe (1) dont les modules dépendent de $t, u, \ldots$ algébriquement. Faisons varier seulement le paramètre t.

Par hypothèse, une substitution (3) permet de passer de (1) à la courbe donnée (2) et vérifie, par suite, les égalités

$$(a)\qquad \int \frac{P_i(y,z)}{F'_z}\,dz = \lambda_1^i \int \frac{P'_1(y_1,z_1)\,dz}{F'_{z_1}} + \ldots + \lambda_{p'}^i \int \frac{P'_{p'}(y_1,z_1)\,dz_1}{F'_{z_1}}.$$

Si les λ_i ne dépendent pas de t, la courbe (1) a des modules indépendants, car on a

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \rho\,(y_1, z_1),$$

$$\zeta = \frac{P_3}{P_1} = \rho_1(y_1, z_1),$$

ρ, ρ_1 ne renfermant pas t; la relation entre η et ζ ne dépend donc pas de t, et, d'autre part, la correspondance entre (η, ζ) et (y, z) est birationnelle si P_1, P_2, P_3 sont convenablement choisis.

Le raisonnement est en défaut quand (1) est hyperelliptique; on a, dans ce cas, si

$$z^2 = R(y, t, u, \ldots) = y(y-1)(y-k_1)\ldots(y-k_{2p-1})$$

est l'équation de (1),

$$(a')\qquad \int \frac{dy}{\sqrt{R}} = \lambda_1 \int \frac{dy_1\, P'_1(y_1,z_1)}{F'_{z_1}} + \ldots + \lambda_{p'} \int \frac{P'_{p'}(y_1,z_1)\,dz_1}{F'_{z_1}},$$

et les λ_i doivent dépendre de t si les k_j en dépendent; autrement, pour une valeur de t qui rend égales deux racines de R, le premier membre deviendrait infini en certains points (y, z) de 1, le second membre restant toujours fini.

Admettons donc que λ_i dépendent de t dans l'équation (a) et traitons d'abord le cas où (1) serait hyperelliptique. Quand t tend vers t_0, le second membre de (a') croît indéfiniment, quel que soit (y_1, z_1); le premier membre, au contraire, ne devient infini que pour des valeurs particulières (y_0, z_0) de (y, z). Il faut donc que $y = \varphi(y_1, z_1)$, $z = \psi(y_1, z_1)$ tendent respectivement vers y_0, z_0 quand t tend vers t_0, quel que soit le point (y_1, z_1) de (2). Les fonctions φ et ψ dépendent de t algébriquement et se laissent développer suivant les puissances de $(t-t_0)^{\frac{1}{\nu}} = T$; par exemple,

$$y - y_0 = A(y_1, z_1)T^{\lambda} + A_1(y_1, z_1)T^{\lambda+1} + \ldots.$$

Soit A_i le premier des coefficients A qui dépende effectivement de (y_1, z_1); posons

$$\frac{y - y_0 - T^{\lambda}(A + A_1 T + \ldots + A_{i-1} T^{i-1})}{T^{\lambda+i}} = \eta$$

et de même

$$\frac{z - z_0 - T^{\mu}(B + B_1 T + \ldots + B_{j-1} T^{j-1})}{T^{\mu+j}} = \zeta.$$

La courbe que décrit le point (η, ζ) est encore hyperelliptique,

$$(1)' \qquad \zeta^2 = \rho(\eta),$$

et correspond birationnellement à la courbe (1) par une substitution de la forme

$$\eta = \alpha + \beta y, \qquad \zeta = \gamma + \delta z.$$

Elle a donc mêmes modules, et deux de ces modules deviennent égaux pour $t = t_0$. En raisonnant sur $(1)'$ comme sur (1), on voit que le point (η, ζ) doit tendre vers un point (η_0, ζ_0) particulier quand t tend vers t_0, et cela quel que soit le point (y_1, z_1) de (2). Or (η, ζ) varie, pour $t = t_0$, avec (y_1, z_1). Les modules de (1) et $(1)'$ sont donc indépendants de t. C. Q. F. D.

