E. BLUTEL

Recherches sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 7 (1890), p. 155-216

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1890_3_7__155_0>

RECHERCHES SUR LES SURFACES

QUI SONT EN MÊME TEMPS

LIEUX DE CONIQUES ET ENVELOPPES DE CONES

DU SECOND DEGRÉ,

Par M. E. BLUTEL,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU PRYTANÉE MILITAIRE.

INTRODUCTION.

Les surfaces engendrées par des coniques ont été l'objet de nombreuses recherches; nous rappellerons particulièrement les travaux de MM. Steiner, Kummer, Clebsch, Darboux et Kœnigs sur des surfaces algébriques d'ordre supérieur au second et possédant une ou plusieurs séries de coniques.

Les surfaces enveloppes de sphères ont donné naissance également à un grand nombre de théorèmes remarquables, et les surfaces cerclées ont été étudiées d'une façon générale par M. Demartres, dans sa thèse *Sur les surfaces à génératrices circulaires*.

M. Schwarz a enfin examiné les surfaces minima enveloppes de cônes du second degré, que nous retrouverons plus loin dans cette étude.

Nous nous proposons, dans ce travail, de rechercher les propriétés particulières aux surfaces engendrées par une conique variable dépendant d'un paramètre, dans le cas où il existe un cône circonscrit à la surface le long de chaque conique.

La première Partie est consacrée à la démonstration d'un théorème important touchant le système formé par les coniques et leurs lignes conjuguées sur la surface, puis à la recherche des équations générales des surfaces engendrées de cette façon, et à la démonstration de propriétés géométriques concernant le déplacement des génératrices ou celui des cônes enveloppants; enfin, à la détermination de certaines catégories de surfaces simples jouissant de ce mode de génération.

Dans la seconde Partie, nous étudions principalement les propriétés des lignes asymptotiques de ces surfaces, et nous cherchons à déterminer certaines espèces pour lesquelles ces propriétés se transforment en d'autres plus simples.

Enfin, une troisième Partie est consacrée à l'étude de quelques propriétés non projectives, et particulièrement à la recherche des trajectoires orthogonales d'un système de coniques dépendant d'un paramètre.

Un grand nombre de propriétés que nous démontrerons peuvent être généralisées; dans quelques cas, nous nous contenterons d'énoncer cette généralisation.

PREMIÈRE PARTIE.

Considérons une série de cônes du second degré dépendant d'un paramètre variable; ces cônes enveloppent une surface, que l'on peut regarder aussi comme engendrée par une quartique à point double. En effet, deux cônes infiniment voisins se coupent suivant une pareille courbe, qui est la courbe de contact de l'un d'eux avec l'enveloppe. On s'en assure aisément par la considération de l'équation générale des cônes

$$\varphi(x - X, y - Y, z - Z) = 0, \tag{1}$$

φ étant une forme quadratique homogène dont les coefficients dépendent d'un paramètre λ, et XYZ désignant les coordonnées du sommet du cône qui dépendent du même paramètre.

Si l'on suppose le sommet S pris comme origine d'un nouveau système d'axes ($Sx'y'z'$) parallèles aux premiers, l'intersection du cône (1) avec le cône infiniment voisin est définie par les deux équations

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi(x', y', z') = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda} - \dfrac{dX}{d\lambda}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x'} - \dfrac{dY}{d\lambda}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'} - \dfrac{dZ}{d\lambda}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z'} = 0. \end{cases}$$

Ces équations montrent bien le fait énoncé, et font voir, de plus, que les tangentes au point double à la caractéristique du cône sont contenues dans le plan

$$(3) \qquad \frac{dX}{d\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + \frac{dY}{d\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial y'} + \frac{dZ}{d\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial z'} = 0,$$

c'est-à-dire dans le plan diamétral conjugué par rapport au cône de la tangente ST à la trajectoire Σ de son sommet.

Nous voulons que la caractéristique soit une conique; il faut donc que la courbe (2) se décompose et, par suite, que l'on puisse faire passer un système de deux plans par l'intersection des surfaces (2). L'un de ces plans sera nécessairement le plan (3), et la caractéristique se décomposera en une conique C et en un système de deux génératrices que nous appellerons SH et SH'. Il est à remarquer que ces deux droites sont les génératrices de contact du cône avec les plans tangents qui lui sont menés par ST; le cône touchera son enveloppe suivant ces deux droites et suivant C. Ces droites SH et SH' vont donc engendrer deux développables, Δ et Δ', circonscrites à Σ et tangentes à tous les cônes. On peut dire que deux cônes infiniment voisins ont deux plans tangents communs, TSH et TSH', de même que deux quadriques qui se coupent suivant deux coniques. Ces surfaces se transformant en d'autres de même espèce, dans une transformation par polaires réciproques, sont aussi engendrées par des coniques qui admettent deux courbes enveloppes. Ainsi :

Les surfaces que nous étudions peuvent être envisagées soit comme enveloppes de cônes roulant sur deux développables, soit comme lieux de coniques roulant sur deux courbes.

A cette catégorie appartiennent évidemment les quadriques; pour celles-ci, d'ailleurs, la trajectoire du sommet du cône ou la développable enveloppe des plans des coniques peut être choisie arbitrairement, et l'une est la polaire réciproque de l'autre par rapport à la quadrique. Nous remarquerons encore que, pour les surfaces du second degré, les points de rencontre K et K′ de deux coniques infiniment voisines sont confondus avec les pieds H et H′ des génératrices précédentes sur la conique. Cette particularité importante, comme nous le verrons plus tard, ne se trouve pas réalisée en général.

Les différentes propriétés que nous venons de découvrir par la Géométrie peuvent être établies aussi par le calcul; nous allons en reprendre l'étude; mais, auparavant, nous démontrerons la proposition fondamentale suivante :

Théorème. — *Les génératrices coniques de la surface sont divisées homographiquement par leurs lignes conjuguées.*

Supposons que, par un procédé quelconque, on ait mis les équations de la conique variable sous la forme

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= X + \frac{p_1\mu^2 + 2q_1\mu + r_1}{P\mu^2 + 2Q\mu + R} = X + \frac{n_1}{N}, \\ y &= Y + \frac{p_2\mu^2 + 2q_2\mu + r_2}{P\mu^2 + 2Q\mu + R} = Y + \frac{n_2}{N}, \\ z &= Z + \frac{p_3\mu^2 + 2q_3\mu + r_3}{P\mu^2 + 2Q\mu + R} = Z + \frac{n_3}{N}. \end{aligned} \right.$$

p_1, q_1, r_1, ..., P, Q, R, X, Y, Z étant des fonctions de λ, et μ désignant un paramètre variable [X, Y, Z sont encore les coordonnées du sommet du cône circonscrit le long de la conique (λ)]. Cette forme d'équations suppose que les courbes $\mu =$ const. forment un système qui partage homographiquement les coniques proposées.

En écrivant que le plan tangent à la surface engendrée par la conique (4) va passer par le sommet S (X, Y, Z), quel que soit μ, nous obtenons l'identité

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} n_1 & \dfrac{\partial n_1}{\partial \mu} & \dfrac{\partial n_1}{\partial \lambda} + N\dfrac{dX}{d\lambda} \\ n_2 & \dfrac{\partial n_2}{\partial \mu} & \dfrac{\partial n_2}{\partial \lambda} + N\dfrac{dY}{d\lambda} \\ n_3 & \dfrac{\partial n_3}{\partial \mu} & \dfrac{\partial n_3}{\partial \lambda} + N\dfrac{dZ}{d\lambda} \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre est un polynôme du quatrième degré par rapport à μ, ce qui fournit cinq relations entre les fonctions de λ qui figurent dans les équations de la surface.

Cherchons maintenant les courbes conjuguées des coniques (4); ce sont les arêtes de rebroussement des développables engendrées par les génératrices des cônes tangents à la surface le long des coniques. Ces cônes sont définis par les équations

$$\frac{x-\mathrm{X}}{n_1}=\frac{y-\mathrm{Y}}{n_2}=\frac{z-\mathrm{Z}}{n_3}, \tag{6}$$

où l'on fait varier μ. Cela permet d'écrire l'équation des conjuguées

$$\begin{vmatrix} n_1 & \dfrac{d\mathrm{X}}{d\lambda} & \dfrac{\partial n_1}{\partial\lambda}+\dfrac{\partial n_1}{\partial\mu}\dfrac{d\mu}{d\lambda} \\ n_2 & \dfrac{d\mathrm{Y}}{d\lambda} & \dfrac{\partial n_2}{\partial\lambda}+\dfrac{\partial n_2}{\partial\mu}\dfrac{d\mu}{d\lambda} \\ n_3 & \dfrac{d\mathrm{Z}}{d\lambda} & \dfrac{\partial n_3}{\partial\lambda}+\dfrac{\partial n_3}{\partial\mu}\dfrac{d\mu}{d\lambda} \end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

Or, l'identité (5) conduit aux suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial\lambda}+\mathrm{N}\frac{d\mathrm{X}}{d\lambda}&=\alpha n_1+\beta\frac{\partial n_1}{\partial\mu}, \\ \frac{\partial n_2}{\partial\lambda}+\mathrm{N}\frac{d\mathrm{Y}}{d\lambda}&=\alpha n_2+\beta\frac{\partial n_2}{\partial\mu}, \\ \frac{\partial n_3}{\partial\lambda}+\mathrm{N}\frac{d\mathrm{Z}}{d\lambda}&=\alpha n_3+\beta\frac{\partial n_3}{\partial\mu}, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

α et β désignant des fonctions de λ et μ convenablement choisies.

Si l'on tire de là les valeurs de $\frac{\partial n_1}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial n_2}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial n_3}{\partial\lambda}$ pour les porter dans (7), celle-ci devient

$$\left(\beta+\frac{d\mu}{d\lambda}\right)\begin{vmatrix} n_1 & \dfrac{d\mathrm{X}}{d\lambda} & \dfrac{\partial n_1}{\partial\mu} \\ n_2 & \dfrac{d\mathrm{Y}}{d\lambda} & \dfrac{\partial n_2}{\partial\mu} \\ n_3 & \dfrac{d\mathrm{Z}}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial n_3}{\partial\mu} \end{vmatrix}=0. \tag{9}$$

Laissant de côté le déterminant qui figure dans cette équation et qui n'est pas nul identiquement, nous arrivons à l'équation

$$\frac{d\mu}{d\lambda} + \beta = 0. \tag{10}$$

Posons

$$\delta = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix},$$

déterminant qui n'est pas nul, quel que soit λ, sans quoi le cône circonscrit se réduirait à un plan, et appelons ϖ_i, χ_i, ρ_i les dérivées partielles de ce déterminant par rapport aux éléments p_i, q_i, r_i. Un calcul simple, effectué au moyen des équations (8), permet d'écrire

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} 2\delta\beta = {}& +(\chi_1 - 2\mu\rho_1)\left(\frac{\partial n_1}{\partial\lambda} + \mathrm{N}\frac{d\mathrm{X}}{d\lambda}\right) \\ & + (\chi_2 - 2\mu\rho_2)\left(\frac{\partial n_2}{\partial\lambda} + \mathrm{N}\frac{d\mathrm{Y}}{d\lambda}\right) + (\chi_3 - 2\mu\rho_3)\left(\frac{\partial n_3}{\partial\lambda} + \mathrm{N}\frac{d\mathrm{Z}}{d\lambda}\right). \end{aligned}\right.$$

Le second membre semble être du troisième degré par rapport à μ; mais il est aisé de voir que le coefficient du terme en μ^3 est nul : c'est, à un facteur près,

$$\rho_1\left(\frac{dp_1}{d\lambda} + \mathrm{P}\frac{d\mathrm{X}}{d\lambda}\right) + \rho_2\left(\frac{dp_2}{d\lambda} + \mathrm{P}\frac{d\mathrm{Y}}{d\lambda}\right) + \rho_3\left(\frac{dp_3}{d\lambda} + \mathrm{P}\frac{d\mathrm{Z}}{d\lambda}\right),$$

c'est-à-dire le coefficient du terme en μ^4 dans l'identité (5).

β est donc un polynôme du second degré en μ et l'équation (10) est une équation de Riccati, d'où l'on conclut la propriété énoncée plus haut.

Des considérations analogues permettent de démontrer la propriété suivante, plus générale :

Imaginons une congruence de droites admettant une courbe focale. Supposons que le cône de droites ayant son sommet en un point de cette courbe soit unicursal et que, de plus, sa courbe de contact avec la surface focale soit plane. Les courbes conjuguées de ces courbes de contact, c'est-à-dire les arêtes de rebroussement des développables engendrées par les droites de la congruence sont fournies par l'intégration d'une équation

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{A(\lambda, \mu)}{B(\lambda, \mu)},$$

où A est un polynôme de degré $r+2$ au plus, et B un polynôme de degré r par rapport à μ, si r désigne le nombre des génératrices de rebroussement du cône de la congruence dont l'ordre n n'intervient pas. En particulier, si le cône n'a pas de génératrices de rebroussement, on tombe sur une équation de Riccati, et nous retrouvons le théorème démontré plus haut pour les surfaces enveloppes de cônes du second degré et lieux de coniques.

La question suivante se pose maintenant :

Les surfaces étudiées sont-elles les seules dont les génératrices coniques soient partagées homographiquement par les courbes conjuguées ?

Supposons qu'une surface jouisse de cette propriété; on pourra mettre ses équations sous la forme

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{N_1}{N} = \frac{P_1(\lambda)\mu^2 + 2\,Q_1(\lambda)\mu + R_1(\lambda)}{P(\lambda)\mu^2 + 2\,Q(\lambda)\mu + R(\lambda)}, \\ y &= \frac{N_2}{N} = \frac{P_2\mu^2 + 2\,Q_2\mu + R_2}{P\mu^2 + 2\,Q\mu + R}, \\ z &= \frac{N_3}{N} = \frac{P_3\mu^2 + 2\,Q_3\mu + R_3}{P\mu^2 + 2\,Q\mu + R}, \end{aligned} \right.$$

les lignes $\lambda = \text{const.}$ étant les coniques, et les courbes $\mu = \text{const.}$ leurs conjuguées. On alors identiquement

$$\begin{vmatrix} N & N_1 & N_2 & N_3 \\ \dfrac{\partial N}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial N_1}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial N_2}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial N_3}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial N}{\partial \mu} & \dfrac{\partial N_1}{\partial \mu} & \dfrac{\partial N_2}{\partial \mu} & \dfrac{\partial N_3}{\partial \mu} \\ \dfrac{\partial^2 N}{\partial \lambda\,\partial \mu} & \dfrac{\partial^2 N_1}{\partial \lambda\,\partial \mu} & \dfrac{\partial^2 N_2}{\partial \lambda\,\partial \mu} & \dfrac{\partial^2 N_3}{\partial \lambda\,\partial \mu} \end{vmatrix} = 0.$$

On en déduit, comme plus haut, que l'on peut poser

$$\frac{\partial N_i}{\partial \lambda} = \alpha N_i + \beta \frac{\partial N_i}{\partial \mu} + \gamma \frac{\partial^2 N_i}{\partial \lambda\,\partial \mu},$$

α, β, γ étant trois fonctions convenablement choisies de λ et μ.

