Marcel Brillouin

Principes généraux d'une théorie élastique de la plasticité et de la fragilité des corps solides

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 7 (1890), p. 345-360
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1890_3_7__345_0>

PRINCIPES GÉNÉRAUX

D'UNE

THÉORIE ÉLASTIQUE DE LA PLASTICITÉ

ET DE LA

FRAGILITÉ DES CORPS SOLIDES,

PAR M. M. BRILLOUIN,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Objet du travail. — Dans la théorie ordinaire de l'élasticité limitée aux lois de Hooke, et développée surtout pour les solides isotropes, on ne rencontre naturellement que les phénomènes de déformation temporaire dans lesquels le corps solide déformé revient exactement à sa forme primitive dès que cesse l'application des forces. Un examen attentif de cette théorie permet pourtant de mettre en évidence des cas particuliers dans lesquels le retour à la forme primitive est incomplet, et qui présentent par conséquent des déformations progressives et permanentes. On peut aussi trouver des cas dans lesquels la déformation progressive entraîne la rupture, et en particulier indiquer pour les solides anisotropes quelles relations entre les vingt et un coefficients d'élasticité sont nécessaires pour qu'un plan d'orientation déterminée soit un plan de glissement sans rupture ou un plan de facile clivage. Enfin, passant à l'étude des corps isotropes, dans le cas général où les forces élastiques sont des fonctions non linéaires des déformations, on peut de même tirer de la connaissance de ces fonctions les conditions auxquelles les forces appliquées au corps commencent à produire une déformation progressive, au lieu d'un état d'équilibre déterminé, ou bien la rupture.

Dans ce premier et court Mémoire, je me bornerai à mettre le plus nettement possible en évidence les idées générales. Un second Mémoire sera consacré aux clivages des cristaux; un troisième aux corps isotropes soumis à de grandes déformations.

Les indications historiques trouveront place dans les Mémoires spéciaux; elles se réduisent d'ailleurs à fort peu de chose. Le véritable point de départ de ces recherches est dans les remarques de Stokes sur l'impossibilité d'admettre un rapport fixe entre les deux coefficients d'élasticité des corps isotropes naturels, et sur le rôle que joue l'intensité de la pesanteur à la surface de la Terre dans notre distinction des corps en solides et liquides. Maxwell et Thomson, en particulier, ont souvent insisté sur l'importance de ces remarques, tant dans leurs livres que dans les articles de l'*Encyclopédie britannique*, et les conférences publiques. Peut-être semblera-t-il qu'il n'y ait ici presque rien de plus; cependant aucun d'eux, à ma connaissance, n'en a tiré l'ensemble de conséquences que j'ai indiquées plus haut, et, si je ne me trompe, c'est faute d'avoir énoncé une remarque d'ailleurs évidente dans le cas des fluides, et sur laquelle j'ai déjà eu l'occasion d'insister dans ce Recueil même [1], à propos d'une question que je traiterai prochainement par une voie nouvelle.

Cette remarque est la suivante :

A un système de forces élastiques données ne *correspond* pas *nécessairement une déformation unique et déterminée.*

Tels sont les fluides qui, soumis à une pression uniforme, occupent un volume déterminé en grandeur, mais dont la forme reste indéterminée.

Il y a des corps qui sont incapables d'exercer sur d'autres certaines actions élastiques, et par conséquent de subir les réactions correspondantes. Si l'on réussit à donner aux divers points de ces corps un système de déplacements et de vitesses initiales qui, pour rester fini, exigerait le développement de pareilles forces, ces corps coulent ou se séparent.

Tels sont toujours les fluides incapables de résister aux moindres

---

[1] *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. IV, juillet 1887, p. 225 et 226, et Note à la fin du Volume.

actions tangentielles ou à des pressions normales différentes en différents sens.

Les deux points de vue sont ainsi indiqués : pour d'autres corps que les fluides, il faut rechercher les cas d'indétermination, moindre d'ailleurs, de la forme sous l'influence de forces déterminées; c'est le point de vue statique qui correspond à un équilibre indifférent si le corps est en repos, instable s'il y a des vitesses initiales. On peut aussi rechercher directement les cas d'équilibre instable, c'est le point de vue dynamique, et il importe de distinguer par un caractère simple les cas où cette instabilité a pour conséquence la rupture, de ceux où elle produit une déformation progressive sans rupture, au moins immédiate.

