Annales scientifiques de l'É.N.S.

Dautheville

Sur une transformation de mouvement

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 7 (1890), p. 361-374
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1890_3_7__361_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR UNE

TRANSFORMATION DE MOUVEMENT,

PAR M. DAUTHEVILLE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.

M. Appell a montré dans un récent Mémoire ([1]) que les transformations homographiques peuvent être appliquées avec avantage à diverses questions de Mécanique. A la fin de son Mémoire, M. Appell propose la généralisation suivante des résultats qu'il a obtenus.

Soient les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad q'_i = \frac{dq_i}{dt} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où T est une forme quadratique de $q'_1, \ldots, q'_k$ avec des coefficients fonctions de $q_1, \ldots, q_k$, et où $Q_1, \ldots, Q_k$ dépendent seulement de $q_1, \ldots, q_k$. Trouver les transformations de la forme

$$\begin{aligned} r_i &= f_i(q_1, q_2, \ldots, q_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \\ dt_1 &= \lambda(q_1, q_2, \ldots, q_k)\, dt \end{aligned}$$

qui transforment ces équations en d'autres de la forme

$$\frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial S}{\partial r'_i}\right) - \frac{\partial S}{\partial r_i} = R_i, \qquad r'_i = \frac{dr_i}{dt_1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où S désigne une forme quadratique de $r'_1, \ldots, r'_k$ avec des coefficients fonctions de $r_1, \ldots, r_k$ et où $R_1, \ldots, R_k$ dépendent seulement de $r_1, \ldots, r_k$.

([1]) *De l'homographie en Mécanique*, par M. Appell (*American Journal of Mathematics*, vol. XII, p. 103).

Nous nous proposons de considérer le cas du mouvement d'un point sur une surface ($K=2$) et de montrer que les transformations cherchées sont celles qui conservent les lignes géodésiques, ainsi que l'a prévu M. Appell.

I.

Considérons deux surfaces S et S_1, et faisons correspondre un point réel de la première à un point réel de la seconde. On sait, par un théorème dû à M. Tissot, qu'il existe sur la première un système orthogonal auquel correspond sur la seconde un système orthogonal. Rapportons les surfaces à ces deux systèmes orthogonaux. Soient

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2, \qquad ds_1^2 = E_1\,du^2 + G_1\,dv^2$$

les expressions des éléments linéaires de S et S_1. Considérons un point matériel, de masse égale à l'unité, dont le mouvement sur la surface S est déterminé par les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u'}\right) - \frac{\partial T}{\partial u} = P, \qquad u' = \frac{du}{dt},\\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v'}\right) - \frac{\partial T}{\partial v} = Q, \qquad v' = \frac{dv}{dt},\end{aligned}\right.$$

où

$$2T = Eu'^2 + Gv'^2,$$

et où P, Q dépendent de u, v seulement.

Considérons maintenant un second point, de masse égale à l'unité, en mouvement sur la surface S_1, et imaginons que les coordonnées de ce point sont fonctions d'une nouvelle variable t_1, liée à t par l'équation

$$(2)\qquad dt_1 = \lambda(u, v)\,dt.$$

Le mouvement du second point sera déterminé par les équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial u'_1}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial u} = P_1, \qquad u'_1 = \frac{du}{dt_1},\\ &\frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial v'_1}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial v} = Q_1, \qquad v'_1 = \frac{dv}{dt_1},\end{aligned}\right.$$

où

$$2T_1 = E_1 u_1'^2 + G_1 v_1'^2.$$

La question que l'on se propose de résoudre se réduit à celle-ci : Est-il possible de déterminer la fonction λ de manière que P_1 et Q_1 soient indépendants de u'_1 et de v'_1 ?

Des équations (1) et (3) on déduit

$$(4)\quad \begin{cases} P = E\dfrac{du'}{dt} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial u}u'^2 + \dfrac{\partial E}{\partial v}u'v' - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial u}v'^2, \\ Q = G\dfrac{dv'}{dt} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial v}u'^2 + \dfrac{\partial G}{\partial u}u'v' + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial v}v'^2 \end{cases}$$

et

$$(5)\quad \begin{cases} P_1 = E_1\dfrac{du'_1}{dt_1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E_1}{\partial u}u'^2_1 + \dfrac{\partial E_1}{\partial v}u'_1v'_1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G_1}{\partial u}v'^2_1, \\ Q_1 = G_1\dfrac{dv'_1}{dt_1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E_1}{\partial v}u'^2_1 + \dfrac{\partial G_1}{\partial u}u'_1v'_1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G_1}{\partial v}v'^2_1. \end{cases}$$