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation du plan tangent en un point de la surface (12), savoir

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ N & N_1 & N_2 & N_3 \\ \frac{\partial N}{\partial \lambda} & \frac{\partial N_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial N_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial N_3}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial N}{\partial \mu} & \frac{\partial N_1}{\partial \mu} & \frac{\partial N_2}{\partial \mu} & \frac{\partial N_3}{\partial \mu} \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle est en général du quatrième degré par rapport à μ, elle devient

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ N & N_1 & N_2 & N_3 \\ \frac{\partial N}{\partial \mu} & \frac{\partial N_1}{\partial \mu} & \frac{\partial N_2}{\partial \mu} & \frac{\partial N_3}{\partial \mu} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial \lambda\, \partial \mu} & \frac{\partial^2 N_1}{\partial \lambda\, \partial \mu} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial \lambda\, \partial \mu} & \frac{\partial^2 N_3}{\partial \lambda\, \partial \mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette dernière n'est plus que du troisième degré en général; cela prouve que, si les coniques sont partagées homographiquement par leurs conjuguées, la développable circonscrite à la surface le long de chacune d'elles est de troisième classe au plus, au lieu d'être de quatrième classe comme dans le cas général. On en déduit aisément que deux coniques infiniment voisines se rencontrent en un point et, par suite, que les coniques ont une enveloppe. Si l'on appelle $x_0(\lambda)$, $y_0(\lambda)$, $z_0(\lambda)$ les coordonnées d'un point quelconque de cette enveloppe, une transformation homographique effectuée sur la variable μ permettra de mettre les équations de la surface sous la forme

$$(13)\quad \begin{cases} x = \dfrac{N_1}{N} = \dfrac{1}{1+\mu^2}\left(x_0 + 2u\dfrac{dx_0}{d\lambda}\mu + u_1\mu^2\right), \\ y = \dfrac{N_2}{N} = \dfrac{1}{1+\mu^2}\left(y_0 + 2u\dfrac{dy_0}{d\lambda}\mu + u_2\mu^2\right), \\ z = \dfrac{N_3}{N} = \dfrac{1}{1+\mu^2}\left(z_0 + 2u\dfrac{dz_0}{d\lambda}\mu + u_3\mu^2\right), \end{cases}$$

où u, u_1, u_2, u_3 sont des fonctions quelconques de λ. Toutefois, cela suppose que les coniques en question ne sont pas des paraboles, les racines de $1+\mu^2$ ne pouvant être égales; on traiterait aisément ce cas particulier.

Formons, au moyen de ces équations, l'équation différentielle des conjuguées; c'est

$$B\frac{d\mu}{d\lambda}=A, \tag{14}$$

en posant

$$A=-au^2\mu^3+b\mu^2+au^2\mu+cu,$$
$$B=fu\mu-2cu^2,$$

a, b, c, f désignant certaines fonctions de λ; on a, en particulier,

$$c=\begin{vmatrix} x_0-u_1 & y_0-u_2 & z_0-u_3 \\ \dfrac{dx_0}{d\lambda} & \dfrac{dy_0}{d\lambda} & \dfrac{dz_0}{d\lambda} \\ \dfrac{d^2x_0}{d\lambda^2} & \dfrac{d^2y_0}{d\lambda^2} & \dfrac{d^2z_0}{d\lambda^2} \end{vmatrix}.$$

L'équation (14) se réduira à une équation de Riccati, et, par suite, les coniques seront partagées homographiquement par leurs conjuguées si les deux polynômes A et B, qui sont respectivement du troisième et du premier degré par rapport à μ, sont divisibles l'un par l'autre. Cela arrive dans les deux cas suivants :

1° $c=0$. A et B renferment μ en facteur. — Cette relation montre que le plan de la conique variable qui a pour équation

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0,$$

avec les conditions

$$l(x_0-u_1)+m(y_0-u_2)+n(z_0-u_3)=0,$$
$$l\frac{dx_0}{d\lambda}+m\frac{dy_0}{d\lambda}+n\frac{dz_0}{d\lambda}=0,$$

est le plan osculateur à l'enveloppe, puisque l'on a aussi

$$l\frac{d^2x_0}{d\lambda^2}+m\frac{d^2y_0}{d\lambda^2}+n\frac{d^2z_0}{d\lambda^2}=0.$$

2° c n'est pas nul, et A est divisible par B. — On a alors

$$A=B\left(\alpha\mu^2+\beta\mu-\frac{1}{2u}\right),$$

α et β désignant deux fonctions de λ convenablement choisies. La valeur ainsi obtenue pour $\frac{d\mu}{d\lambda}$, savoir

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \theta = \alpha\mu^2 + \beta\mu - \frac{1}{2u},$$

doit vérifier l'équation différentielle des conjuguées des coniques. Si l'on rend N, N_1, N_2, N_3 homogènes par l'introduction d'une seconde variable ν, cette équation peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial N}{\partial \mu} & \frac{\partial N}{\partial \nu} & \frac{\partial N}{\partial \lambda} & \frac{\partial^2 N}{\partial \lambda\, \partial \mu} + \theta\, \frac{\partial^2 N}{\partial \mu^2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \mu} & \frac{\partial N_1}{\partial \nu} & \frac{\partial N_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial^2 N_1}{\partial \lambda\, \partial \mu} + \theta\, \frac{\partial^2 N_1}{\partial \mu^2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \mu} & \frac{\partial N_2}{\partial \nu} & \frac{\partial N_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial \lambda\, \partial \mu} + \theta\, \frac{\partial^2 N_2}{\partial \mu^2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \mu} & \frac{\partial N_3}{\partial \nu} & \frac{\partial N_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial^2 N_3}{\partial \lambda\, \partial \mu} + \theta\, \frac{\partial^2 N_3}{\partial \mu^2} \end{vmatrix} = 0,$$

et elle est vérifiée identiquement si l'on y remplace θ par sa valeur. Multiplions la première colonne par $\frac{1}{u\mu} - \alpha\mu - \beta$, la seconde par α, la troisième par $-\frac{2}{\mu}$, et ajoutons à la quatrième. On démontre facilement l'identité

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{u\mu} - \alpha\mu - \beta\right)\frac{\partial N_i}{\partial \mu} + \alpha\frac{\partial N_i}{\partial \nu} - \frac{2}{\mu}\,\frac{\partial N_i}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial \lambda\, \partial \mu} + \left(\alpha\mu^2 + \beta\mu - \frac{1}{2u}\right)\frac{\partial^2 N_i}{\partial \mu^2} \\ &\quad = \alpha\frac{\partial^2 N_i}{\partial \nu^2} - \beta\frac{\partial^2 N_i}{\partial \mu\, \partial \nu} + \frac{1}{2u}\,\frac{\partial^2 N_i}{\partial \mu^2} + \frac{1}{u\mu}\left(\frac{\partial N_i}{\partial \mu\, \partial \nu} - u\,\frac{\partial^2 N_i}{\partial \lambda\, \partial \nu}\right). \end{aligned}$$

Sous cette forme, il est aisé de voir que le second membre est indépendant de μ : désignons-le par X_i. Nous remplaçons l'identité précédente par

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial N}{\partial \mu} & \frac{\partial N_1}{\partial \mu} & \frac{\partial N_2}{\partial \mu} & \frac{\partial N_3}{\partial \mu} \\ \frac{\partial N}{\partial \nu} & \frac{\partial N_1}{\partial \nu} & \frac{\partial N_2}{\partial \nu} & \frac{\partial N_3}{\partial \nu} \\ \frac{\partial N}{\partial \lambda} & \frac{\partial N_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial N_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial N_3}{\partial \lambda} \\ \mathrm{X}(\lambda) & \mathrm{X}_1(\lambda) & \mathrm{X}_2(\lambda) & \mathrm{X}_3(\lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle montre que le plan tangent à la surface en tous les points d'une même conique (λ) va passer par un même point de coordonnées $\frac{X_1}{X}, \frac{X_2}{X}, \frac{X_3}{X}$.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si les génératrices coniques d'une surface sont partagées homographiquement par leurs conjuguées, ces génératrices admettent pour enveloppe l'arête de rebroussement de la développable engendrée par leurs plans, ou bien il existe un cône circonscrit à la surface le long de chacune d'elles.*

Nous avons supposé dans cette démonstration que les coniques avaient une enveloppe véritable, lorsque nous avons mis leurs équations sous la forme (13); il pourrait se faire que toutes ces courbes eussent un point fixe commun. On examinera facilement ce cas, en reprenant les équations de la génératrice sous la forme

$$x = \frac{u_1\mu + v_1}{1+\mu^2}, \qquad y = \frac{u_2\mu + v_2}{1+\mu^2}, \qquad z = \frac{u_3\mu + v_3}{1+\mu^2}.$$

Chaque conique passe à l'origine pour μ infini.

On démontrera alors qu'il existe un cône circonscrit à la surface le long de chaque conique, ou bien que chacune de ces courbes est tangente, à l'origine, à la génératrice de contact de son plan avec le cône enveloppé par les plans de toutes les coniques. Ces résultats rentrent dans les précédents.

Il résulte du premier théorème démontré que, si l'on connaît une courbe conjuguée des coniques sur la surface étudiée, les autres s'obtiendront au moyen de simples quadratures, et qu'elles seront toutes connues si l'on en connaît trois. Il en résulte aussi que l'on peut supposer les équations de cette surface mises sous la forme

$$(12') \quad x = X + \frac{p_1\mu^2 + 2q_1\mu + r_1}{P\mu^2 + 2Q\mu + R} = X + \frac{n_1}{N}, \qquad y = Y + \frac{n_2}{N}, \qquad z = Z + \frac{n_3}{N},$$

X, Y, Z, P, Q, R, p_1, q_1, r_1, ... étant des fonctions de λ telles que les courbes $\mu = \text{const.}$ soient les courbes conjuguées des coniques $\lambda = \text{const.}$; les coordonnées du sommet du cône sont d'ailleurs X, Y, Z. Il existe alors entre ces fonctions certaines relations que nous allons chercher. Pour y arriver, nous écrirons que les tangentes aux différentes courbes $\mu = \text{const.}$ vont passer par le sommet (XYZ) du cône circonscrit, pour une même valeur de λ, puisque ce sont les génératrices de ce cône. Nous obtenons ainsi

$$(15) \qquad \frac{N\dfrac{dX}{d\lambda} + \dfrac{\partial n_1}{\partial \lambda}}{n_1} = \frac{N\dfrac{dY}{d\lambda} + \dfrac{\partial n_2}{\partial \lambda}}{n_2} = \frac{N\dfrac{dZ}{d\lambda} + \dfrac{\partial n_3}{\partial \lambda}}{n_3}.$$

Or les polynômes en μ qui figurent comme dénominateurs dans ces identités ne peuvent avoir une racine commune; il faut donc que les numérateurs soient divisibles par les dénominateurs. D'ailleurs, si l'on multiplie les fonctions N, n_1, n_2, n_3 par un même facteur $\theta(\lambda)$, on ne modifie pas la surface engendrée, et l'on peut disposer de ce facteur θ de façon à faire disparaître le coefficient de μ^2 dans le premier numérateur; θ est déterminé par l'équation

$$\theta P \frac{dX}{d\lambda} + \frac{d}{d\lambda}(\theta p_1) = 0.$$

Le même terme doit disparaître dans les autres numérateurs, qui deviennent aussi du premier degré. On aurait alors, avec les fonctions P, Q, R, p_1, q_1, r_1, ... ainsi modifiées, des identités de la forme

$$(16) \qquad \frac{a_1\mu + b_1}{p_1\mu^2 + 2q_1\mu + r_1} = \frac{a_2\mu + b_2}{p_2\mu^2 + 2q_2\mu + r_2} = \frac{a_3\mu + b_3}{p_3\mu^2 + 2q_3\mu + r_3}.$$

Multiplions les numérateurs par des fonctions de λ indéterminées. Soient α, β, γ; posons

$$\alpha(a_1\mu + b_1) + \beta(a_2\mu + b_2) + \gamma(a_3\mu + b_3) \equiv 0,$$

ce qui détermine ces fonctions. On devrait avoir aussi

$$\alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3 \equiv 0.$$

Or ceci est impossible, car le cône circonscrit ne serait pas un véritable cône. Par suite, les numérateurs sont nuls dans (16) et dans (15) avec les nouvelles fonctions P, Q, R, ... On a donc identiquement

$$(17) \qquad \frac{\partial n_1}{\partial \lambda} + N\frac{dX}{d\lambda} = 0, \qquad \frac{\partial n_2}{\partial \lambda} + N\frac{dY}{d\lambda} = 0, \qquad \frac{\partial n_3}{\partial \lambda} + N\frac{dZ}{d\lambda} = 0.$$

Ce sont les relations cherchées qui sont équivalentes à

$$\frac{dp_1}{d\lambda} + P\frac{dX}{d\lambda} = 0, \qquad \frac{dq_1}{d\lambda} + Q\frac{dX}{d\lambda} = 0, \qquad \frac{dr_1}{d\lambda} + R\frac{dX}{d\lambda} = 0,$$
$$\frac{dp_2}{d\lambda} + P\frac{dY}{d\lambda} = 0, \qquad \dots\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots\dots,$$
$$\frac{dp_3}{d\lambda} + P\frac{dZ}{d\lambda} = 0, \qquad \dots\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots\dots$$

Nous dirons que les équations (12′) sont mises sous la forme réduite si ces relations sont vérifiées. On voit qu'elles fournissent les différents coefficients au moyen de simples quadratures, si l'on choisit arbitrairement P, Q, R, X, Y, Z.

A cette forme on en peut adjoindre une autre

$$(18) \qquad x = \frac{P_1\mu^2 + 2Q_1\mu + R_1}{P\mu^2 + 2Q\mu + R} = \frac{N_1}{N}, \qquad y = \frac{N_2}{N}, \qquad z = \frac{N_3}{N},$$

avec les relations identiques

$$(19) \qquad \frac{\partial N_1}{\partial\lambda} = X\frac{\partial N}{\partial\lambda}, \qquad \frac{\partial N_2}{\partial\lambda} = Y\frac{\partial N}{\partial\lambda}, \qquad \frac{\partial N_3}{\partial\lambda} = Z\frac{\partial N}{\partial\lambda},$$

que l'on déduit aisément des précédentes, car $N_1 = NX + n_1, \dots$.

On vérifie facilement, en partant de l'une ou l'autre de ces formes réduites, que les trois coordonnées d'un point quelconque de la surface sont solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\lambda\,\partial\mu} - \frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\mu}\log\left(\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial\lambda}\right) + \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial\lambda}\frac{\partial\theta}{\partial\mu} = 0.$$

Enfin des raisonnements analogues effectués au moyen de coordonnées homogènes permettraient d'exprimer ces coordonnées sous la forme

$$x_i = \varphi_i(\lambda, \mu) = P_i\mu^2 + 2Q_i\mu + R_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les fonctions P_i, Q_i, R_i vérifiant les relations

$$\frac{dP_i}{dP} = \frac{dQ_i}{dQ} = \frac{dR_i}{dR} = X_i,$$

X_i désignant les coordonnées homogènes du sommet du cône circonscrit et P, Q, R trois fonctions de λ arbitrairement choisies.

Applications des formes réduites.