Ainsi l'hypothèse fondamentale est ici la même que dans la théorie ordinaire de l'élasticité :

A une déformation homogène déterminée d'un corps correspond un système de forces élastiques unique, déterminé sans aucune ambiguïté. Mais la réciproque peut n'être pas vraie.

Si le corps n'est pas en repos, les forces élastiques peuvent dépendre en outre des variations de la déformation avec le temps, mais je ne m'en occupe pas pour le moment. J'ai déjà indiqué et développé ailleurs (1) une hypothèse différente et moins simple, d'après laquelle toute déformation temporaire serait accompagnée d'une déformation permanente définie par le cycle de transformation; il ne m'est pas encore possible de dire dans quelle mesure cette ancienne hypothèse s'applique aux corps réels. Je pense que l'hypothèse que je développe actuellement contient une beaucoup plus grande part de vérité; mais je ne prétends pas la présenter comme absolument définitive ni surtout comme complète; et si, en continuant à y réfléchir, à comparer les conséquences de l'hypothèse avec les observations, je viens à imaginer des modifications utiles ou même d'autres hypothèses toutes différentes qui me paraissent contenir une autre part de vérité, je ne me ferai pas faute de les développer aussi. Sur ces sujets délicats, on ne

---

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 6, 13, 20 et 27 février 1888, et *Journal de Physique*, 2e série, t. VII (1888), p. 237, et t. VIII (1889), p. 169.

peut pas espérer atteindre la vérité par l'expérimentation pure; la preuve en est faite surabondamment par le nombre prodigieux de Mémoires de mesures qui, chacun à son tour, obscurcissent davantage un sujet déjà peu clair. Des hypothèses, développées jusqu'au point où la comparaison avec les mesures anciennes devient possible, sont tout à fait nécessaires; mais, loin de se borner à une seule hypothèse, il convient, pour n'être pas dupe, de chercher à faire une énumération aussi complète que possible de toutes celles que l'imagination humaine peut inventer, pour choisir ensuite l'hypothèse la plus compréhensive comme étant provisoirement la plus vraisemblable.

J'ose espérer pourtant que l'hypothèse actuelle aura besoin seulement d'être complétée pour tenir compte de la vitesse de déformation, mais subsistera dans ses traits généraux.

Déformations en fonction des forces. Cas d'indétermination. — Pour un corps isotrope, en admettant les lois de Hooke, on sait que les forces élastiques N, T sont données en fonction des dilatations et des glissements D, G par les relations

$$N_1 = \lambda(D_x + D_y + D_z) + 2\mu D_x, \qquad T_1 = \mu G_x$$

qui sont, en général, résolubles par rapport aux déformations et donnent

$$G_x = \frac{T_1}{\mu},$$

$$D_x + D_y + D_z = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{3\lambda + 2\mu}, \qquad D_x = \frac{N_1}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu}\,\frac{N_1 + N_2 + N_3}{3\lambda + \lambda\mu}.$$

Un premier cas d'indétermination bien connu est celui des fluides

$$\mu = 0,$$

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0, \qquad N_1 = N_2 = N_3 = \lambda(D_x + D_y + D_z),$$

$$D_x + D_y + D_z = \frac{N}{\lambda};$$

$$D_x - D_y, \quad D_x - D_z, \quad G_x, \quad G_y, \quad G_z \quad \text{indéterminés.}$$

Les six forces élastiques sont bien déterminées; mais elles ne dépendent que d'une seule déformation, la dilatation cubique. Aussi ces six équations n'en fournissent qu'une seule, distincte pour le calcul des six composantes de la déformation; cinq d'entre elles, les différences des dilatations linéaires et les glissements, restent indéterminées. Une déformation sans changement du volume total ne met en jeu aucune force élastique, ne change pas les valeurs des forces élastiques par unité de surface; une déformation sans changement du volume total est permanente. Les fluides sont en équilibre stable ($\lambda > 0$) pour tout changement de volume, indifférent pour les déformations sans changement de volume. La connaissance des forces élastiques par unité de surface ne suffit pas pour définir le changement de forme du fluide : il y faut ajouter des relations géométriques avec les corps extérieurs qui exercent la pression, la forme du vase en un mot. D'ailleurs, quelle que soit la forme finale prise par un élément de volume primitivement cubique, l'isotropie du milieu n'est pas altérée, et il n'y a pas à s'en préoccuper pour l'étude des déformations ultérieures.

Toutes ces remarques, évidentes dans le cas des fluides, se retrouveront pour les solides plastiques.

