Ch. Méray

# Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 7 (1890), p. 23-88
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1890_3_7__23_0>

# SUR LA CONVERGENCE

DES

# DÉVELOPPEMENTS DES INTÉGRALES ORDINAIRES

D'UN

## SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES,

PAR

M. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON,

avec la collaboration de

M. RIQUIER,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN (1).

### Généralités.

1. Un système d'équations différentielles est dit *immédiat* quand toutes ses équations sont du premier ordre et fournissent immédiatement certaines dérivées des fonctions inconnues, exprimées en fonctions composées des variables indépendantes, de ces fonctions inconnues elles-mêmes et de leurs autres dérivées.

Quand ce sont *toutes* les dérivées des fonctions inconnues qui se trouvent ainsi exprimées par les équations données, aucune dérivée ne peut figurer dans leurs seconds membres, qui sont alors essentiellement finis, et l'on a un *système d'équations différentielles totales*.

Quand, au contraire, c'est *une partie* seulement de ces dérivées qui constituent les premiers membres des équations données, les autres

(1) Ce Mémoire, relatif aux systèmes d'équations différentielles partielles, fait suite à un autre Mémoire, relatif aux systèmes d'équations différentielles totales, et publié dans les *Annales de l'École Normale* (novembre et décembre 1889). Les chiffres suivis d'un astérisque renvoient le lecteur aux divisions du Mémoire de 1889, et les chiffres non suivis d'un astérisque à celles du présent Mémoire.

dérivées peuvent, en totalité ou en partie, entrer dans les seconds membres, qui sont alors éventuellement différentiels; et, au lieu d'un système d'équations différentielles totales, on a ce que nous appellerons un *système d'équations différentielles partielles*. Ces systèmes sont ceux dont nous allons nous occuper, en complétant la définition de leur caractère *immédiat* par une restriction essentielle que nous spécifierons au moment voulu (8).

Pour disposer nettement les équations d'un pareil système, il faut les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire, dont les lignes correspondent aux variables indépendantes, et les colonnes aux fonctions inconnues, en plaçant l'équation qui a, par exemple, $\frac{ds}{dt}$ pour premier membre dans la case qui appartient à la fois à la ligne $(t)$ et à la colonne $(s)$. Des cases en nombre quelconque et occupant des positions arbitraires peuvent évidemment rester inoccupées dans ce Tableau.

2. Dans un système d'équations différentielles partielles, il y a, relativement à chaque fonction inconnue, une distinction essentielle à faire entre les diverses variables indépendantes.

Nous appellerons variables *principales* d'une fonction inconnue déterminée celles par rapport auxquelles sont prises les dérivées de cette fonction qui constituent dans le Tableau du système les premiers membres des équations de la colonne correspondante. Pour la même fonction, toutes les autres variables seront *paramétriques*. Par exemple, si les variables indépendantes sont $x$, $y$, $z$, $t$ seulement et si la colonne $(s)$ ne contient que les deux équations :

| | $(s)$ |
|---|---|
| $(x)$ | $\frac{ds}{dx} = \ldots$ |
| $(y)$ | |
| $(z)$ | $\frac{ds}{dz} = \ldots$ |
| $(t)$ | |

la fonction inconnue $s$ aura $x$, $z$ pour variables principales, $y$, $t$ pour variables paramétriques.

Le partage dont il s'agit ne s'effectue pas nécessairement de la même manière pour toutes les fonctions inconnues, telle variable pouvant fort bien être à la fois principale pour une de ces fonctions et paramétrique pour une autre.

3. Cette distinction entre les variables en entraîne une non moins importante entre les diverses dérivées d'un même ordre quelconque $k$ d'une fonction inconnue déterminée. Nous appellerons *genre* de l'une de ces dérivées le nombre de ses différentiations génératrices, distinctes ou non, qui doivent être effectuées par rapport à des variables principales de la fonction dont il s'agit.

D'après cela, l'ordre $k$ des dérivées de cette fonction contient : 1° le seul genre 0 si pour elle toutes les variables sont paramétriques ; 2° les $k+1$ genres

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad k,$$

si les variables sont les unes paramétriques et les autres principales ; 3° le seul genre $k$ si toutes les variables sont principales.

Dans un ordre quelconque, nous appellerons aussi *paramétriques* les dérivées de genre 0, et *principales* toutes celles de genre $> 0$.

Enfin, nous nommerons quelquefois *classe* d'une dérivée principale le nombre

$$\frac{k(k-1)}{2} + \varkappa,$$

où $k$ et $\varkappa$ désignent respectivement l'ordre et le genre de la dérivée considérée. Partageons en groupes les dérivées principales de toutes les fonctions inconnues, en plaçant dans un même groupe celles qui sont à la fois du même ordre et du même genre ; puis, rangeons ces divers groupes de telle manière qu'en passant de l'un quelconque d'entre eux au suivant l'ordre des dérivées ne décroisse jamais, et que leur genre aille en augmentant si les deux groupes appartiennent au même ordre : cela étant, la classe d'une dérivée principale déterminée se trouve être précisément égale au rang du groupe qui la contient.

Dans l'exemple ci-dessus, la fonction inconnue $s$ a, dans le premier ordre, les dérivées de genre o ou paramétriques

$$\frac{ds}{dy}, \quad \frac{ds}{dt},$$

et les dérivées principales de genre 1

$$(\alpha) \qquad \frac{ds}{dx}, \quad \frac{ds}{dz}.$$

Elle a, dans le second ordre, les dérivées de genre o ou paramétriques

$$\frac{d^2 s}{dy^2}, \quad \frac{d^2 s}{dy\, dt}, \quad \frac{d^2 s}{dt^2},$$

les dérivées principales de genre 1

$$(\beta) \qquad \frac{d^2 s}{dx\, dy}, \quad \frac{d^2 s}{dx\, dt}, \quad \frac{d^2 s}{dz\, dy}, \quad \frac{d^2 s}{dz\, dt},$$

et les dérivées principales de genre 2

$$(\gamma) \qquad \frac{d^2 s}{dx^2}, \quad \frac{d^2 s}{dx\, dz}, \quad \frac{d^2 s}{dz^2};$$

et ainsi de suite.

Enfin, les dérivées principales des groupes ($\alpha$), ($\beta$), ($\gamma$) sont respectivement celles des classes 1, 2, 3.

4. D'après ce qui précède, *les équations différentielles d'un système immédiat partiel expriment toutes les dérivées principales premières des fonctions inconnues en fonctions composées des variables indépendantes, de ces mêmes fonctions inconnues et de tout ou partie de leurs dérivées paramétriques premières.*

5. La distinction entre les divers groupes d'intégrales d'un système immédiat d'équations différentielles partielles s'opère suivant les mêmes règles et a les mêmes conséquences que pour les équations différentielles totales.

Les intégrales seront dites *ordinaires,* si les valeurs des variables indépendantes, prises conjointement avec les valeurs correspondantes des intégrales elles-mêmes et de leurs dérivées paramétriques premières, n'excèdent les limites d'olotropie d'aucune des composantes figurant dans les seconds membres, tout au moins tant que les variables indépendantes restent comprises entre certaines limites.

Les intégrales seront dites *singulières,* si, dans les mêmes circonstances, les composantes des seconds membres ne restent jamais olotropes en même temps.

Les intégrales ordinaires peuvent seules faire l'objet d'une théorie générale; elles vont maintenant nous occuper exclusivement.

6. La substitution d'intégrales ordinaires connues dans les équations d'un système immédiat partiel en transforme tous les seconds membres en des fonctions composées, habituellement différentielles, des variables, des intégrales et de leurs dérivées paramétriques premières. D'après la définition même des intégrales ordinaires, les règles établies pour les fonctions composées sont applicables à ces seconds membres (tout au moins entre certaines limites), et l'*on peut,* en conséquence (15*), *différentier indéfiniment les relations du système partiel considéré.*

Les nouvelles équations ainsi obtenues, jointes à celles du système, fournissent certaines expressions *de toutes les dérivées principales des intégrales;* car, des différentiations convenables, exécutées sur une équation convenablement choisie, peuvent évidemment amener dans le premier membre une dérivée principale déterminée; *mais elles n'en fournissent jamais pour leurs dérivées paramétriques*, parce que les dérivées principales du premier ordre, qui forment les premiers membres des équations différentielles proposées, sont toutes du genre 1, et que ce genre ne pourra jamais diminuer par des différentiations quelles qu'elles soient.

Si donc on veut employer toutes ces équations à la reconstruction des développements des intégrales ordinaires considérées, *il faut de toute nécessité connaître non seulement leurs valeurs initiales, mais encore celles de toutes leurs dérivées paramétriques*. Il faut encore *que ces équations puissent être rangées dans un ordre de succession tel que chacune ne contienne dans son second membre (outre les variables indépendantes, les intégrales et leurs dérivées paramétriques) que les dérivées principales figurant dans les premiers membres des équations antérieures.*

Si l'on veut, comme au n° 25*, trouver par la méthode des coefficients indéterminés tous les groupes d'intégrales ordinaires qui peuvent exister en partant de valeurs initiales arbitrairement choisies pour elles et leurs dérivées paramétriques de tous ordres, la seconde des conditions ci-dessus énoncées est encore nécessaire au succès de l'opération.

7. Dans la théorie des équations différentielles totales, nous n'avons pas eu à nous préoccuper de la seconde condition, parce que la succession voulue s'est trouvée réalisée d'elle-même, en rangeant les formules dites *primitives* d'après leurs ordres croissants. Mais ici, les choses se passent d'une manière infiniment moins simple, parce que la présence des dérivées paramétriques dans les seconds membres des équations du système immédiat partiel considéré rend généralement l'ordre du second membre égal à celui du premier dans les relations qui s'en déduisent par différentiations. Et il arrive effectivement que cette seconde condition n'est pas remplie pour certains systèmes de la nature de ceux que nous avons définis au n° 1.

Nous les excluons absolument de nos raisonnements, et nous réserverons désormais le nom de systèmes *immédiats* à ceux qui satisfont à la condition générale dont il s'agit.

8. La restriction qu'il faut ajouter à la définition du n° 1, pour qu'elle devienne celle d'un système immédiat dans le sens ci-dessus expliqué, consiste à exclure de divers seconds membres certaines dérivées paramétriques. Nous ne sommes pas en mesure de la formuler d'une manière absolument générale et précise; mais il nous suffira, et au delà, de considérer les systèmes satisfaisant à la condition que :

*$u$, $v$ désignant deux fonctions inconnues quelconques, aucune dérivée (paramétrique) de $v$ ne figure dans les seconds membres des équations de la colonne ($u$), si quelque variable principale de $v$ est paramétrique pour $u$.*

Tous ces systèmes, comme nous allons incessamment le constater, remplissent la seconde des conditions énoncées au n° 6, et, *pour plus* *de simplicité dans le langage, ce sont eux seuls que désormais nous qualifierons d'immédiats.*

9. Éclaircissons ce qui précède par quelques exemples.

Le système

| | $(u)$ | $(v)$ |
|---|---|---|
| $(x)$ | $\frac{du}{dx} = \mathrm{U}_x\left(x, y, u, v, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dx}\right)$ | |
| $(y)$ | | $\frac{dv}{dy} = \mathrm{V}_y\left(x, y, u, v, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dx}\right)$ |

qui satisfait à la définition du n° 1, n'est pas de ceux que maintenant nous nommerons *immédiats*, soit parce que $\frac{dv}{dx}$ figure dans le second membre de l'équation de la colonne $(u)$, bien que la variable $y$, qui est principale pour $v$, soit paramétrique pour $u$, soit encore parce que $\frac{du}{dy}$ figure dans le second membre de l'équation de la colonne $(v)$.

Au contraire, le système

(1)

| | $(u)$ | $(v)$ |
|---|---|---|
| $(x)$ | $\frac{du}{dx} = \mathrm{U}_x\left(x, y, u, v, \frac{du}{dy}\right)$ | |
| $(y)$ | | $\frac{dv}{dy} = \mathrm{V}_y\left(x, y, u, v, \frac{dv}{dx}\right)$ |

rentre dans la catégorie dont il s'agit, nonobstant la similitude complète de ce Tableau et du précédent, parce que $\frac{dv}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ ont disparu respectivement des seconds membres des colonnes $(u)$, $(v)$.

Il en est de même plus généralement toutes les fois que dans les équations de chaque colonne ne figurent les dérivées (paramétriques) d'aucune des fonctions inconnues qui correspondent aux autres colonnes.

Tel est encore le système

(2)

| | $(u)$ | $(v)$ |
|---|---|---|
| $(x)$ | $\dfrac{du}{dx} = \mathrm{U}_x\left(x, y, u, v, \dfrac{du}{dy}, \dfrac{dv}{dy}\right)$ | $\dfrac{dv}{dx} = \mathrm{V}_x\left(x, y, u, v, \dfrac{du}{dy}, \dfrac{dv}{dy}\right)$ |
| $(y)$ | | |

malgré la présence de toutes les dérivées paramétriques dans les seconds membres.

De même, plus généralement, tout système dans lequel le partage des variables (en principales et paramétriques) s'opère de la même manière relativement à toutes les fonctions inconnues.

C'est dans cette dernière catégorie que se rangent les équations dites *aux dérivées partielles*, soit isolées, soit simultanées. Le Tableau contient alors soit une, soit plusieurs colonnes dans lesquelles toutes les cases d'une même ligne sont seules occupées.

A la rigueur, *on peut encore y placer les systèmes d'équations différentielles totales*, puisque dans un pareil système, les variables sont toutes principales pour chacune des fonctions inconnues.

10. Il est à remarquer que, sauf le cas d'un système différentiel total, le nombre des dérivées paramétriques pouvant éventuellement figurer dans les seconds membres d'un système immédiat donné est au moins égal à 1 pour chacun de ces derniers. Considérons, en effet, une équation quelconque du système, et supposons qu'elle ait pour premier membre une dérivée de la fonction $u$, par exemple : si, pour cette dernière, les variables indépendantes ne sont pas toutes principales, le second membre pourra contenir les dérivées paramétriques de $u$, et, dans le cas contraire, il pourra contenir les dérivées paramétriques de toutes les autres fonctions.

11. Il nous faut approfondir maintenant la question effleurée au n° 8.

Considérons une relation différentielle subsistant entre les diverses fonctions d'un groupe d'intégrales ordinaires du système immédiat donné et à laquelle la règle des fonctions composées soit applicable, et supposons qu'elle satisfasse en outre aux deux conditions ci-après :

1° Le premier membre est une dérivée principale de quelque intégrale, et les diverses dérivées qui, outre les variables indépendantes et les intégrales elles-mêmes, figurent éventuellement dans le second membre, sont, les unes d'ordres inférieurs à celui du premier, les autres d'ordre égal, mais de genres moindres.

2° Si l'on considère, d'une part, la fonction dont une certaine dérivée principale figure dans le premier membre, et, d'autre part, l'ensemble des fonctions dont quelque dérivée principale ou paramétrique d'ordre égal figure dans le second membre de la relation dont il s'agit, toutes les variables qui sont paramétriques pour la première fonction le sont aussi pour chacune des dernières.

Pour abréger, nous appellerons *immédiate* toute relation différentielle satisfaisant à cette double condition, comme aussi l'expression fournie par elle pour la dérivée principale contenue dans son premier membre. Nous nommerons en outre *classe* d'une relation immédiate celle de la dérivée principale en question.

12. Les relations immédiates jouissent de deux propriétés importantes que nous allons démontrer :

1° *Toute relation déduite d'une relation immédiate par des différentiations quelconques est elle-même immédiate.*

Il suffit, évidemment, d'examiner le cas où le nombre des différentiations se réduit à 1.

Or, en vertu de la seconde des conditions énoncées au numéro précédent, si cette différentiation n'augmente pas le genre de la dérivée figurant dans le premier membre de la relation sur laquelle on l'exécute, elle n'augmentera pas non plus le genre des dérivées d'ordre égal qui peuvent figurer dans le second; et, si elle augmente d'une unité le genre de la première, elle augmentera d'une unité au plus le genre de chacune des dernières. Donc, après comme avant la différentiation, les dérivées figurant dans le second membre seront, les unes d'ordres inférieurs au premier, les autres d'ordre égal mais de genres moindres, et la première condition ne cessera pas d'être satisfaite. Quant à la seconde, la chose s'aperçoit immédiatement sans qu'il soit nécessaire d'insister.

2° *Toute relation déduite d'une relation immédiate en substituant à telles ou telles des dérivées principales qui figurent dans le second membre de cette dernière des expressions immédiates quelconques des dérivées en question est elle-même immédiate.*

Nous désignerons par ($\omega$) la relation immédiate sur laquelle on effectue les substitutions dont parle l'énoncé : il suffit évidemment d'examiner le cas où le nombre de ces dernières se réduit à 1. Cela étant, puisque la première des conditions énoncées au numéro précédent se trouve satisfaite dans les deux relations que l'on combine, elle le sera nécessairement encore dans celle qui résulte de leur combinaison. Quant à la seconde, en désignant par $k$ l'ordre de la relation ($\omega$), elle ne cessera évidemment pas d'être satisfaite si l'on effectue dans le second membre une substitution portant sur quelque dérivée d'ordre inférieur à $k$. Examinons ce qui arrive lorsqu'on y effectue une substitution portant sur quelque dérivée d'ordre $k$. A cet effet, soient

$$\delta_k u = f(\ldots, \delta'_k v, \ldots)$$

la relation ($\omega$); $\delta'_k v$ l'une des dérivées d'ordre $k$ contenues dans son second membre;

$$\varphi(\ldots, \delta''_k w, \ldots)$$

une expression immédiate de $\delta'_k v$; et $\delta''_k w$, ... les dérivées d'ordre $k$ qui figurent dans cette dernière. La relation ($\omega$) étant immédiate, ainsi que l'expression considérée de $\delta'_k v$, toute variable paramétrique pour $u$ l'est aussi pour $v$, et, l'étant pour $v$, l'est pour $w$, .... La seconde condition ne cesse donc pas d'être satisfaite après qu'on a substitué à $\delta'_k v$ l'expression immédiate dont il s'agit.

