GASTON DARBOUX

Sur la surface dont la courbure totale est constante

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 7 (1890), p. 9-18
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1890_3_7__9_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR LES SURFACES

DONT

LA COURBURE TOTALE EST CONSTANTE,

PAR M. G. DARBOUX (¹).

I.

On connaît les beaux résultats obtenus, depuis Monge, par un grand nombre de géomètres, en ce qui concerne la détermination et l'étude des surfaces minima. La théorie des surfaces dont la courbure totale est constante a les rapports les plus étroits avec celle des surfaces minima, bien qu'elle soit certainement de beaucoup plus difficile.

Par exemple, la détermination des surfaces minima dépend de l'équation

$$s = e^{z}, \tag{1}$$

que l'on sait intégrer; celle des surfaces à courbure constante se ramène, d'après M. Weingarten, à l'équation

$$s = ae^{z} + be^{-z},$$

qui comprend évidemment la précédente comme cas particulier.

(¹) Extrait du Tome XCVII des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*.

Parmi les considérations de Géométrie qui permettent aussi d'établir un lien entre les deux problèmes, je signalerai d'abord la suivante : On sait qu'il existe toujours deux surfaces dont la courbure *moyenne* est constante et qui sont parallèles à une surface dont la courbure totale est constante. On voit donc que la détermination des surfaces à courbure totale invariable se ramène à celle des surfaces dont la courbure moyenne est constante : or ces dernières comprennent évidemment comme cas particulier les surfaces minima.

On peut aussi se placer au point de vue de la Géométrie projective. Considérons une surface du second ordre (Q) et proposons-nous de déterminer les surfaces (Σ) telles que les deux tangentes aux lignes asymptotiques qui passent en chacun de leurs points soient conjuguées par rapport à la surface (Q). Cet intéressant problème se ramène, il est aisé de le reconnaître, à la détermination d'une surface à courbure constante ou, ce qui est la même chose, à l'intégration de l'équation (2). Mais, si l'on suppose que la surface (Q) dégénère et se réduise au cercle de l'infini, les surfaces (Σ), d'après leur définition, devront avoir leurs tangentes asymptotiques rectangulaires et se réduiront, par conséquent, à des surfaces minima.

Je reviendrai sur toutes ces analogies. Mais, pour le moment, je me contenterai de rappeler que la détermination des surfaces à courbure constante exige l'intégration de l'équation (2) et que tous les efforts tentés jusqu'ici pour l'intégration de cette équation ou de celles dans lesquelles on peut la transformer ont complètement échoué. Ces efforts ont néanmoins conduit à des résultats très intéressants, et l'on connaît aujourd'hui différents procédés qui permettent, une surface à courbure constante étant supposée et donnée, d'en déduire une infinité d'autres ayant la même propriété.

Le premier de ces procédés se présente presque immédiatement. Il est clair que, si $f(x, y)$ est une solution de l'équation (2), il en sera de même de $f\left(\frac{x}{m}, ym\right)$, où m désigne une constante arbitraire. Cette remarque a déjà été faite par M. Lie et elle permet évidemment d'atteindre le résultat cherché. Toutefois, il est utile de le remarquer, les surfaces que l'on fait ainsi dériver d'une surface donnée ne sont pas complètement connues : on a bien les valeurs des six quantités qui figurent dans les formules de M. Codazzi, mais la détermination des trois coordonnées rectilignes d'un point de la surface en fonction des deux coordonnées curvilignes n'est pas faite et exige l'intégration, qui peut bien être impossible, d'une équation de Riccati. Avant de terminer ce qui regarde cette première méthode, remarquons, avec M. Lie, qu'elle se rattache de la manière la plus directe à un beau résultat obtenu par M. Bonnet. Dans son *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables*, M. Bonnet a généralisé une propriété qu'il avait déjà établie pour les surfaces minima; il a montré que toute surface à courbure moyenne constante quelconque a ses lignes de courbure isothermes, et que l'on peut toujours en déduire une infinité de surfaces à courbure moyenne constante qui sont applicables sur la surface donnée avec conservation des rayons de courbure principaux aux points correspondants. Il suffit de considérer les surfaces à courbure totale constante parallèle aux précédentes, et il est aisé de reconnaître qu'elles se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par le procédé que nous venons de rappeler plus haut.

