L. SAUVAGE

Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles (troisième mémoire)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 6 (1889), p. 157-182

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1889_3_6__157_0>

SUR LES SOLUTIONS RÉGULIÈRES

D'UN

SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

(TROISIÈME MÉMOIRE),

PAR M. L. SAUVAGE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE.

1. Un système d'équations différentielles linéaires et homogènes, étant mis sous la forme

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

admet, dans le domaine d'un point, l'origine par exemple, un système fondamental de solutions de la forme

$$y_{ik} = x^{r_k}\varphi_i(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n; \quad i = 1, 2, \ldots, n),$$

lorsque les nombres r_1, r_2, ..., r_n diffèrent entre eux à des nombres entiers près, c'est-à-dire lorsque l'équation fondamentale relative au point $x = 0$ a n racines distinctes.

Si cette équation fondamentale a une racine multiple d'ordre μ, on a un groupe de μ solutions de la forme

$$y_{i\lambda} = x^r(\varphi_{i\lambda 1} + \varphi_{i\lambda 2}\log x + \ldots + \varphi_{i\lambda\lambda}\log^{\lambda-1} x)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad \lambda = 1, 2, \ldots, \mu),$$

correspondant aux mêmes nombres r à des nombres entiers près, et toutes les fonctions φ peuvent être supposées holomorphes dans le cas où le système proposé a toutes ses solutions régulières, et réciproquement.

Les nombres r sont liés aux racines ω de l'équation fondamentale par la relation

$$e^{2\pi r\sqrt{-1}} = \omega,$$

et ne sont définis qu'à un nombre entier près.

Nous nous proposons de montrer comment on pourrait déterminer par la méthode d'identification les solutions précédentes d'un système dont toutes les solutions sont régulières, et nous tirerons de là quelques conclusions importantes. Ce Mémoire doit être rapproché de deux autres qui ont paru dans les *Annales de l'École Normale supérieure* (1), et d'un travail présenté à l'Académie des Sciences de Vienne par M. Grünfeld (2).

2. Il est facile d'établir qu'un système d'équations différentielles linéaires et homogènes, et dont toutes les solutions sont régulières, peut être mis sous la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} y'_i = &\left(\frac{a^0_{i1}}{x^{\varepsilon_{i1}}} + \frac{a^1_{i1}}{x^{\varepsilon_{i1}-1}} + \frac{a^2_{i1}}{x^{\varepsilon_{i1}-2}} + \ldots\right) y_1 + \ldots \\ &+ \left(\frac{a^0_{in}}{x^{\varepsilon_{in}}} + \frac{a^1_{in}}{x^{\varepsilon_{in}-1}} + \frac{a^2_{in}}{x^{\varepsilon_{in}-2}} + \ldots\right) y_n \end{aligned}\right.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les coefficients a sont des constantes qui ne sont pas toutes nulles pour une même valeur de i, c'est-à-dire dans une même équation; les nombres ε sont des exposants entiers positifs ou négatifs.

Ce système admet au moins une solution de la forme

$$(2)\qquad y_i = x^r(\varphi^0_i + \varphi^1_i x + \varphi^2_i x^2 + \ldots) = x^r \varphi_i,$$

telle que tous les coefficients constants φ^k_i ne soient pas nuls à la fois. Nous allons d'abord chercher à reconstruire cette solution en supposant les coefficients φ^k_i indéterminés et en les retrouvant par l'identification appliquée aux équations (1).

(1) Novembre 1886 et janvier 1888.

(2) 3 février 1888.

En portant les valeurs (2) dans les équations (1), on a

$$
\begin{aligned}
&\frac{r}{x}(\varphi_i^0 + \varphi_i^1 x + \varphi_i^2 x^2 + \ldots) + \varphi_i^1 + 2\varphi_i^2 x + 3\varphi_i^3 x^2 + \ldots \\
&\quad = \left(\frac{a_{i1}^0}{x^{\varepsilon_{i1}}} + \frac{a_{i1}^1}{x^{\varepsilon_{i1}-1}} + \ldots\right)(\varphi_1^0 + \varphi_1^1 x + \varphi_1^2 x^2 + \ldots) \\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + \left(\frac{a_{ii}^0}{x^{\varepsilon_{ii}}} + \frac{a_{ii}^1}{x^{\varepsilon_{ii}-1}} + \ldots\right)(\varphi_i^0 + \varphi_i^1 x + \varphi_i^2 x^2 + \ldots) \\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + \left(\frac{a_{in}^0}{x^{\varepsilon_{in}}} + \frac{a_{in}^1}{x^{\varepsilon_{in}-1}} + \ldots\right)(\varphi_n^0 + \varphi_n^1 x + \varphi_n^2 x^2 + \ldots) \\
&\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned}
$$

Dans chacune de ces équations, on égalera d'abord les termes du plus bas degré en x, et l'on aura n équations de la forme

$$
((- r\varphi_i^0 + a_{i1}^0 \varphi_1^0 + \ldots + a_{ii}^0 \varphi_i^0 + \ldots + a_{in}^0 \varphi_n^0)) = 0 \tag{3}
$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous indiquons par la double parenthèse que tous les termes écrits dans ces équations n'y entrent pas forcément, mais qu'il n'y entre d'ailleurs aucun autre terme.

Ces équations ayant au moins une solution en $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$, le déterminant des coefficients sera nul : on aura donc une condition dans laquelle entreront les coefficients a_{ik}^0 et, s'il y a lieu, le nombre r. Supposons cette condition remplie, nous aurons au moins une solution en $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$, où tous les éléments ne seront pas nuls.