13. Soient ($\omega$) une relation immédiate de classe $j+1$; ($\Lambda$) un système de relations immédiates en nombre fini, toutes de classes inférieures à $j+1$, et fournissant une expression au moins pour chaque dérivée principale des classes $1, 2, \ldots, j$. Des relations ($\Lambda$) extrayons

un groupe $(\mathrm{A}')$ fournissant pour chacune de ces dernières une expression et une seule; dans le second membre de $(\omega)$, substituons aux dérivées dont il s'agit leurs expressions tirées de $(\mathrm{A}')$, et répétons l'opération en faisant successivement pour le groupe $(\mathrm{A}')$ tous les choix possibles. L'ensemble des opérations que nous venons d'indiquer s'appellera, pour abréger, *remplacer dans la relation* $(\omega)$ *les dérivées principales des classes* 1, 2, ..., $j$ *par leurs expressions tirées de* $(\mathrm{A})$.

14. Cela posé, supposons les équations données identiquement satisfaites par quelque groupe d'intégrales ordinaires : substituons ces intégrales aux fonctions inconnues correspondantes dans les diverses équations du système, et désignons indifféremment par $(\mathrm{A}_1)$ ou $(\mathrm{B}_1)$ l'ensemble des relations immédiates qui résultent de cette substitution. Effectuons ensuite sur chacune de celles-ci et de toutes les manières possibles une différentiation (première) susceptible d'amener dans le premier membre quelque dérivée principale de seconde classe, et soient $(\mathrm{A}_2)$ le groupe des relations résultantes, $(\mathrm{B}_2)$ celui qu'on obtient en remplaçant dans chacune des relations $(\mathrm{A}_2)$ les dérivées principales de première classe par leurs expressions tirées de $(\mathrm{B}_1)$ (13) : en vertu des deux propositions démontrées au n° 12, le groupe total $[(\mathrm{A}_2), (\mathrm{B}_2)]$ fournit des expressions immédiates pour les diverses dérivées principales de seconde classe. Effectuons maintenant sur les diverses relations des groupes

$$(\mathrm{A}_1) \quad \text{ou} \quad (\mathrm{B}_1), \quad (\mathrm{A}_2), \quad (\mathrm{B}_2)$$

toute différentiation (première) susceptible d'amener dans le premier membre quelque dérivée principale de troisième classe, et soient $(\mathrm{A}_3)$ le groupe des relations résultantes, $(\mathrm{B}_3)$ celui qu'on obtient en remplaçant dans chacune des relations $(\mathrm{A}_3)$ les dérivées principales des deux premières classes par leurs expressions tirées de $(\mathrm{B}_1)$, $(\mathrm{B}_2)$ : le groupe total $[(\mathrm{A}_3), (\mathrm{B}_3)]$ fournira de même des expressions immédiates pour les diverses dérivées principales de troisième classe. Et ainsi de suite indéfiniment.

15. Dans le groupe indéfini

$$(\mathrm{A}_1), \quad (\mathrm{A}_2), \quad (\mathrm{A}_3), \quad \ldots, \tag{3}$$

nous distinguerons : 1° le sous-groupe des relations *primitives*, obtenu en adjoignant aux relations du système proposé toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations; 2° le sous-groupe des relations *intermédiaires*, composé de toutes les autres du groupe (3).

Nous nommerons *ultimes* les relations

$$(3\ bis) \qquad (B_1), \quad (B_2), \quad (B_3), \quad \ldots$$

dont les seconds membres ne contiennent aucune dérivée principale.

Désignant par

$$(C_1), \quad (C_2), \quad (C_3), \quad \ldots$$

les relations primitives des classes respectives 1, 2, 3, ..., nous aurons encore à considérer le groupe

$$(D_1), \quad (D_2), \quad (D_3), \quad \ldots,$$

entièrement composé de relations ultimes, et défini comme il suit : les relations $(D_1)$ coïncident, comme $(C_1)$, avec celles du système proposé $(A_1)$ ou $(B_1)$; les relations $(D_2)$ s'obtiennent en remplaçant dans $(C_2)$ les dérivées principales de première classe par leurs expressions tirées de $(D_1)$ (13); les relations $(D_3)$, en remplaçant dans $(C_3)$ les dérivées principales des deux premières classes par leurs expressions tirées de $(D_1)$, $(D_2)$; et ainsi de suite indéfiniment. Les relations $(D_1)$, $(D_2)$, $(D_3)$, ... ainsi obtenues se nommeront *primitivo-ultimes*.

Nous désignerons enfin par $(\Gamma)$, faute d'une dénomination appropriée, le groupe obtenu en adjoignant aux relations $(C_1)$, $(B_2)$ et $(C_3)$ toutes celles qui se déduisent de $(B_2)$ et $(C_3)$ par de simples différentiations. Les formules du groupe $(\Gamma)$ autres que $(B_2)$ font toutes partie du groupe (3).

Les expressions fournies pour les dérivées principales des intégrales ordinaires du système donné par les diverses relations ci-dessus définies seront affectées des dénominations correspondantes.

16. Sur ces diverses relations et expressions, il importe de faire les remarques suivantes :

1° Parmi les différentiations qui concourent à engendrer une dérivée principale, on peut distinguer les différentiations principales et les différentiations paramétriques : si celles de la première sorte intéressent toutes *une seule* variable, la dérivée principale est dite *simple;* si elles intéressent au contraire *plusieurs* variables distinctes, la dérivée est dite *complexe*. Cela étant, on apercevra facilement, comme au n° 23*, qu'*une dérivée simple a une seule expression primitive, tandis qu'une dérivée complexe en a autant que ses différentiations génératrices intéressent de variables principales distinctes.*

2° Il n'existe pas d'expressions intermédiaires pour les dérivées principales du premier et du second ordre.

Dans le premier ordre, les relations primitives, comme les relations ultimes, coïncident avec les équations du système donné.

*Dans le second ordre, le nombre des expressions ultimes d'une dérivée principale quelconque est précisément égal au nombre de ses expressions primitives, c'est-à-dire à 1 ou à 2 suivant que cette dérivée est simple ou complexe*. Effectivement, si la dérivée considérée est du premier genre (et par suite nécessairement simple), la seule manière d'en obtenir une expression ultime consiste à remplacer dans son expression primitive les dérivées principales du premier ordre par leurs valeurs tirées des équations proposées. Si la dérivée considérée est du second genre, toutes ses expressions ultimes s'obtiennent en éliminant de ses diverses expressions primitives tant les dérivées principales du premier ordre que celles du second ordre et du premier genre : or chacune des dérivées à éliminer n'admet, comme nous venons de le voir, qu'une seule expression ultime.

Dans les ordres supérieurs au second, la multiplicité des expressions d'une même dérivée complexe s'accroît lorsqu'on passe des formules primitives aux formules ultimes, ainsi que nous l'avons remarqué pour les équations différentielles totales. Mais, de plus, *pour un système immédiat partiel, cette multiplicité peut s'étendre même aux dérivées simples,* parce que leurs expressions primitives peuvent fort bien renfermer des dérivées complexes, susceptibles, comme nous l'avons vu, de plusieurs expressions ultimes.

3° *Toute expression primitive, intermédiaire ou ultime, est entière par rapport aux composantes des seconds membres du système donné et à leurs dérivées partielles, comme aussi (lorsqu'il y a lieu) par rapport aux diverses dérivées des intégrales qui ne sont pas à la fois paramétriques et du premier ordre.*

4° *Les variables $x$, $y$, ..., les fonctions inconnues $u$, $v$, ... et leurs dérivées principales ou paramétriques de tous ordres étant considérées pour un instant comme autant de variables indépendantes distinctes, pour que les formules primitives et intermédiaires soient vérifiées par des valeurs particulières données des variables dont il s'agit, il faut et il suffit que les formules ultimes le soient.*

*Les groupes* (3) *et* (3 *bis*) *sont ainsi équivalents l'un à l'autre.*

5° *Le groupe des relations primitives équivaut de même soit à celui des relations primitivo-ultimes, soit à celui des relations* ($\Gamma$) (15).

6° Nous nommerons *simple* tout groupe indéfini de relations primitives, intermédiaires ou ultimes, fournissant, pour chaque dérivée principale, *une expression et une seule.* Si l'on attribue aux variables, aux fonctions inconnues et à leurs dérivées paramétriques des valeurs numériques quelconques, les relations successives d'un pareil groupe, rangées d'après leurs classes croissantes, fournissent pour chaque dérivée principale une valeur numérique déterminée et une seule.

Si, sans attribuer de valeur numérique particulière à aucune de ces diverses quantités, on élimine du second membre de chaque équation les dérivées principales qui y figurent à l'aide des équations antérieures, on obtient un groupe simple équivalent au premier, et entièrement composé de relations ultimes.

17. *A partir de valeurs initiales données $x_0$, $y_0$, ... des variables indépendantes, les développements par la série de Taylor des intégrales ordinaires dont on admet l'existence pour le système immédiat considéré, peuvent être reconstruits dès que l'on connaît seulement leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées paramétriques de tous ordres.*

Effectivement, les seconds membres des formules ultimes ne contenant que les variables indépendantes, les intégrales et leurs dérivées paramétriques, l'hypothèse numérique $x = x_0$, $y = y_0$, ... les transforme tous en des quantités connues et fait connaître, par suite, les valeurs initiales de leurs premiers membres, c'est-à-dire de toutes les dérivées principales des intégrales dont il s'agit.

En résumé, on connaît donc ainsi les valeurs initiales de ces intégrales et de toutes leurs dérivées sans distinction, c'est-à-dire ce qui est nécessaire pour construire les développements cherchés.

18. Quand les variables principales d'une intégrale prennent leurs valeurs particulières initiales, cette intégrale se réduit à une fonction de ses seules variables paramétriques, que nous nommerons sa *détermination initiale*. Dans le système (1), par exemple, la détermination initiale de $u$ est une fonction de $y$, celle de $v$ une fonction de $x$. Dans le système (2), celles des intégrales $u$, $v$ sont toutes deux des fonctions de $y$.

Si, pour une certaine intégrale, toutes les variables de la question sont principales, sa détermination initiale se réduit à une constante : c'est ce qui arrive toujours dans un système d'équations différentielles totales.

Si, pour une autre, les variables sont toutes paramétriques, sa détermination initiale est fonction de toutes les variables.

19. *La connaissance des déterminations initiales de toutes les intégrales permet aussi bien la reconstruction de leurs développements.*

Il est clair, en effet, que les valeurs initiales d'une intégrale et de ses dérivées paramétriques sont précisément celles de sa détermination initiale et de ses dérivées de tous ordres. La connaissance des déterminations initiales équivaut donc exactement à celle des valeurs initiales des intégrales et de leurs dérivées paramétriques, laquelle, d'après le théorème du n° 17, suffit à la reconstruction de leurs développements.

20. Au lieu de reconstruire, comme nous venons de l'indiquer, les développements d'intégrales dont l'existence est supposée connue, cherchons maintenant s'il existe quelque système d'intégrales ordinaires ayant pour déterminations initiales des fonctions de leurs divers groupes de variables paramétriques *choisies au hasard, mais jouissant, bien entendu, de la double propriété d'être toutes olotropes pour les valeurs initiales des variables indépendantes, et d'avoir, ainsi que leurs dérivées premières, des valeurs initiales qui, prises conjointement avec celles des variables, laissent aussi olotropes les composantes des seconds membres des équations données.*

*Un pareil système d'intégrales, lorsqu'il existe, est évidemment unique,* et son existence dépend des trois conditions suivantes, comme s'il s'agissait d'un système total.

I. *Nonobstant la multiplicité des expressions ultimes d'une même dérivée principale d'une intégrale hypothétique* (16, 2°), *les valeurs initiales qu'elles fournissent de diverses manières pour cette dérivée doivent toujours être numériquement égales les unes aux autres.*

II. *Les développements construits par la méthode des coefficients indéterminés, comme s'il s'agissait d'une simple reconstruction* (17), *doivent avoir quelque système de rayons de convergence tous différents de zéro.*

III. *Leurs sommes doivent satisfaire effectivement à toutes les équations du système immédiat proposé.*

*La dernière de ces trois conditions ne peut manquer d'être remplie si les deux premières le sont, alors même qu'on se bornerait à considérer dans celles-ci les valeurs initiales fournies par les seules formules primitivo-ultimes.* Effectivement, les valeurs initiales des variables indépendantes, des fonctions définies par les développements dont nous venons de parler, et de leurs dérivées principales ou paramétriques de tous ordres, vérifient par hypothèse les formules primitivo-ultimes, donc aussi (16, 5°) les formules primitives. La substitution des fonctions considérées dans chaque équation du système en transforme donc les deux membres en des fonctions de $x, y, \ldots$ numériquement égales, ainsi que leurs dérivées semblables, pour $x = x_0$, $y = y_0$, ... et, par suite, identiquement égales entre elles (7*).

Nous n'avons ainsi à nous occuper que des deux premières conditions.

21. La réalisation de la première peut s'opérer soit par une adaptation convenable de la nature des fonctions choisies pour déterminations initiales des intégrales hypothétiques à celle des seconds membres des équations du système, soit par une corrélation spéciale entre les seconds membres, en vertu de laquelle la condition dont il s'agit se trouve remplie indépendamment du choix des fonctions prises pour déterminations initiales.

Nous exprimerons l'existence de cette dernière corrélation en disant que le système immédiat proposé est *passif*. Quant aux intégrales ordinaires des systèmes non passifs, qui sont loin d'exister toujours, nous les nommerons *exceptionnelles*, comme nous l'avons fait au n° 27* pour les équations différentielles totales.

22. *Pour qu'un système immédiat d'équations différentielles partielles soit passif, il faut et il suffit que les deux expressions ultimes de chaque dérivée complexe seconde d'une fonction inconnue quelconque soient égales identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs attribuées aux variables, aux fonctions inconnues et à leurs dérivées paramétriques premières et secondes, ces trois sortes de quantités étant considérées pour un instant comme autant de variables indépendantes distinctes.*

Si le système est passif, les diverses expressions ultimes de chaque dérivée principale, et en particulier de chaque dérivée complexe du second ordre, doivent être identiquement égales, d'où résulte immédiatement que la condition posée est nécessaire. Nous prouverons qu'elle est suffisante en raisonnant comme il suit.

Toute expression ultime d'une dérivée principale s'obtient en différentiant un certain nombre de fois l'une des équations proposées, et remplaçant après quelques-unes de ces différentiations, en particulier après la dernière, les dérivées principales qui figurent dans le second membre par telles ou telles de leurs expressions ultimes. Cela posé :

I. *Si l'égalité identique entre les diverses expressions ultimes de chaque dérivée principale a lieu jusqu'à la classe $j \geqq 1$ inclusivement, toutes les expressions ultimes d'une dérivée déterminée de classe $j+1$, obtenues en effectuant sur une même équation du système proposé l'opération ci-dessus indiquée, sont identiquement égales entre elles de quelque manière que cette opération soit conduite.*

1° En premier lieu, si l'on n'opère de substitutions qu'après avoir opéré la dernière différentiation, la relation ultime à laquelle on est conduit est toujours la même; car la formule primitive résultant des seules différentiations est indépendante de l'ordre dans lequel on les exécute, et pour chacune des dérivées principales, de classes nécessairement inférieures à $j+1$, qu'on en doit éliminer, les diverses expressions ultimes sont par hypothèse identiques.

2° Si l'on ne change pas l'ordre relatif des différentiations, le résultat de l'opération ci-dessus indiquée est indépendant de toutes les autres conditions dans lesquelles on l'effectue.

Supposons en effet que les différentiations, dont nous désignerons le nombre par $k$, soient exécutées dans un ordre déterminé, certaines d'entre elles étant suivies de substitutions déterminées; soient $x$ celle des variables indépendantes par rapport à laquelle la dernière doit avoir lieu, et

$$(4) \qquad \delta_k = f(x, y, \ldots, u, v, \ldots, \sigma, \ldots, \tau, \ldots)$$

la relation immédiate sur laquelle on a à l'exécuter. Dans cette formule $\delta_k$ désigne une certaine dérivée principale d'ordre $k$, et $\sigma, \ldots,$ $\tau, \ldots$ les diverses dérivées respectivement principales et paramétriques dont le caractère immédiat de la relation autorise la présence dans le second membre. Les dérivées $\frac{d\sigma}{dx}, \cdots$ et celles des dérivées $\frac{d\tau}{dx}, \cdots$ qui sont principales sont au plus de la classe $j$; car elles figurent éventuellement dans le second membre de la relation immédiate que l'on déduit de (4) au moyen d'une différentiation relative à $x$, et, par suite, sont de classes inférieures au premier membre $\frac{d\delta_k}{dx}$ qui est de classe $j+1$. Chacune de ces dérivées, comme aussi chacune des dérivées principales $\sigma, \ldots,$ a donc une expression ultime unique, d'où résulte en particulier que, si l'on désigne par

$$\Sigma, \quad \ldots, \quad \Sigma_x, \quad \ldots$$

les expressions ultimes des dérivées

$$\sigma, \quad \ldots, \quad \frac{d\sigma}{dx}, \quad \ldots,$$

et par $\left(\frac{d\Sigma}{dx}\right), \cdots$ les résultats que donne la règle des fonctions composées quand on effectue sur $\Sigma, \ldots$ une différentiation relative à $x$, les diverses expressions ultimes $\Sigma_x, \ldots$ peuvent s'obtenir en éliminant respectivement des diverses expressions $\left(\frac{d\Sigma}{dx}\right), \cdots$ les dérivées principales (de classes nécessairement inférieures à $j$) qui peuvent y figurer.