Un second cas d'indétermination se présente si l'on a (¹)

$$3\lambda + 2\mu = 0,$$

$$N_1 + N_2 + N_3 = 0, \qquad N_1 = \lambda(D_y + D_z - 2D_x), \qquad T_1 = -\tfrac{3}{2}\lambda G_x,$$

$$G_x = -\frac{2T_1}{3\lambda}, \qquad D_y - D_z = -\frac{N_2 - N_3}{3\lambda};$$

$$D_x + D_y + D_z \text{ indéterminé.}$$

On peut donc imaginer un autre type de solide isotrope, incapable de supporter une pression normale *uniforme,* mais capable de résister à des forces tangentielles, ou à des forces normales inégales ayant une somme nulle. Les différences des dilatations linéaires deux à deux sont seules déterminées, ainsi que les glissements. Mais les valeurs absolues des dilatations linéaires, ainsi que la dilatation cubique, sont indéterminées. La contraction cubique uniforme d'un tel corps ne met en jeu aucune force élastique; un tel corps résiste à la déformation, mais non à la compression cubique uniforme. Tout système de déplacements qui détruit l'homogénéité de ce corps sans déformer aucun

(¹) Ce sont les relations proposées par Stokes pour le frottement des fluides, en fonction des *vitesses* de déformation.

élément de volume n'altère pas l'équilibre. Mais si l'on donne, en outre, aux différents points du corps un système de vitesses initiales qui ne produise que des dilatations cubiques, sans glissements (1),

---

(1) Par exemple, sans rotation autour de Oz, on peut poser

$$\begin{aligned}
\psi &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\
&\quad - 3ax(y^2+z^2) - b(y^2+z^2) + exy + fxz + gx + hy + kz, \\
u &= \psi'_x = 3ax^2 + 2bx + c - 3a(y^2+z^2) + ey + fz + g, \\
v &= -\psi'_y = 6axy + 2by - ex - h, \\
w &= -\psi'_z = 6axz + 2bz - fx - k,
\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{3}\theta = u'_x = v'_y = w'_z = \psi''_{x^2} = -\psi''_{y^2} = -\psi''_{z^2} = 6ax + 2b,$$

et prendre u, v, w, soit comme des déplacements, soit comme des vitesses qui donnent lieu uniquement à des dilatations cubiques, croissant proportionnellement à x.

On peut trouver facilement la solution générale; on a, en effet,

$$u'_x = v'_y = w'_z = \tfrac{1}{3}\theta, \qquad u'_y + v'_x = 0, \qquad v'_z + w'_y = 0, \qquad w'_x + u'_z = 0;$$

d'où l'on tire aisément

$$\begin{aligned}
u''_{x^2} &= -u''_{y^2} = -u''_{z^2} = \tfrac{1}{3}\theta'_x, \\
-v''_{x^2} &= v''_{y^2} = -v''_{z^2} = \tfrac{1}{3}\theta'_y, \\
-w''_{x^2} &= -w''_{y^2} = w''_{z^2} = \tfrac{1}{3}\theta'_z;
\end{aligned}$$

puis

$$u''_{xy^2} + v''_{x^2y} = 0 = -\tfrac{1}{3}(\theta''_{x^2} + \theta''_{y^2})$$

et deux autres pareilles; d'où

$$\theta''_{x^2} = \theta''_{y^2} = \theta''_{z^2} = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\theta = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta xy + \varepsilon xz + \eta yz + \zeta xyz + \varphi,$$

$$\begin{aligned}
3u &= \alpha x^2 + 2\beta xy + 2\gamma xz + \delta x^2y + \varepsilon x^2z + 2\eta xyz + \zeta x^2yz + 2\varphi x + \psi_1(y,z), \\
3v &= 2\alpha xy + \beta y^2 + 2\gamma yz + \delta xy^2 + 2\varepsilon xyz + \eta y^2z + \zeta xy^2z + 2\varphi y + \psi_2(x,z), \\
3w &= 2\alpha xz + 2\beta yz + \gamma z^2 + 2\delta xyz + \varepsilon xz^2 + \eta yz^2 + \zeta xyz^2 + 2\varphi z + \psi_3(x,y)
\end{aligned}$$

et, pour que les glissements soient nuls,

$$u''_{yz} = v''_{xz} = w''_{xy} = 0, \qquad \delta = \varepsilon = \eta = \zeta = 0,$$