Nous pourrons supposer, s'il en est besoin, qu'aucun élément $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$ n'est nul, à moins que la fonction φ_i correspondante ne soit identiquement nulle. En effet, si $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_s^0$ sont nuls, mais que $\varphi_{s+1}^0, \varphi_{s+2}^0, \ldots, \varphi_n^0$ ne soient pas nuls, remplaçons $y_1, y_2, \ldots, y_s$ par $xy_1, xy_2, \ldots, xy_s$ dans le système (1). Nous aurons un nouveau système de même forme que (1) et sur lequel nous raisonnerons dorénavant. Dans ce système nouveau, nous commencerons par déterminer, comme tout à l'heure, $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$. Il pourra arriver encore que $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_{s'}^0$ soient nuls avec $s' \leqq s$. S'il en est ainsi, nous remplacerons encore $y_1, y_2, \ldots, y_{s'}$ par $xy_1, xy_2, \ldots, xy_{s'}$, et nous substituerons pour raisonner un nouveau système de forme (1) aux deux précédents.

Nous continuerons à modifier ainsi le système (1) jusqu'à ce que tous les coefficients $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$ soient différents de zéro. Cela arrivera en général, car la solution $y_i = x^r \varphi_i$ peut être mise sous la forme

$$y_i = x^{r+h_i}\varphi_i,$$

$h_1, h_2, \ldots, h_n$ étant des nombres entiers positifs tels que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ne s'annulent pas pour $x = 0$. On peut même supposer nul l'un des nombres h, soit h_1; alors, soit h le plus grand des nombres $h_2, \ldots, h_n$, on aura à faire au plus h fois des substitutions de la forme xy à certains y pour amener le système primitif (1) à la forme voulue.

Nous pouvons donc supposer que le système (1) admet une solution (2), telle que toutes les quantités φ_i^0 soient différentes de zéro, à moins que la fonction φ_i ne manque.

On peut maintenant imaginer deux cas différents de calcul.

Premier cas : Les équations (3) ne renferment pas la lettre r.

Second cas : La lettre r entre dans ces équations.

Examinons d'abord le second cas. Il se subdivise en deux autres.

I. La lettre r entre dans toutes les équations (3). Alors les termes du plus bas degré dans ces équations sont des termes en $\frac{1}{x}$, et le système (1) est de la forme

$$xy'_i = b_{i1}y_1 + \ldots + b_{in}y_n,$$

où les fonctions b sont holomorphes dans le domaine de l'origine. Nous appellerons ces systèmes des *systèmes canoniques*. L'étude des systèmes canoniques a fait l'objet d'un Mémoire spécial ([1]). Leurs solutions sont toutes régulières.

II. La lettre r n'entre pas dans toutes les équations (3). Cela est d'abord impossible si toutes les racines ω de l'équation fondamentale sont distinctes; car rien ne distingue dans la condition tirée des équations (3) une valeur r d'une autre, et cette condition, qui est algébrique en r, devra avoir n racines distinctes, et, par suite, être du degré n en r, ce qui ne pourra avoir lieu que si r entre dans toutes les équations (3).

([1]) *Annales de l'École Normale*, novembre 1886.

Supposons que l'équation fondamentale en ω ait une racine multiple d'ordre μ. Alors, à cette racine r' correspondra un groupe de μ solutions de la forme

$$\begin{aligned} y_{i1} &= x^{r'}\varphi_{i1}, \\ y_{i2} &= x^{r'}[\varphi_{i2}+\psi_{i1}\log x], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{i\mu} &= x^{r'}[\varphi_{i\mu}+\psi_{i\mu-1}\log x+\ldots+\theta_i\log^{\lambda-1}x], \end{aligned}$$

et, par conséquent, si l'on pose $y_i = x^{r'}\varphi_{i1}q_i$, les q_i étant de nouvelles inconnues, le système différentiel en $q_1, \ldots, q_n$ qu'on pourra former aura $\mu - 1$ solutions où r' sera nul ou entier correspondant à $y_{i2}, \ldots, y_{i\mu}$, et une solution où $q_1, q_2, \ldots, q_n$ seront en général égaux à 1.

Supposons qu'on ait pris toutes les précautions nécessaires pour que tous ceux des φ_i qui ne sont pas identiquement nuls ne s'annulent pas pour $x = 0$.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ les φ_i non identiquement nuls, et, par suite, $\varphi_{s+1}, \varphi_{s+2}, \ldots, \varphi_n$ les φ_i qui sont identiquement nuls.

Posons $u_i = x^{r'}\varphi_i$, en remplaçant par convention $\varphi_{s+1}, \ldots, \varphi_n$ qui sont nuls par l'unité, et faisons la substitution $y_i = u_i q_i$. Nous aurons

$$u_i q_i' = a_{i1}u_1 q_1 + \ldots + (a_{ii}u_i - u_i')q_i + \ldots + a_{in}u_n q_n.$$

Mais $\frac{1}{u_i}u_i' = \frac{r'}{x} + \frac{\varphi_i'}{\varphi_i}$.

Le système différentiel en q devient donc

$$(4) \qquad q_i' = a_{i1}\frac{\varphi_1}{\varphi_i}q_1 + \ldots + \left(a_{ii} - \frac{r'}{x} - \frac{\varphi_i'}{\varphi_i}\right)q_i + \ldots + a_{in}\frac{\varphi_n}{\varphi_i}q_n,$$

et ce système admet la solution

$$q_1 = 1, \qquad \ldots, \qquad q_s = 1, \qquad q_{s+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad q_n = 0,$$

de sorte qu'on a identiquement

$$a_{i1}\frac{\varphi_1}{\varphi_i} + \ldots + a_{is}\frac{\varphi_s}{\varphi_i} = 0.$$

Si l'on pose

$$q_i = x^r(q_i^0 + q_i^1 x + q_i^2 x^2 + \ldots),$$

on devra, pour déterminer les coefficients q_i^k, égaler les mêmes puissances de x dans les deux membres de chacune des équations

$$\frac{r}{x} q_i^0 + q_i^1 x + \ldots) + q_i^1 + 2 q_i^2 x + \ldots$$
$$= \left(\frac{a_{i1}^0}{x^{\varepsilon_{i1}}} + \frac{a_{i1}^1}{x^{\varepsilon_{i1}-1}} + \ldots\right) \frac{\varphi_1^0 + \ldots}{\varphi_i^0 + \ldots} (q_1^0 + \ldots) + \ldots,$$

et l'on aura d'abord n équations de la forme

$$(5) \qquad \left(\left(a_{i1}^0 \frac{\varphi_1^0}{\varphi_i^0} q_1^0 + \ldots + a_{ii}^0 - r' - r) q_i^0 + \ldots + a_{in}^0 \frac{\varphi_n^0}{\varphi_i^0} q_n^0\right)\right) = 0.$$

La double parenthèse indique encore ici que tous les termes écrits ne doivent pas nécessairement figurer, mais qu'aucun terme non écrit ne peut entrer dans ces équations.