Cela posé, au lieu de différentier par rapport à $x$ la relation (4), ce qui donne

$$\frac{d\delta_k}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{du}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dx} + \ldots + \frac{df}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dx} + \ldots + \frac{df}{d\tau}\frac{d\tau}{dx} + \ldots,$$

puis de remplacer, d'une part, les dérivées principales $\sigma, \ldots, \frac{d\sigma}{dx}, \ldots$ par les expressions ultimes $\Sigma, \ldots, \Sigma_x, \ldots$, d'autre part, celles des dérivées $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \ldots, \frac{d\tau}{dx}, \ldots$ qui sont principales par les expressions ultimes correspondantes, il revient évidemment au même de différentier par rapport à $x$ la relation

$$\delta_k = f(x, y, \ldots, u, v, \ldots, \Sigma, \ldots, \tau, \ldots),$$

ce qui donne

$$\frac{d\delta_k}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{du}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dx} + \ldots + \frac{df}{d\Sigma}\left(\frac{d\Sigma}{dx}\right) + \ldots + \frac{df}{d\tau}\frac{d\tau}{dx} + \ldots,$$

puis de remplacer par leurs expressions ultimes les dérivées principales qui peuvent alors figurer dans le second membre.

Ainsi on peut, sans changer le résultat, remplacer dans le second membre de (4) les dérivées principales par leurs expressions ultimes, ce qui donnera une expression ultime de $\delta_k$, effectuer seulement alors la dernière différentiation, et remplacer finalement par leurs expressions ultimes les dérivées principales introduites par cette différentiation dans le second membre. Si l'on observe maintenant que $\delta_k$, puis les dérivées dont il s'agit, étant de classes inférieures à $j+1$, ne sont susceptibles chacune que d'une expression ultime, le point qui nous occupe se trouve entièrement démontré.

3° Considérons deux quelconques des expressions ultimes dont il s'agit actuellement de constater l'identité, et qui se déduisent, comme nous l'avons expliqué, par différentiations et substitutions, d'une même équation du système proposé. Si, sans changer de part ni d'autre l'ordre relatif des différentiations, on n'opère de substitutions qu'après la dernière d'entre elles, on tombe sur deux expressions ultimes respectivement identiques aux deux précédentes (2°), et l'on sait d'ailleurs (1°) qu'en procédant ainsi le résultat est indépendant de l'ordre des différentiations.

II. *Si l'égalité identique entre les diverses expressions ultimes de chaque dérivée principale a lieu jusqu'à la classe $j \geqq 3$ inclusivement, les deux expressions ultimes d'une même dérivée principale de classe $j+1$, déduites de deux équations distinctes du système proposé par l'opération indiquée plus haut, sont nécessairement identiques.*

Supposons, par exemple, que les deux équations dont il s'agit soient

$$(5) \qquad \frac{du}{dx} = \ldots, \qquad \frac{du}{dy} = \ldots.$$

L'une des différentiations à exécuter sur la première est nécessairement relative à $y$, l'une des différentiations à exécuter sur la seconde nécessairement relative à $x$, et celles qui restent ont lieu de part et d'autre par rapport aux mêmes variables. Or les expressions ultimes d'une même dérivée principale étant identiques jusques et y compris la classe $j$, on peut, sans changer les résultats (I), opérer de la manière suivante sur chacune des équations (5) : 1° effectuer d'abord la différentiation relative à $y$ s'il s'agit de la première, relative à $x$ s'il s'agit de la seconde, et remplacer dans les seconds membres les dérivées des deux premières classes par leurs expressions ultimes; 2° exécuter ensuite les différentiations restantes et remplacer finalement dans les seconds membres toutes les dérivées principales par leurs expressions ultimes. En vertu de l'hypothèse, les résultats sont identiques après la première partie de l'opération, et par suite aussi après la deuxième.

III. Pour les trois premières classes (ou, ce qui revient au même, pour les deux premiers ordres), l'égalité identique entre les diverses expressions ultimes d'une même dérivée principale a lieu d'elle-même si cette dérivée est simple (16, 2°), et résulte de l'hypothèse si cette dérivée est complexe. On en conclura, par l'application répétée des propositions ci-dessus énoncées (I, II), que cette égalité identique a encore lieu pour la quatrième classe, puis pour la cinquième, et ainsi de suite indéfiniment.

23. Une particularité essentielle à noter est que *le système proposé est passif sans condition dans le cas où chaque fonction inconnue n'a pas plus d'une seule variable principale.* Effectivement, le choix de l'équa-

tion à différentier pour obtenir une dérivée principale déterminée n'a plus alors rien d'arbitraire, et le point à démontrer résulte du numéro précédent (I).

D'une manière générale, *le nombre total des conditions de passivité est égal à la somme de ceux qui pour chaque fonction inconnue expriment combien ses variables principales offrent de combinaisons deux à deux.* Pour des nombres donnés $h$, $g$, de variables indépendantes et de fonctions inconnues, il peut donc varier de $0$, valeur qu'il prend lorsque chaque fonction inconnue n'a pas plus d'une variable principale, à $g\frac{h(h-1)}{1.2}$, valeur qu'il acquiert quand aucune fonction inconnue n'a de variable paramétrique, c'est-à-dire quand le système immédiat est total (29*).

24. De l'ensemble des formules primitives, intermédiaires et ultimes, extrayons un groupe indéfini fournissant au moins une expression pour chaque dérivée principale, et considérons-y, pour un instant, les variables $x, y, \ldots$, les fonctions inconnues $u, v, \ldots$ et leurs dérivées principales ou paramétriques de tous ordres, comme autant de variables indépendantes distinctes : lorsque les conditions initiales (19) seront choisies de telle manière que les relations dont il s'agit soient toutes vérifiées quand on substitue, d'une part aux variables $x, y, \ldots$, aux fonctions $u, v, \ldots$ et à leurs dérivées paramétriques les valeurs initiales données, d'autre part à leurs dérivées principales des valeurs particulières convenables (formant de toute nécessité un système unique), nous dirons qu'il y a, relativement aux conditions initiales dont il s'agit, *concordance numérique* entre les relations du groupe.

Dans un groupe simple, quel qu'il soit, la concordance numérique a lieu d'elle-même relativement à des conditions initiales quelconques.

25. Il nous reste maintenant (20) à examiner si, les conditions initiales étant choisies de manière à assurer la concordance numérique (24) des relations primitivo-ultimes, ou, ce qui revient au même (16, 5°), des relations primitives, les développements qu'on en déduit pour les intégrales hypothétiques sont convergents. C'est là une condition qui *n'est pas nécessairement remplie,* et, dans les deux

paragraphes qui suivent, nous spécifierons précisément un cas très étendu où elle l'est toujours, et un autre cas où sa réalisation dépend des circonstances particulières du problème.

**Systèmes immédiats qui sont en même temps réguliers ou semi-réguliers. Réduction d'un système immédiat non linéaire à un système immédiat linéaire.**

26. Quand les fonctions inconnues d'un système immédiat peuvent être placées dans un ordre tel que toute variable qui est principale pour l'une d'entre elles le soit aussi pour chacune des précédentes, nous écrirons de gauche à droite dans cet ordre les colonnes correspondantes de son Tableau, et nous dirons qu'il est *régulier*. De cette manière, les fonctions se rassemblent naturellement en groupes jouissant de cette propriété que, pour deux fonctions inconnues quelconques, le partage des variables en principales et paramétriques se fait ou non de la même manière suivant qu'elles appartiennent au même groupe ou à deux groupes différents. A ces divers groupes, et en allant de gauche à droite dans le Tableau, nous assignerons les numéros d'ordre 1, 2, 3, ..., et chacun de ces numéros s'appellera le *rang de régularité* commun des fonctions inconnues du groupe correspondant.

Pour un système de cette espèce, nous écrirons aussi les lignes du Tableau dans un ordre tel que le nombre des cases occupées n'augmente jamais d'une ligne à la suivante quand on le lit de haut en bas. Les variables se rassemblent ainsi en groupes jouissant de cette propriété que deux lignes quelconques du Tableau offrent la même distribution de cases pleines et vides ou des distributions différentes, suivant que les variables qui leur correspondent appartiennent ou non au même groupe. A ces divers groupes de variables nous attribuerons, de même, les *rangs de régularité* 1, 2, 3, ..., en parcourant le Tableau de haut en bas.

Par exemple, le système (2) du n° 9 est régulier; plus généralement aussi *tout système dans lequel le partage des variables en principales et paramétriques s'opère de la même façon par rapport à toutes les fonctions inconnues :* en pareil cas, ces dernières ont toutes le rang 1, et les variables indépendantes ont le rang 1 ou 2, suivant qu'elles sont principales ou paramétriques. *Dans cette catégorie se rangent, en particulier, les systèmes d'équations différentielles totales.*

Le système écrit ci-dessous

| | $(u)$ | $(v)$ | $(w)$ | $(s)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(x)$ | $\frac{du}{dx}=\ldots$ | $\frac{dv}{dx}=\ldots$ | $\frac{dw}{dx}=\ldots$ | |
| $(y)$ | $\frac{du}{dy}=\ldots$ | $\frac{dv}{dy}=\ldots$ | | |
| $(z)$ | $\frac{du}{dz}=\ldots$ | | | |
| $(t)$ | | | | |

est encore régulier s'il est immédiat, c'est-à-dire si les dérivées paramétriques contenues dans les seconds membres d'une colonne quelconque n'appartiennent à aucune des fonctions qui correspondent aux colonnes antérieures. Les fonctions $u$, $v$, $w$, $s$ y ont respectivement les rangs 1, 2, 3, 4, et de même les variables $x, y, z, t$.

Nous appellerons *irrégulier* tout système immédiat non régulier, et *semi-régulier* tout système immédiat et irrégulier pouvant se déduire de quelque système immédiat et régulier par la suppression de certaines équations différentielles. Par exemple, le système (1) du n° 9 est irrégulier; tout système immédiat dont les seconds membres ne contiennent aucune dérivée des fonctions inconnues est nécessairement semi-régulier lorsqu'il n'est pas régulier, car on peut alors l'extraire de quelque système d'équations différentielles totales.

27. Nous dirons encore qu'un système immédiat est *linéaire* quand les dérivées (paramétriques) des fonctions inconnues entrent toutes linéairement dans les équations qui le composent. Chaque second membre se réduit alors à une somme de termes dont l'un est une certaine fonction des variables indépendantes et des fonctions inconnues

seulement, tandis que l'un quelconque des termes restants est le produit d'une semblable fonction par quelque dérivée paramétrique. Par exemple, l'équation aux dérivées partielles

| | $(u)$ |
|---|---|
| $(x)$ | $\dfrac{du}{dx} = \mathrm{U}_x\left(x, y, u, \dfrac{du}{dy}\right)$ |
| $(y)$ | |

constitue un système linéaire si son second membre est de la forme

$$\mathrm{U}_x^{(0)}(x, y, u) + \mathrm{U}_x^{(1)}(x, y, u)\frac{du}{dy}.$$

*Il faut aussi rattacher les équations différentielles totales aux systèmes linéaires*, puisque leurs seconds membres ne renferment point de dérivées.

28. Étant donné un système immédiat quelconque, supposons qu'on assigne à ses intégrales ordinaires des conditions initiales choisies au hasard, mais jouissant, bien entendu, de la double propriété énoncée au n° 20. A l'aide des relations contenues dans un groupe simple déterminé de formules primitives, intermédiaires ou ultimes (n° 16, 6°), on peut évidemment, et d'une seule manière, construire des séries entières dont les sommes coïncideront avec les intégrales cherchées, *si toutefois ces dernières existent;* mais on ne peut affirmer que les développements ainsi construits fournissent des intégrales du système proposé avant de s'être assuré et de leur convergence, et de la concordance numérique des formules primitivo-ultimes relativement aux données initiales. Quoi qu'il en soit de cette dernière condition, si celle de convergence se trouve remplie, nous dirons, pour abréger, que les sommes de nos développements sont des *intégrales fictives* du système en question *satisfaisant aux conditions initiales choisies.*

29. *Tout système partiel jouissant de la triple propriété d'être immédiat, régulier et linéaire, possède un groupe d'intégrales fictives répondant*

*à des conditions initiales données, et construites à l'aide d'un groupe simple donné de relations primitives, intermédiaires ou ultimes.*

Jusques et y compris l'alinéa III du présent numéro, nous supposerons simplement que le système partiel auquel nous avons affaire est *immédiat* et *linéaire*, sans nous inquiéter de savoir s'il est régulier ou non. Nous nommerons alors

$[i, l]$ le système dont il s'agit;
$x_0, y_0, \ldots$ les valeurs initiales des $h$ variables indépendantes $x, y, \ldots$;
$u_0, v_0, \ldots$ celles des $g$ fonctions inconnues $u, v, \ldots$;
$\upsilon, \varphi, \ldots$ les déterminations initiales de ces dernières;
$(\varpi)$ le groupe simple de formules qui, conjointement avec les déterminations initiales, nous servira à construire les développements en séries des intégrales hypothétiques, et que nous pouvons toujours supposer ne contenir exclusivement que des relations ultimes (n° 16, 6°);
$\psi(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \ldots$, les coefficients des dérivées paramétriques dont le caractère immédiat du système $[i, l]$ autorise la présence dans les seconds membres de ses diverses équations;
$\omega(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \ldots$ les termes indépendants de ces dérivées dans les mêmes seconds membres.

Cela posé, nous démontrerons les points suivants :

I. *Si l'on désigne par*

$$\mu, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_h, \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_g$$

*des constantes positives quelconques, par* $\varepsilon$ *une constante positive plus petite que* 1, *et si l'on pose, pour abréger,*

$$\tau = \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(y - y_0) + \ldots + \beta_1(u - u_0) + \beta_2(v - v_0) + \ldots,$$

$$\Theta(\tau) = \frac{1}{1 - \tau},$$

*le système différentiel total obtenu en égalant à*

$$\frac{\mu\,\Theta(\tau)}{1 - \varepsilon\,\Theta(\tau)} \tag{6}$$

*les gh quantités*

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\dfrac{du}{dx}, & \dfrac{\beta_2}{\alpha_1}\dfrac{dv}{dx}, \quad \dots, \\ \dfrac{\beta_1}{\alpha_2}\dfrac{du}{dy}, & \dfrac{\beta_2}{\alpha_2}\dfrac{dv}{dy}, \quad \dots, \\ \dots\dots, & \dots\dots, \quad \dots \end{cases}$$

*admet un groupe d'intégrales ordinaires olotropes en* $x_0, y_0, \dots$ *et s'y réduisant respectivement à* $u_0, v_0, \dots$; *les dérivées de tous ordres de ces intégrales ont des valeurs initiales essentiellement réelles, positives et indépendantes des valeurs particulières choisies pour* $x_0, y_0, \dots, u_0, v_0, \dots$.

Effectivement, ce système mis sous forme immédiate est passif, ainsi qu'il est facile de s'en assurer, et admet par conséquent (n° 31*) un groupe d'intégrales ordinaires satisfaisant aux conditions initiales dont il s'agit. Si l'on développe maintenant la fonction $\Theta(\tau)$ suivant la formule

$$1 + \tau + \tau^2 + \dots,$$

et qu'après avoir remplacé $\tau$ par sa valeur on ordonne par rapport aux puissances de

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad \dots, \quad u - u_0, \quad v - v_0, \quad \dots,$$

on voit immédiatement que les valeurs initiales de cette fonction et de ses dérivées de tous ordres sont essentiellement réelles, positives et indépendantes des valeurs particulières choisies pour $x_0, y_0, \dots, u_0, v_0, \dots$. Il en est de même de la fonction $\frac{1}{1 - \varepsilon\Theta(\tau)}$, qu'on peut développer suivant la formule

$$1 + \varepsilon\Theta + \varepsilon^2\Theta^2 + \dots,$$

par suite enfin du produit $\mu\Theta(\tau)\frac{1}{1 - \varepsilon\Theta(\tau)}$, second membre commun à toutes les équations différentielles du système total. Les valeurs initiales des dérivées de tous ordres de nos intégrales jouissent donc, elles aussi, de la propriété énoncée; car, en vertu des formules ultimes appliquées à leur calcul, elles se présentent sous forme d'expressions entières, sans aucun signe $-$, par rapport aux valeurs initiales de la fonction (6) et de ses dérivées partielles.