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= -\alpha(y^2+z^2) + \lambda y + \lambda' z + \lambda'', \\
\psi_2 &= -\beta(z^2+x^2) + \mu z + \mu' x + \mu'', \\
\psi_3 &= -\gamma(x^2+y^2) + \nu x + \nu' y + \nu'';
\end{aligned}$$

d'où, en somme,

$$\begin{aligned}
u &= \alpha(x^2-y^2-z^2) + 2\beta xy + 2\gamma xz + 2\varphi x + \lambda y + \lambda' z + \lambda'', \\
v &= \beta(y^2-x^2-z^2) + 2\alpha xy + 2\gamma yz + 2\varphi y + \mu z + \mu' x + \mu'', \\
w &= \gamma(-x^2-y^2+z^2) + 2\alpha xz + 2\beta yz + 2\varphi z + \nu x + \nu' y + \nu'',
\end{aligned}$$

solution qui ne diffère de la solution particulière que par l'orientation arbitraire de la ligne sans rotation.

aucune force élastique n'étant mise en jeu par cet état initial, les divers points conserveront leurs vitesses, et la déformation croîtra indéfiniment sans changer de caractère, l'hétérogénéité s'accentuant de plus en plus, indéfiniment, si le corps est illimité. On ne peut s'empêcher de remarquer une certaine analogie de propriétés d'une telle matière avec le fluide électrique unique de Franklin dans les corps conducteurs.

La différence est grande entre ce dernier corps et les liquides ou les gaz sans frottement. Ceux-ci sont en équilibre stable pour les déformations qui changent la densité; l'état homogène est stable; en particulier, un système quelconque de déplacements et de vitesses initiales n'entraîne de diminution indéfinie de la densité en aucun point, le corps reste continu. Au contraire, le dernier corps est instable pour les variations de densité, dès qu'elles sont accompagnées de vitesses initiales, si faibles qu'on les suppose; en certains points la densité peut diminuer indéfiniment, cela veut dire que la matière disparaît du voisinage de ces points, qu'il s'y forme une cavité, ne contenant plus de matière, en un mot, que le corps se rompt.

Plasticité. Fragilité. — L'examen de ces deux cas particuliers nous a donc suffi pour reconnaître les caractères qui distinguent la déformation progressive de la rupture, la plasticité de la fragilité.

Lorsqu'une déformation particulière ne fait naître aucune réaction élastique dans un corps, l'équilibre du corps est indifférent ou instable pour cette déformation, suivant qu'elle est produite dans le corps sans vitesses ou avec vitesses initiales. Si cette déformation particulière ne produit pas de variation de densité, elle s'accroît sans rupture. Si cette déformation particulière produit une variation de densité, elle entraîne rapidement la rupture, dans les régions où la dilatation cubique est la plus grande.

Nous ne connaissons pas de corps solide isotrope infiniment fragile, ce serait le corps insaisissable que nous avons étudié plus haut. Mais nous connaissons des corps très fragiles, tels que le verre, l'acier fortement trempé; nous connaissons aussi, outre les liquides et les gaz, toute une série de corps mous ou plastiques, intermédiaires entre les fluides et les solides proprement dits. Dans tous ces corps, l'instabilité n'existe pas lorsque la pression à laquelle ils sont soumis est nulle; mais elle apparaît dès qu'ils sont soumis à une pression même faible, mais non uniforme.

Un corps fragile est un corps dont de faibles déformations préalables altèrent assez l'élasticité pour rendre instables les variations de densité, en rendant nuls, puis négatifs les accroissements de tension correspondant à une diminution de densité.

Un corps plastique est un corps dont de faibles déformations préalables (celles qui résultent simplement de son poids, s'il est en quantité un peu grande) altèrent assez l'élasticité pour rendre instable un glissement sans variation de densité, en rendant nul, puis négatif l'accroissement de force tangentielle correspondant à l'accroissement de ce glissement.

N. B. — Il ne s'agit pas des glissements en tous sens, ce qui rendrait le corps fluide, mais d'un glissement particulier en chaque point.

Fusion pâteuse. — Pour presque tous les corps isotropes, le coefficient d'élasticité de torsion (μ) diminue plus vite, lorsque la température croît, que le coefficient de compressibilité cubique. En général, ce coefficient conserve pourtant une valeur finie à la température de fusion, et pendant la fusion, lorsqu'elle est nette, le coefficient de torsion devient brusquement nul, et le coefficient de compressibilité cubique $(3\lambda + 2\mu)$ diminue brusquement beaucoup. Il existe pourtant des corps, peut-être sont-ce toujours des mélanges, qui se ramollissent et passent progressivement de l'état solide à l'état liquide sans point de fusion net; pour ceux-ci, le coefficient de torsion μ n'éprouve pas de changement brusque et tombe sans discontinuité à zéro, bien que le coefficient de compressibilité cubique reste fini.