Une conique étant représentée par les équations

$$(20)\qquad x = \frac{N_1(\lambda, \mu)}{N(\lambda, \mu)}, \qquad y = \frac{N_2(\lambda, \mu)}{N(\lambda, \mu)}, \qquad z = \frac{N_3(\lambda, \mu)}{N(\lambda, \mu)},$$

où l'on suppose λ constant, la conique infiniment voisine le sera par

$$\begin{aligned} x &= \frac{N_1(\lambda, \rho)}{N(\lambda, \rho)} + d\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{N_1}{N}\right) + \frac{d\lambda^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left(\frac{N_1}{N}\right) + \ldots, \\ y &= \frac{N_2(\lambda, \rho)}{N(\lambda, \rho)} + d\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{N_2}{N}\right) + \frac{d\lambda^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left(\frac{N_2}{N}\right) + \ldots, \\ z &= \frac{N_3(\lambda, \rho)}{N(\lambda, \rho)} + d\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{N_3}{N}\right) + \frac{d\lambda^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left(\frac{N_3}{N}\right) + \ldots \end{aligned}$$

ou bien, en tenant compte des relations (17) et (19),

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{N_1(\lambda, \rho)}{N(\lambda, \rho)} - \frac{n_1(\lambda, \rho)}{N^2}\frac{\partial N}{\partial\lambda} d\lambda - \left[\frac{\partial N}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{n_1}{N^2}\right) + \frac{\partial^2 N}{\partial\lambda^2}\frac{n_1}{N^2}\right]\frac{d\lambda^2}{2} + \ldots, \\ y &= \frac{N_2(\lambda, \rho)}{N(\lambda, \rho)} - \frac{n_2(\lambda, \rho)}{N^2}\frac{\partial N}{\partial\lambda} d\lambda - \left[\frac{\partial N}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{n_2}{N^2}\right) + \frac{\partial^2 N}{\partial\lambda^2}\frac{n_2}{N^2}\right]\frac{d\lambda^2}{2} + \ldots, \\ z &= \frac{N_3(\lambda, \rho)}{N(\lambda, \rho)} - \frac{n_3(\lambda, \rho)}{N^2}\frac{\partial N}{\partial\lambda} d\lambda - \left[\frac{\partial N}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{n_3}{N^2}\right) + \frac{\partial^2 N}{\partial\lambda^2}\frac{n_3}{N^2}\right]\frac{d\lambda^2}{2} + \ldots \end{aligned}\right.$$

Si l'on donne à ρ dans ces dernières relations les valeurs μ, racines de $\dfrac{\partial N(\lambda, \mu)}{\partial\lambda} = 0$, on voit que les valeurs de x, y, z se réduisent, aux infiniment petits près du second ordre, aux valeurs correspondantes fournies par les équations (20). Donc, toute conique est rencontrée en deux points par la conique infiniment voisine, et les valeurs correspondantes de μ sont données par l'équation

$$(22)\qquad \frac{dP}{d\lambda}\mu^2 + 2\frac{dQ}{d\lambda}\mu + \frac{dR}{d\lambda} = 0.$$

Cette équation définit deux courbes tracées sur la surface et tangentes à toutes les génératrices coniques. On voit, de plus, que les infiniment petits du second ordre ne disparaissent dans les expressions (21) que si la racine de $\dfrac{\partial N}{\partial\lambda}$ annule aussi $\dfrac{\partial^2 N}{\partial\lambda^2}$; cela ne peut avoir lieu constamment, à moins que cette racine ne soit constante ou qu'elle ne soit racine double de $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$.

Dans le premier cas, les coniques passent par un point fixe; en effet, si k est cette racine constante, on a

$$\frac{d}{d\lambda} N(\lambda, k) = 0$$

et, par suite,

$$\frac{d}{d\lambda} N_1(\lambda, k) = 0, \qquad \ldots.$$

Intégrant, il vient

$$N(\lambda, k) = a, \qquad N_1(\lambda, k) = a_1, \qquad \ldots.$$

Les coniques passent par le point de coordonnées $\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a}, \frac{a_3}{a}$, que l'on obtient sur toutes en donnant au paramètre μ la valeur k. Réciproquement, si les coniques passent par un point fixe, l'équation (22) a une racine constante. Elle a ses deux racines constantes si les coniques passent par deux points fixes.

Dans le second cas, les deux courbes enveloppes des coniques sont confondues et la conique variable est osculatrice à son enveloppe.

De même que les coniques roulent sur deux courbes, les cônes roulent sur deux développables. Les plans tangents à un cône menés par la tangente ST à la trajectoire du sommet correspondent à des valeurs de μ, racines de l'équation

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} \frac{dX}{d\lambda} & \frac{dY}{d\lambda} & \frac{dZ}{d\lambda} \\ \frac{\partial n_1}{\partial \mu} & \frac{\partial n_2}{\partial \mu} & \frac{\partial n_3}{\partial \mu} \\ \frac{\partial n_1}{\partial \nu} & \frac{\partial n_2}{\partial \nu} & \frac{\partial n_3}{\partial \nu} \end{vmatrix} = 0,$$

que l'on obtient en écrivant qu'un plan tangent

$$(24) \qquad \begin{vmatrix} x - X & y - Y & z - Z \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ \frac{\partial n_1}{\partial \mu} & \frac{\partial n_2}{\partial \mu} & \frac{\partial n_3}{\partial \mu} \end{vmatrix} = 0$$

est parallèle à ST. Il est aisé de montrer que chacun de ces plans a pour caractéristique la génératrice suivant laquelle il touche le cône; ce sont donc ces génératrices SH et SH' qui engendrent les deux développables en question.

Si cette équation (23) a une ou deux racines constantes, les cônes roulent sur un ou deux plans fixes.

Lorsque les coniques restent tangentes à un plan fixe, les cônes ne sont pas forcément tangents à ce plan. Il peut se présenter deux cas : 1° les cônes circonscrits sont tangents au plan sur lequel roulent les coniques; 2° une des courbes enveloppes des coniques se confond avec la courbe décrite par le point de contact de la conique variable avec le plan fixe. En particulier, si la conique est une parabole, il existe un cylindre circonscrit, à moins que la droite d'intersection des plans de deux paraboles infiniment voisines ne soit un diamètre; par exemple, la surface engendrée par une parabole osculatrice à une courbe gauche quelconque, et soumise à une condition complémentaire arbitrairement choisie, admet un cylindre circonscrit le long de chaque génératrice.

Si l'on remarque que les surfaces étudiées donnent naissance à d'autres surfaces semblables lorsqu'on les soumet à une transformation par polaires réciproques, et que cette transformation conserve les propriétés des systèmes conjugués, on voit que les équations tangentielles de ces surfaces doivent avoir une forme analogue à celle des équations ponctuelles, lorsqu'on les suppose rapportées au même système de courbes composé des coniques et de leurs conjuguées.

Les coordonnées du plan tangent sont fournies par le développement de l'équation (24). On peut les supposer mises sous la forme

$$(25) \qquad u = \frac{M_1}{M}, \qquad v = \frac{M_2}{M}, \qquad w = \frac{M_3}{M},$$

M, M_1, M_2, M_3 désignant les dérivées partielles par rapport à m, m_1, m_2, m_3 du déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial N}{\partial \mu} & \frac{\partial N_1}{\partial \mu} & \frac{\partial N_2}{\partial \mu} & \frac{\partial N_3}{\partial \mu} \\ \frac{\partial N}{\partial \nu} & \frac{\partial N_1}{\partial \nu} & \frac{\partial N_2}{\partial \nu} & \frac{\partial N_3}{\partial \nu} \\ F & FX & FY & FZ \\ m & m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix}$$

et F une fonction de λ arbitrairement choisie. Si l'on suppose cette fonction déterminée par la condition

$$\frac{dF}{d\lambda} + U\frac{d}{d\lambda}(FX) + V\frac{d}{d\lambda}(FY) + W\frac{d}{d\lambda}(FZ) = 0, \tag{26}$$

U, V, W désignant les coordonnées du plan de la conique

$$Ux + Vy + Wz + 1 = 0,$$

on a les relations identiques

$$\frac{\partial M_1}{\partial \lambda} = U\frac{\partial M}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial M_2}{\partial \lambda} = V\frac{\partial M}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial M_3}{\partial \lambda} = W\frac{\partial M}{\partial \lambda}. \tag{27}$$

Quant à l'équation $\frac{\partial M}{\partial \lambda} = 0$, ce n'est autre chose, à un facteur près indépendant de μ, que l'équation (23).

Applications. — Les équations générales que nous avons trouvées soit en coordonnées ponctuelles, soit en coordonnées tangentielles, renferment cinq fonctions arbitraires d'un paramètre variable. La détermination de ces fonctions de manière à satisfaire à des conditions géométriques particulières présente évidemment de grandes difficultés. Nous allons cependant étudier le problème suivant :

Trouver toutes les surfaces pour lesquelles on donne la courbe lieu des sommets et la développable enveloppe des plans des coniques, avec la correspondance entre les sommets et les plans.

On se donne les fonctions X, Y, Z, U, V, W d'un même paramètre λ. Les inconnues $P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, \ldots$ qui figurent dans les équations ponctuelles

$$x = \frac{P_1\mu^2 + 2Q_1\mu + R_1}{P\mu^2 + 2Q\mu + R} = \frac{N_1}{N}, \qquad \ldots,$$

avec les relations identiques

$$\frac{\partial N_1}{\partial \lambda} = X\frac{\partial N}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial N_2}{\partial \lambda} = Y\frac{\partial N}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial N_3}{\partial \lambda} = Z\frac{\partial N}{\partial \lambda},$$

sont encore reliées aux quantités données par les équations

$$(1)\quad \begin{cases} P + UP_1 + VP_2 + WP_3 = 0, \\ Q + UQ_1 + VQ_2 + WQ_3 = 0, \\ R + UR_1 + VR_2 + WR_3 = 0. \end{cases}$$

Si l'on annule successivement les trois premières dérivées de chacune de ces équations, l'élimination des fonctions inconnues autres que P, Q, R montre que ces dernières sont trois intégrales d'une même équation

$$(2)\quad A\frac{d^3\theta}{d\lambda^3} + B\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + C\frac{d\theta}{d\lambda} + D\theta = 0,$$

où A, B, C, D sont des fonctions déterminées de X, Y, Z, U, V, W et leurs dérivées. D'ailleurs, P, Q, R étant choisis de cette façon, P_1, Q_1, R_1, ... seront déterminés par des équations linéaires.

Soient donc P, Q, R trois intégrales de (2); l'intégrale générale est fournie par

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= a\,P + b\,Q + c\,R, \\ \mathfrak{Q} &= a_1 P + b_1 Q + c_1 R, \\ \mathfrak{R} &= a_2 P + b_2 Q + c_2 R. \end{aligned}$$

Combinant avec les équations précédentes, on trouve

$$\mathfrak{P}_1 = aP_1 + bQ_1 + cR_1, \qquad \mathfrak{P}_2 = aP_2 + bQ_2 + cR_2, \qquad \dots.$$

La solution la plus générale, savoir

$$x = \frac{(aP_1 + bQ_1 + cR_1)\mu^2 + 2(a_1P_1 + b_1Q_1 + c_1R_1)\mu + a_2P_1 + b_2Q_1 + c_2R_1}{(aP + bQ + cR)\mu^2 + 2(a_1P + b_1Q + c_1R)\mu + a_2P + b_2Q + c_2R}, \quad \dots,$$

renferme donc neuf constantes arbitraires, $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$.

Mais on peut ramener le nombre des paramètres arbitraires à cinq par une substitution homographique à coefficients constants effectuée sur la variable μ, de sorte que la surface la plus générale dépend seulement de cinq paramètres. Le choix d'une conique particulière dans l'un des plans donnés, ou d'un cône ayant son sommet en l'un des points donnés, achèvera de la déterminer.

Étude de quelques surfaces particulières.

Nous distinguerons d'abord les surfaces (A) enveloppes de cônes qui roulent sur deux plans fixes en restant soumis à trois conditions complémentaires quelconques. Les conjuguées des coniques sont les sections planes faites dans la surface par un faisceau de plans ayant pour axe la droite des sommets. Réciproquement, si deux conjuguées sont planes, les sommets des cônes sont en ligne droite et la surface rentre dans cette catégorie particulière.

Une transformation par polaires réciproques effectuée sur les surfaces (A) fournit les surfaces (B) engendrées par des coniques qui passent par deux points fixes F et F′ en restant assujetties à trois conditions complémentaires quelconques. Les courbes conjuguées sont les courbes de contact de la surface avec des cônes circonscrits ayant leurs sommets sur FF′; leur détermination n'exige donc encore aucune quadrature.

Une surface (C) peut appartenir à la fois à ces deux catégories; les coniques sont tangentes à deux plans fixes et passent par deux points fixes qui peuvent être ou non les points de contact avec les plans tangents fixes.

Plus particulièrement encore, les coniques peuvent être tangentes à une droite fixe en un point fixe, ou les cônes à un plan fixe le long d'une génératrice fixe; les conjuguées des coniques s'obtiennent toujours sans intégration.

Les surfaces (D), pour lesquelles la courbe Σ lieu des sommets des cônes est plane, possèdent des conjuguées de coniques qui s'obtiennent par une quadrature, car on en connaît déjà deux : ce sont les courbes enveloppes des génératrices d'intersection de ces cônes avec le plan de Σ.

Il en est de même pour les surfaces (E) qu'on en déduit dans une transformation par polaires réciproques, c'est-à-dire pour lesquelles les plans des coniques passent par un point fixe; les conjuguées connues sont, dans ce cas, les courbes engendrées par les points de contact de la conique variable avec les deux tangentes issues du point fixe.

C'est dans les catégories (B) et (C) qu'il faut ranger les surfaces du troisième et du quatrième degré qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du deuxième degré. Une surface du troisième degré possède deux points coniques F et F′ par lesquels passent les coniques génératrices ; la droite FF′ appartient naturellement à la surface et le plan tangent est le même en tous les points de cette droite. D'ailleurs, si une surface du troisième degré touche un plan suivant une droite, les plans qui passent par cette dernière découpent sur la surface des coniques la rencontrant en deux points fixes. Quatre de ces coniques se décomposent en systèmes de deux droites; ces huit droites passent quatre à quatre en F et F′ et constituent l'intersection de la surface avec les cônes tangents en ces points.

Les conjuguées des coniques sont les courbes de contact de la surface avec les cônes circonscrits ayant leurs sommets sur FF′ ; ces cônes sont du quatrième ordre et les conjuguées sont des quartiques gauches de première espèce. Chacune (Γ) est l'intersection de la surface proposée avec un cône du second degré qui passe par FF′ et est tangent à la surface le long de cette droite; le sommet O′ de ce nouveau cône et le sommet O du cône circonscrit correspondant forment une involution dont les points doubles sont F et F′. Chaque courbe (Γ) rencontre FF′ en deux points variables conjugués harmoniques par rapport au sommet O correspondant et au point fixe où la droite FF′ est rencontrée par la seconde droite d'intersection de la surface avec le plan tangent suivant FF′. Les cônes de tangentes aux deux points coniques ne peuvent se réduire simultanément à deux plans, à moins que le plan tangent le long de FF′ ne coupe la surface suivant cette seule droite. La courbe lieu des sommets des cônes circonscrits suivant les coniques est une quartique gauche de seconde espèce qui ne rencontre jamais FF′, à moins que les deux points coniques ne soient confondus.

Plus généralement, une surface d'ordre n présentant une droite multiple d'ordre $n-2$ est coupée suivant une conique par tout plan qui passe par cette droite. Il existera des cônes circonscrits si ces coniques rencontrent la droite multiple en deux points fixes F et F′; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les $n-2$ plans tangents à la surface en tous les points de FF′ soient invariables. $2n-2$ coniques se décomposent en deux droites : ces $4n-4$ droites se groupent $2n-2$ à $2n-2$ pour former l'intersection de la surface avec les cônes de tangentes en ses points coniques. Les conjuguées (Γ) des coniques sont des courbes gauches d'ordre $2n-2$ suivant lesquelles la surface est touchée par des cônes circonscrits de même ordre ayant leurs sommets O sur FF'; chacune est l'intersection de la surface avec un cône d'ordre $n-1$ qui lui est tangent suivant les $n-2$ nappes le long de FF'. Les sommets O' de ces nouveaux cônes et les sommets O correspondants forment une involution dont les points doubles sont F et F'. Enfin chaque courbe (Γ) rencontre FF' en $2n-4$ points variables qui se partagent en $n-2$ couples; chacun de ces couples est situé sur une nappe différente de la surface donnée et les deux points d'un même couple sont conjugués harmoniques par rapport au sommet O du cône correspondant et au point de rencontre de FF' avec la seconde droite d'intersection de la surface avec son plan tangent le long de la nappe à laquelle appartient le couple. La courbe lieu des sommets des cônes circonscrits est une courbe unicursale d'ordre $3n-5$.