On a maintenant

$$u' = u'_1\,\lambda(u, v), \qquad v' = v'_1\,\lambda(u, v),$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \frac{du'_1}{dt_1} &= \frac{1}{\lambda^2}\frac{du'}{dt} - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}u'^2_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial v}u'_1v'_1\right), \\ \frac{dv'_1}{dt_1} &= \frac{1}{\lambda^2}\frac{dv'}{dt} - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}u'_1v'_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial v}v'^2_1\right). \end{aligned}$$

Remplaçant dans ces équations $\dfrac{du'}{dt}$, $\dfrac{dv'}{dt}$ par les valeurs déduites de (4), et portant dans (5) les valeurs ainsi obtenues pour $\dfrac{du'_1}{dt_1}$, $\dfrac{dv'_1}{dt_1}$, on trouve finalement

$$\begin{aligned} P_1 = \frac{E_1P}{E\lambda^2} &- \left(\frac{E_1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E_1}{\partial u} + \frac{E_1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)u'^2_1 \\ &- \left(\frac{E_1}{E}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial E_1}{\partial v} + \frac{E_1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)u'_1v'_1 \\ &+ \left(\frac{E_1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial G_1}{\partial u}\right)v'^2_1, \\ Q_1 = \frac{G_1Q}{G\lambda^2} &+ \left(\frac{G_1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial E_1}{\partial v}\right)u'^2_1 \\ &- \left(\frac{G_1}{G}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial u} + \frac{G_1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)u'_1v'_1 \\ &- \left(\frac{G_1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G_1}{\partial v} + \frac{G_1}{\lambda}\frac{\partial G_1}{\partial v}\right)v'^2_1. \end{aligned}$$

En exprimant que P_1, Q_1 sont indépendants de u'_1, v'_1, on a les équations

$$\frac{E_1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E_1}{\partial u} + \frac{E_1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{E_1}{E}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial E_1}{\partial v} + \frac{E_1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{E_1}{E}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{G_1}{G}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial E_1}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{G_1}{G}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial u} + \frac{G_1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{G_1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G_1}{\partial v} + \frac{G_1}{\lambda}\frac{\partial G_1}{\partial v} = 0.$$

Ces équations sont équivalentes aux suivantes :

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{E_1}\frac{\partial E_1}{\partial u}\right),\\
&\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v} = -\left(\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{E_1}\frac{\partial E_1}{\partial v}\right),\\
&\frac{1}{E}\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{1}{E_1}\frac{\partial G_1}{\partial u},\\
&\frac{1}{G}\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{1}{G_1}\frac{\partial E_1}{\partial v},\\
&\frac{2}{G}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial u} = \frac{2}{G_1}\frac{\partial G_1}{\partial u} - \frac{1}{E_1}\frac{\partial E_1}{\partial u},\\
&\frac{2}{E}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial v} = \frac{2}{E_1}\frac{\partial E_1}{\partial v} - \frac{1}{G_1}\frac{\partial G_1}{\partial v}.
\end{aligned}\right.$$

Les quatre dernières, étant indépendantes de λ, sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème proposé admette une solution. On reconnaît dans ces conditions celles qui expriment que les lignes géodésiques se correspondent sur les deux surfaces considérées [1].

Si l'on suppose ces équations identiquement vérifiées, les deux pre-

---

(1) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, IIIe Partie, p. 49.

mières donnent λ. On en déduit, en effet,

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{E\lambda^2}{E_1}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial v}\log\frac{E\lambda}{E_1}=0$$

ou bien

$$\frac{E\lambda^2}{E_1}=V_2,\qquad \frac{E\lambda}{E_1}=U_2,$$

V_2 désignant une fonction de v, et U_2 une fonction de u. Adoptons les notations employées par M. Darboux dans son Livre *Sur la théorie générale des surfaces* (¹). L'intégration des quatre dernières équations (6) donne

$$\frac{E}{E_1}=VU^2,$$

V étant une fonction de v et U une fonction de u. On aura donc

$$\lambda^2=\frac{V_2}{VU^2},\qquad \lambda=\frac{U_2}{VU^2}.$$

De là

$$V_2V=\left(\frac{U_2}{U}\right)^2=K^2,$$

K étant une constante.

On a, par suite,

$$V_2=\frac{K^2}{V},\qquad U_2=KU,\qquad \lambda=\frac{K}{VU}.$$

La solution du problème est achevée, et l'on voit que les transformations cherchées sont précisément celles qui permettent de représenter géodésiquement l'une des surfaces considérées sur l'autre.

II.

