ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

L. SAINT-LOUP

Sur la représentation graphique des diviseurs des nombres

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 7 (1890), p. 89-100

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1890_3_7__89_0>

SUR LA

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

DES

DIVISEURS DES NOMBRES,

PAR M. L. SAINT-LOUP,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE DES SCIENCES D'ALGER.

La distribution des nombres premiers dans la suite des nombres a été l'objet de nombreuses recherches qui n'ont pas conduit à la solution de ce problème difficile.

Je me suis proposé d'examiner si une disposition graphique des nombres, autre que suivant une droite indéfinie, pouvait éclairer la solution, et je crois avoir été conduit à conclure que la recherche de la loi des nombres premiers paraissait devoir être abandonnée.

La disposition des nombres en triangle arithmétique m'a paru l'une des plus simples à essayer. Cette disposition m'a conduit à des propriétés assez curieuses au point de vue graphique, et d'ailleurs d'une démonstration simple [1]. C'est ainsi qu'on reconnaît aisément que : tous les multiples d'un nombre premier quelconque sont, dans cette disposition, répartis sur une parabole constante, indépendante du nombre considéré et dont le sommet serait transporté aux divers sommets d'un réseau quadrangulaire.

Cette même disposition permet d'établir de nombreuses formules de nombres n'admettant pas certains diviseurs. C'est ainsi que

$$y(y-1)+41$$

[1] Note présentée à l'Institut par M. Darboux, le 2 juillet 1888.

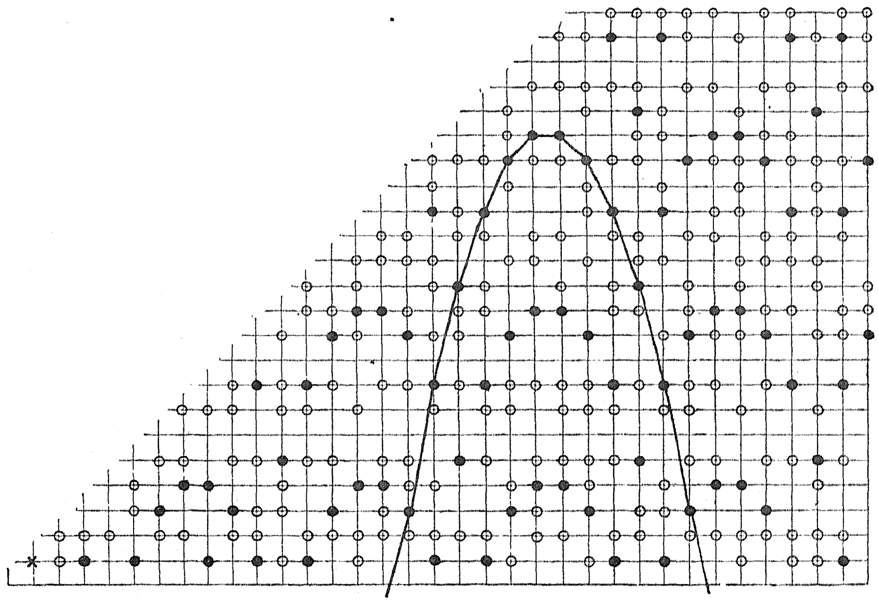
représente des nombres qui n'admettent aucun diviseur inférieur à 41,

$$y(y-1)+59$$

n'admet aucun diviseur premier entre 23 et 43.

La *fig.* 1 représente cette distribution parabolique. Les points marqués en noir sont les multiples de 7, les autres sont multiples de 3 et de 5.

Fig. 1.



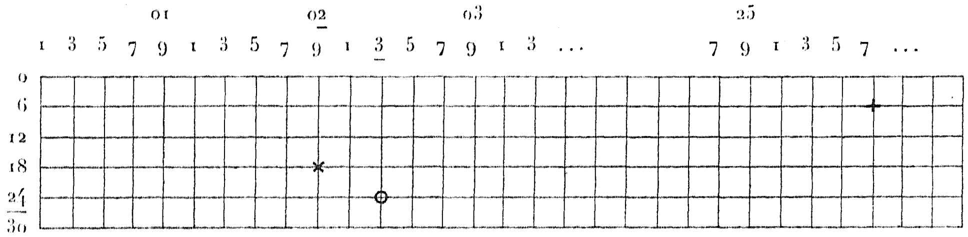
$\times$ représente le point de départ 1, et le Tableau est constitué par

					.
				.	.
			19	.	.
		11	17	.	.
	5	9	15	.	.
1	3	7	13	.	.