Les coniques génératrices de la surface peuvent être tangentes en deux points fixes à deux plans fixes; dans ce cas, les plans tangents à la surface le long de la droite multiple la coupent suivant cette seule droite. Il existe alors une triple infinité de quadriques tangentes à la surface proposée en F et F' et qui la coupent suivant n coniques; parmi ces quadriques, il y en a une double infinité qui touchent la surface proposée suivant une conique et la coupent encore suivant $n-2$ coniques; enfin, parmi celles-ci, il y a une simple infinité de cônes jouissant de la même propriété : ce sont les cônes circonscrits à la surface le long de ses coniques.

Une surface du quatrième degré possédant une droite double avec deux plans tangents fixes le long de cette droite rentre dans la catégorie que nous venons d'examiner. En dehors de celle-là, les seules surfaces du quatrième degré possédant le même mode de génération sont des surfaces à conique double et deux points doubles au moins, ou les surfaces ayant deux points d'embrassement.

Considérons d'abord une surface présentant une conique double et deux points doubles dont la ligne de jonction ne rencontre pas cette conique. Tout plan passant par les points doubles F et F' coupe la surface suivant deux coniques qui se rencontrent en ces deux points. Les conjuguées des coniques sont les courbes de contact de la surface avec des cônes circonscrits ayant leurs sommets O sur FF′; ce sont aussi les courbes d'intersection de la surface avec des cônes du second degré dont les sommets O′ sont sur FF′ et sont conjugués des sommets O par rapport aux points coniques. Chacune se compose de deux courbes gauches de quatrième ordre et de première espèce qui se coupent en quatre points sur la conique double de la surface proposée.

Si l'on suppose l'équation de cette surface mise sous la forme

$$f^2(xyz) = 4z^2xy,$$

f désignant une fonction quadratique non homogène, la conique double est l'intersection de la quadrique $f = 0$ avec le plan $z = 0$, et les deux points coniques sont les points de rencontre de l'axe Oz avec cette même quadrique. La courbe, lieu des sommets des cônes circonscrits à la surface, est une courbe plane de quatrième ordre, unicursale, représentée par les trois équations

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \qquad \lambda^2 x - \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + y = 0, \qquad \lambda^2 \frac{\partial f}{\partial y} - 2\lambda z + \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

où λ désigne un paramètre variable. A deux valeurs de λ qui ne diffèrent que par le signe, correspondent les sommets des deux cônes circonscrits à la surface le long de deux coniques situées dans un même plan.

Le plan de cette courbe est le plan polaire du point de rencontre de la droite FF′ avec le plan de la conique double par rapport à la quadrique $f = 0$. Par suite, si ce point est le centre de la quadrique, la courbe est rejetée à l'infini et les cônes deviennent des cylindres circonscrits; dans ce cas, d'ailleurs, la surface proposée admet ce point pour centre, et il en est de même pour les différentes coniques.

Les cônes tangents à la surface en ses deux points coniques ne se réduisent jamais à deux plans si l'on suppose ces points distincts. Mais cela n'empêche pas les coniques de la surface de rester tangentes à deux plans fixes ainsi que les cônes circonscrits.

C'est ce qui arrive lorsque la surface présente deux paires de points doubles (cyclide de Dupin, par exemple). Dans ce cas, la surface possède deux séries de coniques passant par les couples de points doubles : les cônes circonscrits le long des coniques d'une série ont leurs sommets sur la droite qui joint les points coniques de l'autre; les deux systèmes de coniques sont donc conjugués.

Réciproquement, si une surface possède deux séries de coniques conjuguées avec cône circonscrit, il est aisé de voir que les coniques de chaque système passent par deux points fixes et sont tangentes à deux plans fixes. Nous reviendrons plus loin sur l'étude de ces surfaces.

Considérons maintenant une surface de quatrième ordre qui présente deux points d'embrassement. Tout plan passant par ces deux points coupe la surface suivant deux coniques qui y sont tangentes aux deux plans tangents. Les conjuguées sont les sections faites par un faisceau de plans ayant pour axe la droite d'intersection des deux précédents.

Parmi les surfaces de cinquième ordre, nous trouvons la surface à droite triple avec trois plans tangents le long de cette droite, puis la surface possédant une droite simple sur laquelle se trouvent deux points triples et, en outre, une conique double. L'équation d'une pareille surface peut se mettre sous la forme

$$f^2\varphi_1 + fz\varphi_2 + z^2\varphi_3 = 0,$$

où f est une fonction quadratique non homogène (en x, y, z) et $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ des fonctions homogènes (en x, y) de degrés respectivement égaux à leurs indices. La conique double est l'intersection du plan $x\mathrm{O}y$ avec la quadrique $f = 0$, et la droite simple est l'axe $\mathrm{O}z$. Les points triples sont les points de rencontre de $\mathrm{O}z$ avec cette même quadrique; le plan tangent est encore le même en tous les points de $\mathrm{O}z$. Les conjuguées des coniques sont les courbes d'intersection de la surface avec des cônes du troisième ordre qui lui sont tangents le long de $\mathrm{O}z$; etc.

Nous citerons encore un cas particulier de la surface de cinquième ordre étudiée par Clebsch; cette surface possède une courbe double de quatrième ordre et de première espèce, et a une équation de la forme

$$\mathrm{A}\varphi^2 + 2\mathrm{B}\varphi\psi + \mathrm{C}\psi^2 = 0,$$

où A, B, C désignent des fonctions linéaires, et φ, ψ des fonctions du second degré par rapport à x, y, z (*Ueber die Abbildung einer Classe,* *von Flächen 5, Ordnung;* Göttingen, in der *Dieterichschen Buchhandlung*, 1870).

Les quadriques du faisceau

$$\varphi - \lambda\psi = 0$$

y découpent une série de coniques dont les plans ont pour équation

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0$$

et enveloppent le cône

$$B^2 - AC = 0.$$

Il est facile de voir que la condition nécessaire et suffisante pour que deux coniques infiniment voisines se rencontrent en deux points est que le point

$$A = B = C = 0$$

soit l'un des sommets du tétraèdre conjugué par rapport aux deux quadriques $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Le cône enveloppe des plans des coniques passe alors par la quartique double, qui est elle-même l'enveloppe des coniques de la surface; les cordes de contact sont les génératrices du cône. La quartique est une courbe de rebroussement pour la surface. L'équation pourra se mettre sous la forme

$$x\varphi^2 + 2z\varphi\psi + y\psi^2 = 0,$$

en posant

$$\psi = a\varphi + z^2 - xy,$$

a désignant une constante quelconque et φ une fonction quadratique.

Le lieu des sommets des cônes circonscrits est une courbe plane Σ unicursale de quatrième ordre, dont le plan est le plan conjugué du sommet du cône par rapport à la quartique, c'est-à-dire $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$.

On connaît déjà deux courbes conjuguées des coniques; ce sont les enveloppes des génératrices des cônes situées dans le plan de Σ. La recherche des autres se ramène donc à une quadrature; on vérifie que cette opération conduit en général à des intégrales hyperelliptiques.

Surfaces enveloppes de cônes de révolution.

Reprenons les équations générales

$$(1) \qquad x = X + \frac{n_1}{N}, \qquad y = Y + \frac{n_2}{N}, \qquad z = Z + \frac{n_3}{N},$$

avec les relations

$$(2) \qquad \frac{\partial n_1}{\partial \lambda} = -N\frac{dX}{d\lambda}, \qquad \frac{\partial n_2}{\partial \lambda} = -N\frac{dY}{d\lambda}, \qquad \frac{\partial n_3}{\partial \lambda} = -N\frac{dZ}{d\lambda}.$$

Si les cônes sont de révolution, chacun d'eux étant représenté par les équations

$$\frac{x-X}{n_1} = \frac{y-Y}{n_2} = \frac{z-Z}{n_3},$$

où l'on suppose λ constant, c'est que l'on a, quel que soit μ, en supposant les axes de coordonnées rectangulaires,

$$(3) \qquad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = (\alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3)^2,$$

α, β, γ désignant des fonctions de λ, que l'on peut supposer réelles si les cônes le sont eux-mêmes. Différentions cette relation par rapport à λ, en tenant compte de (2); nous obtenons

$$\begin{aligned} &-N\left(n_1\frac{dX}{d\lambda} + n_2\frac{dY}{d\lambda} + n_3\frac{dZ}{d\lambda}\right) \\ &\quad = (\alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3)\left[n_1\frac{d\alpha}{d\lambda} + n_2\frac{d\beta}{d\lambda} + n_3\frac{d\gamma}{d\lambda} - N\left(\alpha\frac{dX}{d\lambda} + \beta\frac{dY}{d\lambda} + \gamma\frac{dZ}{d\lambda}\right)\right]. \end{aligned}$$

Cette égalité montre que les racines du polynôme $\alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3$, qui est du second degré en μ, appartiennent aux deux polynômes N et $n_1\frac{dX}{d\lambda} + n_2\frac{dY}{d\lambda} + n_3\frac{dZ}{d\lambda}$; or, en vertu de (3), les racines du premier sont imaginaires, elles doivent donc appartenir toutes deux à l'un des deux derniers.

Par suite, on a

$$(4) \qquad \alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3 = AN$$

ou bien

$$\alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3 = \mathrm{B}\left(n_1 \frac{d\mathrm{X}}{d\lambda} + n_2 \frac{d\mathrm{Y}}{d\lambda} + n_3 \frac{d\mathrm{Z}}{d\lambda}\right), \tag{5}$$

A et B désignant deux fonctions de λ.

Dans le premier cas, l'égalité (3) donne

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \mathrm{A}^2 \mathrm{N}^2$$

et, par suite,

$$(x - \mathrm{X})^2 + (y - \mathrm{Y})^2 + (z - \mathrm{Z})^2 = \mathrm{A}^2.$$

Cette nouvelle relation nous montre que les coniques (1) sont des cercles, et la surface engendrée est une surface enveloppe de sphères dépendant d'un paramètre.

Dans le second cas, on montre aisément que l'on a

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\mathrm{X}}{d\lambda} = \frac{1}{\beta} \frac{dy}{d\lambda} = \frac{1}{\gamma} \frac{d\mathrm{Z}}{d\lambda},$$

c'est-à-dire que l'axe du cône de révolution n'est autre chose que la tangente à la trajectoire de son sommet.

Les surfaces enveloppes de cônes de révolution se partagent donc en deux classes :

1° Les surfaces enveloppes de sphères; l'axe du cône admet pour enveloppe la courbe décrite par le centre de la sphère variable.

2° Les surfaces pour lesquelles l'axe du cône reste constamment tangent à la trajectoire de son sommet.

Ces résultats peuvent d'ailleurs se démontrer sans avoir recours aux équations générales (1), et un calcul direct permet de montrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un cône de révolution touche son enveloppe suivant une conique, c'est que son axe engendre une développable; suivant que le point de contact de chaque axe avec son enveloppe est ou non le sommet du cône, on obtient l'une ou l'autre des catégories précédentes.

Les surfaces de la seconde classe sont d'ailleurs étroitement liées aux surfaces de la première. Considérons, en effet, une surface enveloppe de sphères; les normales à cette surface le long d'un cercle (c) engendrent un cône de révolution (C) dont le sommet S est un centre de courbure de la surface pour tous les points de (c). Les centres de seconde courbure sont les points de contact des génératrices de (C) avec l'enveloppe de ce cône; or on sait que ces centres de courbure sont sur une conique; par suite, la surface lieu des centres de seconde courbure rentre dans la seconde classe.

On peut encore remarquer que les conjuguées des coniques sont les trajectoires orthogonales des cercles pour les surfaces de la première classe, et l'on sait que ces courbes partagent les cercles homographiquement. Pour les surfaces de la seconde classe, ce sont les courbes de contact des développables engendrées par les normales aux surfaces de première classe correspondantes le long de leurs lignes de seconde courbure; comme celles-ci, elles dépendent donc d'une équation de Riccati. On trouve cette équation, sous une forme très simple, de la façon suivante. Appelons

x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la surface;
X, Y, Z les coordonnées du sommet du cône correspondant;
V l'angle générateur de ce cône;
$\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ les cosinus directeurs de la tangente, la normale principale et la binormale à la trajectoire du sommet;
ω et ϖ la courbure et la torsion de cette courbe;
φ l'angle d'un plan passant par le point (x, y, z) et l'axe du cône avec le plan osculateur de la trajectoire (cet angle peut varier de 0 à 2π).

On trouve

$$\frac{x - X}{\alpha \cot V + \alpha_1 \cos\varphi + \alpha_2 \sin\varphi} = \frac{y - Y}{\beta \cot V + \beta_1 \cos\varphi + \beta_2 \sin\varphi}$$
$$= \frac{z - Z}{\gamma \cot V + \gamma_1 \cos\varphi + \gamma_2 \sin\varphi} = \frac{\sin^2 V}{\omega \cos\varphi + \dfrac{dV}{ds}},$$

et l'équation différentielle des conjuguées est

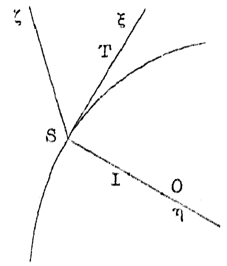
$$\frac{d\varphi}{ds} = \varpi + \omega \cot V \sin\varphi,$$

la variable indépendante étant l'arc s de la trajectoire du sommet.

Cette équation se ramène immédiatement à une équation de Riccati, en prenant pour fonction $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$. Elle s'intègre par une quadrature si la trajectoire du sommet est plane ou, plus généralement, si le rapport $\frac{\varpi \operatorname{tang} V}{\omega}$ est constant.

Si l'on prend (*fig.* 1) pour axes de coordonnées (S, ξ, η, ζ) les axes

Fig. 1.



du trièdre de la trajectoire, l'équation du plan de la conique s'écrit

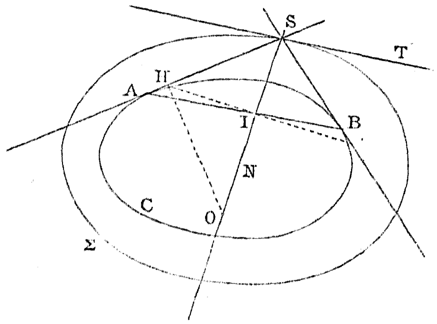
$$\operatorname{tang} V \frac{dV}{ds} \xi + \omega \eta - \sin^2 V = 0.$$

On vérifie ainsi que ce plan est parallèle à la binormale de la trajectoire du sommet, ce qui est une propriété connue. Ce plan rencontre la normale principale $S\eta$ en un point I, tel que l'on ait

$$SI = SO \sin^2 V,$$

O désignant le centre de courbure de la courbe. Il en résulte une construction géométrique très simple du point I, étant connus le point O et l'angle V, et inversement. Comme application de cette dernière propriété, considérons une quadrique Q, dont la trace sur l'un de ses plans principaux est une conique C (*fig.* 2). Cette quadrique peut être regardée comme l'enveloppe d'une famille de cônes de révolution ayant leurs sommets sur une conique Σ située dans le plan de C et homofocale à cette dernière. Si S est le sommet de l'un de ces cônes, la tangente à Σ est son axe, les tangentes à C menées de S en sont les génératrices de contour apparent; enfin, si, par le point I où AB rencontre a normale SN à Σ, on mène IH perpendiculaire sur SN, puis HO perpendiculaire sur SA, on obtient en O le centre de courbure de Σ. Ces différentes propriétés sont des conséquences immédiates des équations écrites plus haut; on pourrait les démontrer ici en s'appuyant uniquement sur ce fait que les deux coniques C et Σ sont homofocales.

Fig. 2.



Dans le cas général, l'angle θ du plan de la conique avec l'axe du cône est fourni par l'équation

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang} V \frac{1}{\omega} \frac{dV}{ds}.$$

Par suite, lorsque $\frac{dV}{ds}$ est supérieur à ω, la conique est une ellipse; si $\frac{dV}{ds}$ est égal à ω, la conique est une parabole; et si $\frac{dV}{ds}$ est moindre que ω, la conique est une hyperbole.