Considérons une équation (3), la première par exemple,

$$(((a_{11}^0 - r) \varphi_1^0 + a_{12}^0 \varphi_2^0 + \ldots + a_{1n}^0 \varphi_n^0)) = 0.$$

Tous les termes entrant effectivement dans cette équation correspondent à la plus basse puissance de x dans la première des équations (1). Les termes correspondants formeront la première des équations (5)

$$\left(\left((a_{11}^0 - r' - r) q_1^0 + a_{12}^0 \frac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} q_2^0 + \ldots + a_{in}^0 \frac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} q_n^0\right)\right) = 0,$$

et, par conséquent, à la condition tirée des équations (3)

$$(3_1) \qquad \begin{Vmatrix} a_{11}^0 - r & a_{12}^0 & \ldots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 - r & \ldots & a_{2n}^0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \ldots & a_{nn}^0 - r \end{Vmatrix} = 0$$

correspondra élément à élément la condition

$$(5_1) \qquad \begin{Vmatrix} a_{11}^0 - r' - r & a_{12}^0 \frac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} & \ldots & a_{1n}^0 \frac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ a_{21}^0 \frac{\varphi_1^0}{\varphi_2^0} & a_{22}^0 - r' - r & \ldots & a_{2n}^0 \frac{\varphi_n^0}{\varphi_2^0} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1}^0 \frac{\varphi_1^0}{\varphi_n^0} & a_{n2}^0 \frac{\varphi_2^0}{\varphi_n^0} & \ldots & a_{nn}^0 - r' - r \end{Vmatrix} = 0$$

tirée des équations (5). Les doubles barres ont le même sens conventionnel que les doubles parenthèses.

La seconde condition se met facilement sous la forme

$$\left\| \begin{matrix} a^0_{11} - r' - r & a^0_{12} & \dots & a^0_{1n} \\ a^0_{21} & a^0_{22} - r' - r & \dots & a^0_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ a^0_{n1} & a^0_{n2} & \dots & a^0_{nn} - r' - r \end{matrix} \right\| = 0,$$

c'est-à-dire que la condition (5_1) est identique à la condition (3_1) quand on a remplacé r par $r' + r$.

Cela posé, rappelons que la solution

$$q_1 = 1, \quad \dots, \quad q_s = 1, \quad q_{s+1} = 0, \quad \dots, \quad q_n = 0$$

donne les relations

$$a_{i2} \frac{\varphi_1}{\varphi_i} + \dots + a_{is} \frac{\varphi_s}{\varphi_i} = 0.$$

Par suite, les équations (4) pourront se mettre sous la forme

$$q'_i = a_{i2} \frac{\varphi_2}{\varphi_i} (q_2 - q_1) + \dots + a_{is} \frac{\varphi_s}{\varphi_i} (q_s - q_1) + a_{i,s+1} q_{s+1} + \dots + a_{in} \frac{\varphi_n}{\varphi_i} q_n.$$

Posons alors

$$q_h - q_1 = z_h \quad \text{et} \quad q_{s+k} = z_{s+k} \qquad (h = 1, 2, \dots, s);$$

nous aurons un nouveau système différentiel en $z_2, \dots, z_n$ de la forme

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} z'_h &= \left(a_{h2} \frac{\varphi_2}{\varphi_h} - a_{12} \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) z_2 + \dots + \left(a_{hh} - r' - a_{1h} \frac{\varphi_h}{\varphi_1}\right) z_h \\ &\quad + \left(a_{h,s+1} \frac{\varphi_{s+1}}{\varphi_h} - a_{1,s+1} \frac{\varphi_{s+1}}{\varphi_1}\right) z_{s+1} + \dots + \left(a_{hn} \frac{\varphi_n}{\varphi_h} - a_{1n} \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right) z_n, \\ z'_{s+k} &= a_{s+k,2} \frac{\varphi_2}{\varphi_{s+k}} z_2 + \dots + (a_{s+k,s+k} - r') z_{s+k} + \dots + a_{s+k,n} \frac{\varphi_n}{\varphi_{s+k}} z_n. \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose

$$z_i = x^{r'} (z^0_i + z^1_i x + z^2_i x^2 + \dots),$$

on devra, pour déterminer les coefficients constants z^λ_i, égaler les mêmes puissances de x dans les deux membres de chacune des équations

$$
\begin{aligned}
\frac{r}{x}(z_h^0+\ldots)+z_h^1+\ldots = {} & \left[\left(\frac{a_{h2}^0}{x^{\varepsilon_{h2}}}+\ldots\right)\frac{\varphi_2^0+\ldots}{\varphi_h^0+\ldots}-\left(\frac{a_{12}^0}{x^{\varepsilon_{12}}}+\ldots\right)\frac{\varphi_2^0+\ldots}{\varphi_1^0+\ldots}\right](z_2^0+\ldots) \\
& +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& +\left[\left(\frac{a_{hn}^0}{x^{\varepsilon_{hn}}}+\ldots\right)\frac{\varphi_n^0+\ldots}{\varphi_h^0+\ldots}-\left(\frac{a_{1n}^0}{x^{\varepsilon_{1n}}}+\ldots\right)\frac{\varphi_n^0+\ldots}{\varphi_1^0+\ldots}\right](z_n^0+\ldots) \\
& +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