Le dernier point à droite et en haut correspond à 1167.

Si, au lieu d'une distribution parabolique, on avait une distribution rectiligne, le tracé devenait évidemment plus simple, et, en même temps, la lecture du nombre devenait plus facile, d'où résultait un double avantage.

On arrive à ce résultat par une disposition à la vérité arbitraire par son point de départ, mais qui permet de reconnaître graphiquement les diviseurs du nombre considéré. Voici en quoi elle consiste : Écrivons sur une ligne horizontale les 600 premiers nombres de la suite naturelle, en omettant les nombres pairs, au-dessous les 600 nombres suivants, et ainsi de suite indéfiniment (au nombre 600 on pourrait substituer un multiple de 10 quelconque). On pourra remplacer l'écriture de ces nombres par un point sur un papier quadrillé, en y joignant les indications propres à faciliter la lecture. On aura alors un Tableau tel que le suivant :



D'après cette disposition, le nombre qui occupe le point $\times$ est 1819, celui qui occupe le point o est 2423, les chiffres qui le composent sont soulignés, le point + correspond à 857.

La première ligne du Tableau s'étend jusqu'à 599, verticalement il s'étend indéfiniment. Si, par exemple, on étend la première colonne jusqu'à 1194, le Tableau s'étendra à 119400 + 599 ou à 119999, il comprendra 199 lignes horizontales. Sur un papier quadrillé à 2^{mm} on obtiendrait, dans un rectangle de 60^{cm} sur 40^{cm}, les nombres premiers inférieurs à 120000.

Il résulte évidemment de la disposition adoptée que les multiples d'un même nombre premier sont situés en ligne droite, quelle que soit la base de la division qui est ici 600.

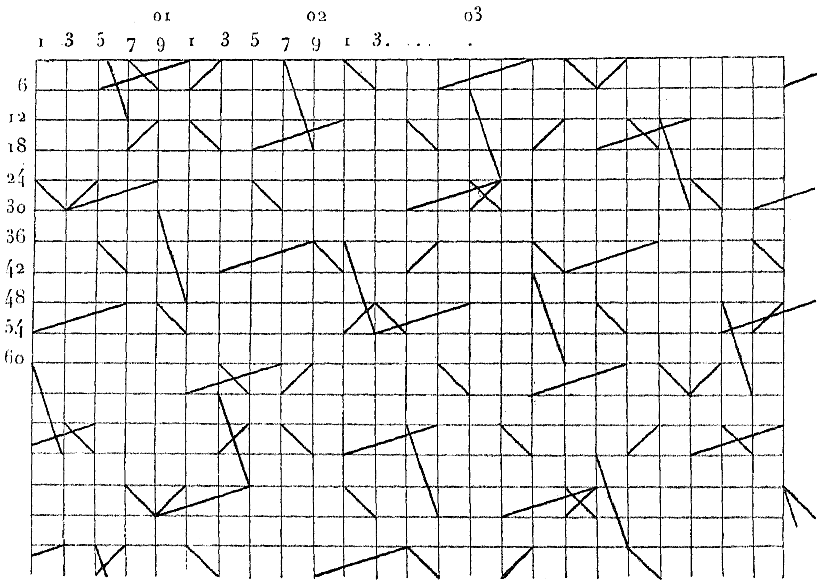
Ces droites ont un coefficient d'inclinaison qui dépend de la base adoptée, mais qui est caractéristique du nombre premier considéré, sans appartenir particulièrement à lui.

Traçons sur le Tableau quadrillé les droites correspondant aux nombres 7, 11, 13, 17 par exemple, nous obtiendrons la *fig.* 2.

On la construit en joignant le point de départ, par exemple le point 11, au multiple de 11 le plus voisin sur la figure, qui est ici 6005.

Ce premier élément tracé, on peut poursuivre la ligne indéfiniment. En la répétant pour le point 33, on a les éléments de tout le réseau de 11. Nous verrons plus loin un autre procédé.

Fig. 2.



Supposons la construction faite pour les diviseurs précités; on voit, par exemple, que le nombre 2431 admet les diviseurs 11, 13 et 17.

Observons que les lignes verticales de 3 en 3 et de 5 en 5 comprennent les multiples de 3 et de 5. Si on les suppose tracées, on voit que tous les points par lesquels ne passent pas les réseaux construits et qui correspondent à des nombres inférieurs à 19^2 définissent des nombres premiers.