Si l'angle générateur du cône est constant, le plan de la conique est perpendiculaire à la normale principale de la trajectoire du sommet, et la conique est une hyperbole qui reste semblable à elle-même dans son déplacement.

Ces surfaces sont les seules, parmi celles que nous étudions, pour lesquelles la congruence formée par les génératrices des cônes se compose des normales à une surface; cette dernière est d'ailleurs une enveloppe de sphères.

Nous remarquerons encore que, si les coniques génératrices sont des cercles, la surface peut être envisagée comme une enveloppe de sphères, ou bien les plans des cercles sont parallèles à un plan fixe; nous avons démontré ce fait dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Acadé-*

mie des Sciences (t. CIII, p. 687). On peut généraliser cette propriété et énoncer le théorème suivant :

Si les génératrices coniques rencontrent une conique fixe, la surface est l'enveloppe d'une famille de quadriques passant par cette conique et assujettie à trois conditions complémentaires, ou bien les coniques passent par deux points fixes sur la conique fixe.

En particulier, si l'on considère une surface engendrée par un cercle parallèle à un plan fixe, les conjuguées de ces cercles se déduiront les unes des autres par une opération géométrique très simple : ce sont les courbes de contact de la surface avec des cylindres circonscrits ayant leurs génératrices parallèles à une direction arbitrairement choisie dans le plan d'un cercle; si l'on fait tourner les points de l'une de ces courbes d'un angle constant sur les cercles auxquels ils appartiennent, on obtient les points d'une autre conjuguée.

SECONDE PARTIE.

DES LIGNES ASYMPTOTIQUES.

Reprenons les équations générales d'une surface, mises sous forme réduite, savoir

$$x = \frac{N_1}{N} = X + \frac{n_1}{N}, \qquad y = \frac{N_2}{N} = Y + \frac{n_2}{N}, \qquad z = \frac{N_3}{N} = Z + \frac{n_3}{N},$$

avec les relations identiques

$$\frac{\partial N_1}{\partial \lambda} = X \frac{\partial N}{\partial \lambda}, \qquad \ldots;$$
$$\frac{\partial n_1}{\partial \lambda} = -N \frac{dX}{d\lambda}, \qquad \ldots.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation différentielle des lignes asymptotiques donne une relation de la forme

$$(1)\qquad (A\mu^2+2B\mu+C)\left(\frac{dP}{d\lambda}\mu^2+2\frac{dQ}{d\lambda}\mu+\frac{dR}{d\lambda}\right)d\lambda^2+2\Delta\,d\mu^2=0,$$

en posant

$$A\mu^2+2B\mu+C=\begin{vmatrix} p_1\mu+q_1 & q_1\mu+r_1 & \dfrac{dX}{d\lambda} \\ p_2\mu+q_2 & q_2\mu+r_2 & \dfrac{dY}{d\lambda} \\ p_3\mu+q_3 & q_3\mu+r_3 & \dfrac{dZ}{d\lambda} \end{vmatrix},\qquad \Delta=\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}.$$

On reconnaît, dans les deux polynômes du second degré par rapport à μ qui figurent dans cette équation, les polynômes $\frac{\partial N}{\partial\lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial\lambda}$; ce dernier, à un facteur près, indépendant de μ. On en conclut qu'il existe sur chaque conique quatre points pour lesquels les lignes asymptotiques sont tangentes entre elles et tangentes à une conjuguée de la conique : ce sont les points de rencontre de cette conique avec la conique infiniment voisine (K et K') et les pieds H et H' des génératrices de contact du cône correspondant avec les deux développables circonscrites.

Cette équation se simplifie dans un certain nombre de cas ; nous allons examiner les plus intéressants.

Supposons que le coefficient de $d\lambda^2$ soit le carré d'un polynôme par rapport à μ : l'équation (1) se décompose alors en deux équations de Riccati, et les deux séries de lignes asymptotiques de la surface partagent homographiquement ses génératrices coniques. Ce fait se présente dans les deux cas suivants :

I. Les deux polynômes $\frac{\partial N}{\partial\lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial\lambda}$ ont mêmes racines μ; les points K et K' sont respectivement confondus avec les points H et H'. La surface est engendrée par une conique qui roule sur deux courbes, les cônes circonscrits roulant sur deux développables circonscrites à ces courbes. Nous l'appellerons *surface du premier genre*.

II. Les deux polynômes $\frac{\partial N}{\partial\lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial\lambda}$ ont chacun une racine double; les points K et K' sont confondus, ainsi que les points H et H'. On en conclut que la conique génératrice reste osculatrice à une courbe, le cône circonscrit étant lui-même osculateur à une développable. Nous appellerons *surfaces du second genre* celles qui sont engendrées de cette façon.

III. Un autre cas intéressant est celui où les polynômes $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ ont tous deux leurs racines constantes. La surface est engendrée par une conique qui passe par deux points fixes et reste tangente à deux plans fixes sur lesquels roulent les cônes circonscrits.

Les variables se séparent alors dans l'équation (1), dont l'intégration se trouve ramenée à une quadrature; la détermination des conjuguées s'effectue d'ailleurs, dans ce cas, sans aucune intégration.

Plus particulièrement encore, les deux plans fixes auxquels les coniques sont tangentes peuvent avoir leurs points de contact aux points fixes par lesquels passent les coniques; nous retrouvons ainsi des surfaces singulières du premier genre et le théorème démontré par M. Demartres :

Une surface engendrée par une conique tangente en deux points fixes à deux plans fixes a ses génératrices coniques partagées homographiquement par ses deux séries de lignes asymptotiques.

Ces surfaces jouissent encore d'une autre propriété : ce sont les seules qui puissent être regardées comme des enveloppes de quadriques dépendant d'un seul paramètre, et telles que deux quadriques infiniment voisines soient tangentes le long de leur conique d'intersection. La recherche des lignes asymptotiques exige alors l'intégration de deux équations de Riccati dans lesquelles les polynômes du second degré ont leurs racines constantes.

Les trois catégories que nous venons d'indiquer sont encore remarquables, en ce sens qu'une transformation par polaires réciproques les remplace par d'autres surfaces de même espèce.

Surfaces du premier genre.

Si nous écrivons que les deux polynômes $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ ont mêmes racines, nous trouvons

$$\frac{1}{\frac{dP}{d\lambda}}\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ \frac{dX}{d\lambda} & \frac{dY}{d\lambda} & \frac{dZ}{d\lambda}\end{vmatrix} = \frac{1}{2\frac{dQ}{d\lambda}}\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ \frac{dX}{d\lambda} & \frac{dY}{d\lambda} & \frac{dZ}{d\lambda}\end{vmatrix} = \frac{1}{\frac{dR}{d\lambda}}\begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ \frac{dX}{d\lambda} & \frac{dY}{d\lambda} & \frac{dZ}{d\lambda}\end{vmatrix},$$

relations que l'on remplace aisément par les suivantes :

$$(2)\quad \frac{1}{\frac{dX}{d\lambda}}\left[\frac{dP}{d\lambda}r_1 - 2\frac{dQ}{d\lambda}q_1 + \frac{dR}{d\lambda}p_1\right] = \frac{1}{\frac{dY}{d\lambda}}\left[\frac{dP}{d\lambda}r_2 - 2\frac{dQ}{d\lambda}q_2 + \frac{dR}{d\lambda}p_2\right] = \frac{1}{\frac{dZ}{d\lambda}}\left[\frac{dP}{d\lambda}r_3 - 2\frac{dQ}{d\lambda}q_3 + \frac{dR}{d\lambda}p_3\right].$$

Si l'on sait déterminer toutes les fonctions P, Q, R, p_1, q_1, r_1, ..., X, Y, Z vérifiant ces relations, ainsi que le système

$$(3)\quad \frac{dp_1}{d\lambda} = -P\frac{dX}{d\lambda},\quad \ldots,\quad \frac{dq_1}{d\lambda} = -Q\frac{dX}{d\lambda},\quad \ldots,\quad \frac{dr_1}{d\lambda} = -R\frac{dX}{d\lambda},\quad \ldots,$$

on aura toutes les surfaces du premier genre. Les surfaces générales dépendant de cinq fonctions arbitraires d'un paramètre variable, celles-ci dépendent encore de trois fonctions arbitraires.

Prenons Q pour variable indépendante et posons $Q = \lambda$; choisissons comme fonctions arbitraires P, R, ainsi que la valeur ρ des rapports (2); il est aisé de voir que les inconnues $\frac{dX}{d\lambda}$, $\frac{dY}{d\lambda}$, $\frac{dZ}{d\lambda}$ sont trois solutions de l'équation différentielle

$$(4)\quad \begin{vmatrix} \frac{d^2P}{d\lambda^2} & \frac{d^2R}{d\lambda^2} & \theta \\ \frac{d^3P}{d\lambda^3} & \frac{d^3R}{d\lambda^3} & \frac{d\theta}{d\lambda} + \varepsilon u \\ \frac{d^4P}{d\lambda^4} & \frac{d^4R}{d\lambda^4} & \frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + \frac{d}{d\lambda}(\varepsilon u)\end{vmatrix} = 0,$$

où la fonction inconnue est u, et où l'on pose

$$\theta = u\frac{d}{d\lambda}(PR - \lambda^2) + \frac{d}{d\lambda}(\rho u),$$

$$\varepsilon = P\frac{d^2 R}{d\lambda^2} + R\frac{d^2 P}{d\lambda^2}.$$

En particulier, si l'on choisit P et R de telle sorte que $\varepsilon = 0$, l'équation précédente admet comme intégrale

$$\theta = a\frac{d^2 P}{d\lambda^2} + b\frac{d^2 R}{d\lambda^2},$$

a et b étant des constantes arbitraires. Il reste alors à intégrer une équation du premier ordre linéaire qui donnera u; puis de simples quadratures donneront toutes les fonctions inconnues. Nous aurons ainsi une solution renfermant deux fonctions arbitraires, P et ρ par exemple.

On peut encore, au moyen des relations (2), démontrer le théorème suivant :

Si le lieu des sommets des cônes est une courbe plane, les plans des coniques enveloppent un cône, et réciproquement.

Ces relations s'écrivent en effet

$$\rho\frac{dX}{d\lambda} = p_1\frac{dR}{d\lambda} - 2q_1\frac{dQ}{d\lambda} + r_1\frac{dP}{d\lambda}, \qquad \cdots\cdot$$

Deux différentiations successives permettent de montrer que l'on a

$$(5)\qquad \rho^3\begin{vmatrix} \dfrac{dX}{d\lambda} & \dfrac{dY}{d\lambda} & \dfrac{dZ}{d\lambda} \\ \dfrac{d^2X}{d\lambda^2} & \dfrac{d^2Y}{d\lambda^2} & \dfrac{d^2Z}{d\lambda^2} \\ \dfrac{d^3X}{d\lambda^3} & \dfrac{d^3Y}{d\lambda^3} & \dfrac{d^3Z}{d\lambda^3} \end{vmatrix} = 2\Delta\begin{vmatrix} \dfrac{dP}{d\lambda} & \dfrac{dQ}{d\lambda} & \dfrac{dR}{d\lambda} \\ \dfrac{d^2P}{d\lambda^2} & \dfrac{d^2Q}{d\lambda^2} & \dfrac{d^2R}{d\lambda^2} \\ \dfrac{d^3P}{d\lambda^3} & \dfrac{d^3Q}{d\lambda^3} & \dfrac{d^3R}{d\lambda^3} \end{vmatrix}.$$

ρ et Δ sont deux fonctions de λ qui ne peuvent être nulles; les deux déterminants figurant dans cette égalité seront donc nuls simultanément.

Si le premier est nul, la trajectoire du sommet est plane, et si le second l'est, on montre aisément que les plans des coniques passent par un point fixe.

Nous remarquerons encore la propriété générale suivante qui convient aux seules surfaces du premier genre :

Les tangentes aux deux séries de lignes asymptotiques de la surface en tous les points d'une même conique sont les génératrices de deux hyperboloïdes circonscrits à la surface le long de cette conique.

Nous allons chercher s'il existe des surfaces du premier genre parmi les surfaces particulières que nous avons étudiées dans la première Partie. Considérons les surfaces enveloppes de cônes de révolution dont la caractéristique est une véritable conique. Nous avons vu que l'équation du plan de cette conique rapportée au trièdre $(S\xi\eta\zeta)$ de la trajectoire du sommet est

$$\tag{6} \operatorname{tang} V \frac{dV}{ds}\xi + \omega\eta - \sin^2 V = 0.$$

Son intersection KK' avec le plan infiniment voisin est définie par cette équation jointe à la suivante :

$$\tag{7} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{1}{\cos^2 V}\left(\frac{dV}{ds}\right)^2 + \operatorname{tang} V \frac{d^2 V}{ds^2} - \omega^2\right]\xi \\ &\quad + \left(\frac{d\omega}{ds} + \omega \operatorname{tang} V \frac{dV}{ds}\right)\eta - \omega\varpi\zeta = (\operatorname{tang} V + \sin 2V)\frac{dV}{ds}. \end{aligned} \right.$$

La surface sera du premier genre si la droite KK' est confondue avec HH', c'est-à-dire si KK' est dans le plan SHH'. Ce dernier n'est autre chose, ici, que le plan perpendiculaire à l'axe du cône, $\xi = 0$. Il faudra donc que l'on ait

$$\omega\varpi = 0$$

et

$$\frac{1}{\omega}\left(\frac{d\omega}{ds} + \omega \operatorname{tang} V \frac{dV}{ds}\right) = \frac{1}{\sin^2 V}(\operatorname{tang} V + \sin 2V)\frac{dV}{ds}.$$

Laissant de côté $\omega = 0$, ces conditions se réduisent à

$$\tag{8} \varpi = 0, \qquad \frac{1}{\omega}d\omega = 3\cot V\, dV.$$

La dernière a pour intégrale

$$\rho = \frac{l}{\sin^3 V}, \tag{9}$$

ρ désignant le rayon de courbure de la trajectoire du sommet qui est plane, d'après la première condition, et l une constante arbitraire.

On peut vérifier que, si ces deux conditions sont remplies, l'équation des lignes asymptotiques se ramène bien à deux équations de Riccati. C'est, en général,

$$\frac{d\varphi}{ds} = \mu \pm \sqrt{\mathfrak{F}}, \tag{10}$$

en posant

$$\mu = \varpi + \omega \sin\varphi \cot V,$$

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{\omega\cos\varphi + \frac{dV}{ds}} \left[\frac{\omega\cos\varphi + \frac{dV}{ds}}{\sin V \cos V} - 2\varpi \sin\varphi \right]$$
$$\times \left\{ \left(3\omega \cot V \frac{dV}{ds} - \frac{d\omega}{ds} \right) \cos\varphi + \omega\varpi \sin\varphi + \cot V \left[\omega^2 + 2\left(\frac{dV}{ds}\right)^2 \right] - \frac{d^2 V}{ds^2} \right\}.$$

On voit aisément que $\mathfrak{F}$ est indépendant de φ si les conditions (8) sont vérifiées, et l'on est ramené à l'intégration de

$$\frac{d\varphi}{ds} = \omega \sin\varphi \cot V \pm \frac{1}{\sin V} \sqrt{\omega^2 + 2\left(\frac{dV}{ds}\right)^2 - \tang V \frac{d^2 V}{ds^2}}.$$

Voici une dernière propriété géométrique de ces surfaces, conséquence de la relation

$$\rho \sin^3 V = l :$$

La projection, sur les génératrices du cône, du segment de normale de la trajectoire du sommet, compris entre le sommet et le plan de la conique, a une longueur constante.

Cette particularité se présente pour les quadriques considérées comme enveloppes de cônes de révolution.

Des raisonnements semblables, appliqués aux surfaces enveloppes de sphères, montrent que les surfaces de révolution sont les seules appartenant à cette catégorie qui puissent être regardées comme surfaces du premier genre.