Corps anisotropes. — Considérons maintenant un corps homogène anisotrope. A température constante, en tenant compte de l'existence de l'énergie et de l'entropie, les forces élastiques sont données par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} N_1 = A_{11} D_x + A_{12} D_y + A_{13} D_z + A_{14} G_x + A_{15} G_y + A_{16} G_z, \\ T_1 = A_{41} D_x + A_{42} D_y + A_{43} D_z + A_{44} G_x + A_{45} G_y + A_{46} G_z, \end{cases}$$

dans lesquelles l'ordre des indices des A est indifférent.

Ces six équations déterminent en général les déformations en fonction des forces. Il y a exception lorsque le déterminant des coefficients est nul. Appelons Δ ce déterminant et Δ_{11}, Δ_{12}, ... ses mineurs par rapport à A_{11}, A_{12}, ..., on a

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta D_x &= \Delta_{11}N_1+\Delta_{12}N_2+\Delta_{13}N_3+\Delta_{14}T_1+\Delta_{15}T_2+\Delta_{16}T_3,\\ \Delta G_x &= \Delta_{41}N_1+\Delta_{42}N_2+\Delta_{43}N_3+\Delta_{44}T_1+\Delta_{45}T_2+\Delta_{46}T_3,\\ \Delta(D_x+D_y+D_z) &= (\Delta_{11}+\Delta_{12}+\Delta_{13})N_1+(\Delta_{12}+\Delta_{22}+\Delta_{23})N_2+(\Delta_{13}+\Delta_{23}+\Delta_{33})N_3\\ &\quad+(\Delta_{14}+\Delta_{24}+\Delta_{34})T_1+(\Delta_{15}+\Delta_{25}+\Delta_{35})T_2+(\Delta_{16}+\Delta_{26}+\Delta_{36})T_3. \end{aligned}\right.$$

Lorsque le déterminant Δ est nul, il y a entre les forces N, T une relation linéaire et homogène imposée par la nature du corps. Il y a donc une certaine combinaison de forces à laquelle le corps est incapable de résister; il y a une certaine déformation qui n'exige aucun travail et ne donne naissance à aucune réaction élastique. Le cristal est susceptible de déformation progressive ou de clivage suivant que la dilatation cubique est indépendante ou dépend de cette déformation critique.

Supposons, par exemple, que la composante T_3 soit identiquement nulle quelle que soit la déformation, c'est-à-dire que sur les deux faces perpendiculaires, l'une à Ox, l'autre à Oy, aucune déformation ne puisse donner naissance à une composante tangentielle perpendiculaire à Oz. On a alors

$$A_{16}=A_{26}=A_{36}=A_{46}=A_{56}=A_{66}=0,$$

ce qui fait disparaître le glissement G_z de toutes les autres forces élastiques et de l'énergie. Le glissement G_z n'exige aucun travail, il ne donne naissance à aucune réaction, il ne change pas l'état élastique du corps. Un déplacement

$$u=\varphi(y), \qquad v=\psi(x), \qquad w=0$$

ne produit aucun changement des propriétés du corps; il est tout entier permanent. Un déplacement complexe dans lequel les glissements G_z ne sont pas nuls est en partie temporaire, en partie permanent. D'ailleurs ces glissements G_z se produiront toujours très facilement, puisque aucune réaction élastique ne les limite, lorsqu'un accident quelconque les a fait commencer avec une vitesse même très petite.

Un pareil corps anisotrope serait solide en tous sens, à l'exception d'une direction dans un plan pour laquelle il serait fluide. Nous n'en connaissons aucun exemple rigoureux, mais nous savons par l'expérience de Reusch et Baumhauer sur le spath, que dans ce corps un grand glissement est possible sans rupture suivant un certain plan. Par conséquent une faible déformation préalable suffit pour rendre nuls les coefficients d'une certaine composante tangentielle de ce plan; ceux-ci sont donc très petits par rapport à la plupart des autres coefficients d'élasticité du spath dans l'état naturel.