Le plus petit nombre admettant 5 diviseurs autres que 2, 3, 5 est

$$323323 = 7.11.13.17.19;$$

le plus petit nombre admettant 6 diviseurs est

$$65\,536\,429 = 7.11.13.17.19.23.$$

Ainsi, au-dessous de 65 millions, il ne pourra concourir en un point plus de 5 droites. Si l'on avait pris pour base $210 = 2.3.5.7$, les diviseurs de 3, 5, 7 étant sur des verticales, 4 droites seulement auraient pu concourir en un point dans les limites précédentes.

Proposons-nous de déterminer les nombres premiers correspondant à un coefficient d'inclinaison donné. Nous avons vu que dans la base 600 les coefficients d'inclinaison des diviseurs

$$7,\ 11,\ 13,\ 17$$

étaient, l'axe des ordonnées étant dirigé vers le bas,

$$1,\ \tfrac{1}{3},\ -1,\ 3.$$

Si l'on prend pour origine le point $\times$ qui correspond à l'abscisse zéro, le nombre dont les coordonnées sont x, y est

$$By + 2x - 1.$$

Soit p un nombre premier appartenant à la première horizontale, son abscisse est $\frac{p+1}{2}$. Un point voisin appartenant à l'horizontale de rang β a pour coordonnées $\frac{p+1}{2} \pm \alpha, \beta$; le nombre correspondant est

$$600\beta + p \pm 2\alpha.$$

Si ce nombre est un multiple de p,

$$300\beta \pm \alpha$$

doit être divisible par p. Le coefficient d'inclinaison de la droite, qui joint les deux points, est d'ailleurs $\pm \frac{\beta}{\alpha}$.

Donnons à α et β des valeurs entières simples que nous limiterons à 13 dans le but de restreindre la longueur de la droite qui joint deux points. On formera le Tableau suivant à double entrée. La première verticale contient les valeurs de β, la première horizontale contient les valeurs de α; les nombres du Tableau sont les valeurs de

$$300\beta + \alpha.$$

	1	2	3	4	5	6
1	301	302	303	304	.	.
2	601	602	603	.	.	.
3	901	902	.	.	.	.
4	1201	.	.	.	.	.
5						

On formerait un semblable Tableau des valeurs de $300\beta - \alpha$.

Remplaçons les nombres par leurs facteurs premiers ; nous avons le Tableau suivant, où l'on n'a pas répété les facteurs qui correspondent à un même coefficient d'inclinaison, tel que $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, ...

Valeurs positives de α.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	7.43	151	101	19	61	17	307	7.11	103	31	311	13	313
2	601	.	67	.	11	.	607	.	7.29	.	13.47	.	613
3	17.53	11.41	.	113	181	.	907	227	.	7.13	911	.	11.83
4	1201	.	401	.	241	.	17.71	.	13.31	.	7.173	.	1213
5	19.79	751	167	47	.	251	11.137	13.29	503	.	1511	7	17.89
6	1801	.	.	.	19	.	13.139	.	.	.	1811	.	7.37
7	11.191	1051	701	263	421	13	.	31.17	19.37	211	2111	11	2113
8	7	.	89	.	13.37	.	29.83	.	11.73	.	2411	.	19.127
9	37.73	7.193	.	13	541	.	2707	677	.	271	2711	.	2713
10	3001	.	7.11.13	.	.	.	31.97	.	17.59	.	3011	.	23.131
11	3301	13.127	367	7.59	661	19.29	3307	827	1103	331	.	23	3313
12	13.277	.	.	.	7.103	.	3607	.	.	.	23.157	.	3613
13	47.83	1951	1301	61	11.71	7.31	3907	977	1303	17.23	3911	163	.

On construit de même le Tableau correspondant à des valeurs négatives de α.

Valeurs négatives de α.

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
41	.	17	29	97	73	293	7	59	37	11	149	13.23	1
587	.	19.31	.	197	.	593	.	7.17	.	199	.	599	2
887	.	127	89	.	223	19.47	.	179	7	.	449	29.31	3
1187	.	29.41	.	397	.	1193	.	239	.	7.19	599	11.109	4
1487	31	1489	.	7.71	373	1493	83	.	11.17	499	7.107	1499	5
1787	.	1789	.	.	.	11.163	.	359	.	.	.	7.257	6
2087	29	2089	11.19	17.41	523	.	349	419	131	233	1049	2099	7
7.11.31	199	2389	.	797	.	2393	.	479	.	17.47	.	2399	8
2687	7	2689	269	.	673	2693	.	7.11	337	.	19.71	2699	9
29.103	.	7.161	.	997	.	41.73	.	.	.	37	.	2999	10
19.173	137	.	7.47	1097	823	37.89	61	659	103	7.157	17.97	3299	11
17.211	.	37.97	.	.	.	3593	.	719	.	.	.	59.61	12
.	.	3889	389	1297	7.139	17.229	11.59	19.41	487	433	1949	7.557	13