On aura d'abord n équations de la forme

$$
(7)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& \left(\left(\left(a_{h2}^0\frac{\varphi_2^0}{\varphi_h^0}-a_{12}^0\frac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0}\right)z_2^0+\ldots\right)\right)=0 \\
& \text{ou} \\
& \left(\left(a_{s+k,2}^0\frac{\varphi_2^0}{\varphi_{s+k}^0}\,z_2^0+\ldots\right)\right)=0.
\end{aligned}
\right.
$$

A ces équations (7) correspondra la condition

$$
(7_1)\qquad \left\|
\begin{matrix}
a_{22}^0-a_{12}^0\frac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0}-r'-r & a_{23}^0\frac{\varphi_3^0}{\varphi_2^0}-a_{13}^0\frac{\varphi_3^0}{\varphi_1^0} & \ldots & a_{2n}^0\frac{\varphi_n^0}{\varphi_2^0}-a_{1n}^0\frac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\
a_{32}^0\frac{\varphi_2^0}{\varphi_3^0}-a_{12}^0\frac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} & a_{33}^0-a_{13}^0\frac{\varphi_3^0}{\varphi_1^0}-r'-r & \ldots & a_{3n}^0\frac{\varphi_n^0}{\varphi_3^0}-a_{1n}^0\frac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
a_{h2}^0\frac{\varphi_2^0}{\varphi_h^0}-a_{12}^0\frac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} \quad \ldots & a_{hh}^0-a_{1h}^0\frac{\varphi_h^0}{\varphi_1^0}-r'-r & \ldots & a_{hn}^0\frac{\varphi_n^0}{\varphi_h^0}-a_{1n}^0\frac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\
\ldots\ldots \quad \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
a_{s+k,2}\frac{\varphi_2^0}{\varphi_{s+k}^0} \quad \ldots & a_{s+k,s+k}^0-r'-r & \ldots & a_{s+k,n}^0\frac{\varphi_n^0}{\varphi_{s+k}^0} \\
\ldots\ldots \quad \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots
\end{matrix}
\right\| = 0.
$$

Comparons cette condition à celle qu'on tire des équations (5), c'est-à-dire à

$$
(5_1)\qquad \left\|
\begin{matrix}
a_{11}^0-r'-r & a_{12}^0\frac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} & \ldots & a_{1n}^0\frac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
a_{n1}^0\frac{\varphi_1^0}{\varphi_n^0}\ldots & \ldots\ldots & \ldots & a_{nn}^0-r'-r
\end{matrix}
\right\| = 0.
$$

Tenons compte des conditions

$$\left(\left(a_{i1}^0 \frac{\varphi_1^0}{\varphi_i^0} + \ldots + a_{ii}^0 - r' + \ldots + a_{is}^0 \frac{\varphi_s^0}{\varphi_i^0}\right)\right) = 0,$$

qui résultent du fait que les équations (5) admettent la solution

$$q_1 = 1, \quad \ldots, \quad q_s = 1, \quad q_{s+1} = 0, \quad \ldots, \quad q_n = 0.$$

Ajoutons dans (5_1) les s premières colonnes pour remplacer la première, nous aurons

$$(5_2) \qquad \left\|\begin{matrix} -r & a_{12}^0 \dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} & \ldots & a_{1n}^0 \dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ -r & a_{22}^0 - r' - r & \ldots & a_{2n}^0 \dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_2^0} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & a_{s+k,2}^0 \dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_{s+k}^0} & \ldots & a_{s+k,n}^0 \dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_{s+k}^0} \\ . & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\| = 0.$$

Rien ne nous empêche de supposer que dans (5_1) les éléments de la première ligne horizontale correspondent à la puissance la plus élevée de $\frac{1}{x}$ dans les équations (5). Avec cette hypothèse, retranchons la première ligne horizontale de (5_2) des $s - 1$ suivantes; nous aurons

$$\left\|\begin{matrix} -r & a_{12}^0 \dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} & \ldots & a_{1n}^0 \dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ 0 & a_{22} - a_{12}^0 \dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} - r' - r & \ldots & a_{2n}^0 \dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_2^0} - a_{1n}^0 \dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ . & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & a_{s+k,2}^0 \dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_{s+k}^0} & \ldots & a_{s+k,n}^0 \dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_{s+k}^0} \\ . & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\| = 0$$

ou encore

$$r f(r) = 0,$$

en appelant $f(r) = 0$ la condition (7_1).

Nous voyons donc que les racines en r de (5_1) sont égales aux racines de (3_1) diminuées de r', et que les racines de (7_1) sont celles de (5_1) à l'exception de la racine 0.

Cela posé, nous avons admis que le système (1) ou le système équivalent sur lequel nous raisonnons admet un groupe de solutions correspondant à la racine r'. Il faudra donc que l'équation (7_1) admette la racine $r = r' - r'$ ou o, et, par suite, $rf(r) = 0$, ou (5_2), admettra deux fois la racine o, ou encore l'équation (3_1) admettra au moins deux fois la racine r'.

Plus généralement, si (7_1) admet $k - 1$ fois la racine o (ou un nombre entier à la place de o), l'équation (3_1) admettra k racines r' (ou r' augmenté d'un nombre entier).

On remarquera que, si le système (3) admet des solutions $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$ différentes de zéro, c'est que ce système renferme effectivement n équations. Il en sera de même des équations (5), et enfin les équations (7) seront effectivement au nombre de $n - 1$.

Nous pouvons alors raisonner sur le système en z, comme nous avons raisonné sur le système en y, et nous verrons que, si l'équation fondamentale en ω a une racine multiple d'ordre μ, il faudra que l'équation (3_1) ait μ racines r' correspondantes, différant entre elles de zéro ou de nombres entiers.