Ce raisonnement s'étend aux courbes (1) quelconques. Écrivons la condition que doivent vérifier les $(3p - 3)$ coefficients modules de (1) pour que le genre de cette courbe s'abaisse. On forme ainsi une relation en t qui a au moins une racine $t = t_0$. Pour $t = t_0$, le premier membre de (a) devient infini au moins en un point (y_0, z_0) de (1). Nous pouvons d'ailleurs admettre qu'il ne devient pas infini pour $t = t_0$, quel que soit le point (y, z), sinon il contiendrait en facteur $(t - t_0)^{-\nu}$ et on le multiplierait par $(t - t_0)^{+\nu}$. Dans ces conditions, un au moins des coefficients λ_j doit être infini pour $t = t_0$. On en conclut, comme ci-dessus, que, t tendant vers t_0, $y = \varphi(y_1, z_1)$, $z = \psi(y_1, z_1)$ doivent tendre, quel que soit le point (y_1, z_1) de (2), vers les valeurs (y_0, z_0) particulières qui rendent le premier membre de (1) infini. Le raisonnement s'achève dès lors comme pour les courbes hyperelliptiques.

Nous sommes maintenant en état d'énoncer le théorème suivant :

Les courbes de genre plus grand que 1 *qui se laissent transformer* *rationnellement en une courbe donnée* (2) *appartiennent à un nombre limité de classes. On peut déterminer algébriquement un type de chaque classe ou, si l'on veut encore, leurs modules.*

Le procédé que nous venons d'employer démontre également qu'*une courbe donnée* (2) *ne peut être transformée rationnelle d'une courbe de genre* 1 *et de module arbitraire.*

8. Pour terminer cette étude, je signalerai les rapports du problème de la transformation rationnelle des courbes algébriques avec le problème de la réduction des intégrales abéliennes et celui de la transformation des fonctions fuchsiennes.

Tout d'abord, quand une courbe (2) de genre p' est la transformée rationnelle d'une courbe (1) de genre p, p des intégrales abéliennes de première espèce attachées à la courbe (2) (intégrales à $2p'$ périodes), n'ont que $2p$ périodes distinctes.

Pour ce qui est de la transformation des fonctions fuchsiennes, ce problème, analogue au problème de la transformation des fonctions elliptiques, peut s'énoncer ainsi : on se donne un groupe fuchsien G_1 et deux fonctions fondamentales correspondantes

$$y_1 = \Phi_1(t_1), \qquad z_1 = \Pi_1(t_1),$$

et l'on demande de déterminer un second groupe G jouissant de la propriété suivante.

Si l'on pose

$$t = \frac{\alpha t_1 + \beta}{\gamma t_1 + \delta},$$

pour certaines valeurs convenablement choisies des constantes α, β, γ, δ, les deux fonctions fondamentales

$$y = \Phi(t), \qquad z = \Pi(t)$$

s'expriment rationnellement à l'aide de $\Phi_1(t_1)$, $\Pi_1(t_1)$.

D'après les idées de MM. Poincaré et F. Klein, le groupe fuchsien G_1 définit une surface de Riemann ou, si l'on veut, une classe de courbes algébriques dont l'une est représentée par la relation entre les deux fonctions Φ_1, Π_1,

$$F(\Phi_1, \Pi_1) = 0.$$

De même, au groupe G correspond la courbe

$$f(\Phi, \Pi) = 0.$$

Posons

$$y = \Phi(t) = \Phi\left(\frac{\alpha t_1 + \beta}{\gamma t_1 + \delta}\right),$$
$$z = \Pi(t) = \Pi\left(\frac{\alpha t_1 + \beta}{\gamma t_1 + \delta}\right)$$

et, de même,

$$y_1 = \Phi_1(t_1),$$
$$z_1 = \Pi_1(t_1);$$

puisque G résout le problème de la transformation, on a

$$\Phi\left(\frac{\alpha t_1 + \beta}{\gamma t_1 + \delta}\right) = R\,[\Phi_1(t_1), \Pi_1(t_1)],$$
$$\Pi\left(\frac{\alpha t_1 + \beta}{\gamma t_1 + \delta}\right) = R_1[\Phi_1(t_1), \Pi_1(t_1)],$$

R et R_1 étant deux fonctions rationnelles; par suite,

$$y = R\,(y_1, z_1),$$
$$z = R_1(y_1, z_1).$$

On se trouve ramené ainsi à déterminer les courbes de genre p inférieur à p', dont la courbe (2) est la transformée.

Étant donné un groupe fuchsien G_1, de genre p', on sait donc déterminer algébriquement tous les groupes transformés G, de genre plus grand que 1. La recherche des groupes G de genre 1 revient à reconnaître si une des intégrales de première espèce de la courbe $F = 0$ n'a que deux périodes; mais les théorèmes précédents n'indiquent rien sur les groupes G de genre 0.