Ce Tableau comprend treize colonnes verticales et treize colonnes horizontales. Admettons que les nombres inscrits dans ces colonnes soient placés aux sommets d'un quadrillage, et soit un point α, β de ce quadrillage, la distance de ce point à l'origine représentera $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, c'est-à-dire la longueur de l'élément du réseau d'un diviseur inscrit au point $\alpha\beta$. On choisira donc le coefficient d'inclinaison pouvant représenter un diviseur par la condition que $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ soit le plus petit possible. Ainsi, par exemple, nous trouvons le diviseur 19 aux coordonnées $4, 1 - 1, 5 - 5, 6$; il conviendra de prendre pour coefficient d'inclinaison $\frac{1}{4}$, parce que l'élément du réseau aura pour longueur $\sqrt{17}$, tandis qu'il aurait pour longueur $\sqrt{26}$ ou $\sqrt{61}$ aux deux autres points. Et il est évident qu'étant donnés les quatre sommets d'un parallélogramme, c'est par ses petits côtés que la figure sera le plus simplement définie.

En joignant à ce Tableau celui qu'on obtient en donnant à α des valeurs négatives, on pourra dresser le Tableau des coefficients d'inclinaison les plus avantageux pour la représentation d'un diviseur dans la base considérée. Il suffira de choisir le diviseur le plus rapproché de l'origine dans le Tableau. Si l'on fait cet examen pour la suite des nombres premiers, on peut former le Tableau suivant :

Nombre.	Coefficient.	Nombre.	Coefficient.	Nombre.	Coefficient.	Nombre.	Coefficient.
7	1 : 1	61	1 : 5	131	— 7 : 4	199	— 2 : 3
11	— 1 : 3	67	2 : 3	137	5 : 7	211	7 : 10
13	— 1 : 1	71	4 : 7	139	6 : 7	223	— 3 : 8
17	3 : 1	73	— 1 : 8	149	— 1 : 2	227	3 : 8
19	1 : 4	79	5 : 1	151	1 : 2	229	—13 : 7
23	— 1 : 1	83	— 5 : 6	157	—11 : 3	233	— 7 : 3
29	— 3 : 1	89	8 : 3	163	— 6 : 7	239	— 4 : 5
31	— 3 : 1	97	— 1 : 9	167	5 : 3	241	4 : 5
37	— 1 : 4	101	1 : 3	173	4 : 11	251	5 : 6
41	3 : 2	103	1 : 9	179	— 3 : 5	257	6 : 1
43	1 : 1	107	— 5 : 2	181	3 : 5	263	7 : 4
47	5 : 4	109	— 4 : 1	191	7 : 1	269	— 9 : 10
53	3 : 1	113	3 : 4	193	9 : 2	271	9 : 10
59	— 1 : 5	127	11 : 2	197	— 2 : 9	277	12 : 1

On voit qu'aux limites du Tableau, un seul des nombres α, β atteint la valeur 13.

Nous avons supposé le nombre premier p situé sur la première horizontale; mais il est aisé de s'assurer que cette hypothèse n'est nullement nécessaire aux conclusions qui précèdent.

Une base étant choisie, nous avons vu qu'il convenait de choisir le coefficient $\frac{\beta}{\alpha}$, de façon que $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ fût aussi petit que possible. Mais on peut se proposer de déterminer la base de façon que la somme des tracés ait la moindre longueur. Sans avoir de méthode, *a priori*, pour résoudre cette question, on peut faire intervenir les considérations suivantes.

Observons d'abord qu'il est indispensable de fixer les diviseurs que l'on se propose de représenter. Nous supposerons qu'il s'agit des diviseurs inférieurs à 150.

Soit 2B la base, c'est-à-dire le nombre qui définit chaque ligne horizontale. Nous avons vu que, si un nombre premier p a pour coefficient d'inclinaison $\pm\frac{\beta}{\alpha}$, ce nombre divise $B\beta\pm\alpha$. Il convient donc de choisir B de façon que, pour les valeurs les plus faibles de β et α, cette expression ait le plus grand nombre de diviseurs inférieurs à 150, et, comme les petits diviseurs sont ceux qui se répètent le plus dans le Tableau, il convient que leur signe représentatif soit simple.