Considérons en particulier le cas où l'une des surfaces est un plan. Nous pourrons effectuer complètement les calculs et obtenir sous forme explicite les transformations que nous avons en vue.

(¹) *Loc. cit.*

Soit un mouvement plan défini par les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y}, \tag{1}$$

où x, y désignent des coordonnées cartésiennes rectangulaires et où l'on suppose que X, Y sont fonctions de x, y seulement. Considérons une surface rapportée au système de coordonnées curvilignes formées par une famille de géodésiques et leurs trajectoires orthogonales. L'expression de l'élément linéaire est

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{C}^2 dv^2.$$

Le mouvement sur la surface d'un point de masse égale à l'unité est déterminé par les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} = \mathrm{P}, \qquad u' = \frac{du}{dt_1}, \\ &\frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} = \mathrm{Q}, \qquad v' = \frac{dv}{dt_1}, \\ &\qquad 2\mathrm{T} = u'^2 + \mathrm{C}^2 v'^2, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

où t_1 désigne le temps.

Proposons-nous de trouver les transformations de la forme

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad dt_1 = \lambda(u, v)\, dt, \tag{3}$$

qui transforment les équations (1) en les équations (2), avec la condition que P et Q soient indépendants de u', v'.

On déduit de (2)

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{P} = \frac{du'}{dt_1} - \mathrm{C}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u} v'^2, \\ &\mathrm{Q} = \mathrm{C}^2 \frac{dv'}{dt_1} + 2\mathrm{C}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u} u'v' + \mathrm{C}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial v} v'^2. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

En différentiant (3) et tenant compte de (1), on a

$$\begin{aligned} \mathrm{X} = {} & \lambda^2 \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial t_1} + \lambda^2 \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv'}{dt_1} + \left(\lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u}\right) u'^2 \\ & + \left(2\lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\right) u'v' + \left(\lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) v'^2, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Y} = {} & \lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{du'}{dt_1} + \lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{dv'}{dt_1} + \left(\lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) u'^2 \\
& + \left(2\lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u\, \partial v} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) u' v' + \left(\lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) v'^2.
\end{aligned}
$$

Portant dans (4) les valeurs de $\frac{du'}{dt_1}$, $\frac{dv'}{dt_1}$ fournies par ces équations, on obtient les valeurs de P, Q en fonction de u, v, u', v'. En égalant à zéro les coefficients de u'^2, $u'v'$, v'^2 dans P et Q, on a six équations pour déterminer f, φ et λ. On trouve ainsi, en posant, pour abréger l'écriture, $\Delta = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}$,

$$
(5) \quad \left\{
\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0, \\
& \frac{2}{\Delta}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0, \\
& \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \mathrm{C} \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u} = 0, \\
& \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0, \\
& \frac{2}{\Delta}\left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v}\right) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{2}{\mathrm{C}} \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u} = 0, \\
& \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{1}{\mathrm{C}} \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial v} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

La quatrième équation s'intègre immédiatement et donne

$$f = \mathrm{V}\varphi + \mathrm{V}_1,$$

V et V_1 désignant deux fonctions de v.

Imaginons que la famille de géodésiques qui intervient dans le système de coordonnées curvilignes auquel on rapporte la surface soit formée par les géodésiques passant par le point de la surface qui correspond à l'origine des coordonnées dans le plan. Alors à chaque valeur de v en correspond une de u pour laquelle on a identiquement $f = \varphi = 0$. Il en résulte que V_1 est identiquement nulle et que l'on a

$f = \mathrm{V}\varphi$. Cela posé, le système (5) devient, par quelques réductions simples,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} & f = \mathrm{V}\varphi, \\ & \frac{2\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}{\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}} + \frac{\mathrm{V}''\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\mathrm{V}'\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}} - \frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}} = \mathrm{C}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u}, \\ & \frac{\partial}{\partial u}\log\left(\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial v}\log\left[\frac{\lambda\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{\varphi^2}\right] = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{\lambda\varphi^2}{\mathrm{C}^2}\right) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{\mathrm{V}'\lambda\varphi^2}{\mathrm{C}}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

V' et V'' étant les dérivées première et seconde de la fonction V.