Surfaces du second genre.

Il n'y en a pas parmi les surfaces enveloppes de cônes de révolution, si la conique de contact n'est pas un cercle; les génératrices SH et SH' sont, en effet, dans un plan perpendiculaire à l'axe du cône et ne peuvent être confondues, condition qui devrait être remplie.

Mais il y en a parmi les surfaces enveloppes de sphères, comme nous allons le vérifier. Appelons x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre O de la sphère variable qui décrit une courbe C. Soient

R le rayon de la sphère;
ω et ϖ la courbure et la torsion de C;
s son arc pris pour variable indépendante;
α, β, γ, ... les cosinus directeurs des arêtes du trièdre de C.

Prenons pour seconde variable, afin de fixer la position d'un point, l'angle φ que fait le plan passant par ce point (xyz), et l'axe $O\xi$ du cercle sur lequel il se trouve avec le plan osculateur correspondant de C. Un calcul rapide permet d'écrire

$$(11)\quad \begin{cases} x = x_0 - \alpha R\dfrac{dR}{ds} + R\left[1 - \left(\dfrac{dR}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}(\alpha_1\cos\varphi + \alpha_2\sin\varphi), \\ y = y_0 - \beta R\dfrac{dR}{ds} + R\left[1 - \left(\dfrac{dR}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}(\beta_1\cos\varphi + \beta_2\sin\varphi), \\ z = z_0 - \gamma R\dfrac{dR}{ds} + R\left[1 - \left(\dfrac{dR}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}(\gamma_1\cos\varphi + \gamma_2\sin\varphi). \end{cases}$$

Le plan AB (*fig.* 3) du cercle, rapporté au trièdre $(O\xi\eta\zeta)$, a pour équation

$$(12)\qquad \xi + R\frac{dR}{ds} = 0.$$

La droite KK' est définie par cette équation jointe à la suivante :

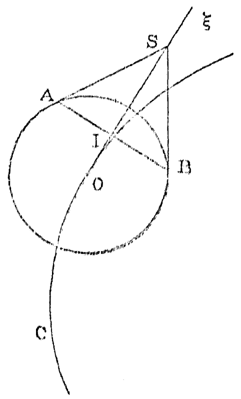
$$(13)\qquad \omega\eta - 1 + \frac{d}{ds}\left(R\frac{dR}{ds}\right) = 0.$$

On trouve aussi que le plan SHH', qui est le plan diamétral conjugué par rapport au cône de la tangente ST à la trajectoire du sommet, est défini par

$$(14)\qquad \left[1-\left(\frac{dR}{ds}\right)^2\right]\left(\xi\frac{d^2R}{ds^2}-\eta\omega\frac{dR}{ds}\right)-\left(\xi+R\frac{dR}{ds}\right)\frac{d^2R}{ds^2}=0.$$

La surface est du second genre si K et K′ sont confondus, c'est-à-dire si KK′ est tangente à la sphère, et si le plan SHH′ est tangent à

Fig. 3.



cette même sphère. Ces deux conditions s'écrivent aisément et donnent lieu aux relations suivantes :

$$(15)\qquad \omega^2R^2\left[1-\left(\frac{dR}{ds}\right)^2\right]=\left[1-\frac{d}{ds}\left(R\frac{dR}{ds}\right)\right]^2,$$

$$(16)\qquad \omega^2\left[1-\left(\frac{dR}{ds}\right)^2\right]=\left(\frac{d^2R}{ds^2}\right)^2.$$

La comparaison de ces deux équations permet de les remplacer par

$$(17)\qquad \begin{cases} 2R\dfrac{d^2R}{ds^2}+\left(\dfrac{dR}{ds}\right)^2-1=0,\\[2ex] \omega^2=\dfrac{1}{4R^2}\left[1-\left(\dfrac{dR}{ds}\right)^2\right].\end{cases}$$

La première s'intègre une fois et donne

$$ds=\pm\frac{dR}{\sqrt{1-\dfrac{h}{R}}},$$

h désignant une constante arbitraire. On peut alors remplacer la seconde par

$$\omega^2 = \frac{h}{4R^3}.$$

Ces deux conditions fournissent l'arc et la courbure de la trajectoire du centre de la sphère variable, comme fonctions de son rayon. On vérifie alors que l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface, qui est en général

$$(18) \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \varpi - \frac{\omega \frac{dR}{ds} \sin\varphi}{\left[1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \pm \sqrt{\mathfrak{H}},$$

en posant

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{4R^2} - \frac{1}{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2} \left\{ \omega \cos\varphi + \frac{2R\frac{d^2R}{ds^2} + \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - 1}{2R\left[1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \right\}^2,$$

se réduit à deux équations de Riccati

$$(19) \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \varpi - \frac{\sin\varphi}{2R}\left[\sqrt{1 - \frac{h}{R}} \pm 1\right].$$

Voici maintenant quelques propriétés géométriques de ces surfaces. D'abord, en général, la tangente à la trajectoire du sommet est dans le plan osculateur à la trajectoire du centre de la sphère. Pour ces surfaces particulières, on a

$$\mathrm{OI} = \pm R \frac{dR}{dS} = \sqrt{R^2 - Rh},$$

$$\mathrm{AI} = \sqrt{Rh}.$$

Si V est le demi-angle au sommet du cône, on a

$$\cos V = \frac{\mathrm{AI}}{R} = \sqrt{\frac{h}{R}}.$$

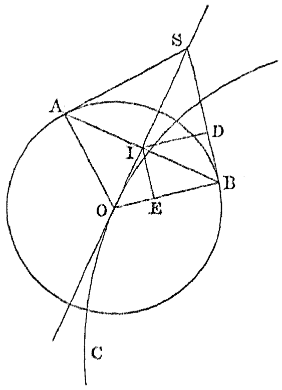
Soit ID (*fig.* 4) la distance du centre du cercle au cône circonscrit;

on a

$$\mathrm{ID} = \frac{\overline{\mathrm{AI}}^2}{\mathrm{R}} = h.$$

La distance du centre du cercle variable au cône circonscrit est constante.

Fig. 4.



Appelons encore σ l'arc de la courbe décrite par le centre I de ce cercle. Il est facile de démontrer que

$$d\sigma^2 = \frac{h}{4\mathrm{R}}\, ds^2 = \frac{h\, d\mathrm{R}^2}{4(\mathrm{R}-h)}.$$

En intégrant, il vient

$$\sigma = \pm\sqrt{h(\mathrm{R}-h)} + \text{const.} = \pm\,\mathrm{IE} + \text{const.},$$

IE désignant la distance du centre du cercle aux génératrices du cône normal à la surface le long de ce cercle. On obtient donc cette autre propriété :

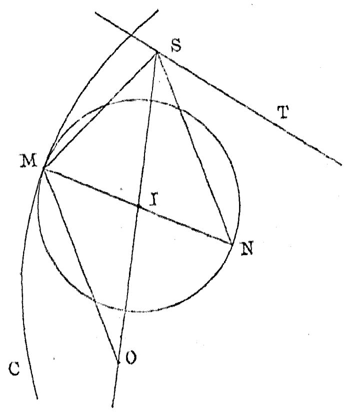
La somme ou la différence de l'arc décrit par le centre du cercle variable et de la distance de ce point aux génératrices du cône de normales correspondant est une quantité constante.

On en peut obtenir d'autres en suivant une voie toute différente et envisageant la surface comme engendrée par un cercle osculateur à une courbe gauche. Appelons encore ω et ϖ la courbure et la torsion de cette courbe ; il est aisé de démontrer les résultats suivants : la distance IS (*fig.* 5) du sommet du cône circonscrit le long du cercle osculateur en M, au plan de ce cercle, est égale à

$$-\varpi \frac{1}{\frac{d\omega}{ds}},$$

cette distance étant comptée positivement dans le sens direct choisi sur la binormale. La tangente ST à la trajectoire du sommet est située

Fig. 5.



dans le plan normal à la courbe, soit SMN. La surface engendrée sera du second genre si ST est confondue, soit avec SM, soit avec SN; la première hypothèse est impossible, et la seconde fournit la relation

$$\varpi^2(k^2 - \omega^2) = \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2, \tag{20}$$

k désignant une constante arbitraire qui est l'inverse de la distance constante du point I aux génératrices du cône circonscrit. On peut donc considérer les enveloppes de sphères du second genre comme engendrées par le cercle osculateur à une courbe dont la courbure, la torsion et l'arc sont liés par la relation (20).

Recherche des lignes asymptotiques de quelques surfaces simples.

Nous commencerons par les surfaces algébriques d'ordre n avec une droite multiple d'ordre $n-2$, dans le cas où les plans tangents le long de cette droite sont fixes, et où les cônes de tangentes aux deux points coniques situés sur cette droite se réduisent à deux plans que nous choisirons pour faces du tétraèdre de référence; nous prendrons comme autres faces deux plans quelconques passant par la droite multiple. L'équation de la surface prend alors la forme

$$(a) \qquad zt f(x, y) = \varphi(x, y),$$

f désignant une fonction homogène de degré $n-2$ et φ une fonction semblable de degré n. Si nous projetons cette surface sur un plan au moyen de droites passant par l'un des points multiples d'ordre $n-1$, savoir

$$y = \lambda x, \qquad z = \mu x,$$

nous obtenons pour les coordonnées d'un point quelconque de cette surface

$$(b) \qquad \frac{x}{\mu} = \frac{y}{\lambda\mu} = \frac{z}{\mu^2} = \frac{t}{F(\lambda)},$$

en posant

$$F(\lambda) = \frac{\varphi(1, \lambda)}{f(1, \lambda)}.$$

En formant, au moyen de ces expressions, l'équation différentielle des lignes asymptotiques, il vient

$$(c) \qquad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{d^2 F}{d\lambda^2} d\lambda \frac{1}{\dfrac{dF}{d\lambda} \pm \sqrt{\left(\dfrac{dF}{d\lambda}\right)^2 - 2F\dfrac{d^2F}{d\lambda^2}}}.$$

Cette équation se simplifiera si le polynôme f a des racines multiples, c'est-à-dire si plusieurs nappes de la surface se raccordent le long de la droite singulière, ou bien si le polynôme φ a des racines triples au moins, et, par suite, si trois au moins des plans passant par la droite multiple et coupant la surface suivant une conique évanouissante sont confondus. Le cas le plus favorable est celui où toutes les nappes se raccordent et où tous les plans des sections singulières sont confondus. L'équation de la surface s'écrit alors

$$(d) \qquad z t x^{n-2} = y^n.$$

En tenant compte des formules (b), sans supposer forcément n entier, on trouve comme équation des asymptotiques correspondantes

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{n \pm \sqrt{n(2-n)}}{n(n-1)} \frac{d\mu}{\mu},$$

qui admet pour intégrale

$$\lambda = C\mu^{\frac{n \pm \sqrt{n(2-n)}}{n(n-1)}}.$$

Ces surfaces (d) ne sont algébriques que si n est commensurable.

Si les deux points fixes par lesquels passent les coniques sont réels, les lignes asymptotiques ne sont réelles que pour des valeurs de n comprises entre zéro et 2. Elles seront algébriques si $\sqrt{n(2-n)}$ est commensurable en même temps que n. Si l'on pose

$$n = \frac{a}{b},$$

on trouve que l'on doit avoir

$$(a-b)^2 = b^2 - c^2,$$

c désignant un nombre entier. On est donc ramené à la résolution en nombres entiers de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

On prendra

$$b = z, \qquad a = x + z, \qquad \sqrt{n(2-n)} = \frac{y}{z}.$$

Les valeurs les plus simples que l'on puisse attribuer à n sont :

$$1^\circ \qquad n = \tfrac{1}{5}.$$

La surface est

$$z^5 t^5 = y x^9.$$

Les asymptotiques sont alors deux séries de courbes gauches du sixième ordre, unicursales, intersections de cônes du deuxième et du troisième degré.

2°
$$n = \frac{2}{5}.$$

La surface est
$$z^5 t^5 = y^2 x^8.$$

Les lignes asymptotiques sont encore des courbes gauches unicursales de sixième ordre; mais elles ne sont pas tracées sur des surfaces du deuxième degré.

Si la surface (a) est du troisième degré, on sera ramené aux fonctions elliptiques. Cependant, dans certains cas particuliers, l'intégrale sera algébrique : c'est ce qui arrive pour la surface tétraédrale du troisième degré à quatre points coniques
$$ayzt + bxzt + cxyt + dxyz = 0,$$
qui est engendrée de six façons différentes par des coniques passant par deux points fixes. On sait que les asymptotiques sont des courbes algébriques d'ordre 6 et de genre 0.

Nous terminerons cette étude en cherchant les lignes asymptotiques de la surface du quatrième ordre présentant une conique double et quatre points coniques; nous avons déjà vu que les deux séries de coniques passant par les deux couples de points coniques sont conjuguées, et que les coniques de chaque série sont tangentes à deux plans fixes. Kummer a montré que l'équation d'une pareille surface peut se mettre sous la forme
$$[p^2 + qr - st]^2 = 4p^2 qr$$
ou sous la forme équivalente
$$[p^2 + st - qr]^2 = 4p^2 st,$$
p, q, r, s, t désignant des fonctions linéaires. Supposons réelles les fonctions linéaires q, r, s, t et prenons pour faces du tétraèdre de référence les plans correspondants qui touchent la surface, chacun suivant une conique. L'équation devient
$$(1) \qquad [P^2 + xy - zt]^2 - 4P^2 xy = [P^2 + zt - xy]^2 - 4P^2 zt = 0.$$

Soit

$$P = \alpha x + \beta y - \gamma z - \delta t.$$

Posons

$$y = \lambda^2 x, \qquad t = \mu^2 z.$$

Un calcul rapide permet d'écrire les coordonnées d'un point quelconque de la surface sous la forme

$$(2) \qquad \frac{x}{\gamma + \mu + \delta\mu^2} = \frac{y}{\lambda^2(\gamma + \mu + \delta\mu^2)} = \frac{z}{\alpha + \lambda + \beta\lambda^2} = \frac{t}{\mu^2(\alpha + \lambda + \beta\lambda^2)}.$$

Au moyen de ces formules, on trouve comme équation des asymptotiques

$$(3) \qquad \frac{d\lambda^2}{\lambda(\alpha + \lambda + \beta\lambda^2)} = \frac{d\mu^2}{\mu(\gamma + \mu + \delta\mu^2)}.$$

La transformation

$$(4) \qquad \lambda = \frac{1}{\beta}\left(4u - \frac{1}{3}\right), \qquad \mu = \frac{1}{\delta}\left(4v - \frac{1}{3}\right)$$

permet de remplacer cette équation par la suivante

$$(5) \qquad \frac{du^2}{4u^3 - g_2 u - g_3} = \frac{dv^2}{4v^3 - g'_2 v - g'_3},$$

en posant

$$g_2 = \frac{1 - 3\alpha\beta}{12}, \qquad g'_2 = \frac{1 - 3\gamma\delta}{12},$$

$$g_3 = \frac{9\alpha\beta - 2}{27 \times 16}, \qquad g'_3 = \frac{9\gamma\delta - 2}{27 \times 16}.$$

L'intégrale générale est donc

$$(6) \qquad \begin{cases} u = \wp(\theta, g_2, g_3), \\ v = \wp(\pm\theta + m, g'_2, g'_3), \end{cases}$$

θ désignant une variable et m une constante arbitraire. On a

$$g_2^3 - 27 g_3^2 = \frac{\alpha^2\beta^2(1 - 4\alpha\beta)}{16^2},$$

$$g_2'^3 - 27 g_3'^2 = \frac{\gamma^2\delta^2(1 - 4\gamma\delta)}{16^2}.$$

La réalité des deux couples de points coniques de la surface dépend précisément des signes de ces deux quantités $1-4\alpha\beta$ et $1-4\gamma\delta$. L'intégrale générale de (5) peut être algébrique; cela arrive, en particulier, si l'on a

$$g'_2 = g_2 \quad \text{et} \quad g'_3 = g_3,$$

ce qui entraîne la seule condition

$$\alpha\beta = \gamma\delta. \tag{7}$$

Il est facile de voir qu'alors le plan $P=0$ est tangent à la quadrique

$$xy - zt = 0.$$

La conique double de la surface se compose d'un système de deux droites.