II. *Les intégrales dont nous venons de constater l'existence vérifient identiquement un système* [I, L], *immédiat et linéaire comme* [$i$, $l$], *et présentant avec lui cette seule différence que les diverses fonctions*

$$\psi(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \quad \ldots, \quad \omega(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \quad \ldots$$

*s'y trouvent remplacées par des fonctions de la forme* $\lambda\Theta(\tau), \ldots,$ *où* $\lambda, \ldots$ *désignent des constantes positives.*

Soient, en effet,

$$\frac{du}{dx} = \ldots \tag{8}$$

l'une des équations du système [$i$, $l$]; $q$ le nombre, au moins égal à 1, des dérivées paramétriques dont le caractère immédiat du système autorise la présence dans le second membre de l'équation (8) (10); et $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q$ des quantités positives vérifiant la relation

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_q = \varepsilon.$$

De l'équation

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}\frac{du}{dx} = \frac{\mu\,\Theta(\tau)}{1 - \varepsilon\,\Theta(\tau)},$$

qui figure dans le système différentiel total défini à l'alinéa I, on tire immédiatement

$$\frac{du}{dx} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}\mu\,\Theta(\tau) + \nu_1\Theta(\tau)\frac{du}{dx} + \ldots + \nu_q\Theta(\tau)\frac{du}{dx}. \tag{9}$$

Comme les diverses quantités (7) deviennent identiquement égales entre elles par la substitution à $u, v, \ldots$ des intégrales considérées, la dérivée $\frac{du}{dx}$ ne diffère alors que par un facteur constant positif de chacune des $q$ dérivées qui figurent éventuellement dans le second membre de l'équation (8); rien n'est donc plus facile que d'introduire ces $q$ dérivées respectivement dans les $q$ derniers termes de l'équation (9) à la place de $\frac{du}{dx}$. On fera des calculs analogues au précédent en considérant l'une après l'autre toutes les équations du système [$i$, $l$], et il est clair que le système [I, L] ainsi obtenu satisfera à toutes les conditions énoncées.

Nous nommerons $\nu, \ldots$ toutes les quantités analogues à $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q$ qui figurent dans les seconds membres de ces nouvelles équations; $\Psi(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \ldots$ les coefficients des dérivées paramétriques et $\Omega(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \ldots$ les termes indépendants de ces dérivées dans les mêmes seconds membres; enfin $\Upsilon, \Phi, \ldots$ les déterminations initiales, relativement au système [I, L], des intégrales dont nous venons de constater l'existence.

*En désignant par $\lambda', \ldots$ celles des constantes $\lambda, \ldots$ qui figurent dans l'une ou l'autre des fonctions $\Psi(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \ldots$, et par $\lambda'', \ldots$ celles qui figurent dans l'une ou l'autre des fonctions $\Omega(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \ldots$,* on voit immédiatement que *les premières ont des expressions indépendantes de $\mu$, et les secondes des expressions linéaires par rapport à $\mu$.*

III. Soient $r$ une constante positive inférieure à tous les olomètres des composantes $\psi(x, y, \ldots; u, v, \ldots), \ldots, \omega(x, y, \ldots; u, v, \ldots), \ldots$, et des déterminations initiales $\upsilon, \varphi, \ldots$ pour les valeurs initiales de leurs variables respectives; M, ... d'autres constantes positives en même nombre que les fonctions $\psi, \ldots$, et respectivement supérieures (ou égales) aux modules que ces dernières peuvent acquérir à l'intérieur et sur les circonférences des cercles de rayon $r$ ayant pour centres les points $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$: il est clair que les constantes M, ..., les constantes $\nu, \ldots$ et les constantes $\lambda', \ldots$ se correspondent respectivement.

*Supposons actuellement que, par un choix convenable des constantes*

$$(10) \qquad \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_h; \ \beta_1, \ \beta_2, \ \ldots, \ \beta_g; \ \varepsilon; \ \nu, \ \ldots,$$

*on puisse réaliser à la fois toutes les conditions suivantes : en même temps que la constante $\varepsilon$ est inférieure à l'unité et que les diverses constantes $\nu, \ldots$ figurant dans une même équation quelconque du système* [I, L] *ont une somme égale à $\varepsilon$, comme l'exige la définition du système dont il s'agit, les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_g$ sont toutes supérieures (ou égales) à $\frac{1}{r}$, et les constantes $\lambda', \ldots$ [dont les valeurs dépendent de celles qu'on attribue à (10)] respectivement supérieures (ou égales) aux constantes* M, ....

*Cela étant, le système* [$i$, $l$] *admet certainement un groupe d'intégrales* *fictives répondant aux déterminations initiales* $\upsilon$, $\underset{1}{\varphi}$, ..., *et construites à l'aide des relations* ($\varpi$).

Effectivement, soient

N une quantité positive supérieure à tous les modules que peuvent acquérir les composantes $\omega$, ... et les dérivées premières des fonctions $\upsilon$, $\underset{1}{\varphi}$, ... à l'intérieur et sur les circonférences des cercles de rayon $r$ ayant pour centres les valeurs initiales de leurs variables respectives;

$a$ la plus petite des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$;

B la plus grande des quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_g$.

Prenons enfin pour la constante $\mu$, encore indéterminée, une valeur vérifiant l'inégalité

$$\mu > \mathrm{N}\frac{\mathrm{B}}{a}. \tag{11}$$

Cela étant :

1° Puisque les constantes $\lambda'$, ... sont respectivement supérieures aux constantes M, ..., et les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_g$ toutes supérieures à $\frac{1}{r}$, on voit sans peine que, *par rapport aux valeurs initiales* $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$, *les fonctions* $\Psi$, ... *sont respectivement majorantes* (31*, I) *pour les fonctions*

$$\frac{\mathrm{M}}{1-\dfrac{x-x_0+y-y_0+\ldots+u-u_0+v-v_0+\ldots}{r}}, \qquad \ldots,$$

qui, à leur tour et en vertu du même raisonnement qu'au n° 31* (II), sont respectivement majorantes *pour les fonctions* $\psi$, .... D'autre part, les constantes $\lambda''$, ..., au moins égales à $\mu\frac{a}{\mathrm{B}}$, sont toutes supérieures à N en vertu de l'inégalité (11) : *les fonctions* $\Omega$, ... *sont* donc *majorantes* pour

$$\frac{\mathrm{N}}{1-\dfrac{x-x_0+y-y_0+\ldots+u-u_0+v-v_0+\ldots}{r}},$$

et, à plus forte raison, *pour les fonctions* $\omega$, ....

2° Il est clair que les valeurs initiales des dérivées de tous ordres des fonctions $\Upsilon$, $\Phi$, ... coïncident avec les valeurs initiales des dérivées semblables des intégrales dont nous avons constaté l'existence dans le système différentiel total considéré à l'alinéa I. Or dans ce dernier, mis sous forme immédiate, le second membre d'une équation quelconque est évidemment majorant pour

$$\frac{a}{B}\mu\frac{\Theta(\tau)}{1-\varepsilon\Theta(\tau)},$$

et à plus forte raison pour

$$(12) \qquad \frac{a}{B}\mu\,\Theta[a(x-x_0+y-y_0+\ldots)],$$

car on voit aisément que la suppression du dénominateur $1-\varepsilon\Theta(\tau)$, puis la diminution des coefficients positifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_g$, qui se trouvent remplacés, les premiers par $a$, les seconds par $0$, ne peuvent que diminuer les valeurs initiales de la fonction et de ses dérivées de tous ordres; d'ailleurs, en vertu de (11) et de $a > \frac{1}{r}$, la fonction (12) est à son tour majorante pour

$$(13) \qquad \mathrm{N}\,\Theta\left[\frac{1}{r}(x-x_0+y-y_0+\ldots)\right].$$

Donc les seconds membres des équations du système différentiel total mis sous forme immédiate sont tous majorants pour la fonction (13) relativement aux valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$. Dès lors, si l'on considère d'une part le système dont il s'agit, d'autre part le système différentiel total évidemment passif qui se déduit du précédent en y remplaçant tous les seconds membres par la fonction (13), il résulte immédiatement de la forme des expressions ultimes (15), (16, 3°) que les dérivées de tous ordres des intégrales déterminées par les conditions initiales $u = u_0$, $v = v_0$, ... pour $x = x_0$, $y = y_0$, ... auront dans le premier des valeurs initiales supérieures à celles qu'elles possèdent dans le second. D'après cela, *la valeur initiale d'une dérivée quelconque* d'ordre *m de* $\Upsilon$, $\Phi$, ..., *surpassera* la quantité

$$\mathrm{N}\,\frac{1.2\ldots(m-1)}{\quad},$$

et à plus forte raison (comme dans 1°) *le module de la valeur initiale de la dérivée semblable de* $\upsilon$, $\varphi$, ..., qu'on peut considérer comme une dérivée d'ordre $m-1$ de quelqu'une des dérivées premières.

3° Les relations primitives, intermédiaires et ultimes, se correspondant respectivement dans les deux systèmes $[i, l]$, $[\mathrm{I}, \mathrm{L}]$, on peut, aux relations ($\varpi$) du premier système, faire correspondre dans le second un groupe de relations que nous désignerons par ($\Pi$). Or les expressions ultimes fournies par ($\Pi$) sont entières par rapport aux fonctions $\Psi$, ..., $\Omega$, ... et à leurs dérivées partielles, comme aussi par rapport aux dérivées partielles des fonctions $\Upsilon$, $\Phi$, ...; et les expressions ultimes fournies par ($\varpi$) sont composées exactement de la même façon avec les fonctions $\psi$, ..., $\omega$, ..., leurs dérivées partielles, et les dérivées des fonctions $\upsilon$, $\varphi$, .... Donc, en vertu de ce qui précède (1°, 2°), *les intégrales du système* $[\mathrm{I}, \mathrm{L}]$ *dont l'existence a été constatée plus haut* (II) *admettent pour leurs dérivées principales de tous ordres des valeurs initiales respectivement supérieures aux modules de celles que donnent les formules* ($\varpi$) *et les déterminations initiales* $\upsilon$, $\varphi$, ... *pour les dérivées semblables des intégrales fictives dont l'existence est à démontrer.*

4° Les développements des intégrales considérées du système $[\mathrm{I}, \mathrm{L}]$ étant de toute nécessité convergents, il résulte immédiatement de ce qui précède (2°, 3°) que les développements construits à l'aide des formules ($\varpi$) et des déterminations initiales $\upsilon$, $\varphi$, ... ne peuvent manquer de l'être aussi.

IV. Tout se réduit maintenant à prouver qu'en supposant régulier le système $[i, l]$, les conditions énoncées au début de l'alinéa III peuvent être satisfaites *toutes à la fois* par un choix convenable des constantes (10). A cet effet, nous fixerons arbitrairement les constantes $\varepsilon$, $\nu$, ... sous les seules conditions exigées par la définition du système $[\mathrm{I}, \mathrm{L}]$ (I, II), et nous ferons voir qu'en désignant par P, Q deux constantes positives absolument quelconques, on peut trouver pour $\alpha_1$, ..., $\alpha_h$, $\beta_1$, ..., $\beta_g$ des valeurs toutes supérieures à P, et telles que les constantes $\lambda'$, ... soient toutes supérieures à Q.

Nommons $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\eta$ quatre constantes positives, et prenons : 1° pour $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... les produits de $\gamma$ par des puissances de $\alpha$ dont les exposants soient respectivement égaux aux rangs de régularité des variables $x$,

$y, \ldots$ dans le système $[i, l]$ ou $[\mathrm{I}, \mathrm{L}]$; 2° pour $\beta_1, \beta_2, \ldots$ les produits de $\eta$ par des puissances de $\beta$ dont les exposants soient respectivement égaux aux rangs de régularité des fonctions inconnues $u, v, \ldots$. Désignant enfin par $n$ la plus petite des constantes $\nu, \ldots$, assujettissons $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ à vérifier les inégalités évidemment compatibles

$$(14) \qquad \alpha < 1, \qquad\qquad (15) \qquad \alpha < \frac{n}{\mathrm{Q}},$$

$$(16) \qquad \beta > 1, \qquad\qquad (17) \qquad \beta > \frac{\mathrm{Q}}{n\alpha^h},$$

$$(18) \qquad \gamma > \frac{\mathrm{P}}{\alpha^h}, \qquad\qquad (19) \qquad \eta > \frac{\mathrm{P}}{\beta}.$$

Cela posé, on voit immédiatement qu'en vertu de (14) et (16), les constantes appartenant respectivement aux deux groupes $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ et $\beta_1, \ldots, \beta_g$ sont au moins égales, les premières à $\gamma\alpha^h$, les dernières à $\eta\beta$, et que dès lors, en vertu de (18) et (19), elles sont les unes et les autres supérieures à P.

D'autre part, si l'on désigne par $t^{(j)}, \ldots$ les diverses variables de rang $j$, par $t^{(k)}, \ldots$ les diverses fonctions de rang $k$ du système $[\mathrm{I}, \mathrm{L}]$, par $t_0^{(j)}, \ldots, s_0^{(k)}, \ldots$ leurs valeurs initiales, l'une quelconque des équations qui composent ce système est de la forme

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{ds^{(k)}}{dt^{(j)}} = {} & \mu \frac{\gamma}{\eta} \frac{\beta^{-k}}{\alpha^{-j}} \Theta[\ldots + \gamma\alpha^{j''}(t^{(j'')} - t_0^{(j'')}) + \ldots + \eta\beta^{k''}(s^{(k'')} - s_0^{(k'')}) + \ldots] + \ldots \\ & + \nu \frac{\beta^{k'-k}}{\alpha^{j'-j}} \Theta[\ldots + \gamma\alpha^{j''}(t^{(j'')} - t_0^{(j'')}) + \ldots + \eta\beta^{k''}(s^{(k'')} - s_0^{(k'')}) + \ldots] \frac{ds^{(k')}}{dt^{(j')}} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

et il s'agit de faire voir que la constante $\nu \frac{\beta^{k'-k}}{\alpha^{j'-j}}$ est nécessairement supérieure à Q. Observons à cet effet qu'elle ne peut tomber au-dessous de

$$(21) \qquad n \frac{\beta^{k'-k}}{\alpha^{j'-j}}.$$

Si $k' > k$, la différence $j' - j$ peut avoir une valeur entière quelconque n'excédant pas l'intervalle de $-(h-1)$ à $h-1$, et, comme les constantes $\alpha, \beta$ sont la première inférieure, la seconde supérieure à l'unité, l'expression (21) surpassera toujours $n\beta\alpha^h$, et à plus forte raison Q en vertu de l'inégalité (17). Si $k' = k$, on a nécessairement $j' > j$, parce que, alors, pour $s^{(k')}$ comme pour $s^{(k)}$, la variable $t^{(j)}$ est principale et l'autre $t^{(j')}$ paramétrique relativement au système [I, L]; la plus petite valeur possible de la même expression sera donc $\frac{n}{\alpha}$, quantité encore supérieure à Q en vertu de l'inégalité (15). Le cas de $k' < k$ ne peut d'ailleurs se présenter; car alors, des deux fonctions $s^{(k')}$, $s^{(k)}$, la première aurait un rang de régularité inférieur à celui de la seconde, et par suite aucune dérivée de $s^{(k')}$ ne pourrait figurer dans le second membre de l'équation (20) qui a pour premier membre une dérivée de $s^{(k)}$.

30. *La proposition du numéro précédent subsiste pour tout système immédiat et linéaire pouvant se déduire de quelque système partiel, immédiat et régulier, par la suppression de certaines équations différentielles.*

Il est évidemment permis de supposer que le système partiel, immédiat et régulier dont parle l'énoncé, est lui-même linéaire : désignons alors par [[$i$, $l$]] le système proposé, par [$i$, $l$] celui d'où on peut l'extraire, et par ($\chi$) l'ensemble des équations qu'il faut adjoindre au premier pour obtenir le second. Le système auxiliaire [I, L] considéré au numéro précédent (II) se compose évidemment de deux groupes

[[I, L]], (X)

qui correspondent respectivement aux groupes

[[$i$, $l$]], ($\chi$)

dont se compose [$i$, $l$]. Si l'on fixe arbitrairement les constantes $\varepsilon$, $\nu$, ... sous les seules conditions exigées par la définition du système [I, L], il résulte de ce que nous venons de voir (29, IV) que, P, Q désignant deux constantes positives absolument quelconques, on peut trouver au-dessus de P des valeurs de $\alpha_1, \ldots, \alpha_h, \beta_1, \ldots, \beta_g$ rendant supérieures à Q les diverses constantes $\lambda'$, ... du système [I, L], et par suite celles du groupe [[I, L]]. Il suffit maintenant, pour achever la démonstration, de se reporter à la proposition énoncée dans l'alinéa III du numéro précédent.

31. *La proposition du* n° 29 *ne cesse pas d'être vraie lorsque le système*

*différentiel considéré est total, ou qu'il peut se déduire de quelque système total par la suppression de certaines équations.*

Nous supposerons, comme toujours, que le groupe simple de formules à l'aide duquel on construit les développements est entièrement composé de relations ultimes. Nous nommerons

$x_0, y_0, \ldots$ les valeurs initiales des $h$ variables indépendantes $x, y, \ldots$;
$u_0, v_0, \ldots$ celles des $g$ fonctions inconnues $u, v, \ldots$;
$\upsilon, \varphi, \ldots$ les déterminations initiales de ces dernières;
$\omega(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \ldots$ les seconds membres des équations proposées;
$r$ une première constante positive inférieure à tous les olomètres des fonctions $\omega, \ldots, \upsilon, \varphi, \ldots$ pour les valeurs initiales de leurs variables respectives;
$\mu$ une deuxième supérieure à tous les modules que les fonctions $\omega, \ldots$ et les dérivées premières de $\upsilon, \varphi, \ldots$ peuvent acquérir à l'intérieur et sur les circonférences des cercles de rayon $r$ ayant pour centres ces valeurs initiales.