Si la déformation qui ne met en jeu aucune force élastique est une certaine dilatation linéaire ou une combinaison de dilatations linéaires et de glissements, il arrivera en général que l'accroissement de cette déformation aura pour conséquence l'accroissement indéfini de la dilatation cubique suivant certains plans de direction déterminée, c'est-à-dire, comme nous l'avons expliqué plus haut (p. 351), la rupture du corps, suivant ces plans. Cela se produit dans un très grand nombre de cristaux à la suite de déformations préalables plus ou moins grandes. C'est le phénomène du *clivage* qui nous fournit ainsi des relations approchées entre les coefficients d'élasticité déjà réduits par les considérations de symétrie.

Je me borne ici à ces courtes indications sur les corps anisotropes, dont l'étude fera l'objet d'un prochain Mémoire.

États vibratoires d'un corps homogène limité. Cas où une période est infinie. — Nous allons retrouver les mêmes conclusions pour un corps limité en nous plaçant au point de vue dynamique au lieu du point de vue statique. Lorsque les forces élastiques sont des fonctions linéaires des déformations, l'équilibre est stable si l'énergie reste positive pour toute déformation virtuelle. Si l'on peut trouver un système de déformations virtuelles qui rende l'énergie nulle ou négative, l'équilibre est instable. Toute déformation virtuelle peut se décomposer en une infinité de déformations simples dont les périodes distinctes sont les racines d'une équation généralement transcendante. Un des modes d'investigation de la stabilité de l'équilibre consiste précisément, comme on sait, à prouver que toutes les périodes sont nécessairement réelles si l'énergie virtuelle ne peut être que positive. La démonstration montre en même temps que, à une déformation virtuelle simple qui fournit une valeur nulle ou négative de l'énergie virtuelle correspond une période infinie ou imaginaire pure, c'est-à-dire une déformation qui croît avec le temps soit comme une fonction linéaire, soit comme une fonction exponentielle, instable par conséquent. Mais une déformation qui laisse l'énergie nulle, à laquelle ne correspond aucun travail, et par suite aucune réaction élastique, est précisément cette déformation indéterminée dont nous avons assez longuement parlé jusqu'ici. Les deux ordres de considérations sont donc parfaitement d'accord pour des corps élastiques homogènes isotropes ou non qui obéissent aux lois de Hooke. C'est une autre question de savoir s'il en est de même en dehors des limites de ces lois, et dont l'examen détaillé fera l'objet du troisième Mémoire.

États vibratoires d'un corps illimité en tous sens. Cas où une vitesse de propagation est nulle. — Il semble qu'on fasse un raisonnement équivalent en partant d'un point de vue un peu différent. Dans un corps homogène indéfini, tout système de déplacements distribué par ondes planes uniformes a une vitesse de propagation déterminée qui dépend de l'orientation du plan d'onde et de l'orientation du déplacement. C'est ainsi que dans les solides isotropes de la Théorie de l'élasticité, les déplacements longitudinaux ont une vitesse de propagation, et les déplacements transversaux une autre. Dans les liquides et les gaz, la vitesse de propagation des déplacements transversaux est nulle; des deux systèmes de mouvements simples qui dans un corps isotrope se propagent indépendamment l'un de l'autre, rotations et dilatations cubiques, les premières ne se propagent pas dans les liquides et restent sur place soit comme déformations permanentes, soit comme vitesses de rotation constantes, sans altérer d'ailleurs la continuité du fluide.

De même, un déplacement simple quelconque peut se propager avec une vitesse finie, ou nulle, ou imaginaire pure; et à ces deux derniers cas correspondent des déplacements qui croissent avec le temps linéairement ou comme une exponentielle, sans se propager; ce sont donc des déplacements essentiellement instables, qui produisent une déformation progressive ou la rupture, suivant qu'ils sont dépendants ou indépendants de la dilatation cubique.

L'étude des vitesses de propagation normale des ondes planes uniformes conduit donc à la conclusion suivante :

L'état d'équilibre d'un corps illimité est stable lorsque la surface des vitesses normales est entièrement réelle; il est instable lorsque une nappe de cette surface passe par son centre sans devenir imaginaire, ou devient imaginaire à l'intérieur d'un certain cône tangent en son centre.

Il suffit de se reporter aux équations du mouvement et de se rappeler par quelles opérations on obtient la surface des vitesses normales pour être convaincu que le nouveau critérium diffère des précédents. Montrons-en de suite un exemple : le corps isotrope incapable de résister à la moindre pression normale uniforme $(3\lambda + 2\mu = 0)$ a pourtant une surface d'onde complètement réelle, formée d'une nappe double sphérique de rayon $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ pour les vibrations transversales, et d'une nappe simple également sphérique de rayon $\sqrt{\frac{4\mu}{3\rho}}$ pour les vibrations longitudinales, ou de condensation, car dans ce dernier cas l'inégalité des trois dilatations rectangulaires donne naissance à des forces élastiques déterminées, et la déformation qui n'est pas accompagnée de rotations ne se réduit pas à une pure dilatation cubique uniforme.