Il existe une autre méthode bien plus féconde et qui permet de déduire d'une surface à courbure constante donnée une infinité d'autres surfaces de même définition et contenant dans leur équation autant de constantes que l'on veut. Elle a été donnée en 1879 par M. Bianchi et elle a été l'objet d'études approfondies de la part de MM. Lie et Backlund. On peut la faire reposer sur deux théorèmes presque identiques qui ont été donnés, l'un en 1870 par M. Ribaucour, l'autre en 1879 par M. Bianchi. Indiquons rapidement comment M. Bianchi y a été conduit.

Soit (Σ) une surface à courbure négative -1 et dont on connaisse les lignes géodésiques. On pourra, d'une infinité de manières, mettre l'élément linéaire de cette surface sous la forme

$$ds^2 = d\alpha^2 + e^{2\alpha} d\beta^2.$$

Menons toutes les tangentes aux lignes géodésiques $\beta = \text{const.}$ D'après une des propriétés les mieux connues des lignes géodésiques, ces tangentes sont normales à une surface (S) et elles touchent une seconde surface (Σ') de telle manière que (Σ) et (Σ') constituent les deux nappes de la surface des centres de courbure de (S). M. Bianchi démontre que (Σ') est, comme (Σ), une surface de courbure constante

— 1. On voit donc déjà que l'on pourra déduire de (Σ) une surface (Σ') contenant dans son équation une constante arbitraire. Si l'on recommence l'application du même procédé en prenant (Σ') comme surface initiale, on obtiendra des surfaces (Σ'') dépendant de deux constantes, et il est clair, sans qu'il soit nécessaire d'insister, que l'application indéfinie du procédé peut introduire autant de constantes que l'on veut. M. Lie a fait la remarque capitale que l'application de ce procédé exige seulement une série de quadratures. C'est sur cette suite de quadratures que portent surtout les recherches nouvelles que j'aurai l'honneur de présenter à l'Académie. Mais, auparavant, je montrerai comment on peut établir géométriquement, de la manière la plus simple, la proposition de M. Bianchi et celle, bien antérieure, de M. Ribaucour.

II.

Pour démontrer l'élégante proposition de M. Bianchi, je m'appuierai sur la remarque suivante. Considérons sur une surface (Σ) un système de courbes parallèles (C) et les lignes géodésiques (g) qui sont leurs trajectoires orthogonales. Les tangentes aux lignes (g) sont normales à une certaine surface (S) et touchent une seconde surface (Σ'); (Σ) et (Σ') sont les deux nappes de la surface des centres de courbure de (S). En outre, (Σ') est le lieu des centres de courbure géodésique des courbes parallèles (C) tracées sur (Σ). Il est clair d'ailleurs que la relation est réciproque : si l'on considère sur (Σ') les lignes géodésiques (g') tangentes aux normales de (S) et leurs trajectoires orthogonales (C'), les centres de courbure géodésique de ces trajectoires sont sur la surface primitive (Σ).

Cela posé, cherchons s'il existe une surface (Σ) sur laquelle on puisse tracer des courbes parallèles (C) ayant en chacun de leurs points un rayon de courbure géodésique constant, égal à 1 par exemple. Si l'on rapporte la surface au système de coordonnées formé de ces courbes parallèles et de leurs trajectoires orthogonales, l'élément linéaire prendra la forme

$$ds^2 = du^2 + C^2 dv^2,$$

et l'on devra avoir

$$\frac{\partial C}{\partial u} = \pm C,$$

d'où l'on déduit

$$C = e^{\pm u},$$

et, par conséquent, la courbure totale de la surface sera constante et égale à -1. Nous prenons, pour préciser,

$$ds^2 = du^2 + e^{2u} dv^2. \tag{1}$$

Considérons maintenant la surface (Σ') qu'on associe à (Σ) dans la proposition précédente. D'après cette proposition, les courbes (C') tracées sur (Σ') auront leurs centres de courbure géodésique sur (Σ); leur rayon de courbure géodésique sera égal à 1, et, par conséquent, (Σ') sera, comme (Σ), une surface à courbure constante -1. On reconnaît facilement que l'élément linéaire de (Σ') prend la forme

$$ds'^2 = du^2 + e^{-2u} dw^2. \tag{2}$$

Quant à la surface (S), elle jouira de la propriété que la différence de ses rayons de courbure sera égale à 1.