9. Les propositions que nous venons d'établir ont leurs équivalentes dans la théorie des transformations rationnelles des surfaces. Je me bornerai, sur ce point, aux indications suivantes. Soient

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une surface algébrique S; p le nombre (*plus grand que* 1) des polynômes Q linéairement distincts *adjoints* à la surface; p_1 le genre de l'intersection C de S avec la surface Σ (ou $Q = 0$); désignons par γ la courbe d'intersection de deux surfaces Σ; cette courbe rencontre S en $(p_1 - 1)$ points.

Nous distinguerons trois groupes de surfaces : le premier (le plus général), comprend les surfaces S pour lesquelles toute surface Σ qui passe par un point de S ne passe pas nécessairement par d'autres points de S *correspondants* (en dehors des points singuliers de S). Pour ces surfaces, les p polynômes Q distincts, regardés comme les coordonnées homogènes d'un point de l'espace à $(p - 1)$ dimensions, définissent (à une transformation homographique près) une surface S_1 de cet espace, dite *surface normale*, qui correspond birationnellement à S. D'une manière plus précise, on peut exprimer que les trois surfaces

$$Q_2 - \alpha Q_1 = 0, \qquad Q_3 - \beta Q_1 = 0, \qquad Q_4 - \gamma Q_1 = 0$$

ont avec S un point commun et un seul. Pour cela, il faut et il suffit que α, β, γ vérifient une relation

$$(1)' \qquad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

et, à chaque point (α, β, γ) de (1) correspond un seul point (x, y, z) de S. Cette surface S_1, qui correspond birationnellement à S, est de degré $(p_1 - p + 3)$, comme l'a montré M. Nœther.

Le second groupe (où nous rangeons les surfaces de genre $p = 3$) comprend les surfaces pour lesquelles toute surface Σ, passant par un point de S, passe par $(n - 1)$ autres points correspondants. On a nécessairement

$$n \leq \frac{p_1 - 1}{p - 3}.$$

Toute surface Σ *tangente à* S *au point* (x, y, z) *est tangente à* S *aux points correspondants*. Toute courbe γ qui passe par (x, y, z) (ou est tangente à S en ce point) passe par les points correspondants (ou est tangente à S en ces points).

Le troisième groupe comprend les surfaces S (en particulier les surfaces de genre $p = 2$) pour lesquelles deux surfaces Σ, qui ont un point commun avec S, ont une ligne commune avec cette surface. Pour ces surfaces, les courbes C se décomposent en courbes de genre 1, et le rapport $\frac{Q_i(x, y, z)}{Q_j(x, y, z)}$ est une fonction de $\frac{Q_2(x, y, z)}{Q_1(x, y, z)}$ quand (x, y, z) varie sur S.

Ceci posé, soient S′ une seconde surface

$$F'(x', y', z') = 0, \tag{2}$$

p' et p'_1 les nombres qui correspondent aux nombres p et p_1.

Admettons qu'on puisse passer rationnellement de (1) à (2) par la transformation

$$x = h(x', y', z'), \qquad y = k(x', y', z'), \qquad z = l(x', y', z'), \tag{3}$$

qui dépend de paramètres arbitraires. En répétant le raisonnement qu'emploie M. Picard [1] dans l'étude des transformations birationnelles des surfaces, on démontre que toute intégrale double de première espèce J de S se transforme en une intégrale de S′

$$J = \lambda_1 J'_1 + \lambda_2 J'_2 + \ldots + \lambda_{p'} J'_{p'},$$

les λ_i étant des constantes. On en conclut que *p étant plus grand que 1, la transformation* (3) *ne saurait dépendre de deux paramètres arbitraires. Si elle dépend d'un paramètre,* S *rentre dans le troisième groupe, et le module des courbes* C (*de genre* 1) *est constant. Quand* S′ *est du troisième groupe, il en est de même de* S. *Enfin, on a, dans tous les cas,* $p \leqq p'$, $p_1 \leqq p'_1$.