L'équilibre est pourtant indifférent ou instable; il est facile de s'en assurer. Considérons pour cela un système de déplacements produisant une dilatation cubique pure, c'est-à-dire satisfaisant aux équations

$$u'_x = v'_y = w'_z = \tfrac{1}{3}\theta, \qquad u'_y + v'_x = 0, \qquad v'_z + w'_y = 0, \qquad w'_x + u'_z = 0,$$

et dont la solution générale a été donnée en note. Des conditions écrites, on tire facilement

$$u''_{x^2} = \tfrac{1}{3}\theta'_x, \qquad u''_{y^2} = -v''_{xy} = -\tfrac{1}{3}\theta'_x, \qquad u''_{z^2} = -w''_{xz} = -\tfrac{1}{3}\theta'_x,$$

et, en portant dans l'une des équations,

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tfrac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta_2 u,$$

on trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;$$

de même pour v, w. Cette déformation particulière peut donc croitre sans limite proportionnellement au temps, si les vitesses initiales d'accroissement de u, v, w ne sont pas rigoureusement nulles partout.

Une réserve est toutefois nécessaire : ce déplacement ne reste pas fini à toute distance, ce n'est donc pas un déplacement virtuel à considérer pour un milieu indéfini, mais seulement pour un milieu limité, quelle que soit sa forme d'ailleurs.

Telle est la cause de la différence des deux résultats.

Le système de déplacements et de vitesses virtuelles admissible doit rester fini, même à distance infinie pour un corps illimité, mais seulement dans l'intérieur du corps pour un corps limité.

Il est d'ailleurs facile de s'assurer [1] que tout système de déplacements dans un corps illimité résulte de la superposition d'ondes planes

---

[1] Considérons en effet un déplacement U, et appliquons la formule de Fourier

$$U = f(x,y,z) = \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int_0^\infty d\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \, \frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{\pi^3} \cos\alpha(x-\xi)\cos\beta(y-\eta)\cos\gamma(z-$$

ou en développant l'intégrale triple par rapport à $d\xi\, d\eta\, d\zeta$, et désignant par U_{111}, U_{112}, ... des coefficients qui ne sont plus fonctions que de α, β, γ,

$$U = \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int_0^\infty d\gamma \left\{ \begin{array}{l} \quad U_{111} \cos\alpha x \cos\beta y \cos\gamma z + U_{112} \cos\alpha x \cos\beta y \sin\gamma z \\ + U_{121} \cos\alpha x \sin\beta y \cos\gamma z + U_{122} \cos\alpha x \sin\beta y \sin\gamma z \\ + U_{211} \sin\alpha x \cos\beta y \cos\gamma z + U_{212} \sin\alpha x \cos\beta y \sin\gamma z \\ + U_{221} \sin\alpha x \sin\beta y \cos\gamma z + U_{222} \sin\alpha x \sin\beta y \sin\gamma z \end{array} \right\}.$$

Le changement des variables α, β, γ en d'autres qui définissent la normale à une onde plane uniforme se fait très facilement, en considérant α, β, γ comme les coordonnées rectangulaires d'un point dont les coordonnées polaires sont λ, θ, φ; l'élément de volume, quand on intègre par rapport à ces dernières variables, est

$$\lambda^2 \sin\theta \, d\theta \, d\lambda \, d\varphi.$$

On a d'ailleurs, en prenant Ox pour axe polaire,

$$\alpha = \lambda\cos\theta, \qquad \beta = \lambda\sin\theta\cos\varphi, \qquad \gamma = \lambda\sin\theta\sin\varphi,$$

uniformes convenablement choisies, d'amplitude finie lorsque les déplacements sont finis, même à distance infinie. Concluons donc :

La limite de stabilité d'un corps illimité est donnée par la considération des vitesses de propagation normale des ondes planes et uniformes qui deviennent nulles.

La limite de stabilité du même corps pris en masse limitée de forme quelconque est donnée par la considération des déformations qui deviennent indéterminées.

Ces limites sont différentes, et la dernière généralement plus resserrée que la première.

