C. GUICHARD

Sur une classe particulière d'équations aux dérivées partielles dont les invariants sont égaux

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 7 (1890), p. 19-22
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1890_3_7__19_0>

SUR UNE

CLASSE PARTICULIÈRE D'ÉQUATIONS

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

DONT LES INVARIANTS SONT ÉGAUX,

PAR M. C. GUICHARD,

CHARGÉ D'UN COURS A LA FACULTÉ DE CLERMONT-FERRAND.

Les équations qui sont étudiées dans cette Note sont

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} = \rho \sin \varphi, \tag{1}$$

dans lesquelles φ est une solution quelconque de l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, dv} + \cos \varphi = 0. \tag{2}$$

Si l'on différentie l'équation (2), soit par rapport à u, soit par rapport à v, on voit immédiatement que $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ sont des solutions particulières de l'équation (1). Je vais démontrer de plus qu'étant donnée une solution de l'équation (1), on peut, en général, et en effectuant seulement des quadratures, en déduire une infinité d'autres.

Soit, en effet, ρ une des solutions de (1). Posons

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial u} &= -\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial u},\\ \frac{\partial\lambda}{\partial v} &= \rho\cos\varphi.\end{aligned}\right.$$

Les deux équations (5) sont compatibles, car elles donnent toutes deux, en tenant compte des relations (1) et (2),

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} = -\rho\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \cos\varphi\frac{\partial\rho}{\partial u};$$

elles permettent de déterminer λ par une quadrature. Cela posé, je dis que

$$(4)\qquad r = -\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

est une solution de l'équation (1). En effet,

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial v} &= -\frac{\partial}{\partial u}(\rho\sin\varphi) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\\ &= -\sin\varphi\frac{\partial\rho}{\partial u} - \rho\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \rho\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \lambda\cos\varphi\\ &= -\sin\varphi\frac{\partial\rho}{\partial u} - \lambda\cos\varphi\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v} = -\sin\varphi\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} - \cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial u} - \cos\varphi\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \lambda\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u} = r\sin\varphi.$$

Il est aussi évident maintenant que, si l'on pose

$$(3')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial u} &= \rho\cos\varphi,\\ \frac{\partial\theta}{\partial v} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial v}\end{aligned}\right.$$

et

$$(4') \qquad s = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} + \theta \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

s est encore une solution de l'équation (1).

Appliquons maintenant la transformation (4') à la solution r. On aura pour déterminer θ

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = \left(-\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\cos\varphi = \frac{\partial}{\partial u}\left[-\cos\varphi \frac{\partial \rho}{\partial u} + \lambda \sin\varphi\right],$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} = \left[\sin\varphi \frac{\partial \rho}{\partial u} + \lambda \cos\varphi\right]\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left[-\cos\varphi \frac{\partial \rho}{\partial u} + \lambda \sin\varphi\right];$$

d'où

$$\theta = -\cos\varphi \frac{\partial \rho}{\partial u} + \lambda \sin\varphi + K,$$

K étant une constante.

On aura ensuite

$$-\frac{\partial^2 r}{\partial v^2} = \sin\varphi \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \cos\varphi \frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \lambda \sin\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial v}\cos\varphi$$

$$= \rho + \cos\varphi \frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \lambda \sin\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

et alors

$$s = -\frac{\partial^2 r}{\partial v^2} + \theta \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \rho + K \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

En faisant abstraction du terme $K \frac{\partial \varphi}{\partial v}$, on peut dire que les transformations (4) et (4') sont inverses l'une de l'autre. L'application répétée des transformations (4) ou des transformations (4') donnera, en général, une infinité de solutions nouvelles.

Si l'on prend

$$\rho = \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

on trouvera aussi

$$r = \frac{\partial \varphi}{\partial v};$$

la méthode ne donne rien de nouveau. Au contraire, la valeur de s est une nouvelle solution.