Voici maintenant la méthode que M. Bianchi a déduite du théorème précédent. Considérons une surface quelconque (Σ) à courbure -1. On peut obtenir un nombre simplement infini de systèmes coordonnés donnant à l'élément linéaire la forme (1); il suffit, en effet, d'associer aux lignes géodésiques passant par un des points à l'infini de la surface leurs trajectoires orthogonales. On pourra donc de (Σ) déduire une surface (Σ') contenant dans son équation une constante arbitraire. Partant ensuite de (Σ'), on obtiendra des surfaces (Σ'') formant un système à deux constantes arbitraires, et ainsi de suite. M. Lie a fait la remarque capitale que l'application indéfinie de ce procédé n'exige qu'une suite de quadratures, et cela résulte presque immédiatement de la démonstration géométrique précédente.

En effet, la formule (2) nous montre que

$$e^u \sqrt{ds'^2 - du^2} = dw$$

sera une différentielle exacte. Il suffira donc d'effectuer cette quadrature, où tout est connu, pour obtenir w et ramener l'élément linéaire de (Σ') à la forme (2), qui entraîne la connaissance de toutes les lignes géodésiques de (Σ').

Le théorème donné par M. Ribaucour en 1870 (*Comptes rendus* et *Bulletin de la Société philomathique*) peut s'énoncer comme il suit :

Considérons une surface (Σ) *à courbure* -1, *et traçons dans chaque plan tangent de la surface un cercle de rayon* 1 *ayant son centre au point de contact* M *de ce plan tangent; les cercles ainsi obtenus seront orthogonaux à une famille de surfaces, toutes à courbure constante* -1; *et, en outre, ces surfaces feront partie d'un système triple orthogonal dont les deux autres familles seront évidemment composées de surfaces enveloppes de sphères.*

La première partie de cette proposition résulte immédiatement du théorème de M. Bianchi, car les différentes surfaces (Σ') qu'on fait dériver de (Σ) dans la méthode de M. Bianchi sont évidemment les trajectoires des cercles considérés par M. Ribaucour. Au reste, les deux propositions se déduisent l'une de l'autre, celle de M. Ribaucour contenant en plus ce qui concerne le système triple orthogonal.

Dans mon Cours de l'année 1881-82, j'ai donné du théorème de M. Ribaucour une démonstration géométrique directe, qui se rapproche, à quelques égards, de celle qu'on trouve dans un travail récent de M. Backlund. Je ne la transcrirai pas ici, mais je ferai connaître le principe d'une démonstration analytique qui n'est pas moins simple que la démonstration géométrique.

Supposons que la surface (Σ) ait été rapportée à ses lignes de courbure. Son élément linéaire prendra la forme connue

$$ds = \cos^2\omega\, du^2 + \sin^2\omega\, dv^2, \tag{3}$$

où ω satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \sin\omega\cos\omega = 0. \tag{4}$$

Menons dans le plan tangent en un point M une ligne MM′, de longueur $+1$, faisant l'angle θ avec la courbe $v =$ const. qui passe en M, et écrivons que le point M′ décrit une surface dont le plan tangent passe en M et est normal à celui de (Σ). Nous trouverons les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial v} &= \sin\theta\cos\omega, \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{\partial\omega}{\partial u} &= -\cos\theta\sin\omega. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Il est aisé de reconnaître que ces équations sont compatibles toutes les fois que ω satisfait à l'équation (4) et qu'elles donnent une valeur de θ contenant, outre u et v, une constante arbitraire α. Si nous considérons maintenant u, v, α comme des coordonnées curvilignes propres à définir le point M', nous aurons, pour le déplacement dS de ce point, l'expression

$$dS^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \sin^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right)^2 d\alpha^2. \tag{6}$$

Cette formule, qui met en évidence un système triple orthogonal, démontre le théorème de M. Ribaucour; elle montre aussi que la transformation de M. Bianchi conserve à la fois les lignes de courbure et les lignes asymptotiques.