Si je désigne par μ l'ordre de la transformation (3), c'est-à-dire le nombre de points (x', y', z') de S qui correspondent à un point (x, y, z) de S, ce nombre μ satisfait à l'égalité

$$\mu = \frac{p'_1 - 1}{p_1 - 1}.$$

Supposons maintenant que S et S′ appartiennent au premier groupe; on aura

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\Sigma \mu_i Q'_i}{\Sigma \lambda_i Q'_i}, \qquad \frac{Q_3}{Q_2} = \frac{\Sigma \nu_i Q'_i}{\Sigma \lambda_i Q'_i}.$$

On devra donc pouvoir déterminer les constantes λ, μ, ..., de façon que les rapports α, β, γ introduits plus haut vérifient la relation $(1)'$,

(1) E. Picard, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*loc. cit.*).

et ces conditions sont suffisantes. Ceci nous montre qu'*on peut calculer algébriquement toutes les transformations* (3); *il ne saurait, par suite, exister entre* (1) *et* (2) *qu'un nombre fini de transformations rationnelles.* Ceci revient à dire qu'on passe de la surface de la normale S_1 à la surface normale S'_1 à l'aide de la transformation

$$Q_j = \sum_{i=1}^{i=p'} \lambda_j^i Q'_i.$$

Si donc $p = p'$, *la transformation* (3) *est nécessairement birationnelle.* On pourrait se servir également de la condition qui exprime que la surface Σ (ou la courbe γ) est tangente à S.

Passons au cas où S′ est du second groupe, S étant du premier, et où il existe une transformation (3). La méthode précédente s'applique. Ajoutons que, α', β', γ' désignant les rapports de quatre polynômes Q′ quelconques, la surface S'_1 ou

$$\varphi'(\alpha', \beta', \gamma') = 0$$

correspond rationnellement à S. Si S'_1 n'est pas du premier groupe, on raisonne sur S'_1 comme sur S′, et comme le genre p_1 des S'_i diminue, on parvient à une surface S″ du premier groupe qu'on peut substituer à S′. Si $p = p''$, la correspondance entre S et S″ est nécessairement birationnelle.

Plus généralement, cherchons toutes les surfaces S *distinctes* du premier groupe, qui correspondent rationnellement à la surface donnée S′. (Nous ne regardons pas comme distinctes deux surfaces qui se correspondent birationnellement.) On peut toujours supposer S de degré $(p_1 - p + 3)$, par suite de degré au plus égal à $(p'_1 - p' + 3)$. *On détermine dès lors algébriquement toutes les surfaces cherchées de ce degré. Il n'existe qu'un nombre fini q de surfaces* S *réellement distinctes et répondant à la question.*

Plaçons-nous maintenant dans le cas où S appartient au second groupe. On peut déterminer algébriquement toutes les substitutions (3) et, par suite, il n'en existe qu'un nombre fini. On le voit, en raisonnant comme M. Picard et en exprimant que les équations

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\Sigma\mu_i Q'_i}{\Sigma\lambda_i Q'_i}, \qquad \frac{Q_3}{Q_1} = \frac{\Sigma\nu_i Q'_i}{\Sigma\lambda_i Q'_i}$$

et les équations (1) et (2) déterminent rationnellement un système de valeurs (x, y, z) en fonction du point (x', y', z') de S', si $p_1 = p'_1$, la transformation (3) est birationnelle.

On peut également déterminer algébriquement toutes les surfaces S distinctes du second groupe qui correspondent rationnellement à S'.

Supposons enfin que S soit du troisième groupe, ce qui a toujours lieu si S' appartient lui-même au même groupe. Nous aurons

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\Sigma \mu_i Q'_i}{\Sigma \lambda_i Q'_i} = \frac{Q'_k}{Q'_j}.$$

Il doit exister un faisceau de surfaces Σ', dépendant de $(p-1)$ paramètres et tel que deux surfaces du faisceau qui ont un point arbitraire commun sur S' coïncident le long de S'. Cette condition, toujours satisfaite si $p = 2$, montre que, si $p = p'$, S' doit appartenir au troisième groupe. Il faut, de plus, que la courbe C (de genre 1)

$$Q_2 - \alpha Q_1 = 0, \qquad F = 0$$

corresponde rationnellement à la courbe C'

$$Q'_k - \alpha Q'_j = 0, \qquad F' = 0.$$

La question revient à reconnaître si une intégrale de première espèce de la courbe C' (pour un certain faisceau de surfaces Σ') ne se ramène pas aux intégrales elliptiques.

Cette question résolue, on déterminerait algébriquement les transformations (3), s'il en existe. *Quand le module k^2 des courbes* C *est constant, la transformation* (3) *peut dépendre d'un paramètre et de plusieurs entiers arbitraires. Si k^2 n'est pas constant, la transformation ne saurait dépendre que d'entiers arbitraires.*

Cette étude se rattache au problème de la transformation des fonctions hyperfuchsiennes. Mais je me réserve de développer ailleurs ces considérations, qui nous entraîneraient trop loin de notre sujet.

(*A suivre.*)