On intègre immédiatement les quatre dernières équations, et l'on trouve

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \mathrm{V}_1, \qquad \frac{\lambda}{\varphi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 = \mathrm{U}_1, \qquad \frac{\lambda\varphi^2}{\mathrm{C}^2} = \mathrm{V}_2, \qquad \frac{\mathrm{V}'\lambda\varphi^2}{\mathrm{C}} = \mathrm{U}_2,$$

V_1, V_2 désignant des fonctions de v, et U_1, U_2 des fonctions de u. Ces équations s'écrivent

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \mathrm{V}_1, \qquad \frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\mathrm{U}_1}{\mathrm{V}_1}, \qquad \mathrm{C}^2 = \frac{\mathrm{V}_1^2}{\mathrm{U}_1\mathrm{V}_2}, \qquad \mathrm{V}'\mathrm{C} = \frac{\mathrm{U}_2}{\mathrm{V}_2}.$$

Les deux dernières montrent que C doit être le produit d'une fonction de u par une fonction de v. Posons donc

$$\mathrm{C} = \alpha\beta,$$

α désignant une fonction donnée de u et β une fonction donnée de v. On aura

$$\frac{\alpha}{\mathrm{U}_2} = \frac{1}{\beta\mathrm{V}'\mathrm{V}_2} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}, \qquad \alpha^2\mathrm{U}_1 = \frac{\mathrm{V}_1^2}{\beta^2\mathrm{V}_2} = \mathrm{AB},$$

A, B désignant deux constantes. De là

$$\mathrm{V}_1 = \mathrm{A}\sqrt{\frac{\beta}{\mathrm{V}'}}, \qquad \mathrm{U}_1 = \frac{\mathrm{AB}}{\alpha^2},$$

et ensuite

$$\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u} = A\sqrt{\frac{\beta}{V'}},$$

$$\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial \varphi}{\partial u} = B\frac{1}{\alpha^2}\sqrt{\frac{V'}{\beta}}.$$

En intégrant la dernière équation, on obtient

$$\varphi = \frac{R}{U+S}, \tag{7}$$

où l'on a posé

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{\beta}{V'}},$$

$$U = -\int \frac{du}{\alpha^2}$$

et où S désigne une fonction de v.

On voit par ce qui précède que le système (6) peut être remplacé par le suivant,

$$\left\{\begin{aligned}
& f = V\varphi, \\
& \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u} = A\sqrt{\frac{\beta}{V'}}, \\
& \varphi = \frac{R}{U+S}, \\
& \frac{2\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}{\varphi \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}} + \frac{V''\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}{V'\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}} - \frac{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}} = \alpha\alpha'\beta^2,
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

où $\alpha' = \frac{d\alpha}{du}$, et tout se réduit à déterminer les fonctions V et S au moyen de la dernière équation (8). Remplaçant φ par sa valeur, on a

$$\begin{aligned}
&(U+S)(RR''V' - 2R'^2V' - RR'V'') \\
&\quad + 2RR'S'V' + R^2S'V'' - R^2S''V' = R^2V'\beta^2U'\alpha\alpha'.
\end{aligned}$$

Différentiant par rapport à u,

$$\frac{RR''V' - 2R'^2V' - RR'V''}{R^2V'\beta^2} = \frac{U''\alpha\alpha' + U'\alpha'^2 + U'\alpha\alpha''}{U'}$$

ou bien

$$\frac{RR''V' - 2R'^2V' - RR'V''}{R^2V'\beta^2} = \alpha\alpha'' - \alpha'^2 = D,$$

D étant une constante.

L'équation devient alors

$$\frac{DSRV'\beta^2 + 2R'S'V' + RS'V'' - RS''V'}{RV'\beta^2} = U'\alpha\alpha' - DU = D_1,$$

D_1 étant une nouvelle constante.

Par suite, si l'on pose

$$(9) \qquad \begin{cases} D = \alpha\alpha'' - \alpha'^2, \\ D_1 = U'\alpha\alpha' - DU, \end{cases}$$

on aura, pour déterminer V et puis S, les équations

$$(10) \qquad RR''V' - 2R'^2V' - RR'V'' - DR^2V'\beta^2 = 0,$$

$$(11) \qquad DSRV'\beta^2 + 2R'S'V' + RS'V'' - RS''V' - D_1RV'\beta^2 = 0.$$

Si l'on différentie la première équation (9), on a

$$\alpha\alpha''' - \alpha'\alpha'' = 0,$$

$$\frac{d}{du}\log\frac{\alpha''}{\alpha} = 0,$$

$$\frac{\alpha''}{\alpha} = \text{const.}$$

ou bien, comme on le voit aisément,

$$-\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = \text{const.}$$

Cette quantité constante exprime la courbure totale de la surface, d'après une formule due à Gauss ([1]). Ainsi la transformation cherchée ne peut être effectuée que si la surface donnée est à courbure constante.

Plaçons-nous dans cette hypothèse. Les formules données par M. Darboux ([2]) nous permettront d'achever le calcul.