Il reste à discuter le système (5).

III.

Dans l'article précédent, j'ai été conduit au système suivant

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial v} &= \sin\theta\cos\omega, \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{\partial\omega}{\partial u} &= -\cos\omega\cos\theta, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

qui va me permettre de me placer à un point de vue purement analytique dans l'étude du problème, objet principal de ces recherches.

Considérons le système (1) comme formé de deux équations simultanées auxquelles doit satisfaire la fonction inconnue θ : l'élimination de la fonction θ nous montrera que ces deux équations ne sont compatibles que dans le cas où ω satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \sin\omega\cos\omega = 0. \tag{2}$$

Réciproquement, si ω est une solution quelconque de cette équation aux dérivées partielles, l'intégration du système (1) nous donnera une valeur de θ contenant une constante arbitraire; et cette valeur de θ sera également une solution de l'équation (2). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

De toute solution ω de l'équation (2) on peut déduire une solution nou-

celle contenant une constante arbitraire : c'est la valeur la plus générale de θ *satisfaisant aux équations* (1).

A la vérité, on ne sait pas intégrer d'une manière générale le système (1), mais la forme des équations qui le composent nous permet de reconnaître que l'on pourra obtenir la valeur la plus générale θ' de θ qui puisse y satisfaire dès que l'on en connaîtra une solution particulière quelconque θ.

Effectuons, en effet, les quadratures définies par les formules

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} d\alpha &= \cos\theta\cos\omega\, du + \sin\omega\,\sin\theta\, dv,\\ e^{-\alpha}d\beta &= \cos\omega\,\sin\theta\, du - \sin\omega\cos\theta\, dv,\\ e^{\alpha}d\gamma &= \cos\theta\,\sin\omega\, du + \sin\theta\,\cos\omega\, dv.\end{aligned}\right.$$

La solution cherchée θ' est donnée par l'équation

$$(4)\qquad \cot\frac{\theta'-\theta}{2} = \beta e^{-\alpha},$$

qui contient la constante arbitraire que l'on peut toujours ajouter à β.

Si, dans les formules (3), on remplace θ par θ', les nouvelles valeurs α', β' de α et de β seront données par les équations

$$(5)\qquad e^{\alpha'} = \frac{e^{\alpha}}{\beta^2+e^{2\alpha}},\qquad \beta' = \frac{-\beta}{\beta^2+e^{2\alpha}}.$$

Mais, pour obtenir la nouvelle valeur γ' de γ, il faudra effectuer une nouvelle quadrature.

On peut encore, dans le système (1), considérer θ comme donné et chercher la valeur la plus générale de ω qui satisfasse aux deux équations. On aura ainsi, en désignant cette valeur par ω'',

$$(6)\qquad \cot\frac{\omega''-\omega}{2} = \gamma e^{\alpha},$$

et, si nous désignons par α'', γ'' les valeurs nouvelles de α, γ que l'on obtient en remplaçant, dans les formules (3), ω'' par ω, on aura

$$(7)\qquad e^{-\alpha''} = \frac{e^{-\alpha}}{\gamma^2+e^{-2\alpha}},\qquad \gamma'' = \frac{-\gamma}{\gamma^2+e^{-2\alpha}}.$$

Mais, pour obtenir la nouvelle valeur β'' de β, il restera, ici encore, à effectuer une quadrature nouvelle.

En appliquant *successivement* les deux opérations que nous venons de définir, on déduira, on le voit, de tout système de solutions des équations (1) un nombre illimité de systèmes nouveaux *contenant autant de constantes qu'on le voudra; et la détermination de chaque système nouveau exigera seulement une nouvelle quadrature*.