Par conséquent, l'équation (3_1) en r, ayant autant de racines distinctes ou confondues que l'équation fondamentale en ω a de racines, est nécessairement du degré n dans tous les cas, et, par suite, *si la lettre r entre dans l'une des équations* (3), *elle entrera dans toutes les équations* (3) *tirées d'un système pour lequel on ait $\varphi_0^i \neq 0$, à moins que φ_i ne soit identiquement nul.*

Il ne nous reste donc que deux cas possibles à examiner :

Premier cas. — Les équations (3) ne renferment pas la lettre r.

Second cas. — La lettre r entre dans toutes les équations (3).

Ce second cas correspond à un système canonique. Il ne nous reste donc à examiner que le premier cas.

Supposons donc que la lettre r n'entre pas dans les équations (3). Ces équations auront la forme

$$((a_{i1}^0 \varphi_n^0 + \ldots + a_{i1}^0 \varphi_n^0)) = 0.$$

Les plus hautes puissances de $\frac{1}{x}$ se rencontrent au moins dans une des équations (1). Nous pourrons déterminer des nombres constants

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, tels que

$$((\lambda_1 a^0_{11} + \ldots + \lambda_n a^0_{n1})) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$((\lambda_1 a^0_{1n} + \ldots + \lambda_n a^0_{nn})) = 0,$$

et nous poserons

$$v = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n.$$

Nous aurons alors, en ajoutant les équations (1) multipliées respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$,

$$\lambda_1 y'_1 + \ldots + \lambda_n y'_n$$

ou

$$v' = (\lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_n a_{n1}) y_1 + \ldots + (\lambda_1 a_{1n} + \ldots + \lambda_n a_{nn}) y_n.$$

Tous les λ ne sont pas nuls. Soit $\lambda_i \neq 0$. Nous pourrons alors éliminer y_i par l'équation

$$y_i = -\frac{1}{\lambda_i} v - \frac{\lambda_1}{\lambda_i} y_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} y_n,$$

et nous aurons un système en $v, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$, où l'exposant de $\frac{1}{x}$, dans la première équation en v, aura diminué au moins d'une unité, sans avoir augmenté dans les autres équations.

Mais alors nous raisonnerons sur ce système comme nous avons raisonné sur le système (1), et nous arriverons, par des substitutions successives, à un système où la lettre r apparaîtra. Si l'on s'arrange alors pour que tous les φ^0_i soient différents de zéro, à moins que φ_i ne soit identiquement nul, on aura à ce moment un système canonique.

Il pourra se présenter le cas singulier où l'on aurait identiquement

$$\lambda_1 a_{i1} + \ldots + \lambda_n a_{in} = 0$$

et, par suite,

$$v' = 0.$$

On aura alors à considérer un système de la forme

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} y'_i = \mathrm{A}_{i1} y_1 + \ldots + \mathrm{A}_{in-1} y_{n-1} + \mathrm{A}_i y_n, \\ y'_n = 0 \end{cases}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

En supposant toutes les solutions régulières, on devra admettre que les solutions où l'on a $y_n = 0$ sont aussi régulières. Donc le système

$$(\beta) \qquad y'_i = A_{i1} y_1 + \ldots + A_{in-1} y_{n-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

a toutes ses solutions régulières. Les substitutions qui ramènent (β) à la forme canonique ramèneront les coefficients de (α) à la forme canonique, sauf en ce qui concerne les termes en y_n. Supposons donc que le système (β) tiré de (α) ait la forme canonique et posons $A_i = \frac{B_i}{x^\varepsilon}$, de sorte que les B_i soient holomorphes et ne s'annulent pas tous pour $x = 0$. Si l'on fait alors $y_n = x^\varepsilon z$, on a le système canonique

$$y'_i = A_{i1} y_1 + \ldots + A_{in-1} y_{n-1} + B_i z,$$
$$z' = -\frac{\varepsilon}{x} z$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

En résumé, *tout système d'équations différentielles linéaires et homogènes (à solutions régulières) peut être ramené à la forme canonique par des substitutions successives de la forme xy à y, ou $v = \lambda_i y_1 + \ldots + \lambda_n y_n$ à l'un des y, les λ étant des constantes convenablement choisies.*

3. Faisons quelques applications de la théorie précédente.

Soit, d'abord, le système

$$y'_1 = \frac{p_1}{x^{\varpi_1}} y_1 + \frac{p_2}{x^{\varpi_2}} y_2 + \ldots + \frac{p_n}{x^{\varpi_n}} y_n,$$
$$y'_i = y_{i-1}, \qquad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Ce système correspond à l'équation linéaire et homogène d'ordre n

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{p_1}{x^{\varpi_1}} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{p_2}{x^{\varpi_2}} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{p_n}{x^{\varpi_n}} y,$$

et, par conséquent, nous nous proposons de retrouver les conditions bien connues pour que cette équation d'ordre n ait toutes ses intégrales régulières.

Si nous posons $y_i = x^r \varphi_i$, nous supposerons d'abord que nous pouvons donner à r une valeur différente de o ou d'un nombre entier.

Nous aurons alors

$$\frac{r}{x}(\varphi_1^0+\ldots)+\varphi_1^1+\ldots=\frac{p_1}{x^{\varpi_1}}(\varphi_1^0+\ldots)+\ldots+\frac{p_n}{x^{\varpi_n}}(\varphi_n^0+\ldots),$$

$$\frac{r}{x}(\varphi_i^0+\ldots)+\varphi_i^1+\ldots=\varphi_{i-1}^0+\ldots\quad(i=2,\ldots,n).$$

Les dernières équations donnent $\varphi_2^0=0$, ..., $\varphi_n=0$ et, par suite, la première équation donne $\varphi_1^0=0$, à moins que $\varpi_1=1$. Donc il faut $\varpi_1=1$.