Les quatre points coniques sont alors de même nature, puisque l'on a

$$1-4\alpha\beta = 1-4\gamma\delta.$$

Si l'on suppose α et β de même signe, on peut écrire

$$\alpha = p^2\beta, \qquad \gamma = q^2\delta,$$

avec la condition

$$p\beta = q\delta,$$

qui remplace (7).

La transformation

$$\lambda = p\,\frac{1-u}{1+u}, \qquad \mu = q\,\frac{1-v}{1+v}$$

substitue à l'équation (3) la suivante

$$\frac{du^2}{(1-u^2)(1-hu^2)} = \frac{dv^2}{(1-v^2)(1-hv^2)}, \tag{8}$$

h désignant la constante $\frac{1-2p\beta}{1+2p\beta}$.

On a alors, comme expressions des coordonnées d'un point de la surface,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{x}{\frac{1}{p}(1+u)^2(1-hv^2)} = \frac{y}{p(1-u)^2(1-hv^2)} \\ &= \frac{z}{\frac{1}{q}(1+v)^2(1-hu^2)} = \frac{t}{q(1-v)^2(1-hu^2)}, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

avec

$$\mathrm{P} = \frac{1-h}{1+h}\left(px + \frac{y}{p} - qz - \frac{t}{q}\right).$$

L'intégrale générale de (8) peut s'écrire

$$(10)\quad (hu^2v^2+1)(1+h+2\rho)+(\rho^2-h)(u^2+v^2)+2uv(1+\rho)(h+\rho)=0,$$

ρ désignant une constante arbitraire.

Une étude détaillée de la représentation de la surface sur un plan au moyen des formules (9) et (10) permet de démontrer les propriétés suivantes :

Les asymptotiques sont des courbes du huitième ordre et de genre 1 ; *chacune rencontre en deux points les sections coniques de la surface qui passent par les points coniques ; en quatre points, chaque droite double, et en quatre points aussi chacune des coniques suivant lesquelles la surface est coupée par un faisceau de plans passant par une droite double. Enfin chacune passe par les points coniques qu'elle admet pour points doubles.*

La réalité de ces courbes ne change pas tant qu'elles ne rencontrent pas l'un des points coniques de la surface ou l'une de ses coniques de contact avec les quatre faces du tétraèdre de référence. Il en est d'ailleurs de même pour la surface générale représentée par l'équation (1).

Dans le cas où α et β sont de signes contraires, la transformation employée plus haut doit être remplacée par une autre ; nous prendrons alors la suivante, qui exige seulement que les points doubles soient réels. Posons

$$\lambda = a(1-u), \qquad \mu = b(1-v),$$

a et b désignant deux racines des équations

$$\beta a^2 + a + \alpha = 0,$$
$$\delta b^2 + b + \gamma = 0,$$

lesquelles sont réelles en vertu de l'hypothèse faite plus haut. On peut, de plus, les choisir de telle sorte que $a\beta = b\delta$ en vertu de la relation $\alpha\beta = \gamma\delta$. Si l'on pose

$$h = \frac{\alpha\beta}{1 + 2\alpha\beta},$$

il vient comme expressions des coordonnées d'un point de la surface

$$(11) \qquad \frac{x}{\frac{v}{a}(1 - hv)} = \frac{y}{av(1 - hv)(1 - u)^2} = \frac{z}{\frac{u}{b}(1 - hu)} = \frac{t}{bu(1 - hu)(1 - v)^2}.$$

L'équation des asymptotiques est alors

$$(12) \qquad \frac{du^2}{u(1 - u)(1 - hu)} = \frac{dv^2}{v(1 - v)(1 - hv)},$$

et son intégrale générale est

$$(13) \qquad [huv + 1 - \rho(u + v)]^2 - 4(\rho - 1)(\rho - h)uv = 0.$$

Ces formules permettent de retrouver les résultats démontrés plus haut sur les lignes asymptotiques.

Un cas plus particulier encore est celui où l'on aurait

$$1 - 4\alpha\beta = 1 - 4\gamma\delta = 0.$$

La constante h est alors nulle dans les équations (9), qui deviennent

$$(14) \qquad \frac{x}{2\beta(1 + u)^2} = \frac{y}{\frac{1}{2\beta}(1 - u)^2} = \frac{z}{2\delta(1 + v)^2} = \frac{t}{\frac{1}{2\delta}(1 - v)^2}.$$

Les lignes asymptotiques de cette surface sont représentées par l'équation

$$(15) \qquad u^2 + v^2 - 1 + 2uv\rho + \rho^2 = 0.$$

Ce sont des courbes gauches de quatrième ordre et de seconde espèce comme celles de la surface de Steiner, dont la surface proposée est un cas singulier.

Des surfaces minima.

Nous allons nous servir de l'équation trouvée pour les lignes asymptotiques, en général, savoir

$$\left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)^2 = F(\lambda)\frac{\partial M}{\partial \lambda}\frac{\partial N}{\partial \lambda}, \tag{1}$$

pour rechercher celles des surfaces étudiées qui sont des surfaces minima. Écrivons que les lignes asymptotiques sont rectangulaires ; il vient

$$\left[\left(N\frac{\partial n_1}{\partial \mu} - n_1\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)^2 + \left(N\frac{\partial n_2}{\partial \mu} - n_2\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)^2 + \left(N\frac{\partial n_3}{\partial \mu} - n_3\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)^2\right]\frac{d\mu^2}{d\lambda^2} = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)\left(\frac{\partial N}{\partial \lambda}\right)^2.$$

Si l'on remplace dans cette relation $\left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)^2$ par sa valeur tirée de (1), on obtient

$$\left[\left(N\frac{\partial n_1}{\partial \mu} - n_1\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)^2 + \left(N\frac{\partial n_2}{\partial \mu} - n_2\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)^2 + \left(N\frac{\partial n_3}{\partial \mu} - n_3\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)^2\right]F(\lambda)\frac{\partial M}{\partial \lambda} = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)\frac{\partial N}{\partial \lambda}. \tag{2}$$

Cette relation doit être vérifiée quel que soit μ ; d'ailleurs, elle est de degré 6 par rapport à μ, ce qui montre qu'il existe, en général, sur chaque conique six points pour lesquels les lignes asymptotiques sont rectangulaires. Posons

$$l_i = N\frac{\partial n_i}{\partial \mu} - n_i\frac{\partial N}{\partial \mu} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

L'équation $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 0$ fournit les quatre points (a_i) de la conique C en lesquels la tangente va rencontrer le cercle imaginaire à l'infini Γ. L'équation $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 0$ donne les quatre points (b_i) de la conique pour lesquels la génératrice (Sb_i) correspondante va rencontrer Γ. Si (2) est une identité, deux points (a_i) au moins sont confondus avec deux points (b_i). Cela n'est possible que si C rencontre Γ en deux points (c_1, c_2) ; mais alors C est un cercle, et $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$ est carré parfait. Il peut maintenant se présenter deux cas :

1° Le cône (S, C) est tangent au cercle Γ aux deux points (c_1, c_2).

Alors les quatre points (a_i) sont confondus avec les quatre points (b_i), deux à deux en c_1 et en c_2. La surface est à génératrice circulaire et le cône circonscrit est de révolution ; c'est donc une enveloppe de sphères. L'identité (2) ne renferme plus alors que les polynômes $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ qui devraient encore avoir mêmes racines ; la surface serait donc du premier genre, et nous savons que les seules surfaces enveloppes de sphères du premier genre sont des surfaces de révolution.

2° Le cône (S, C) n'est pas tangent au cercle Γ aux deux points c_1 et c_2. Il faut alors que $\frac{\partial N}{\partial \lambda} = 0$ admette les deux autres racines du polynôme $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$, lesquelles correspondent toujours aux deux points c_1 et c_2 ; il faut donc que la droite KK' soit confondue avec $c_1 c_2$, et par suite soit rejetée à l'infini. La surface ne peut donc être engendrée que par un cercle parallèle à un plan fixe, et l'on retrouve ainsi les surfaces minima à génératrices circulaires étudiées par Riemann. La surface minima de révolution rentre dans cette catégorie.

Le résultat que nous venons de démontrer est une conséquence immédiate d'un théorème dû à M. Schwarz :

Si une surface minima est enveloppée par une série de cônes du second degré, ces cônes sont homocycliques (*Journal de Crelle*, t. 80).

Par suite, si deux cônes infiniment voisins se coupent suivant une conique, cette conique est un cercle et son plan a une direction constante.

TROISIÈME PARTIE.

Les surfaces que nous étudions ne présentent pas, en général, de propriétés métriques beaucoup plus simples que celles des surfaces à génératrice conique quelconque; cependant, ces propriétés peuvent se simplifier dans certains cas particuliers, comme nous allons le montrer.

Recherche des trajectoires orthogonales des coniques génératrices.

Les équations de la surface étant prises sous la forme

$$(1) \qquad x = X + \frac{n_1}{N}, \qquad y = Y + \frac{n_2}{N}, \qquad z = Z + \frac{n_3}{N},$$

avec des axes de coordonnées rectangulaires, l'équation différentielle des courbes en question est

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} dx + \frac{\partial y}{\partial \mu} dy + \frac{\partial z}{\partial \mu} dz = 0$$

ou bien

$$(2) \qquad (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) \frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{\partial N}{\partial \lambda} (l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3),$$

en posant, comme plus haut,

$$l_i = N \frac{\partial n_i}{\partial \mu} - n_i \frac{\partial N}{\partial \mu}.$$

Appelons A le coefficient de $\frac{d\mu}{d\lambda}$ et B le second membre de l'équation (2). Le polynôme A, du quatrième degré par rapport à μ, admet comme racines les valeurs de μ correspondant aux points de rencontre a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ de la conique avec ses directrices.

B est un polynôme du sixième degré dont les racines se rapportent, soit aux points K et K′ si elles appartiennent à $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$, soit aux points c_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ de la conique pour lesquels la génératrice du cône est normale à la conique ; ces derniers points s'obtiennent par la Géométrie, en projetant orthogonalement le sommet du cône sur le plan de la conique et menant du point ainsi obtenu les normales à la conique.

B est nul identiquement, si ces derniers points sont indéterminés, ce qui a lieu seulement pour les enveloppes de sphères.

L'équation (2) se simplifiera si les polynômes A et B ont des racines communes, ce qui ne peut avoir lieu que dans les deux cas suivants :

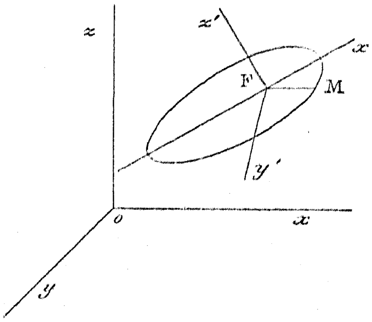
1° *La caractéristique du plan de la conique variable est une directrice de cette conique;*

2° *Le sommet du cône se projette orthogonalement sur le plan de la conique en un foyer de cette courbe.*

Dans ces deux cas, les degrés des polynômes A et B s'abaissent de deux unités. Si les deux conditions se trouvent remplies simultanément, l'équation se réduit à une équation de Riccati, et les coniques génératrices de la surface sont partagées homographiquement par leurs trajectoires orthogonales. Nous reviendrons, dans un instant, sur ce cas intéressant.

Nous sommes amenés ainsi à étudier la surface engendrée par une conique variable, avec cône circonscrit, le sommet du cône se projetant orthogonalement en un foyer de la conique. Imaginons (*fig.* 6) un

Fig. 6.



système d'axes rectangulaires variables composé de l'axe focal Fx' de la conique, de la perpendiculaire Fy' à cet axe dans le plan de la conique et de la normale Fz' au plan de la conique menée par le foyer. Appelons abc, $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$ les cosinus directeurs de ces axes mobiles par rapport à des axes fixes rectangulaires. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du foyer; s l'arc de sa trajectoire pris comme variable pour fixer la position de la conique; α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente à cette courbe relativement aux axes mobiles. Nous déterminerons un point M sur chaque conique au moyen de l'angle polaire θ que fait le rayon vecteur de ce point avec Fx'. Les coordonnées de ce point sont

$$x' = \frac{p\cos\theta}{1+e\cos\theta}, \qquad y' = \frac{p\sin\theta}{1+e\cos\theta}, \qquad z' = 0,$$

p désignant le paramètre et e l'excentricité de la conique. Il faut encore adjoindre à ces formules celles qui permettent de passer des axes mobiles aux axes fixes, et inversement.

On en déduit pour les paramètres directeurs des tangentes aux courbes $s =$ const. et $\theta =$ const., par rapport aux axes mobiles, les quantités suivantes

	Fx'	Fy'	Fz'
$\theta =$ const.	$\alpha + \frac{\partial x'}{\partial s} - wy'$	$\beta + \frac{\partial y'}{\partial s} + wx'$	$\gamma - vx' + uy'$
$s =$ const.	$\frac{\partial x'}{\partial \theta}$	$\frac{\partial y'}{\partial \theta}$	0

en posant

$$u = a_2\frac{da_1}{ds} + b_2\frac{db_1}{ds} + c_2\frac{dc_1}{ds},$$

$$v = a\frac{da_2}{ds} + b\frac{db_2}{ds} + c\frac{dc_2}{ds},$$

$$w = a_1\frac{da}{ds} + b_1\frac{db}{ds} + c_1\frac{dc}{ds}.$$

L'équation du plan tangent à la surface ainsi engendrée, en un point de coordonnées $(s\theta)$, par rapport aux axes mobiles peut alors s'écrire

$$\begin{aligned}&[x'(e+\cos\theta) + y'\sin\theta - p][\gamma(1+e\cos\theta) - vp\cos\theta + up\sin\theta] \\ &= z'\left[\frac{dp}{ds} + \cos\theta\left(e\frac{dp}{ds} - p\frac{de}{ds}\right) + (1+e\cos\theta)(\alpha e + \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta) - wpe\sin\theta\right].\end{aligned}$$

Si l'on écrit que ce plan va passer par un même point $(x'y'z')$, quel que soit θ, on obtient, pour déterminer les coordonnées de ce point, cinq équations :

$$x'(\gamma e - vp) - upy' = \alpha e z',$$
$$upx' + (\gamma e - vp)y' = \beta e z',$$
$$(ex' - p)(\gamma e - vp) + \gamma x' = \left[\alpha(e^2 + 1) + e\frac{dp}{ds} - p\frac{de}{ds}\right]z',$$
$$up(ex' - p) + \gamma y' = (\beta - wpe)z',$$
$$\gamma(ex' - p) + upy' = \left(\frac{dp}{ds} + \alpha e\right)z'.$$

En écrivant que ces cinq équations à trois inconnues ont une solution, on obtiendrait deux relations entre les données, et cela pourrait conduire à une méthode cinématique pour l'étude des surfaces en question.

Revenons au cas particulier qui nous intéresse; le sommet du cône est sur Fz'.