Nous poserons enfin

$$\Lambda(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = \frac{\mu}{1 - \dfrac{x - x_0 + y - y_0 + \ldots + u - u_0 + v - v_0 + \ldots}{r}},$$

et nous considérerons le système total obtenu en égalant à $\Lambda(x, y, \ldots, u, v, \ldots)$ les $gh$ dérivées

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{du}{dx}, & \dfrac{dv}{dx}, & \ldots, \\[2ex] \dfrac{du}{dy}, & \dfrac{dv}{dy}, & \ldots, \\[2ex] \ldots, & \ldots, & \ldots . \end{array}$$

Ce système passif possède un groupe d'intégrales ordinaires olotropes en $x_0, y_0, \ldots$, s'y réduisant respectivement à $u_0, v_0, \ldots$, et possédant des dérivées de tous ordres dont les valeurs initiales sont essentiellement réelles, positives et indépendantes des valeurs particulières choisies pour $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$; les intégrales en question vérifient donc aussi le système, extrait du précédent, dont les diverses équations ont respectivement les mêmes premiers membres que celles du proposé. En appelant $\Upsilon$, $\Phi$, ... les déterminations initiales de ces intégrales relativement au nouveau système ainsi obtenu, on verra sans peine : 1° que la fonction $\Lambda$ est majorante pour toutes les fonctions $\omega$, ...; 2° que la valeur initiale d'une dérivée quelconque de $\Upsilon$, $\Phi$, ... surpasse le module de la valeur initiale de la dérivée semblable de $\upsilon$, $\varphi$, .... Après quoi, la comparaison des formules ultimes correspondantes dans le système proposé et dans celui qu'on vient de former prouvera immédiatement l'existence des intégrales fictives.

32. Au sujet des propositions qui font l'objet du numéro précédent et de l'alinéa III du n° 29, on pourrait faire des remarques analogues à celles du n° 32*. Nous les supprimons à cause de la longueur de leurs énoncés, mais le lecteur y suppléerait facilement au besoin.

33. Les propositions successivement démontrées aux n^os^ 29, 30 et 31 peuvent se résumer dans l'énoncé suivant :

*Tout système différentiel jouissant de la triple propriété d'être immédiat, régulier ou semi-régulier, et linéaire, possède un groupe d'intégrales fictives répondant à des conditions initiales données, et construites à l'aide d'un groupe simple donné de relations primitives, intermédiaires ou ultimes.*

D'après cela, *un semblable système possède un groupe unique d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales choisies de manière à assurer la concordance numérique des relations primitivo-ultimes*. Car, ainsi que nous l'avons vu au n° 20, tout se réduit alors à démontrer la convergence des développements des intégrales hypothétiques, qui se trouve assurée par la proposition précédente.

34. *Tout système immédiat, régulier et non linéaire, possède un groupe unique d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales choisies de manière à assurer la concordance numérique des relations primitivo-ultimes.*

Sauf aux alinéas III et VI, nous supposerons simplement que le système différentiel considéré est *immédiat* et *non linéaire*, sans nous inquiéter de savoir s'il est régulier ou non.

I. D'un système immédiat et non linéaire quelconque, nous déduirons d'abord un système linéaire par le procédé suivant :

1° $g$ désignant toujours le nombre des fonctions inconnues et $h$ celui des variables indépendantes, adjoignons aux fonctions inconnues du système donné de nouvelles fonctions inconnues en nombre égal à celui des diverses dérivées paramétriques ; écrivons dans les cases vides du Tableau de nouvelles équations différentielles exprimant l'égalité entre les nouvelles fonctions inconnues et les dérivées paramétriques des anciennes ; remplaçons enfin dans toutes les équations proposées les diverses dérivées paramétriques par les nouvelles fonctions inconnues qui leur correspondent : nous obtiendrons ainsi un groupe (E) composé de $gh$ équations.

Par exemple, si le Tableau du système immédiat proposé contient la colonne

(22)

| | $(u)$ |
|---|---|
| $(x)$ | |
| $(y)$ | |
| $(z)$ | $\frac{du}{dz} = \ldots$ |
| $(s)$ | $\frac{du}{ds} = \ldots$ |
| $(t)$ | |

,

les équations qu'il faudra écrire dans les cases vides de la colonne en question seront

$$(23) \qquad \frac{du}{dx} = u'_x, \qquad \frac{du}{dy} = u'_y, \qquad \frac{du}{dt} = u'_t,$$

où $u'_x$, $u'_y$, $u'_t$ désignent de nouvelles fonctions inconnues.

2° Dans le système (E) évidemment immédiat (puisque les seconds membres ne contiennent plus aucune dérivée), toutes les variables sont devenues principales par rapport à chacune des anciennes fonctions inconnues, et l'on peut, pour chacune de ces dernières, diviser en trois groupes les dérivées complexes du second ordre : les unes sont prises par rapport à deux anciennes variables principales de la fonction considérée, les autres par rapport à une ancienne et une nouvelle, les autres enfin par rapport à deux nouvelles, et à chacune de ces dérivées correspond, comme on sait, une condition de passivité (22). Parmi ces diverses conditions, nous prendrons seulement celles qui correspondent aux dérivées de la seconde et de la troisième espèce, et nous les considérerons comme de nouvelles équations différentielles que nous adjoindrons aux précédentes. En prenant le même exemple que ci-dessus (1°), et désignant par $\left[\dfrac{d^2 u}{dx\,dy}\right], \cdots$ les conditions de passivité qui correspondent respectivement aux dérivées complexes $\dfrac{d^2 u}{dx\,dy}, \ldots$, la fonction $u$ nous fournira ainsi deux groupes de nouvelles équations différentielles. L'un d'eux contiendra les équations

$$(24)\quad \left[\frac{d^2 u}{dx\,dz}\right],\quad \left[\frac{d^2 u}{dx\,ds}\right],\quad \left[\frac{d^2 u}{dy\,dz}\right],\quad \left[\frac{d^2 u}{dy\,ds}\right],\quad \left[\frac{d^2 u}{dt\,dz}\right],\quad \left[\frac{d^2 u}{dt\,ds}\right],$$

ayant respectivement pour premiers membres

$$\frac{du'_x}{dz},\quad \frac{du'_x}{ds},\quad \frac{du'_y}{dz},\quad \frac{du'_y}{ds},\quad \frac{du'_t}{dz},\quad \frac{du'_t}{ds};$$

et l'autre contiendra les équations

$$\left[\frac{d^2 u}{dy\,dt}\right],\quad \left[\frac{d^2 u}{dx\,dt}\right],\quad \left[\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right],$$

qui devront être écrites de la manière suivante : considérant les équations ajoutées à la colonne $(u)$ dans l'ordre relatif (23) où elles se trouvent quand on parcourt cette colonne de haut en bas, on formera les conditions de passivité dont il s'agit en comparant d'abord la dernière de ces trois équations aux deux précédentes, puis l'avant-dernière à la précédente, et en ayant soin de choisir pour premiers membres les dérivées de $u'_t$ dans le premier cas, celles de $u_y$ dans le second; on obtiendra ainsi

$$(25) \qquad \frac{du'_t}{dx} = \frac{du'_x}{dt}, \qquad \frac{du'_t}{dy} = \frac{du'_y}{dt}, \qquad \frac{du'_y}{dx} = \frac{du_x}{dy}.$$

3° Cette suite d'opérations, répétée en considérant successivement toutes les anciennes fonctions inconnues, fournira deux groupes (F), (K) de nouvelles équations différentielles, composés, le premier d'équations analogues à (24), et le second d'équations analogues à (25). En désignant par (G) ce que deviennent les équations (F) lorsqu'on en élimine, au moyen des équations (K), les dérivées figurant dans les premiers membres de celles-ci, on obtient en définitive un système différentiel composé des trois groupes

$$(26) \qquad (E), \quad (G), \quad (K).$$

II. *Étant donné un système immédiat non linéaire, le système (26) qu'on en déduit à l'aide du procédé ci-dessus indiqué (I) est immédiat et linéaire.*

Si le système dont il s'agit est immédiat, il est évidemment linéaire (27).

Pour démontrer qu'il est immédiat, écrivons ses diverses équations dans les cases d'un quadrillage rectangulaire d'après les dérivées qui figurent respectivement dans leurs premiers membres. Il est bien facile de voir comment les cases pleines et vides se trouvent alors disposées dans les colonnes qui correspondent aux nouvelles fonctions inconnues : si le Tableau du système proposé contient par exemple la colonne (22), nous aurons comme cases vides dans la colonne $(u'_t)$ celle qui correspond à la ligne $(t)$, dans la colonne $(u'_y)$ celles qui correspondent aux lignes $(y)$ et $(t)$, dans la colonne $(u'_x)$ celles qui correspondent aux lignes $(x)$, $(y)$ et $(t)$. Et en rangeant ces trois colonnes dans l'ordre suivant :

(27)

| | $(u'_t)$ | $(u'_y)$ | $(u'_x)$ |
|---|---|---|---|
| $(x)$ | $\dfrac{du'_t}{dx} = \dfrac{du'_x}{dt}$ | $\dfrac{du'_y}{dx} = \dfrac{du'_x}{dy}$ | |
| $(y)$ | $\dfrac{du'_t}{dy} = \dfrac{du'_y}{dt}$ | | |
| $(z)$ | $\dfrac{du'_t}{dz} = \ldots$ | $\dfrac{du'_y}{dz} = \ldots$ | $\dfrac{du'_x}{dz} = \ldots$ |
| $(s)$ | $\dfrac{du'_t}{ds} = \ldots$ | $\dfrac{du'_y}{ds} = \ldots$ | $\dfrac{du'_x}{ds} = \ldots$ |
| $(t)$ | | | |

,

il est clair que, dans une ligne horizontale quelconque du Tableau partiel ainsi obtenu, toute case située à droite d'une case vide est également vide. Supposons maintenant que, dans le système immédiat proposé, toutes les variables paramétriques de la fonction $u$ le soient aussi pour une autre fonction $v$, et que le Tableau de ce système contienne par exemple les deux colonnes

(28)

| | $(u)$ | $(v)$ |
|---|---|---|
| $(x)$ | | |
| $(y)$ | | |
| $(z)$ | $\dfrac{du}{dz} = \ldots$ | $\dfrac{dv}{dz} = \ldots$ |
| $(s)$ | $\dfrac{du}{ds} = \ldots$ | |
| $(t)$ | | |

.

Alors les trois Tableaux partiels

| | $(u'_t)$ | $(v'_t)$ | $(v'_s)$ | $(v'_y)$ | $(v'_x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(x)$ | $\dfrac{du'_t}{dx} = \dfrac{du'_x}{dt}$ | $\dfrac{dv'_t}{dx} = \dfrac{dv'_x}{dt}$ | $\dfrac{dv'_s}{dx} = \dfrac{dv'_x}{ds}$ | $\dfrac{dv'_y}{dx} = \dfrac{dv'_x}{dy}$ | |
| $(y)$ | $\dfrac{du'_t}{dy} = \dfrac{du'_y}{dt}$ | $\dfrac{dv'_t}{dy} = \dfrac{dv'_y}{dt}$ | $\dfrac{dv'_s}{dy} = \dfrac{dv'_y}{ds}$ | | |
| $(z)$ | $\dfrac{du'_t}{dz} = \ldots$ | $\dfrac{dv'_t}{dz} = \ldots$ | $\dfrac{dv'_s}{dz} = \ldots$ | $\dfrac{dv'_y}{dz} = \ldots$ | $\dfrac{dv'_x}{dz} = \ldots$ |
| $(s)$ | $\dfrac{du'_t}{ds} = \ldots$ | $\dfrac{dv'_t}{ds} = \dfrac{dv'_s}{dt}$ | | | |
| $(t)$ | | | | | |

| | $(u'_y)$ | $(v'_y)$ | $(v'_x)$ |
|---|---|---|---|
| $(x)$ | $\dfrac{du'_y}{dx} = \dfrac{du'_x}{dy}$ | $\dfrac{dv'_y}{dx} = \dfrac{dv'_x}{dy}$ | |
| $(y)$ | | | |
| $(z)$ | $\dfrac{du'_y}{dz} = \ldots$ | $\dfrac{dv'_y}{dz} = \ldots$ | $\dfrac{dv'_x}{dz} = \ldots$ |
| $(s)$ | $\dfrac{du'_y}{ds} = \ldots$ | | |
| $(t)$ | | | |

| | $(u'_x)$ | $(v'_x)$ |
|---|---|---|
| $(x)$ | | |
| $(y)$ | | |
| $(z)$ | $\dfrac{du'_x}{dz} = \ldots$ | $\dfrac{dv'_x}{dz} = \ldots$ |
| $(s)$ | $\dfrac{du'_x}{ds} = \ldots$ | |
| $(t)$ | | |

dont les colonnes se trouvent associées et rangées suivant une loi facile à apercevoir, jouissent de la même propriété que le Tableau (27).

Cela posé, je dis que le système auxiliaire (26) est immédiat.

Si l'on considère, en effet, le Tableau total, dans les cases duquel nous avons supposé écrites les diverses équations de ce système, les colonnes qui correspondent aux anciennes fonctions inconnues sont entièrement pleines et ne contiennent dans leurs seconds membres aucune dérivée, quelle qu'elle soit; les colonnes qui correspondent aux nouvelles ne contiennent dans leurs seconds membres aucune dérivée des anciennes. Examinons alors quelles dérivées des nouvelles fonctions inconnues figurent dans ces derniers seconds membres.

Soient $u$ une fonction inconnue quelconque du système proposé, et (22) la colonne correspondante : puisque le système proposé est immédiat, les seconds membres des équations de cette colonne pourront contenir les dérivées $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dt}$, et nulle autre dérivée de $u$. Dès lors. les équations des groupes

$$(30)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \left[\frac{d^2 u}{dt\,dz}\right], & \left[\frac{d^2 u}{dt\,ds}\right]; \\ \left[\frac{d^2 u}{dy\,dz}\right], & \left[\frac{d^2 u}{dy\,ds}\right]; \\ \left[\frac{d^2 u}{dx\,dz}\right], & \left[\frac{d^2 u}{dx\,ds}\right] \end{array}\right.$$

pourront contenir dans leurs seconds membres les dérivées des groupes respectifs

$$\begin{array}{lll} \frac{du'_x}{dt}, & \frac{du'_y}{dt}, & \frac{du'_t}{dt}; \\ \frac{du'_x}{dy}, & \frac{du'_y}{dy}, & \frac{du'_t}{dy}; \\ \frac{du'_x}{dx}, & \frac{du'_y}{dx}, & \frac{du'_t}{dx}, \end{array}$$

et nulle autre dérivée des fonctions

$$(31)\qquad u'_x,\quad u'_y,\quad u'_t.$$

Finalement, si, dans les équations (30), on tient compte des équations (25) et qu'on leur adjoigne ces dernières, les colonnes $(u'_t)$, $(u'_y)$, $(u'_x)$ ne pourront contenir dans leurs seconds membres, comme dérivées des fonctions (31), que celles des groupes respectifs

$$\begin{array}{lll} \frac{du'_x}{dt}, & \frac{du'_y}{dt}, & \frac{du'_t}{dt}; \\ \frac{du'_x}{dy}, & \frac{du'_y}{dy}, & \frac{du'_y}{dt}; \\ \frac{du'_x}{dx}, & \frac{du'_x}{dy}, & \frac{du'_x}{dt}. \end{array}$$

En jetant alors les yeux sur le Tableau partiel (27), on se convaincra que les conditions requises pour le caractère immédiat du système auxiliaire se trouvent de ce côté satisfaites.

Soient maintenant $u$ et $v$ deux fonctions inconnues quelconques du système proposé. Si quelque variable principale de $v$ y est paramétrique pour $u$, les seconds membres des équations de la colonne ($u$) dans le Tableau correspondant ne contiendront aucune dérivée de $v$; par suite, dans le Tableau du système auxiliaire, les seconds membres des équations des diverses colonnes ($u'$) ne contiendront aucune dérivée des diverses fonctions $v'$. Supposons, au contraire, que toutes les variables paramétriques de $u$ le soient pour $v$ dans le système proposé, et que les deux colonnes correspondantes soient, par exemple, celles du Tableau partiel (28). Les seconds membres de la colonne ($u$) pouvant contenir les dérivées $\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{ds}, \frac{dv}{dt}$, et nulle autre dérivée de $v$, les équations des groupes (30) pourront contenir dans leurs seconds membres les dérivées des groupes respectifs

$$\begin{array}{llll} \frac{dv'_x}{dt}, & \frac{dv'_y}{dt}, & \frac{dv'_s}{dt}, & \frac{dv'_t}{dt}; \\ \frac{dv'_x}{dy}, & \frac{dv'_y}{dy}, & \frac{dv'_s}{dy}, & \frac{dv'_t}{dy}; \\ \frac{dv'_x}{dx}, & \frac{dv'_y}{dx}, & \frac{dv'_s}{dx}, & \frac{dv'_t}{dx}, \end{array}$$

et nulle autre dérivée des fonctions

(32) $$v'_x, \quad v'_y, \quad v'_s, \quad v'_t.$$

Finalement, si, dans les équations (30), on tient compte des équations

$$\begin{array}{lll} \frac{dv'_t}{ds} = \frac{dv'_s}{dt}, & \frac{dv'_t}{dy} = \frac{dv'_y}{dt}, & \frac{dv'_t}{dx} = \frac{dv'_x}{dt}, \\ \frac{dv'_s}{dy} = \frac{dv'_y}{ds}, & \frac{dv'_s}{dx} = \frac{dv'_x}{ds}, & \frac{dv'_y}{dx} = \frac{dv'_x}{dy}, \end{array}$$

et qu'on leur adjoigne ces dernières, les colonnes ($u'_t$), ($u'_y$), ($u'_x$) ne pourront contenir dans leurs seconds membres, comme dérivées des fonctions (32), que celles des groupes respectifs

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{dv'_x}{dt}, & \dfrac{dv'_y}{dt}, & \dfrac{dv'_s}{dt}, & \dfrac{dv'_t}{dt}: \\[2ex]
\dfrac{dv'_x}{dy}, & \dfrac{dv'_y}{dy}, & \dfrac{dv'_y}{ds}, & \dfrac{dv'_y}{dt}; \\[2ex]
\dfrac{dv'_x}{dx}, & \dfrac{dv'_x}{dy}, & \dfrac{dv'_x}{ds}, & \dfrac{dv'_x}{dt}.
\end{array}$$

En jetant alors les yeux sur les trois Tableaux partiels (29), on se convaincra que les conditions requises pour le caractère immédiat du système auxiliaire se trouvent encore satisfaites de ce côté, ce qui achève la démonstration du point visé par le présent alinéa.