Supposons cette condition remplie et posons

$$y_i=xu_i\quad(i=1,2,\ldots,n).$$

Nous aurons

$$y'_1=\frac{p_1}{x}y_1+\frac{p_2}{x^{\varpi_2-1}}u_2+\ldots+\frac{p_n}{x^{\varpi_n-1}}u_n,$$

$$xu'_i+u_i=xu_{i-1}\qquad\text{ou}\qquad u'_i=u_{i-1}-\frac{u_i}{x},$$

ce que nous écrirons

$$y'_1=\frac{p_1}{x}y_1+\frac{p_2}{x^{\varpi_2-1}}y_2+\ldots+\frac{p_n}{x^{\varpi_n-1}}y_n,$$

$$y'_2=\frac{1}{x}y_1-\frac{1}{x}y_2,$$

$$y'_i=y_{i-1}-\frac{1}{x}y_i\quad(i=3,4,\ldots,n).$$

Faisons

$$y_k=x^r(\varphi_k^0+\varphi_k^1x\ldots)\quad(k=1,2,\ldots,n);$$

nous aurons

$$\frac{r}{x}(\varphi_1^0+\ldots)+\varphi_1^1+\ldots=\frac{p_1}{x}(\varphi_1^0+\ldots)+\ldots+\frac{p_n}{x^{\varpi_n-1}}(\varphi_n^0+\ldots),$$

$$\frac{r}{x}(\varphi_2^0+\ldots)+\varphi_2^1+\ldots=\frac{1}{x}(\varphi_1^0+\ldots)-\frac{1}{x}(\varphi_2^0+\ldots),$$

$$\frac{r}{x}(\varphi_i^0+\ldots)+\varphi_i^1+\ldots=(\varphi_{i-1}^0+\ldots)-\frac{1}{x}(\varphi_i^0+\ldots).$$

Nous tirons de là

$$(r+1)\varphi_2^0=\varphi_1^0,\qquad\text{d'où}\qquad\varphi_2^0=\frac{\varphi_1^0}{r+1},\qquad\text{et}\qquad\varphi_i^0=0.$$

Posons alors, dans le système précédent,

$$y_i = x u_i \quad \text{pour} \quad i = 3, 4, \ldots, n;$$

nous aurons

$$y'_1 = \frac{p_1}{x} y_1 + \frac{p_2}{x^{\varpi_2 - 1}} y_2 + \frac{p_3}{x^{\varpi_3 - 2}} u_3 + \ldots + \frac{p_n}{x^{\varpi_n - 2}} u_n,$$

$$y'_2 = \frac{y_1}{x} - \frac{y_2}{x},$$

$$x u'_3 + u_3 = y_2 - u_3 \qquad \text{ou} \qquad u'_3 = \frac{y_2}{x} - \frac{2 u_3}{x},$$

$$x u'_i + u_i = x u_{i-1} - u_i \qquad \text{ou} \qquad u'_i = u_{i-1} - \frac{2 u_i}{x}.$$

Nous écrirons ce système sous la forme

$$y'_1 = \frac{p_1}{x} y_1 + \frac{p_2}{x^{\varpi_2 - 1}} y_2 + \frac{p_3}{x^{\varpi_3 - 2}} y_3 + \ldots + \frac{p_n}{x^{\varpi_n - 2}} y_n,$$

$$y'_2 = \frac{1}{x} y_1 - \frac{1}{x} y_2,$$

$$y'_3 = \frac{1}{x} y_2 - \frac{2}{x} y_3,$$

$$y'_i = y_{i-1} - \frac{2}{x} y_i \quad (i = 4, 5, \ldots, n)$$

et, en faisant $y_i = x^r \varphi_i$, nous aurons

$$\frac{r}{x}(\varphi_i^0 + \ldots) + \varphi_i^1 + \ldots = (\varphi_{i-1}^0 + \ldots) - \frac{2}{x}(\varphi_i^0 + \ldots),$$

d'où nous tirerons

$$\varphi_i^0 = 0.$$

Au contraire, nous aurons

$$(r + 2)\varphi_3^0 = \varphi_2^0, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi_3^0 = \frac{\varphi_1^0}{(r+1)(r+2)}.$$

Nous sommes donc conduit à former des systèmes successifs par une loi facile à deviner, et, dans le dernier système auquel nous nous arrêterons, la première équation aura la forme

$$y'_1 = \frac{p_1}{x} y_1 + \frac{p_2}{x^{\varpi_2 - 1}} y_2 + \frac{p_3}{x^{\varpi_3 - 2}} y_3 + \ldots + \frac{p}{x^{\varpi_n - (n-1)}} y_n,$$

et, si l'on pose $y_i = x^r \varphi_i$, les fonctions φ_i ou bien seront identiquement nulles, ce qui ne sera pas le cas habituel, ou bien seront toutes différentes de zéro pour $x = 0$.

Mais maintenant il est visible que r apparaît toujours dans les équations en $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$; il faut donc qu'il apparaisse dans toutes ces équations et, en particulier, dans la première.

Il est évident qu'il faudra que tous les exposants $\varpi - h$ soient 1 ou un nombre plus petit. On aura donc les conditions connues

$$\varpi_2 \leqq 2, \qquad \varpi_3 \leqq 3, \qquad \ldots, \qquad \varpi_n \leqq n.$$

Reprenons l'équation d'ordre n et posons $y = x^\rho u$. Nous aurons une autre équation linéaire et homogène d'ordre n en u, et il est évident que, en posant pour une intégrale $u = x^r \varphi$, on pourra supposer que r n'est ni zéro ni un nombre entier. Le théorème est donc vrai dans tous les cas, comme on le verra facilement en revenant de l'équation en u à l'équation en y.

Comme seconde application de la théorie générale, nous allons chercher tous les cas où un système de deux équations linéaires et homogènes peut être ramené à la forme canonique, ou encore, si l'on veut, a deux solutions fondamentales régulières, ou encore a toutes ses solutions régulières.