Posons donc

$$x' = y' = 0, \qquad z' = \delta.$$

Il vient

$$\alpha = \beta = 0, \qquad \gamma = 1$$

et

$$-\frac{p}{\delta} = \frac{dp}{ds} = -\frac{ew}{u} = \frac{1}{v}\frac{de}{ds}.$$

La trajectoire du foyer est donc normale au plan de la conique. Si l'on appelle ω et ϖ la courbure et la torsion de cette courbe, ε l'angle de sa normale principale avec l'axe focal de la conique, on montre aisément que l'on a

$$u = \omega \sin\varepsilon,$$
$$v = \omega \cos\varepsilon,$$
$$w = -\varpi + \frac{d\varepsilon}{ds}.$$

Les conditions restantes deviennent alors

$$(3) \qquad -\frac{p}{\delta} = \frac{dp}{ds} = \frac{de}{ds}\,\frac{1}{\omega\cos\varepsilon} = \left(\omega - \frac{d\varepsilon}{ds}\right)\frac{e}{\omega\sin\varepsilon}.$$

On peut choisir arbitrairement la trajectoire du foyer (ω et ϖ) et l'angle ε de l'axe focal avec la normale principale à cette courbe; les relations

$$\frac{de}{e} = \cot\varepsilon(\varpi ds - d\varepsilon), \qquad dp = \frac{de}{\omega \cos\varepsilon} \tag{4}$$

détermineront la grandeur de la conique dans chacune de ses positions; cela n'exige que des quadratures. On voit de plus que, la trajectoire du foyer étant une courbe arbitrairement choisie, les trois quantités $\frac{dp}{ds}$, $\frac{de}{ds}$, $\varpi - \frac{d\varepsilon}{ds}$ sont nulles en même temps; le cône circonscrit est alors un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan de la conique, le paramètre et l'excentricité sont constants, c'est-à-dire que la conique est de grandeur constante; enfin, l'axe focal de la conique engendre une développable. L'une quelconque de ces conditions géométriques entraîne les autres.

Si les conditions (4) sont remplies, le plan de la conique restant normal à la trajectoire d'un foyer, les degrés des polynômes A et B s'abaissent de deux unités dans l'équation (2); *cette équation se réduira à une équation de Riccati* si, de plus, la droite polaire de la trajectoire C du foyer est la directrice correspondant au second foyer de la conique. Cela exige d'abord $\varepsilon = 0$ et, par suite,

$$\varpi = 0, \qquad de = \omega\, dp. \tag{5}$$

Si l'on écrit encore que le centre de courbure de C (qui est plane) est au pied de la seconde directrice, on trouve

$$\omega p(1 + e^2) = e(1 - e^2). \tag{6}$$

La comparaison avec (5) suivie d'une intégration donne

$$pe = l(1 - e^2), \tag{7}$$

l désignant une constante arbitraire. Cette relation indique que la distance focale de la conique est constante et égale à $2l$. On pourra choisir arbitrairement la trajectoire plane d'un foyer; la trajectoire de l'autre est alors une courbe parallèle à la première dans son plan; la distance focale étant égale à $2l$, le paramètre et l'excentricité de la conique sont fournis par les formules

$$(8)\qquad e^2 = \frac{l\omega}{1 - l\omega} = \frac{l}{\rho - l}, \qquad p = \frac{l(1 - e^2)}{e}.$$

Nous allons reprendre cette recherche des trajectoires orthogonales et montrer que l'existence d'un cône circonscrit le long de chaque conique ne simplifie pas, en général, l'équation différentielle dont dépendent ces courbes. Si l'on se reporte aux équations d'une surface engendrée par une conique qui se déplace d'une façon quelconque, on trouve pour l'équation en question

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} & p\frac{d\theta}{ds}(1 + e^2 + 2e\cos\theta) + (1 + e\cos\theta)^2(-\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta + \beta e + wp) \\ & \qquad + e\sin\theta\left[\frac{dp}{ds}(1 + e\cos\theta) - p\cos\theta\,\frac{de}{ds}\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation est indépendante de u et v, et, si l'on suppose qu'il existe un cône circonscrit, les deux conditions que l'on obtient renfermant ces mêmes quantités, le nombre des fonctions arbitraires qui figurent dans (9) ne se trouve pas diminué.

Effectuons le changement de variable

$$(10)\qquad d\sigma = ds\sqrt{1 - \gamma^2}.$$

L'équation (9) est remplacée par

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} & p\,d\theta(1 + e^2 + 2e\cos\theta) + (1 + e\cos\theta)^2\left[\sin(\varepsilon - \theta) + e\sin\varepsilon + \frac{pw}{\sqrt{1 - \gamma^2}}\right]d\sigma \\ & \qquad + e\sin\theta[dp(1 + e\cos\theta) - p\cos\theta\,de] = 0, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$\cos\varepsilon = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \gamma^2}}, \qquad \sin\varepsilon = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \gamma^2}}.$$

Cette équation nouvelle peut être envisagée comme l'équation des trajectoires orthogonales d'une conique qui se déplace dans son plan, p et e désignant son paramètre et son excentricité, σ l'arc de la trajectoire Γ d'un foyer de cette conique et ε l'angle de l'axe focal de cette conique avec la tangente à Γ. La vitesse angulaire du système des axes de la conique par rapport aux axes fixes est à chaque instant égale à $\frac{w}{\sqrt{1-\gamma^2}}$. Si l'on introduit dans cette équation la fonction inconnue $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$, elle prend la forme suivante :

$$(11') \qquad \sin\theta\, dr + p\, d\theta + \left[\sin(\varepsilon - \theta) + \frac{pw}{\sqrt{1-\gamma^2}} + e\sin\varepsilon\right] d\sigma = 0.$$

Nous voyons ainsi que l'on peut toujours ramener la recherche des trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de coniques dans l'espace à une recherche semblable pour un système de coniques dans un plan. Toutefois, nous avons supposé, au début, le foyer de la conique variable, puisque nous avons pris comme variable indépendante l'arc de sa trajectoire; puis, lors du changement de variable (10), nous avons supposé $1-\gamma^2$ non nul, c'est-à-dire le plan de la conique non normal à la courbe décrite par le foyer.

Dans le premier cas, si l'on prend une variable indépendante quelconque t, l'équation des trajectoires orthogonales devient

$$(12) \qquad \begin{cases} p\, d\theta(1+e^2+2e\cos\theta) + wp(1+e\cos\theta)^2 dt \\ \qquad + e\sin\theta[dp(1+e\cos\theta) - p\cos\theta\, de] = 0, \end{cases}$$

en posant, cette fois,

$$w = a_1\frac{da}{dt} + b_1\frac{db}{dt} + c_1\frac{dc}{dt}.$$

Dans le second cas, si l'on appelle ϖ la torsion de la courbe décrite par le foyer, ε l'angle de l'axe focal de la conique avec la normale principale à cette courbe, on obtient

$$(13) \qquad \begin{cases} p\, d\theta(1+e^2+2e\cos\theta) + p(d\varepsilon - \varpi\, ds)(1+e\cos\theta)^2 \\ \qquad + e\sin\theta[dp(1+e\cos\theta) - p\cos\theta\, de] = 0. \end{cases}$$

Ces équations (12) et (13) deviennent identiques si l'on prend

$$d\varepsilon - \varpi\, ds = w\, dt,$$

et conviennent également toutes deux aux trajectoires orthogonales d'une famille de coniques ayant un plan fixe et un foyer fixe. La dernière peut encore se mettre sous l'une quelconque des deux formes suivantes :

$$(14)\quad \begin{cases} [r(e^2-1)+2p]\,dr+p\left[\dfrac{p-r}{e}\,de-dp\right]+pre\sin\theta\,(d\varepsilon-\varpi\,ds)=0, \\ p(d\theta+d\varepsilon-\varpi\,ds)+e\sin\theta\,dr=0. \end{cases}$$

Les trajectoires orthogonales d'un système de coniques ayant un foyer fixe dans un plan fixe s'obtiennent aisément dans un certain nombre de cas simples, par exemple lorsque le système se compose de cercles concentriques, de paraboles homofocales, de coniques homofocales, etc. Nous allons retrouver ces cas simples pour les systèmes correspondants de l'espace au moyen des équations (14). D'abord, leur forme est indépendante de la courbure de la trajectoire C du foyer dans l'espace, et elles ne sont pas modifiées si l'on augmente ε d'une quantité constante. Appelons Σ les différentes surfaces réglées engendrées par les normales à C et découpant sur la surface proposée les trajectoires orthogonales de ses coniques; soit S la surface gauche engendrée par l'axe focal de la conique : si l'on augmente ε d'une quantité constante, c'est-à-dire si l'on fait tourner les génératrices de S d'un même angle autour de C, la fonction θ ne sera pas modifiée et les nouvelles surfaces Σ ne seront autres que les anciennes dont les génératrices auront suivi le mouvement de rotation des génératrices de S. Dans le plan, cela reviendrait à supposer que l'on a fait tourner toutes les coniques d'un même angle autour du foyer commun : toutes les trajectoires orthogonales auront ainsi tourné du même angle.

Plus généralement, si l'on suppose que $d\varepsilon-\varpi\,ds$ conserve la même valeur, l'équation à intégrer ne change pas.

Si $d\varepsilon-\varpi\,ds=0$, c'est-à-dire si l'axe focal de la conique engendre une développable (ou s'il a une position fixe dans le plan), la première équation (14) devient

$$(15)\qquad [r(e^2-1)+2p]\,e\,dr+p[(p-r)\,de-e\,dp]=0.$$

Si e est constant, c'est-à-dire si les coniques restent semblables à elles-mêmes, cette équation s'intègre immédiatement; son intégrale est

$$[p+r(e-1)]^{e-1}[p-r(e+1)]^{e+1}=\text{const.}$$

En particulier, si $e = 1$ (paraboles homofocales dans le plan), cette intégrale se réduit à

$$r = \frac{p}{2} + \text{const.}$$

et donne une construction géométrique des trajectoires cherchées.

Si les deux polynômes du premier degré par rapport à r qui figurent dans l'équation (15) sont divisibles l'un par l'autre, c'est-à-dire si p et e sont liés par la relation

$$\frac{de}{e} = \frac{p\,de - e\,dp}{2p},$$

qui admet pour intégrale

$$pe = l(1 - e^2),$$

l désignant une constante arbitraire, cette équation (15) se réduit à

$$dr = -l\frac{de}{e^2},$$

dont l'intégrale est

$$r = \frac{l}{e} + \text{const.}$$

La surface correspondante est engendrée par une conique dont le plan est normal à la trajectoire d'un foyer et dont l'axe focal admet une enveloppe; de plus, la distance focale de cette conique est constante (coniques homofocales dans le plan). C'est ce qui a lieu pour les surfaces particulières que nous avons rencontrées plus haut et dont les génératrices coniques sont partagées homographiquement par leurs conjuguées.

Enfin, si la conique variable est un cercle de rayon r, la seconde équation (14) se ramène à

$$d(\theta + \varepsilon) - \varpi\,ds = 0.$$

Les surfaces Σ sont alors les développables engendrées par les normales à C; les coniques correspondant aux génératrices de la surface dans le plan sont des cercles de centre fixe.

Remarque. — La méthode cinématique que nous venons d'indiquer peut s'appliquer encore en prenant comme variable l'arc de la courbe décrite par le centre de la conique; on retrouve ainsi très facilement, et par des calculs quelquefois plus simples, les résultats que nous venons de démontrer sur les trajectoires orthogonales des coniques.

On vérifie très aisément aussi de cette façon que, si la surface est engendrée par des cercles, c'est une enveloppe de sphères ou bien le plan du cercle a une direction constante. Si la conique de contact est une section principale du cône circonscrit sans être un cercle, elle reste semblable à elle-même dans son déplacement, et l'axe de rotation du trièdre des axes formé par les axes de la conique et la perpendiculaire à leur plan se trouve dans le plan de cette conique; etc.

Élément linéaire.

Si nous reprenons les formules générales

$$x = X + \frac{n_1}{N}, \quad \ldots$$

et si nous posons

$$\mathcal{R}^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{N^2},$$

nous trouvons facilement pour l'expression du carré de l'élément linéaire de la surface générale

$$ds^2 = \frac{\mathcal{R}^2}{N^2}\left(\frac{\partial N}{\partial \lambda}\right)^2 d\lambda^2 - 2\frac{\mathcal{R}}{N}\frac{\partial N}{\partial \lambda}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mu}\, d\lambda\, d\mu + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2\right] d\mu^2.$$

Lorsque la surface est une enveloppe de sphères, $\mathcal{R}$ est indépendant de μ, et, en tenant compte de l'identité

$$n_1\frac{\partial n_1}{\partial \mu} + n_2\frac{\partial n_2}{\partial \mu} + n_3\frac{\partial n_3}{\partial \mu} = \mathcal{R}^2 N\frac{\partial N}{\partial \mu},$$

il vient

$$N^2 ds^2 = \mathcal{R}^2\left(\frac{\partial N}{\partial \lambda}\right)^2 d\lambda^2 + \left[\left(\frac{\partial n_1}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial n_2}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial n_3}{\partial \mu}\right)^2 - \mathcal{R}^2\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)^2\right] d\mu^2.$$

La quantité placée entre crochets peut s'écrire

$$4[(p_1\mu + q_1)^2 + (p_2\mu + q_2)^2 + (p_3\mu + q_3)^2 - \mathfrak{R}^2(P_\mu + Q)^2],$$

et, en vertu de l'identité

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - \mathfrak{R}^2 N^2 = 0,$$

elle se réduit à une fonction de λ; on a alors

$$N^2 ds^2 = \mathfrak{R}^2 \left(\frac{\partial N}{\partial \lambda}\right)^2 d\lambda^2 + 4(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - \mathfrak{R}^2 Q^2) d\mu^2.$$

Cette forme conduit à une remarque intéressante : le coefficient de $d\mu^2$ étant indépendant de μ, le système des lignes de courbure de la surface sera en même temps un système isotherme si $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$, qui est la seule fonction de μ figurant au second membre, est de la forme

$$f(\lambda) \times \varphi(\mu).$$

Mais alors $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$ a ses racines μ constantes, et les cercles passent par deux points fixes ainsi que les sphères enveloppées. On a donc le théorème suivant déjà démontré par M. Demartres (*Annales de l'École normale*, 3e série, t. II) :

Les seules surfaces enveloppes de sphères pour lesquelles les lignes de courbure forment un système isotherme sont celles pour lesquelles les sphères passent par deux points fixes.

Ce sont aussi les surfaces inverses de cônes.

L'expression trouvée plus haut se simplifie également pour les surfaces enveloppes de cônes de révolution et non enveloppes de sphères. Mais un calcul direct permet de l'écrire

$$dS^2\left(\omega\cos\varphi + \frac{dV}{ds}\right)^4 = \sin^2 V[A\,ds + \omega\sin\varphi\,d\varphi]^2 + \sin^4 V\left(\omega\cos\varphi + \frac{dV}{ds}\right)^2(\mu\,ds - d\varphi)^2,$$

en posant

$$A = \omega^2 \cot V \cos^2\varphi + \left(3\omega\cot V \frac{dV}{ds} - \frac{d\omega}{ds}\right)\cos\varphi + 2\cot V\left(\frac{dV}{ds}\right)^2 - \frac{d^2V}{ds^2},$$

$$\mu = \varpi + \omega \cot V \sin\varphi.$$

Cette forme est peu intéressante par elle-même; mais, si l'on remarque que la seconde partie représente le carré de la différentielle de l'arc des conjuguées des coniques (à un facteur près), on voit que les trajectoires orthogonales de ces conjuguées sont fournies par l'équation

$$\omega \sin\varphi \frac{d\varphi}{ds} + \omega^2 \cot V \cos^2\varphi + \left(3\omega \cot V \frac{dV}{ds} - \frac{d\omega}{ds}\right)\cos\varphi + 2\cot V\left(\frac{dV}{ds}\right)^2 - \frac{d^2 V}{ds^2} = 0.$$

Cette dernière, où l'on prend $\cos\varphi$ comme inconnue, est une équation de Riccati. Il n'en résulte pas cependant que les coniques de la surface soient partagées homographiquement par les trajectoires orthogonales des conjuguées, car leurs coordonnées ne s'expriment pas rationnellement au moyen de $\cos\varphi$. On remarquera encore que l'équation à intégrer ne dépend pas de la torsion de la courbe décrite par le sommet du cône.