Travail mécanique des métaux. — Le travail des métaux par lami-

---

et, en posant

$$\begin{aligned}
U_{111} &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4, & U_{112} &= B_1 - B_2 + B_3 - B_4,\\
U_{122} &= -A_1 + A_2 + A_3 - A_4, & U_{121} &= B_1 + B_2 - B_3 - B_4,\\
U_{221} &= -A_1 - A_2 + A_3 + A_4, & U_{222} &= -B_1 + B_2 + B_3 - B_4,\\
U_{212} &= -A_1 + A_2 - A_3 + A_4, & U_{211} &= B_1 + B_2 + B_3 + B_4,
\end{aligned}$$

on peut écrire la parenthèse sous la forme

$$\begin{aligned}
&A_1 \cos(\alpha x + \beta y + \gamma z) + B_1 \sin(\alpha x + \beta y + \gamma z),\\
&+ A_2 \cos(\alpha x + \beta y - \gamma z) + B_2 \sin(\alpha x + \beta y - \gamma z),\\
&+ A_3 \cos(\alpha x - \beta y + \gamma z) + B_3 \sin(\alpha x - \beta y + \gamma z),\\
&+ A_4 \cos(\alpha x - \beta y - \gamma z) + B_4 \sin(\alpha x - \beta y - \gamma z),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire sous la forme de quatre ondes de période $\frac{2\pi}{\lambda}$ ayant leurs normales dans les quatre trièdres droits autour de Ox positif. En étendant l'intégration à tout ce côté du plan Oyz; nous avons bien

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} [A \cos(\alpha x + \beta y + \gamma z) + B \sin(\alpha x + \beta y + \gamma z)]\lambda^2\, d\lambda$$

et enfin

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, F(x\cos\theta + y \sin\theta\cos\varphi + z\sin\theta\sin\varphi).$$

Les ondes F sont bien des ondes planes uniformes, orientées en tous sens dans l'espace.

nage, étirage, martelage, exige que les forces mises en jeu par l'action continue des laminoirs, de la filière, ou l'action intermittente du marteau rendent indéterminée une déformation dans une partie au moins de l'épaisseur de la matière; l'indétermination s'étend d'ordinaire à toute l'épaisseur, ainsi qu'il résulte de l'étirage des fils à la Wollaston, du laminage des feuilles mixtes de plaqué. D'ailleurs, pour éviter la rupture, il faut que la déformation, qui devient indéterminée, soit indépendante de la dilatation cubique.

De ces trois procédés, le martelage est évidemment le plus incertain. Dans le laminage et l'étirage, l'outil produit un état instable à déformation progressive, agit pendant un certain temps sur chaque portion de matière et cesse brusquement d'agir; la durée d'action assez longue permet de se contenter de la limite d'instabilité pour obtenir une déformation permanente notable. Dans le martelage, au contraire, pour que chaque choc produise, malgré sa très courte durée, une déformation permanente appréciable, il faut dépasser notablement la limite d'instabilité, et il devient bien plus difficile d'éviter partout l'apparition des dilatations cubiques, causes de rupture totale, ou au moins d'une multitude de fêlures microscopiques et de l'*énervement* du métal.

Rayure. Dureté. — Une pointe appuyée à la surface d'un corps peut, lorsque la pression est suffisante, rendre indéterminée une déformation particulière au voisinage immédiat de la surface de contact. Il y aura alors pénétration de la pointe, avec formation d'un bourrelet latéral, si la dilatation cubique est indépendante de la déformation instable, et la pointe s'arrêtera dès que l'accroissement de la surface de contact aura assez diminué les pressions locales pour que l'indétermination et l'instabilité cessent. Si la dilatation cubique dépend de la déformation indéterminée, la pointe produira des ruptures orientées suivant la forme de la pointe et la symétrie de la surface, et pour une pointe arrondie la pulvérisation d'une partie de la matière sous-jacente. On voit de suite que, sous une pointe arrondie, la pénétration se fera, en général, sans rupture ou avec rupture, suivant que le corps étudié est plastique ou fragile, c'est-à-dire suivant que les déformations indéterminées, qui apparaissent le plus facilement, laissent hors de cause ou modifient la dilatation cubique.

Je n'ai fait dans cette introduction qu'indiquer rapidement les idées générales et leurs conséquences. Sur les divers sujets énumérés, clivage des cristaux, déformations progressives et permanentes ou rupture des corps isotropes, les Mémoires particuliers sont ou prêts ou très avancés et pourront, je pense, se succéder très rapidement dans ces *Annales*.