Le système à étudier peut être mis sous la forme

$$y_1' = \left(\frac{a_{11}^0}{x^{\varepsilon_{11}}} + \frac{a_{12}^1}{x^{\varepsilon_{11}-1}} + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{a_{12}^0}{x^{\varepsilon_{12}}} + \frac{a_{12}^1}{x^{\varepsilon_{12}-1}} + \ldots\right) y_2,$$

$$y_2' = \left(\frac{a_{21}^0}{x^{\varepsilon_{21}}} + \frac{a_{21}^1}{x^{\varepsilon_{21}-1}} + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{a_{22}^0}{x^{\varepsilon_{22}}} + \frac{a_{22}^1}{x^{\varepsilon_{22}-1}} + \ldots\right) y_2,$$

Nous aurons à remplir les conditions

$$\frac{r}{x}(\varphi_1^0 + \ldots) + \varphi_1^1 + \ldots = \left(\frac{a_{11}^0}{x^{\varepsilon_{11}}} + \ldots\right)(\varphi_1^0 + \ldots) + \left(\frac{a_{12}^0}{x^{\varepsilon_{12}}} + \ldots\right)(\varphi_2^0 + \ldots),$$

$$\frac{r}{x}(\varphi_2^0 + \ldots) + \varphi_2^1 + \ldots = \left(\frac{a_{21}^0}{x^{\varepsilon_{21}}} + \ldots\right)(\varphi_1^0 + \ldots) + \left(\frac{a_{22}^0}{x^{\varepsilon_{22}}} + \ldots\right)(\varphi_2^0 + \ldots).$$

Profitons du théorème important d'après lequel $x(a_{11} + a_{22})$ est holomorphe pour simplifier de suite ces équations. Si $\varepsilon_{11} = 1 + \varepsilon'$ par exemple, il faudra que $\varepsilon_{22} = 1 + \varepsilon'$, et l'on aura de plus

$$a_{11}^i = -a_{22}^i = a^i \quad [i = 0, 1, 2, \ldots (\varepsilon' - 1)].$$

Nous aurons alors à étudier les équations

$$\frac{r}{x}(\varphi_1^0+\ldots)+\varphi_1^1+\ldots=\left(\frac{a^0}{x^\varepsilon}+\frac{a^1}{x^{\varepsilon-1}}+\ldots\right)(\varphi_1^0+\ldots)+\left(\frac{a_{12}^0}{x^{\varepsilon_{12}}}+\ldots\ldots\ldots\right)(\varphi_2^0+\ldots),$$

$$\frac{r}{x}(\varphi_2^0+\ldots)+\varphi_2^1+\ldots=\left(\frac{a_{21}^0}{x^{\varepsilon_{21}}}+\ldots\ldots\ldots\right)(\varphi_1^0+\ldots)-\left(\frac{a^0}{x^\varepsilon}+\frac{a^1}{x^{\varepsilon-1}}+\ldots\right)(\varphi_2^0+\ldots).$$

Nous considérerons d'abord le cas où l'on a $\varepsilon = 1$.

Soient d'abord $\varepsilon_{12} > 1$ et $\varepsilon_{21} > 1$, on aura $\varphi_1^0 = 0$, $\varphi_2^0 = 0$. On ne peut accepter ce résultat, car l'un au moins des φ_1^0 et φ_2^0 est différent de zéro dans le cas d'une solution régulière; donc les solutions ne sont pas toutes régulières (et même il n'y en a ici aucune régulière).

Le cas de $\varepsilon_{12} = 1$, $\varepsilon_{21} > 1$ est analogue au précédent. En effet, on a, dans ce cas,

$$\varphi_2^0 = 0, \qquad (r + a^0)\,\varphi_2^0 = a_{21}^0\,\varphi_1^0$$

ou encore

$$\varphi_1^0 = 0, \qquad \varphi_2^0 = 0.$$

Soit donc le cas $\varepsilon_{12} > 1$ et $\varepsilon_{21} < 1$. On aura encore $\varphi_2^0 = 0$, et rien ne fixera φ_1^0. Alors remplaçons y_2 par xy_2, nous aurons

$$y_1' = a_{11}y_1 + x a_{12} y_2,$$

$$y_2' = \frac{a_{21}}{x}y_1 + \left(a_{22} - \frac{1}{x}\right)y_2.$$

On a donc un système analogue au précédent, mais où ε_{12} est diminué d'une unité, tandis que ε_{21} est augmenté d'une unité. On en conclut que plusieurs substitutions successives (ou une seule à la fois) donneront un système où l'on aura $\varepsilon_{21} = 1$ ou $\varepsilon_{12} = 1$. On rentrera dans les cas déjà étudiés ou bien on aura un système canonique.

Donc, dans le cas de $\varepsilon = 1$, les systèmes à solutions régulières sont de la forme

$$y_1' = \frac{a_{11}}{x}y_1 + \frac{a_{12}}{x^{1+\varepsilon'}}y_2,$$

$$y_2' = \frac{a_{21}}{x^{1-\varepsilon'}}y_1 + \frac{a_{22}}{x}y_2,$$

où ε' est un nombre entier et les a des fonctions holomorphes quelconques.

Abordons le cas de $\varepsilon > 1$.

Pour simplifier la question, on pourra toujours supposer $\varepsilon_{12} = \varepsilon$. C'est une question facile de substitutions. Il suffit donc de considérer les équations

$$\frac{r}{x}(\varphi_1^0 + \ldots) + \varphi_1^1 + \ldots = \left(\frac{a^0}{x^\varepsilon} + \ldots\right)(\varphi_1^0 + \ldots) + \left(\frac{a_{12}^0}{x^\varepsilon} + \ldots\right)(\varphi_2^0 + \ldots),$$
$$\frac{r}{x}(\varphi_2^0 + \ldots) + \varphi_2^1 + \ldots = \left(\frac{a_{21}^0}{x^{\varepsilon_1}} + \ldots\right)(\varphi_1^0 + \ldots) - \left(\frac{a^0}{x^\varepsilon} + \ldots\right)(\varphi_2^0 + \ldots).$$

On a

$$a^0 \varphi_1^0 + a_{12}^0 \varphi_2^0 = 0, \qquad ((a_{21}^0 \varphi_1^0)) - ((a^0 \varphi_2^0)) = 0.$$

Il faut nécessairement imaginer que les deux termes de la seconde équation existent ensemble, sans quoi l'on aurait $\varphi_1^0 = 0$, $\varphi_2^0 = 0$.