Faisons $\alpha=1$ et $\beta=1$, on devra choisir B de façon que $B\pm1$ ou B^2-1 admette, s'il se peut, les diviseurs 3, 5, 7, 11, 13, ..., qui sont les plus encombrants. La base B devant être un multiple de 10 pour que les mêmes chiffres des unités se trouvent, sur des verticales, soit $B=10b$ et $b=1, 2, 3, \ldots, 100$, on obtient le Tableau suivant, d'où l'on a écarté les valeurs de B qui correspondent à moins de quatre diviseurs ou à des diviseurs supérieurs à 150, et où l'on a inscrit les diviseurs à coefficient ±1 ou infini.

B.	Diviseurs.	B.	Diviseurs.	B.	Diviseurs.
70	3. 7.23.71	220	3.11.13.17.73	560	3. 7.11.13.17.43
90	3. 7.13.89	260	3. 7.13.29.37	610	3. 7.13.29.47.61
110	3.11.37.109	300	3. 7.13.23.43	650	3. 7.11.13.31.59
130	3.13.43.131	340	3.11.17.31.113	780	3.11.13.19.41.71
140	3. 7.47.139	370	3. 7.37.41.53	870	3.11.13.29.67.79
160	3. 7.23.53	390	3. 7.31.39.83	900	3.17.29.31.53
170	3.13.17.19	550	3.11.19.29.61	1000	3. 7.11.13.37

Les diviseurs indiqués dans ce Tableau pour chaque base considérée correspondent à des points successifs du quadrillage, soit verticalement, soit en diagonale.

On voit que les plus petits diviseurs appartiennent aux bases

$$170, \quad 300, \quad 560, \quad 610, \quad 900, \quad 1000.$$

Il est permis de les considérer comme pouvant être avantageusement choisies pour la simplicité du tracé, et nous allons les comparer.

Soit N le plus grand nombre du Tableau des nombres; $\frac{N}{p}$ est le nombre des multiples de p inférieurs à N. Ces multiples étant joints, de deux en deux, par une droite de longueur $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\frac{N}{2p}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ est la longueur du tracé pour le diviseur p.

Calculons $\sum \frac{\alpha^2+\beta^2}{p}$ pour les bases

$$90, \quad 170, \quad 300, \quad 560, \quad 1000,$$

nous trouvons les nombres

$$3060, \quad 3070, \quad 3020, \quad 2650, \quad 3140.$$

Il résulte de ce calcul que la base 560 paraîtrait devoir être préférée; mais il se dégage de ce calcul ce fait remarquable que les longueurs des réseaux sont sensiblement les mêmes. On est conduit à induire de là que cette longueur est sans doute indépendante du choix de la base quand le Tableau s'étend à un nombre croissant de diviseurs.

Quoique cette conclusion ne soit pas rigoureusement établie, il n'est pas moins reconnu que le choix de la base paraît devoir être déterminé simplement par les facilités matérielles de l'exécution du tracé. On peut toutefois démontrer que, quelle que soit la base, la surface du parallélogramme, déterminée par quatre sommets deux à deux consécutifs, est égale au nombre premier p qui le définit.

Soient, en effet, P, P′ deux sommets consécutifs sur la première horizontale, A, A′ deux autres sur la seconde horizontale. L'intervalle PP′ étant de p divisions, la surface du parallélogramme PAA′P′ est égale à p; et l'on voit que la surface de tout parallélogramme ayant deux sommets consécutifs sur la droite PA et ses deux autres sur la ligne P′A′ est aussi égale à p.

D'après cela, étant donné un nombre premier p et son coefficient d'inclinaison, celui-ci permettra de tracer le point P′, immédiatement voisin, et le théorème précédent permettra de compléter le parallélogramme.

Soit, par exemple, $p = 17$, le point voisin A est $\alpha = 1$, $\beta = 3$, la relation

$$\beta \mathrm{PP}' = p', \quad \text{d'où} \quad \mathrm{PP}' = q + \frac{r}{\beta}$$

donne

$$\mathrm{PP}' = \frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}.$$

Il faut donc compter horizontalement 5 divisions plus $\frac{2}{3}$. Or la ligne PA détermine sur les horizontales qu'elle coupe des segments qui sont des fractions de l'unité dont le dénominateur est 3 et dont les numérateurs sont 1, 2, ... C'est donc sur la seconde horizontale que se trouvera le point A', troisième sommet du parallélogramme.