Si l'on suppose la courbure nulle, on a

$$C^2 = u^2;$$

de là

$$\alpha = u,$$
$$\beta = 1.$$

On trouve alors

$$U = \frac{1}{u},$$
$$D = -1,$$
$$D_1 = 0.$$

Les équations (10) et (11) deviennent

$$3V''^2 - 2V'V'' + 4V'^2 = 0,$$
$$S'' + S = 0.$$

On en déduit

$$V = E \operatorname{tang}(v + F) + G,$$
$$S = H \sin v + K \cos v,$$

et ensuite

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{m'(u \sin v) + n'(u \cos v) + p'}{m(u \sin v) + n(u \cos v) + p}, \\ f &= \frac{m''(u \sin v) + n''(u \cos v) + p''}{m(u \sin v) + n(u \cos v) + p}, \\ \lambda &= q[m(u \sin v) + n(u \cos v) + p]^2, \end{aligned} \right.$$

$m, n, p, \ldots$ étant des constantes.

([1]) G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, p. 416.
([2]) *Ibid.*, p. 46.

Si l'on suppose que la courbure est positive et égale à $\frac{1}{a^2}$, on aura

$$C^2 = a^2 \sin^2 \frac{u}{a},$$

$$\alpha = a \sin \frac{u}{a},$$

$$\beta = 1.$$

De là

$$U = \frac{1}{a \operatorname{tang} \frac{u}{a}},$$

$$D = -1,$$

$$D_1 = 0.$$

On trouve, pour déterminer V, S, les mêmes équations que dans le cas précédent, et l'on obtient finalement

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{m'\left(\sin v \operatorname{tang} \frac{u}{a}\right) + n'\left(\cos v \operatorname{tang} \frac{u}{a}\right) + p'}{m\left(\sin v \operatorname{tang} \frac{u}{a}\right) + n\left(\cos v \operatorname{tang} \frac{u}{a}\right) + p}, \\ f &= \frac{m''\left(\sin v \operatorname{tang} \frac{u}{a}\right) + n''\left(\cos v \operatorname{tang} \frac{u}{a}\right) + p''}{m\left(\sin v \operatorname{tang} \frac{u}{a}\right) + n\left(\cos v \operatorname{tang} \frac{u}{a}\right) + p}. \end{aligned} \right.$$

Enfin, si la courbure vaut $-\frac{1}{a^2}$, on a

$$U = \frac{2e^{-\frac{u}{a}}}{a\left(e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}\right)},$$

$$D = -1,$$

$$D_1 = -\frac{1}{a}.$$

L'équation en V est la même que dans les cas précédents, et l'équation en S est

$$S'' + S - \frac{1}{a} = 0.$$

Elle donne

$$S = H \sin v + K \cos v + \frac{1}{a},$$

et l'on trouve

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= \frac{m'\left(\dfrac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}}\sin v\right) + n'\left(\dfrac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}}\cos v\right) + p'}{m\left(\dfrac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}}\sin v\right) + n\left(\dfrac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}}\cos v\right) + p},\\ f &= \frac{m''\left(\dfrac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}}\sin v\right) + n''\left(\dfrac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}}\cos v\right) + p''}{m\left(\dfrac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}}\sin v\right) + n\left(\dfrac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}}\cos v\right) + p}. \end{aligned}\right.$$

Telles sont les transformations que nous nous proposions d'obtenir.

Dans le Chapitre que nous avons précédemment cité, M. Darboux donne les équations suivantes pour les lignes géodésiques :

$$A u \cos v + B u \sin v + C = 0,$$

$$A \operatorname{tang}\frac{u}{a}\cos v + B \operatorname{tang}\frac{u}{a}\sin v + C = 0,$$

$$A \frac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}}\cos v + B \frac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}}\sin v + C = 0.$$

Nous avons écrit dans les deux dernières $\frac{u}{a}$ au lieu de u, pour faire concorder les notations. L'éminent géomètre ajoute :

« Si l'on représente la surface sur le plan en prenant pour les coordonnées rectangulaires x et y du point du plan les coefficients de A et de B dans les équations précédentes, les lignes géodésiques de la surface correspondent aux droites du plan.... Quand on a effectué *une* représentation de la surface considérée sur le plan, on les obtient *toutes* en faisant suivre cette représentation, quelque particulière qu'elle soit, de la transformation homographique la plus générale dans le plan. »

Cela étant acquis, il suffit de considérer les formules (12), (13) et (14) pour constater que les transformations qui répondent au problème proposé par M. Appell sont celles qui transforment les droites du plan en lignes géodésiques de la surface [1].

---

[1] Les résultats contenus dans cette Note ont fait l'objet d'une communication que nous avons eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences (séance du 8 décembre 1890).

FIN DU TOME VII DE LA TROISIÈME SÉRIE.