III. *Le système auxiliaire* (26) *est régulier en même temps que le proposé.*

Si, pour fixer les idées, on considère le système régulier (non linéaire)

| | $(u)$ | $(v)$ | $(w)$ | $(p)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(x)$ | $\dfrac{du}{dx} = \ldots$ | $\dfrac{dv}{dx} = \ldots$ | $\dfrac{dw}{dx} = \ldots$ | |
| $(y)$ | $\dfrac{du}{dy} = \ldots$ | $\dfrac{dv}{dy} = \ldots$ | $\dfrac{dw}{dy} = \ldots$ | |
| $(z)$ | $\dfrac{du}{dz} = \ldots$ | | | |
| $(s)$ | | | | |

,

il suffira, pour se convaincre que le système auxiliaire est également régulier, de ranger les colonnes de son Tableau dans l'ordre suivant :

$$(u),\quad (v),\quad (w),\quad (p);\qquad (u'_s),\quad (v'_s),\quad (w'_s),\quad (p'_s);$$
$$(v'_z),\quad (w'_z),\quad (p'_z);\qquad (p'_y);\qquad (p'_x).$$

Les lignes étant rangées, comme ci-dessus, dans l'ordre $(x)$, $(y)$,

$(z)$, $(s)$, chaque colonne parcourue de haut en bas se composera alors d'une file de cases pleines suivie d'une file de cases vides, et dans les divers groupes de colonnes indiqués ci-dessus les nombres de cases pleines seront respectivement

$$4;\quad 3;\quad 2;\quad 1;\quad 0.$$

Si l'on considère au contraire le système irrégulier

| | $(u)$ | $(v)$ |
|---|---|---|
| $(x)$ | $\dfrac{du}{dx} = \ldots$ | |
| $(y)$ | | $\dfrac{dv}{dy} = \ldots$ |
| $(z)$ | | |

les colonnes $(u'_y)$, $(v'_x)$ offriront dans le Tableau du système auxiliaire les mêmes dispositions respectives de cases pleines et vides que les colonnes $(u)$, $(v)$ du Tableau ci-dessus; le système auxiliaire sera donc, comme le proposé, nécessairement irrégulier.

IV. Considérons, pour fixer les idées, le système immédiat (non linéaire)

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \mathrm{U}_x\left(x, y, z, u, v, \frac{du}{dz}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz}\right),\\ \frac{du}{dy} &= \mathrm{U}_y\left(x, y, z, u, v, \frac{du}{dz}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz}\right),\\ \frac{dv}{dx} &= \mathrm{V}_x\left(x, y, z, u, v, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz}\right), \end{aligned}\right.$$

dont les équations doivent être disposées comme ci-après :

$$(34)\qquad \begin{array}{c|c|c|} & (u) & (v) \\ \hline (x) & \dfrac{du}{dx} = \ldots & \dfrac{dv}{dx} = \ldots \\ \hline (y) & \dfrac{du}{dy} = \ldots & \\ \hline (z) & & \\ \hline \end{array}\ .$$

Le système auxiliaire défini à l'alinéa I est alors

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \mathrm{U}_x(x, y, z, u, v, u'_z, v'_y, v'_z), \\ \dfrac{du}{dy} = \mathrm{U}_y(x, y, z, u, v, u'_z, v'_y, v'_z), \\ \dfrac{dv}{dx} = \mathrm{V}_x(x, y, z, u, v, v'_y, v'_z); \end{cases}$$

$$(36)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dz} = u'_z, \\ \dfrac{dv}{dy} = v'_y, \\ \dfrac{dv}{dz} = v'_z; \end{cases}$$

$$(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{du'_z}{dx} = \dfrac{d\mathrm{U}_x}{dz} + \dfrac{d\mathrm{U}_x}{du}u'_z + \dfrac{d\mathrm{U}_x}{dv}v'_z + \dfrac{d\mathrm{U}_x}{du'_z}\dfrac{du'_z}{dz} + \dfrac{d\mathrm{U}_x}{dv'_y}\dfrac{dv'_y}{dz} + \dfrac{d\mathrm{U}_x}{dv'_z}\dfrac{dv'_z}{dz}, \\ \dfrac{du'_z}{dy} = \dfrac{d\mathrm{U}_y}{dz} + \dfrac{d\mathrm{U}_y}{du}u'_z + \dfrac{d\mathrm{U}_y}{dv}v'_z + \dfrac{d\mathrm{U}_y}{du'_z}\dfrac{du'_z}{dz} + \dfrac{d\mathrm{U}_y}{dv'_y}\dfrac{dv'_y}{dz} + \dfrac{d\mathrm{U}_y}{dv'_z}\dfrac{dv'_z}{dz}, \\ \dfrac{dv'_y}{dx} = \dfrac{d\mathrm{V}_x}{dy} + \dfrac{d\mathrm{V}_x}{du}\mathrm{U}_y + \dfrac{d\mathrm{V}_x}{dv}v'_y + \dfrac{d\mathrm{V}_x}{dv'_y}\dfrac{dv'_y}{dy} + \dfrac{d\mathrm{V}_x}{dv'_z}\dfrac{dv'_y}{dz}, \\ \dfrac{dv'_z}{dx} = \dfrac{d\mathrm{V}_x}{dz} + \dfrac{d\mathrm{V}_x}{du}u'_z + \dfrac{d\mathrm{V}_x}{dv}v'_z + \dfrac{d\mathrm{V}_x}{dv'_y}\dfrac{dv'_y}{dz} + \dfrac{d\mathrm{V}_x}{dv'_z}\dfrac{dv'_z}{dz}; \end{cases}$$

$$(38)\qquad \frac{dv'_z}{dy} = \frac{dv'_y}{dz},$$

et ses équations doivent être disposées de la manière suivante :

(39)

| | $(u)$ | $(v)$ | $(u'_z)$ | $(v'_z)$ | $(v'_y)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(x)$ | $\dfrac{du}{dx}=\ldots$ | $\dfrac{dv}{dx}=\ldots$ | $\dfrac{du'_z}{dx}=\ldots$ | $\dfrac{dv'_z}{dx}=\ldots$ | $\dfrac{dv'_y}{dx}=\ldots$ |
| $(y)$ | $\dfrac{du}{dy}=\ldots$ | $\dfrac{dv}{dy}=v'_y$ | $\dfrac{du'_z}{dy}=\ldots$ | $\dfrac{dv'_z}{dy}=\dfrac{dv'_y}{dz}$ | |
| $(z)$ | $\dfrac{du}{dz}=u'_z$ | $\dfrac{dv}{dz}=v'_z$ | | | |

Cela posé, *si le système immédiat* (34) *possède un groupe d'intégrales ordinaires*

$$u=\mathrm{U}(x, y, z), \qquad v=\mathrm{V}(x, y, z)$$

*satisfaisant aux conditions initiales*

$$(40)\qquad \begin{cases} u=\upsilon(z) & \text{pour} \quad x=x_0,\ y=y_0, \\ v=\varphi(y, z) & \text{pour} \quad x=x_0, \end{cases}$$

*le système auxiliaire* (39) *possède le groupe d'intégrales ordinaires*

$$(41)\qquad u=\mathrm{U}(x, y, x), \qquad v=\mathrm{V}(x, y, z), \qquad u'_z=\frac{d\mathrm{U}}{dz}, \qquad v'_y=\frac{d\mathrm{V}}{dy}, \qquad v'_z=\frac{d\mathrm{V}}{dz},$$

*satisfaisant aux conditions initiales*

$$(42)\qquad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} u\ =\upsilon(z_0) \\ v\ =\varphi(y_0, z_0) \end{array}\right\} & \text{pour} \quad x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0; \\ \left.\begin{array}{l} u'_z=\upsilon'(z) \\ v'_z=\varphi'_z(y_0, z) \end{array}\right\} & \text{pour} \quad x=x_0,\ y=y_0; \\ v'_y=\varphi'_y(y, z) & \text{pour} \quad x=x_0. \end{cases}$$

Il est d'abord évident que les fonctions (41) sont des intégrales ordinaires du système (39). D'autre part, en considérant les fonctions U, V pour des valeurs de $x$, $y$, $z$ suffisamment voisines de $x_0$, $y_0$, $z_0$, groupant d'une manière convenable les termes de leurs développements, et tenant compte des conditions initiales (40), on a les identités

$$U = \upsilon(z) + (x - x_0)A + (y - y_0)B,$$
$$V = \varphi(y, z) + (x - x_0)C,$$

où A, B, C désignent certaines fonctions de $x, y, z$ olotropes en $x_0$, $y_0$, $z_0$. On en déduit par la différentiation les identités

$$\frac{dU}{dz} = \frac{d\upsilon}{dz} + (x - x_0)\frac{dA}{dz} + (y - y_0)\frac{dB}{dz},$$
$$\frac{dV}{dy} = \frac{d\varphi}{dy} + (x - x_0)\frac{dC}{dy},$$
$$\frac{dV}{dz} = \frac{d\varphi}{dz} + (x - x_0)\frac{dC}{dz},$$

qui, jointes aux précédentes, donnent bien pour les intégrales (41) les conditions initiales (42)

*Réciproquement, si le système* (39) *possède un groupe d'intégrales ordinaires satisfaisant aux conditions initiales* (42), *les valeurs de $u$, $v$ qui y figurent forment un groupe d'intégrales ordinaires du système* (34) *satisfaisant aux conditions initiales* (40).

En effet, il résulte immédiatement de la nature même du système (39) que tout groupe d'intégrales ordinaires y est de la forme (41), et que les valeurs de $u$, $v$ figurant dans le groupe sont des intégrales ordinaires du système (34).

Maintenant, les trois dernières des conditions initiales (42) fournissent les identités

$$(43)\qquad \begin{cases} \dfrac{dU}{dz} = \dfrac{d\upsilon}{dz} + (x - x_0)A + (y - y_0)B, \\[2ex] \dfrac{dV}{dy} = \dfrac{d\varphi}{dy} + (x - x_0)C, \\[2ex] \dfrac{dV}{dz} = \left[\dfrac{d\varphi}{dz}\right]_{y=y_0} + (x - x_0)D + (y - y_0)H, \end{cases}$$

où A, B, C, D, H désignent certaines fonctions de $x, y, z$ olotropes en $x_0$, $y_0$, $z_0$. On peut poser, d'autre part,

$$(44)\qquad \begin{cases} U = \upsilon_1(z) + (x - x_0)P + (y - y_0)Q, \\ V = \varphi_1(y, z) + (x - x_0)R, \end{cases}$$

où $\upsilon_1$, $\varphi_1$, P, Q, R désignent de nouvelles fonctions olotropes pour les valeurs initiales des variables, et l'on en déduit par la différentiation les identités

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dU}{dz} &= \frac{d\upsilon_1}{dz} + (x - x_0)\frac{dP}{dz} + (y - y_0)\frac{dQ}{dz}, \\ \frac{dV}{dy} &= \frac{d\varphi_1}{dy} + (x - x_0)\frac{dR}{dy}, \\ \frac{dV}{dz} &= \frac{d\varphi_1}{dz} + (x - x_0)\frac{dR}{dz}, \end{aligned}\right.$$

La comparaison des relations (43) et (45) fait voir que leurs seconds membres sont respectivement égaux, quels que soient $x$, $y$, $z$; on en déduit que les relations

$$\frac{d\upsilon_1}{dz} = \frac{d\upsilon}{dz}, \qquad \frac{d\varphi_1}{dy} = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad \left[\frac{d\varphi_1}{dz}\right]_{y=y_0} = \left[\frac{d\varphi}{dz}\right]_{y=y_0}$$

sont vérifiées, la première et la troisième quel que soit $z$, la deuxième quels que soient $y$ et $z$. La première de ces identités montre que la différence

$$(46)\qquad \upsilon_1(z) - \upsilon(z)$$

est indépendante de $z$; la deuxième et la troisième montrent successivement que la différence

$$(47)\qquad \varphi_1(y, z) - \varphi(y, z)$$

est indépendante de $y$, puis de $z$ (8*). Les différences (46), (47) se réduisent donc respectivement à des constantes. Si l'on attribue alors à $x$, $y$, $z$, dans les formules (44), les valeurs particulières $x_0$, $y_0$, $z_0$, et que l'on tienne compte des deux premières conditions initiales (42), on voit immédiatement que les constantes dont il s'agit sont nulles. Les différences (46), (47) sont donc l'une et l'autre identiquement nulles, ce qu'il suffisait de prouver.

V. *Si la concordance numérique des relations primitivo-ultimes (ou primitives) a lieu dans le système immédiat* (34) *relativement aux conditions initiales* (40), *elle a lieu dans le système auxiliaire* (39) *relativement aux conditions initiales* (42), *et réciproquement.*

Pour abréger le langage, quand nous aurons à considérer les nouvelles fonctions inconnues

$$u'_x, \quad v'_y, \quad v'_z,$$

et leurs dérivées principales ou paramétriques de tous ordres

$$\frac{d^n u'_z}{dx^\alpha\, dy^\beta\, dz^\gamma}, \quad \frac{d^n v'_y}{dx^\alpha\, dy^\beta\, dz^\gamma}, \quad \frac{d^n v'_z}{dx^\alpha\, dy^\beta\, dz^\gamma},$$

nous appellerons souvent *dérivées correspondantes de* $u$, $v$ les dérivées

$$\frac{du}{dz}, \quad \frac{dv}{dy}, \quad \frac{dv}{dz};$$

$$\frac{d^{n+1} u}{dx^\alpha\, dy^\beta\, dz^{\gamma+1}}, \quad \frac{d^{n+1} v}{dx^\alpha\, dy^{\beta+1}\, dz^\gamma}, \quad \frac{d^{n+1} v}{dx^\alpha\, dy^\beta\, dz^{\gamma+1}}.$$

(Il faut bien se garder de confondre entre elles les deux locutions *dérivées correspondantes* et *dérivées semblables*.)

($a$) Occupons-nous d'abord de la proposition directe.

Comme dans un système immédiat quelconque le groupe des formules ($\Gamma$) équivaut entièrement à celui des formules primitives (16, 5°), nous sommes ramenés à supposer que les relations du groupe ($\Delta$), obtenu par la réunion des deux précédents, s'accordent dans le système proposé (34) relativement aux conditions initiales (40), et nous prouverons que les formules primitives du système auxiliaire (39), combinées avec les conditions initiales (42), ne peuvent alors fournir :

1° Pour les fonctions $u$, $v$ et leurs diverses dérivées, aucune valeur initiale si ce n'est celles qu'on obtient pour les mêmes quantités à l'aide des formules ($\Delta$) du système (34), combinées avec les conditions initiales (40);

2° Pour les fonctions $u'_z$, $v'_y$, $v'_z$ et leurs diverses dérivées, aucune valeur initiale si ce n'est celles qu'on obtient de la même façon pour les dérivées correspondantes de $u$, $v$.

Tout d'abord, et par la nature même des conditions initiales imposées tant aux intégrales du système (34) qu'à celles du système (39), les fonctions $u$, $v$ ont de part et d'autre la même valeur initiale, et les fonctions $u'_z$, $v'_y$, $v'_z$ ont respectivement pour valeurs initiales dans le système (39) celles que possèdent dans le système (34) les dérivées $\frac{du}{dz}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dv}{dz}$.

En outre, ainsi que nous allons le constater, les dérivées de $u'_z$ relatives à la seule variable $z$, les dérivées de $v'_y$ relatives aux seules variables $y$ et $z$, et les dérivées semblables de $v'_z$ ont respectivement pour valeurs initiales dans le système (39) celles que possèdent dans le système (34) les dérivées (paramétriques) correspondantes de $u$, $v$. Effectivement, les dérivées considérées de $u'_z$, $v'_y$, $v'_z$ peuvent être soit paramétriques, soit principales : pour les premières, il suffit encore de comparer les conditions initiales; pour les dernières, les expressions primitives sont toutes fournies par la relation (38) et par celles qu'on en déduit à l'aide de différentiations convenables, et notre remarque, évidente lorsqu'il s'agit du genre 1, se vérifie de proche en proche, en passant d'un genre au suivant dans un ordre quelconque.

Si l'on considère maintenant les dérivées de $u$ relatives à la seule variable $z$ et les dérivées de $v$ relatives aux seules variables $y$ et $z$, les valeurs initiales que leur assignent les formules primitives dans le système (39) sont précisément les mêmes que ces dérivées possèdent dans le proposé en vertu des conditions initiales (40) : c'est là une conséquence immédiate de la remarque qui précède, si l'on observe que les expressions primitives des dérivées dont il s'agit sont toutes fournies par les relations (36) et celles qu'on en déduit à l'aide de différentiations convenables.