Mais ces quadratures portent sur des expressions de plus en plus compliquées, contenant les constantes arbitraires mêlées aux variables aussi bien dans les dénominateurs que dans les numérateurs. Il semblait donc que l'application de la méthode était presque impossible et devait être promptement arrêtée dans le cas général. J'attache donc quelque importance au résultat suivant :

Il suffira d'effectuer au début, en dehors de α, β, γ, *un certain nombre de quadratures (inférieur d'une unité au nombre de solutions nouvelles que l'on veut obtenir), portant sur des fonctions parfaitement déterminées de* u *et de* v, *et, ces quadratures une fois effectuées, l'application de la méthode n'exigera que les calculs algébriques les plus élémentaires.*

J'indique d'abord les quadratures à effectuer; elles sont définies par les formules

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
&b_0 = \beta,\\
&db_1 = 2\,b_0\,d\varepsilon - (\beta^2 + e^{2\alpha})\,d\gamma,\\
&db_2 = db_0 + 2\,b_1\,d\varepsilon - 2\,b_0\,d\alpha - e^{-2\alpha} b_0^2\,d\beta,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&db_n = db_{n-2} + 2\,b_{n-1}\,d\varepsilon - 2\,b_{n-2}\,d\alpha\\
&\qquad - (b_0 b_{n-2} + b_1 b_{n-3} + \ldots + b_{n-3} b_1 + b_{n-2} b_0)\,e^{-2\alpha} d\beta\\
&\qquad + (b_1 b_{n-2} + \ldots + b_{n-2} b_1)\,d\gamma;
\end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&c_0 = \gamma,\\
&dc_1 = 2\,c_0\,d(\beta\gamma - \varepsilon) - (c_0^2 + e^{-2\alpha})\,d\beta,\\
&dc_2 = dc_0 + 2\,c_1\,d(\beta\gamma - \varepsilon) + 2\,c_0\,d\alpha - e^{2\alpha} c_0^2\,d\gamma,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&dc_n = dc_{n-2} + 2\,c_{n-1}\,d(\beta\gamma - \varepsilon) + 2\,c_{n-2}\,d\alpha\\
&\qquad - (c_0 c_{n-2} + \ldots + c_{n-2} c_0)\,e^{2\alpha} d\gamma + (c_1 c_{n-2} + \ldots + c_{n-2} c_1)\,d\beta,
\end{aligned}\right.$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(10)\qquad d\varepsilon = \beta\,d\gamma + \sin\theta \sin\omega\,du + \cos\omega\cos\theta\,dv.$$

Nous supposerons que toutes ces quadratures soient calculées de la manière la plus générale, c'est-à-dire qu'on ajoute une constante arbitraire après chaque intégration.

Ces définitions une fois admises, supposons que l'on substitue partout à θ la valeur θ' définie par la formule (4). Les nouvelles valeurs b'_i, c'_i des fonctions b_i, c_i seront définies par les formules (5) et les relations très simples qui suivent :

$$
\begin{aligned}
&b'_1 = \gamma,\\
&b'_2 = c_1 - \beta\gamma^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&b'_n = c_{n-1} - \beta(c_{n-2} b'_1 + c_{n-3} b'_2 + \ldots + c_0 b'_{n-1}),\\
&c'_0 = \gamma' = b_1,\\
&c'_1 = b_2 + \beta' b_1^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&c'_n = b_{n+1} + \beta'(c'_{n-1} b_1 + \ldots + c'_0 b_n).
\end{aligned}
$$

Lorsque, au contraire, on substituera le système (ω'', θ) au système (ω, θ), les formules que l'on aura à employer pour calculer les nouvelles valeurs de b_i, c_i, toutes pareilles aux précédentes, s'en déduiront par la substitution des quantités $-\alpha$, γ, β, c_i, b_i à α, β, γ, b_i, c_i respectivement.

Il suffit maintenant de commencer les calculs qui conduisent aux nouvelles solutions, pour reconnaître que ces calculs n'exigeront plus aucune quadrature.