Généralement un segment quelconque, déterminé sur l'horizontale β', a pour expression

$$\frac{\alpha(\beta - \beta')}{\beta},$$

en sorte que

$$r = \alpha(\beta - \beta').$$

Dans le cas actuel, $r = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$, d'où $\beta' = 1$.

Nous avons supposé que les deux sommets consécutifs P, P' étaient sur la première horizontale. Si le nombre P est seul sur la première horizontale et si β est l'ordonnée du second point P', on reconnaît aisément que l'aire du parallélogramme est égale à $p\beta$, mais il n'y a plus qu'un seul point sur une horizontale.

Conclusions.

L'étude qui précède conduit aux conclusions suivantes :

On peut appliquer le procédé graphique à la construction d'une Table des diviseurs des nombres en limitant la grandeur de ces diviseurs; ainsi ce Tableau pourrait faire connaître les nombres ayant des diviseurs inférieurs à 150. Cette Table aurait quelque utilité pratique pour le calcul des rouages.

Les nombres premiers sont définis par les vides que laisse la superposition des réseaux des nombres premiers successifs.

Tout réseau nouveau élimine des nombres, excepté dans la région qui s'étend jusqu'au carré du dernier nombre premier figuré.

Le choix de la base de la distribution des nombres ne paraît pas avoir d'influence notable sur la simplicité du tracé.

Si, au lieu de prendre une base unique, on prend deux bases, ce qui conduit à un double Tableau, on peut obtenir une réduction dans la longueur du tracé. Par exemple, si l'on prend les bases 170 et 190, le tracé ne comporte qu'une longueur représentée par 2260 pour tous les nombres premiers inférieurs à 200.

Observons enfin que ce tracé peut s'effectuer à partir d'un nombre quelconque. Rien n'empêche de l'exécuter à partir de 1 milliard, par exemple, et de le poursuivre dans telle étendue que l'on voudra.

Ainsi, sachant que 1 milliard + 1 est un multiple de 7, 11, 13, 19, on a un point de départ des réseaux de 7, 11, 13, 19, qui sont connus. En général, en divisant 1 milliard par p, on voit ce qu'il faut ajouter ou retrancher à 1 milliard pour obtenir un multiple de p. On peut donc tracer le réseau dans une région quelconque de la suite des nombres.

Pour la clarté du Tableau, on pourrait l'exécuter sur deux bases. En prenant, par exemple, 170 et 190, on reconnaît que les Tableaux peuvent se construire avec des valeurs de α et β inférieures à 10 pour tous les nombres premiers inférieurs à 251.

Tracé mécanique de la Table des nombres premiers jusqu'à 10 millions.

Il reste à indiquer comment le Tableau des diviseurs des nombres, et par conséquent des nombres premiers, pourrait être tracé mécaniquement sans erreur.

La difficulté est dans la superposition exacte des réseaux isolément gravés sur une planche ou un cylindre.

Considérons un diviseur quelconque, 7 par exemple. Son réseau commence au point 7 et se reproduit exactement à partir du nombre $7B + 7$; la période du réseau comprend donc 7 lignes horizontales. Généralement, la période du réseau de p comprend p horizontales.

Supposons le quadrillage de 2^{mm}. Sur un cylindre de 14^{mm} de circonférence ou un multiple de ce nombre, gravons le réseau de 7. Si l'on fait rouler ce cylindre sur un plan, il imprimera indéfiniment ce réseau.

Pour assurer ce roulement, le cylindre devra être muni d'une denture du pas de 2^{mm}, engrenant avec une crémaillère de même pas disposée sur le plan.

Tout autre cylindre, ayant une denture de même pas et correspondant au réseau d'un autre nombre premier p, superposera convenablement ce réseau : il suffira de régler le départ.

Si l'on admet que l'on s'arrête à des cylindres de 1^m de diamètre, ce cylindre pourra porter $1000 \times \pi$ ou 3141 horizontales, suivant ses génératrices, et, par conséquent, le réseau du nombre premier 3137, immédiatement inférieur à 3141.

On aura donc ainsi réalisé une Table des diviseurs des nombres jusqu'au diviseur 3137, et une Table des nombres premiers jusqu'à $3137^2 = 10840000$.

L'exécution aura exigé 443 cylindres (dans la base, 600), attendu que 3137 est le 445^e nombre premier.

Le Tableau aura une longueur de 33^m et une largeur de $0^m,60$. On pourra le fragmenter comme on voudra dans le sens de sa longueur et dans celui de sa largeur.