Il nous reste à considérer les dérivées de $u$, $u'_z$ qui contiennent $dx$ ou $dy$ au dénominateur de leur notation, et les dérivées de $v$, $v'_y$, $v'_z$ qui contiennent $dx$ de la même manière. Or la comparaison de la formule (35) aux formules (33), puis des formules (37) aux formules

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dx\,dz} &= \frac{d\mathrm{U}_x}{dz} + \frac{d\mathrm{U}_x}{du}\frac{du}{dz} + \frac{d\mathrm{U}_x}{dv}\frac{dv}{dz} + \frac{d\mathrm{U}_x}{d\left(\dfrac{du}{dz}\right)}\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d\mathrm{U}_x}{d\left(\dfrac{dv}{dy}\right)}\frac{d^2v}{dy\,dz} + \frac{d\mathrm{U}_x}{d\left(\dfrac{dv}{dz}\right)}\frac{d^2v}{dz^2},\\
\frac{d^2u}{dy\,dz} &= \frac{d\mathrm{U}_y}{dz} + \frac{d\mathrm{U}_y}{du}\frac{du}{dz} + \frac{d\mathrm{U}_y}{dv}\frac{dv}{dz} + \frac{d\mathrm{U}_y}{d\left(\dfrac{du}{dz}\right)}\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d\mathrm{U}_y}{d\left(\dfrac{dv}{dy}\right)}\frac{d^2v}{dy\,dz} + \frac{d\mathrm{U}_y}{d\left(\dfrac{dv}{dz}\right)}\frac{d^2v}{dz^2},\\
\frac{d^2v}{dx\,dy} &= \frac{d\mathrm{V}_x}{dy} + \frac{d\mathrm{V}_x}{du}\mathrm{U}_y + \frac{d\mathrm{V}_x}{dv}\frac{dv}{dy} + \frac{d\mathrm{V}_x}{d\left(\dfrac{dv}{dy}\right)}\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d\mathrm{V}_x}{d\left(\dfrac{dv}{dz}\right)}\frac{d^2v}{dy\,dz},\\
\frac{d^2v}{dx\,dz} &= \frac{d\mathrm{V}_x}{dz} + \frac{d\mathrm{V}_x}{du}\frac{du}{dz} + \frac{d\mathrm{V}_x}{dv}\frac{dv}{dz} + \frac{d\mathrm{V}_x}{d\left(\dfrac{dv}{dy}\right)}\frac{d^2v}{dy\,dz} + \frac{d\mathrm{V}_x}{d\left(\dfrac{dv}{dz}\right)}\frac{d^2v}{dz^2},
\end{aligned}\right.$$

qui constituent les relations ultimes de seconde classe du système proposé et figurent à ce titre dans le groupe ($\Delta$), fait voir immédiatement que les deux points ci-dessus énoncés (1°, 2°) se trouvent vérifiés, en ce qui concerne les dérivées restantes, si l'on se borne à considérer pour le premier point les dérivées du premier ordre des anciennes fonctions inconnues, et pour le second point les dérivées du premier ordre des nouvelles. Tout se réduit donc à faire voir que, en les supposant vérifiés jusqu'à l'ordre $k$ inclusivement, il en est encore de même dans l'ordre $k+1$.

Occupons-nous d'abord du premier point. Si l'on considère dans l'ordre $k+1$ les dérivées de $u$ qui contiennent $dx$ ou $dy$ au dénominateur de leur notation et les dérivées de $v$ qui contiennent $dx$ de la même manière, on obtient, relativement au système (39), un premier groupe d'expressions primitives de ces dérivées en exécutant de toutes les manières possibles $k$ différentiations sur l'une quelconque des relations (35). D'ailleurs, les expressions primitives des mêmes dérivées relativement au système proposé s'obtiennent en différentiant parallèlement les relations (33). Comme les formules (35) reproduisent les formules (33) par la simple substitution de $\frac{du}{dz}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz}$ à $u'_z, v'_y, v'_z$, il est clair que, pour passer du premier groupe d'expressions primitives au second, il suffit de remplacer les nouvelles fonctions inconnues et leurs diverses dérivées par les dérivées correspondantes de $u$, $v$. Enfin, les expressions primitives du premier groupe ne contenant aucune dérivée d'ordre supérieur à $k$, il résulte de ce qui est supposé jusqu'à l'ordre $k$ inclusivement que les deux groupes fournissent les mêmes valeurs initiales pour les dérivées considérées.

On obtient, dans le système (39), un second groupe d'expressions primitives des mêmes dérivées en exécutant $k$ différentiations convenablement choisies sur l'une ou l'autre des relations (36). Les seconds membres des formules ainsi obtenues sont des dérivées principales d'ordre $k$ de $u'_z$, $v'_y$, $v'_z$, à chacune desquelles les formules primitives du système (39) assignent, par hypothèse, comme valeur initiale unique celle que les formules ($\Delta$) du système (34) assignent à la dérivée correspondante de $u$ ou $v$. On obtient donc encore, pour les dérivées de $u$, $v$ qui figurent dans les premiers membres, les mêmes valeurs initiales que donnent les relations ($\Delta$) du système proposé, et le premier point se trouve ainsi entièrement démontré en ce qui concerne les dérivées de l'ordre $k+1$.

Achevons de même la démonstration du second point. Pour les dérivées de $u'_z$ qui contiennent $dx$ ou $dy$ au dénominateur de leur notation, et pour les dérivées de $v'_y$, $v'_z$ qui contiennent $dx$ de la même manière, les expressions primitives sont fournies soit par les formules (37) et celles qu'on en déduit à l'aide de différentiations quelconques, soit par la formule (38) et celles qu'on en déduit à l'aide de différentiations convenables. Nous désignerons respectivement par ($\Psi'$) et ($X'$) ces deux groupes de relations, et nous nommerons ($\Psi$) le groupe obtenu en adjoignant aux formules (48) toutes celles qu'on en déduit à l'aide de différentiations quelconques. Le groupe ($\Psi$) est entièrement contenu dans le groupe ($\Delta$) du système proposé, et, pour passer des formules ($\Psi'$) aux formules ($\Psi$), il suffit évidemment de remplacer $u'_z$, $v'_y$, $v'_z$ et leurs dérivées de tous ordres par les dérivées correspondantes de $u$, $v$. En outre, si, parmi les formules ($\Psi'$) et ($X'$), on considère celles dont les premiers membres sont des dérivées d'ordre $k+1$, les dérivées d'ordre égal contenues dans leurs seconds membres appartiennent exclusivement à $u'_z$, $v'_y$, $v'_z$ et sont de genres nécessairement inférieurs à ceux des premiers.

Cela posé, prenons parmi ces dernières formules celles dont les premiers membres sont à la fois de l'ordre $k+1$ et du premier genre : en vertu des remarques que nous venons de faire et de ce qui a été démontré antérieurement ou supposé, il est clair qu'elles donneront pour chacun des premiers membres dont il s'agit la valeur initiale unique que les relations ($\Delta$), combinées avec les conditions initiales (40), assignent dans le système proposé à la dérivée correspondante de $u$ ou $v$. On passera de même du premier genre au second, puis au troisième, et ainsi de suite jusqu'au genre $k+1$ de l'ordre $k+1$, ce qui achèvera la démonstration du second point pour l'ordre en question, et, par suite, celle de la proposition directe énoncée au début de l'alinéa V.

($b$) Pour démontrer la réciproque, nous observerons tout d'abord que, en vertu des formules primitives du système (39), supposées concordantes relativement aux conditions initiales (42), les fonctions $u'_z$,

$v'_y$, $v'_z$ et leurs dérivées de tous ordres ont respectivement, dans le système en question, les mêmes valeurs initiales que les dérivées correspondantes de $u$, $v$; car au nombre des relations primitives figurent les formules (36) et celles qu'on en déduit par des différentiations quelconques.

Cette remarque, combinée avec la nature des conditions initiales respectivement imposées aux intégrales hypothétiques des deux systèmes, fait voir immédiatement que les fonctions $u$, $v$ et celles de leurs dérivées qui sont paramétriques relativement au système (34) admettent chacune la même valeur initiale de part et d'autre.

Finalement, si l'on veut se convaincre qu'il en est de même pour les dérivées principales de $u$, $v$, il suffira de différentier parallèlement les formules (33) et (35), et de raisonner de proche en proche en passant d'une classe à la suivante.

VI. Le système immédiat (34) étant supposé régulier, et la concordance numérique des formules primitivo-ultimes étant supposée y avoir lieu relativement aux conditions initiales (40), le système immédiat et linéaire (39) (II) sera lui-même régulier (III), et la concordance numérique des formules primitivo-ultimes y aura lieu relativement aux conditions initiales (42) (V). Ce système admettra donc un groupe d'intégrales ordinaires et un seul répondant aux conditions initiales (42) (33), et par suite (IV) le système (34) admettra un groupe d'intégrales ordinaires et un seul répondant aux conditions initiales (40).

35. *La proposition du numéro précédent subsiste pour un système immédiat, semi-régulier et non linéaire.*

Les raisonnements sont tout à fait analogues à ceux que nous venons de faire.

I. Considérons un système immédiat ($\sigma$) déduit d'un autre système immédiat ($\Sigma$) par la suppression de certaines équations différentielles, et supposons, pour fixer les idées, que le système ($\sigma$) soit représenté par le Tableau :

(49)

| | $(u)$ | $(v)$ | $(w)$ |
|---|---|---|---|
| $(x)$ | $\boxed{\quad}$ | $\dfrac{dv}{dx} = \ldots$ | $\dfrac{dw}{dx} = \ldots$ |
| $(y)$ | $\boxed{\quad}$ | $\boxed{\quad}$ | $\dfrac{dw}{dy} = \ldots$ |
| $(z)$ | $\dfrac{du}{dz} = \ldots$ | $\dfrac{dv}{dz} = \ldots$ | |
| $(s)$ | | | |

,

où les cases vides entourées d'un double cadre correspondent aux équations supprimées de $(\Sigma)$.

Le système linéaire déduit de $(\sigma)$ suivant le procédé indiqué au numéro précédent (I) se compose, comme on sait, de trois groupes d'équations que nous avons alors respectivement désignés par (E), (G), (K) : de ces trois groupes nous retiendrons seulement les deux premiers (E), (G), et nous nommerons $(\sigma')$ le système différentiel formé par leur ensemble. En écrivant les diverses équations de ce dernier dans les cases d'un quadrillage rectangulaire d'après les dérivées qui figurent respectivement dans leurs premiers membres, et entourant ensuite certaines cases vides d'un double cadre, on obtiendra le Tableau :

(50)

| | $(u)$ | $(v)$ | $(w)$ | $(u'_x)$ | $(u'_y)$ | $(u'_s)$ | $(v'_y)$ | $(v'_s)$ | $(w'_z)$ | $(w'_s)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x)$ | $\dfrac{du}{dx} = u'_x$ | $\dfrac{dv}{dx} = \ldots$ | $\dfrac{dw}{dx} = \ldots$ | $\boxed{\quad}$ | $\boxed{\quad}$ | $\boxed{\quad}$ | $\dfrac{dv'_y}{dx} = \ldots$ | $\dfrac{dv'_s}{dx} = \ldots$ | $\dfrac{dw'_z}{dx} = \ldots$ | $\dfrac{dw'_s}{dx} = \ldots$ |
| $(y)$ | $\dfrac{du}{dy} = u'_y$ | $\dfrac{dv}{dy} = v'_y$ | $\dfrac{dw}{dy} = \ldots$ | $\boxed{\quad}$ | $\boxed{\quad}$ | $\boxed{\quad}$ | $\boxed{\quad}$ | $\boxed{\quad}$ | $\dfrac{dw'_z}{dy} = \ldots$ | $\dfrac{dw'_s}{dy} = \ldots$ |
| $(z)$ | $\dfrac{du}{dz} = \ldots$ | $\dfrac{dv}{dz} = \ldots$ | $\dfrac{dw}{dz} = w'_z$ | $\dfrac{du'_x}{dz} = \ldots$ | $\dfrac{du'_y}{dz} = \ldots$ | $\dfrac{du'_s}{dz} = \ldots$ | $\dfrac{dv'_y}{dz} = \ldots$ | $\dfrac{dv'_s}{dz} = \ldots$ | | |
| $(s)$ | $\dfrac{du}{ds} = u'_s$ | $\dfrac{dv}{ds} = v'_s$ | $\dfrac{dw}{ds} = w'_s$ | | | | | | | |

Dans chacune des colonnes $(u'_x)$, $(u'_y)$, $(u'_s)$ du Tableau (50), les cases pleines, les cases vides entourées d'un simple cadre et les cases vides entourées d'un double cadre présentent la même disposition relative que dans la colonne $(u)$ du Tableau (49); il en est de même pour les colonnes $(v'_y)$, $(v'_s)$ du premier Tableau par rapport à la colonne $(v)$ du second, et ainsi de suite.

II. *Le système $(\sigma')$ est immédiat et linéaire, et il en est de même du système $(\Sigma')$ obtenu en écrivant dans les cases vides doublement encadrées du Tableau (50) des équations différentielles dont les seconds membres aient une forme convenablement choisie (par exemple se réduisent tous à zéro).*

III. *$(\Sigma')$ est régulier ou irrégulier en même temps que $(\Sigma)$, et $(\sigma')$ en même temps que $(\sigma)$; d'où résulte que $(\sigma')$ est semi-régulier toutes les fois que $(\sigma)$ jouit de cette propriété.*

IV. *Si le système $(\sigma)$ possède un groupe d'intégrales ordinaires*

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{U}(x, y, z, s), \\ v &= \mathrm{V}(x, y, z, s), \\ w &= \mathrm{W}(x, y, z, s) \end{aligned}$$

*satisfaisant aux conditions initiales*

$$(51)\qquad \begin{cases} u = \upsilon(x, y, s) & \text{pour } z = z_0; \\ v = \varphi(y, s) & \text{»} \quad x = x_0,\ z = z_0; \\ w = \psi(z, s) & \text{»} \quad x = x_0,\ y = y_0, \end{cases}$$

*le système $(\sigma')$ possède le groupe d'intégrales ordinaires*

$$\begin{gathered} u = \mathrm{U}, \qquad v = \mathrm{V}, \qquad w = \mathrm{W}, \\ u'_x = \frac{d\mathrm{U}}{dx}, \qquad u'_y = \frac{d\mathrm{U}}{dy}, \qquad u'_s = \frac{d\mathrm{U}}{ds}, \\ v'_y = \frac{d\mathrm{V}}{dy}, \qquad v'_s = \frac{d\mathrm{V}}{ds}, \\ w'_z = \frac{d\mathrm{W}}{dz}, \qquad w'_s = \frac{d\mathrm{W}}{ds}, \end{gathered}$$

*satisfaisant aux conditions initiales*

$$
(52)\quad
\left\{
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
u = \upsilon(x_0, y_0, s_0) \\
v = \varphi(y_0, s_0) \\
w = \psi(z_0, s_0)
\end{array}\right\} \text{pour } x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0,\ s = s_0; \\
\left.\begin{array}{l}
u'_x = \dfrac{d\upsilon}{dx} \\
u'_y = \dfrac{d\upsilon}{dy} \\
u'_s = \dfrac{d\upsilon}{ds}
\end{array}\right\} \text{pour } z = z_0; \\
\left.\begin{array}{l}
v'_y = \dfrac{d\varphi}{dy} \\
v'_s = \dfrac{d\varphi}{ds}
\end{array}\right\} \text{pour } x = x_0,\ z = z_0; \\
\left.\begin{array}{l}
w'_z = \dfrac{d\psi}{dz} \\
w'_s = \dfrac{d\psi}{ds}
\end{array}\right\} \text{pour } x = x_0,\ y = y_0.
\end{array}
\right.
$$

*Réciproquement, si le système* ($\sigma'$) *possède un groupe d'intégrales ordinaires satisfaisant aux conditions initiales* (52), *les valeurs de u, v, w qui y figurent forment un groupe d'intégrales ordinaires du système* ($\sigma$) *satisfaisant aux conditions initiales* (51).

V. *Si la concordance numérique des relations primitivo-ultimes* (*ou primitives*) *a lieu dans le système* ($\sigma$) *relativement aux conditions initiales* (51), *elle a lieu dans le système* ($\sigma'$) *relativement aux conditions initiales* (52).

VI. En rapprochant du n° 33 les alinéas précédents, on obtient immédiatement la proposition à démontrer.

36. En résumé donc, *tout système différentiel jouissant de la double propriété d'être : 1° immédiat; 2° régulier ou semi-régulier, possède un groupe unique d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales choisies de manière à assurer la concordance numérique des relations primitivo-ultimes.*

Il en résulte qu'*un semblable système, lorsqu'il est passif, possède un groupe unique d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales arbitrairement choisies.*

37. *L'intégration de tout système immédiat non linéaire peut se ramener à celle d'un système immédiat, mais linéaire; si l'un de ces systèmes est passif, l'autre l'est également, et si l'un d'eux est intégrable sous des conditions initiales arbitraires, le second jouit de la même propriété.*

Le système linéaire auquel nous faisons ici allusion est précisément celui dont le mode de formation a été indiqué au n° 34 (I), et il est tout d'abord évident que la recherche des intégrales ordinaires du système proposé se ramène à celle des intégrales ordinaires du système ainsi obtenu. Il reste à démontrer que ceux-ci jouissent bien l'un par rapport à l'autre de la double propriété énoncée. Pour fixer les idées, nous raisonnerons sur les systèmes (34), (39).

I. *Si l'on désigne par* $\lambda(z)$, $\mu(z)$ *deux fonctions olotropes en* $z=z_0$, *et par* $\nu(y,z)$ *une fonction olotrope en* $y=y_0$, $z=z_0$, *il existe deux fonctions* $\upsilon(z)$, $\varphi(y,z)$, *olotropes pour ces valeurs particulières, et satisfaisant respectivement aux deux systèmes de conditions*

$$(53)\qquad \frac{d\upsilon}{dz}=\lambda(z),\qquad \upsilon(z_0)=u_0;$$

$$(54)\qquad \frac{d\varphi}{dy}=\nu(y,z),\qquad \left[\frac{d\varphi}{dz}\right]_{y=y_0}=\mu(z),\qquad \varphi(y_0,z_0)=v_0,$$

*où* $u_0$, $v_0$ *désignent deux constantes quelconques.*

Effectivement, chacune des trois équations différentielles

$$\frac{d\upsilon(z)}{dz}=\lambda(z),\qquad \frac{d\chi(z)}{dz}=\mu(z),\qquad \frac{d\varphi(y,z)}{dy}=\nu(y,z)$$

(où les fonctions $\upsilon$, $\chi$, $\varphi$ sont pour le moment inconnues) constitue à elle seule un système immédiat, régulier et passif. La première admet donc une intégrale $\upsilon(z)$, olotrope en $z_0$ et s'y réduisant à $u_0$; la seconde une intégrale $\chi(z)$ olotrope en $z_0$ et s'y réduisant à $v_0$; la troisième une intégrale $\varphi(y, z)$, olotrope en $y_0$, $z_0$ et se réduisant à $\chi(z)$ pour $y = y_0$. Des deux fonctions $\upsilon(z)$, $\varphi(y, z)$ ainsi déterminées, la première satisfait évidemment aux conditions (53), et il est facile de voir que la deuxième satisfait aux conditions (54). En effet, pour des valeurs de $y$, $z$ suffisamment voisines de $y_0$, $z_0$, on a l'identité

$$\varphi(y, z) = \chi(z) + (y - y_0)\mathrm{A},$$

où A désigne une fonction de $y$, $z$ olotrope en $y_0$, $z_0$. Il en résulte d'abord

$$\varphi(y_0, z_0) = \chi(z_0) = v_0,$$

puis

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\chi}{dz} + (y - y_0)\frac{d\mathrm{A}}{dz} = \mu(z) + (y - y_0)\frac{d\mathrm{A}}{dz},$$

et enfin

$$\left[\frac{d\varphi}{dz}\right]_{y=y_0} = \mu(z).$$

II. *Si le système proposé* (34) *est passif, ou bien s'il est intégrable sous des conditions initiales arbitraires, le système linéaire* (39) *jouit de la propriété correspondante.*

Effectivement, soient

$$(55)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} u = u_0 \\ v = v_0 \end{array}\right\} \text{pour } x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0; \\ \left.\begin{array}{l} u'_z = \lambda(z) \\ v'_z = \mu(z) \end{array}\right\} \text{pour } x = x_0,\ y = y_0; \\ v'_y = \nu(y, z) \text{ pour } x = x_0 \end{array}\right.$$

des conditions initiales arbitrairement choisies pour les intégrales ordinaires du système (39), et $\upsilon(z)$, $\varphi(y, z)$ les deux fonctions définies à l'alinéa précédent.

Si l'on suppose en premier lieu que le système proposé (34) soit passif, la concordance numérique des relations primitivo-ultimes y a lieu par rapport aux conditions initiales (40) : elle a donc lieu (34, V) dans le système (39) par rapport aux conditions initiales (42), qui peuvent s'écrire sous la forme (55). Il en résulte que les deux expressions ultimes de chaque dérivée complexe du second ordre s'accordent numériquement dans le système (39), quelles que soient les conditions initiales imposées à ses intégrales, ce qui suffit, comme nous l'avons vu (22), pour que le système dont il s'agit soit passif.

Si l'on suppose, en second lieu, que le système (34) soit intégrable sous des conditions initiales arbitraires, il l'est en particulier sous les conditions initiales (40); le système (39) est donc intégrable (34, IV) sous les conditions initiales (42) ou (55), c'est-à-dire sous des conditions initiales arbitraires.

III. *Réciproquement*

Soient $\upsilon(z)$, $\varphi(y, z)$ des déterminations initiales arbitrairement choisies pour les intégrales ordinaires du système (34).

Si l'on suppose passif le système (39), la concordance numérique des formules primitivo-ultimes y aura lieu relativement aux conditions initiales (42), et par suite (34, V) elle aura lieu dans le système (34) relativement aux conditions initiales (40). Ce dernier système est donc passif, en vertu du même raisonnement que plus haut.

Si l'on suppose enfin que le système (39) soit intégrable sous des conditions initiales arbitraires, il le sera en particulier sous les conditions initiales (42), et, par suite (34, IV), le système (34) sera intégrable sous les conditions initiales (40).

38. La réduction à quelque système linéaire d'un système donné qui ne l'est pas a été tout à l'heure utilisée comme artifice de démonstration (34); mais il convient, selon nous, de lui attribuer une portée infiniment plus grande. On remarquera en effet que l'on ne saurait, d'équations finies données, déduire des équations différentielles quelles qu'elles soient, sans passer par les relations *essentiellement linéaires* que la différentiation fournit tout d'abord. Ce fait autorise à penser que les équations linéaires forment une étape non moins essentielle dans la marche inverse qui conduit d'un système d'équations différentielles données à leurs intégrales.

**Systèmes immédiats qui ne sont ni réguliers ni semi-réguliers.**

39. Soient $[i, l]$ un système partiel, immédiat et linéaire, et $[\mathrm{I}, \mathrm{L}]$ le système de même forme défini à l'alinéa II du n° 29. Si le premier appartient à la catégorie des systèmes différentiels visés par l'énoncé du n° 29 ou par celui du n° 30, on peut, comme nous l'avons vu, disposer des constantes (10) de manière à réaliser à la fois dans le second toutes les conditions énoncées à l'alinéa III, et de là résultent successivement le théorème général du n° 33 et celui du n° 36. Mais, dans le cas contraire, il peut fort bien arriver que la détermination dont il s'agit cesse d'être possible; elle le sera toujours à la vérité si, dans les cercles de rayons $r$ et de centres $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$ que nous avons alors considérés (29, III), les coefficients des diverses dérivées paramétriques conservent des modules suffisamment petits, mais la démonstration générale n'en tombera pas moins en défaut. Cela induit à penser que *dans les systèmes immédiats qui ne sont ni réguliers ni semi-réguliers, l'existence des intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données est incertaine, même en supposant* (*ce qui est de toute nécessité*) *que ces dernières assurent la concordance numérique des relations primitivo-ultimes.*

*Et, par le fait, il existe des systèmes de cette espèce qu'un choix convenable des données initiales, tout en assurant la concordance dont il s'agit, laisse dépourvus des intégrales correspondantes.*

L'exemple très simple que nous allons traiter en fournira la preuve.

40. En appelant $\mathrm{H}_u$, $\mathrm{H}_v$ deux constantes réelles et positives, nous considérerons le système

$$(56)\qquad \left\{\begin{array}{c|c|c} & (u) & (v) \\ \hline (x) & \dfrac{du}{dx} = v + \mathrm{H}_u \dfrac{du}{dy} & \\ \hline (y) & & \dfrac{dv}{dy} = u + \mathrm{H}_v \dfrac{dv}{dx} \end{array}\right.,$$

immédiat, passif et linéaire, mais qui n'est évidemment ni régulier ni semi-régulier. Le système linéaire semblable construit, comme nous l'avons indiqué au n° 29 (II), est ici

| | $(u)$ | $(v)$ |
|---|---|---|
| $(x)$ | $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}\mu\Theta + \varepsilon\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\Theta\dfrac{du}{dy}$ | |
| $(y)$ | | $\dfrac{dv}{dy} = \dfrac{\alpha_2}{\beta_2}\mu\Theta + \varepsilon\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\Theta\dfrac{dv}{dx}$ |

,

où $\Theta$ désigne la fonction

$$\frac{1}{1-[\alpha_1(x-x_0)+\alpha_2(y-y_0)+\beta_1(u-u_0)+\beta_2(v-v_0)]}.$$

La démonstration du n° 29 (III) sera applicable si l'on peut disposer des constantes $\varepsilon$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, de manière à avoir simultanément

$$\varepsilon < 1, \qquad \varepsilon\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \mathrm{H}_u, \qquad \varepsilon\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > \mathrm{H}_v,$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon < 1, \qquad \frac{\mathrm{H}_u}{\varepsilon} < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{\varepsilon}{\mathrm{H}_v}. \tag{57}$$

Il résulte de là que le produit $\mathrm{H}_u\mathrm{H}_v$ doit être inférieur à $\varepsilon^2$ et, par suite, à l'unité. Réciproquement, *si l'on a* $\mathrm{H}_u\mathrm{H}_v < 1$, on peut satisfaire aux inégalités (57) par une infinité de valeurs de $\varepsilon$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, et *le système* (56) *possède un groupe d'intégrales ordinaires répondant à des déterminations initiales arbitrairement choisies.*

41. Mais, si l'on a au contraire $\mathrm{H}_u\mathrm{H}_v > 1$, la démonstration dont il s'agit cesse d'être applicable, et nous allons effectivement prouver qu'en supposant, pour plus de simplicité, $\mathrm{H}_u = \mathrm{H}_v = \mathrm{H}$, *le système*

(58)

| | $(u)$ | $(v)$ |
|---|---|---|
| $(x)$ | $\dfrac{du}{dx} = v + \mathrm{H}\dfrac{du}{dy}$ | |
| $(y)$ | | $\dfrac{dv}{dy} = u + \mathrm{H}\dfrac{dv}{dx}$ |

ainsi obtenu *ne possède, pour* H $>$ 1, *aucun groupe d'intégrales satisfaisant aux conditions initiales*

$$(59) \qquad \begin{cases} u = y & \text{pour} \quad x = 0, \\ v = x & \text{pour} \quad y = 0. \end{cases}$$

I. On aperçoit d'abord sans difficulté que

$$u_{p,q}, \quad v_{p,q},$$

*valeurs initiales fournies par les relations ultimes pour les dérivées (supposées principales)*

$$\frac{d^{p+q}u}{dx^p\,dy^q}, \quad \frac{d^{p+q}v}{dx^p\,dy^q},$$

*sont des polynômes entiers en* H *à coefficients positifs et entiers.*

En outre, à cause de la symétrie parfaite tant du système (58) que des données initiales (59), *les polynômes*

$$u_{p,q}, \quad v_{q,p}$$

(*où p doit être supposé au moins égal à* 1) *sont nécessairement identiques.*

II. *En appelant* $\delta_{p,q}$ *le degré en* H *du polynôme* $u_{p,q}$ (*où* $p > 0$), *on a, quel que soit l'indice* $m (> 1)$,

$$(60) \qquad \delta_{1,m-1} \geqq \delta_{m-1,0}.$$

Car la différentiation $\frac{d^{m-1}}{dy^{m-1}}$, exécutée sur l'équation de la première colonne du système (58), donne la relation primitive

$$\frac{d^m u}{dx\,dy^{m-1}} = \frac{d^{m-1}v}{dy^{m-1}} + \mathrm{H}\frac{d^m u}{dy^m};$$

en remplaçant, dans le second membre, la dérivée principale $\frac{d^{m-1}v}{dy^{m-1}}$

par son expression ultime, et faisant ensuite $x = y = 0$, on aura

$$u_{1,m-1} = v_{0,m-1} + \ldots$$

ou, à cause de I,

$$u_{1,m-1} = u_{m-1,0} + \ldots.$$

III. *Dans les mêmes conditions, on a encore*

$$\partial_{m,0} \geqq \partial_{1,m-1} + m - 1. \tag{61}$$

Désignons, en effet, par $p$ un entier quelconque de la suite

$$2, \quad 3, \quad \ldots, \quad m-1, \quad m,$$

et exécutons sur la même équation que précédemment la différentiation $\frac{d^{m-1}}{dx^{p-1}\,dy^{m-p}}$; elle donnera, pour $x = y = 0$,

$$u_{p,m-p} = \ldots + \mathrm{H}\, u_{p-1,m-p+1},$$

d'où

$$\partial_{p,m-p} \geqq \partial_{p-1,m-p+1} + 1.$$

En donnant successivement à $p$ les diverses valeurs ci-dessus indiquées et ajoutant membre à membre les relations correspondantes, on arrive bien à l'inégalité (61).

IV. *On a, quel que soit l'entier positif $m$,*

$$\partial_{m,0} \geqq \frac{m(m-1)}{2} + 1. \tag{62}$$

Si $m = 1$, la relation $u_{1,0} = \mathrm{H}$ donne immédiatement $\partial_{1,0} = 1$. Dans le cas contraire, on a, par la combinaison des relations (60), (61),

$$\partial_{m,0} \geqq \partial_{m-1,0} + m - 1;$$

en ajoutant membre à membre cette dernière inégalité avec celles qui s'en déduisent par la substitution successive de $m-1$, $m-2$, $\ldots$, $2$ à $m$, et avec l'égalité $\partial_{1,0} = 1$, on obtient précisément l'inégalité (62).

V. En vertu de la première remarque faite dans l'alinéa I, de la relation (62) et de l'hypothèse $H > 1$, on a

$$u_{m,0} \geqq H^{\frac{m(m-1)}{2}+1}.$$

Si donc on appelle $\xi$ le module de $x$, et que l'on considère dans le développement de l'intégrale hypothétique $u$ la partie indépendante de $y$, le terme général de cette dernière a un module au moins égal à

$$H^{\frac{m(m-1)}{2}+1} \frac{\xi^m}{1.2\ldots m}.$$

Or l'expression que nous venons d'écrire croît indéfiniment avec $m$ pour toute valeur de $\xi$ supérieure à zéro; car, en y remplaçant $m$ par $m+1$ et prenant le rapport de cette nouvelle expression à la première, on obtient

$$\frac{H^m}{m+1}\xi,$$

quantité que l'on démontre aisément être infinie avec $m$ lorsque H est $> 1$.

La partie considérée dans le développement de $u$ est donc une série divergente, le développement tout entier aussi, et, comme nous l'avons annoncé, les intégrales $u$, $v$ ne sauraient exister.

On arriverait, à plus forte raison, à la même conclusion, si l'on prenait comme déterminations initiales de $u$, $v$ des fonctions respectivement olotropes en $x = 0$, $y = 0$, et dont les développements par la formule de Maclaurin eussent tous leurs coefficients positifs, ceux de $x$ et de $y$ ne tombant pas au-dessous de l'unité.

42. On voit par ce qui précède que, pour un système immédiat, même passif, qui n'est ni régulier ni semi-régulier, l'existence des intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données est essentiellement précaire. Elle dépend de la nature des composantes qui figurent dans les seconds membres des équations différentielles, comme aussi de la nature des déterminations initiales, et il peut fort

bien arriver qu'en modifiant les unes ou les autres (sans changer la répartition des cases pleines et vides dans le Tableau du système) les intégrales existent dans un cas et disparaissent dans un autre. Il n'entre pas dans notre cadre d'approfondir davantage cette aride question, à laquelle nous n'apercevons d'ailleurs, dans l'état actuel de l'Analyse, aucune application intéressante.

43. La remarque suivante est essentielle à noter. Un système immédiat qui n'est ni régulier ni semi-régulier peut parfois être privé d'intégrales répondant à certaines conditions initiales, mais *il n'en résulte pas que son intégration soit impossible;* car, en le résolvant par rapport à un autre groupe de dérivées, les cases pleines et vides (1) ne se trouvent plus réparties de la même manière dans le Tableau, et il peut arriver que le système, sans cesser d'être immédiat (8), devienne régulier ou semi-régulier, par suite, sujet au théorème du n° 36. Il n'y a là, d'ailleurs, rien de contradictoire : si, dans leur ensemble, les équations différentielles sont restées les mêmes, ou du moins équivalentes à ce qu'elles étaient primitivement, *l'économie des conditions initiales a été totalement bouleversée par les changements que cette transformation a opérés dans la répartition des cases pleines et vides*, et le paradoxe naissant de la coexistence de ces deux faits que, sous une forme, le système proposé n'a pas d'intégrales, tandis qu'il en possède sous une autre, se résout sans difficulté par cette simple remarque, que *les deux groupes de conditions initiales correspondant à ces deux formes ne sont pas du tout équivalents.*

Par exemple, sous la forme équivalente

| | $(u)$ | $(v)$ |
|---|---|---|
| $(x)$ | $\dfrac{du}{dx} = v + \mathrm{H}\dfrac{du}{dy}$ | $\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{u}{\mathrm{H}} + \dfrac{1}{\mathrm{H}}\dfrac{dv}{dy}$ |
| $(y)$ | | |

,

le système (58), où nous supposerons $\mathrm{H} > 1$, peut être intégré avec les conditions initiales quelconques

$$\left.\begin{array}{l} u = \upsilon(y) \\ v = \varphi(y) \end{array}\right\} \text{pour } x = x_0;$$

mais il est impossible de choisir les fonctions $\upsilon$, $\varphi$ de manière que les intégrales du système remplissent les conditions initiales indiquées au n° 41.