On aura donc $\varepsilon_1 = \varepsilon$.

Ensuite on aura la condition

$$\begin{vmatrix} a^0 & a_{12}^0 \\ a_{21}^0 & -a^0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on pose alors

$$\lambda_1 = a_{21}^0, \qquad \lambda_2 = -a^0 \qquad \text{et} \qquad z = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = a_{21}^0 y_1 - a^0 y_2,$$

on aura

$$z' = a_{21}^0 y_1' - a^0 y_2',$$

d'où

$$z' = a_{21}^0 \left(\frac{a y_1 + a_{12} y_2}{x^\varepsilon}\right) - a^0 \left(\frac{a_{21} y_1 - a y_2}{x^\varepsilon}\right)$$

ou

$$z' = \frac{a_{21}^0 [(a^0 + a^1 x + \ldots) y_1 + (a_{12}^0 + a_{12}^1 x + \ldots) y_2] - a^0 [(a_{21}^0 + \ldots) y_1 - (a^0 + \ldots) y_2]}{x^\varepsilon},$$

ou encore

$$z' = \frac{1}{x^\varepsilon} \left\{ (a_{21}^0 a^0 - a^0 a_{21}^0) y_1 + [a_{21}^0 a_{12}^0 + (a^0)^2] y_2 + x(M_1 y_1 + M_2 y_2) \right\}$$

ou simplement

$$z' = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2}{x^{\varepsilon - 1}}.$$

Il est évident que, si maintenant on remplace y_2 par

$$\frac{\alpha_{21}^0}{\alpha^0}y_1 - \frac{z}{\alpha^0},$$

on aura un nouveau système en y_1 et z, où l'exposant ε devra être ramené à $\varepsilon - 1$. Cela imposera des conditions nécessaires pour que toutes les solutions en z et y_1 ou en y_1 et y_2 soient régulières. En continuant à diminuer ainsi l'exposant ε jusqu'à le ramener à 1, si toutes les conditions qu'on rencontre sont satisfaites, on aura finalement un système canonique.

Faisons une application numérique en vérifiant que le système

$$y'_1 = \left(-\frac{1}{x^2} + \alpha_{11}^0 + \alpha_{11}^1 x + \ldots\right)y_1 + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \alpha_{12}^0 + \alpha_{12}^1 x + \ldots\right)y_2,$$

$$y'_2 = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \alpha_{21}^0 + \alpha_{21}^1 x + \ldots\right)y_1 + \left(\frac{1}{x^2} + \alpha_{22}^0 + \alpha_{22}^1 x + \ldots\right)y_2$$

a toutes ses solutions régulières.

On a d'abord $-\varphi_1^0 + \varphi_2^0 = 0$ pour les deux équations, ou encore $\varphi_2^0 = \varphi_1^0$.

Posons alors $z = y_2 - y_1$, et éliminons y_2 par la relation $y_2 = z + y_1$, il viendra

$$y'_1 = \left(-\frac{1}{x^2} + \ldots\right)y_1 + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \ldots\right)(z + y_1),$$

$$z' + y'_1 = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \ldots\right)y_1 + \left(\frac{1}{x^2} + \ldots\right)(z + y_1);$$

d'où l'on tirera

$$y'_1 = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \ldots\right)z + \left(\frac{1}{x} + \ldots\right)y_1,$$

$$z' = \left(\frac{1}{x} + \ldots\right)z + (\lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots)y_1.$$

Si l'on pose $y = x^r\varphi_1$, $z = x^r\varphi_2$, on a

$$\frac{r}{x}\varphi_2^0 = \frac{1}{x}\varphi_2^0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi_2^0 = 0.$$

On est donc conduit à remplacer z par xz, ce qui donnera

$$y'_1 = \left(\frac{1}{x} + \ldots\right) z + \left(\frac{1}{x} + \ldots\right) y_1,$$

$$z' = (\mu_0 + \mu_1 x + \ldots) z + \frac{\lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots}{x} y_1,$$

ce qui est un système canonique.

Dans le cas particulier où les λ sont nuls, et où les α sont nuls aussi, on est ramené au système

$$y' = \left(\frac{1}{x} + 1\right) z + \frac{1}{x} y, \qquad z' = 0;$$

mais cet exemple n'offre aucune difficulté dans une étude directe.

4. Nous venons de démontrer le théorème général suivant :

Tout système d'équations différentielles linéaires et homogènes, dont toutes les solutions sont régulières, peut être ramené à la forme canonique par des substitutions successives de la forme

$$v = \lambda_1 x^{\alpha_1} y_1 + \ldots + \lambda_n x^{\alpha_n} y_n,$$

l'inconnue v remplaçant ensuite l'une des lettres y.

Il est facile de voir que cet énoncé doit être substitué à celui que nous avons donné dans notre deuxième Mémoire (*Annales de l'École Normale*, janvier 1888).

Nous allons montrer maintenant que, si l'on ne veut pas se servir de la substitution que nous venons d'indiquer, on peut considérer déjà les solutions non transformées du système (1) comme appartenant à un autre système d'équations de forme canonique. Ce point de vue théorique peut être utile dans certaines questions.

Je vais donc démontrer la proposition suivante :

Lorsqu'un système de n équations différentielles linéaires et homogènes a toutes ses solutions régulières, ces solutions appartiennent toutes à un système canonique de n' équations, $n' \geqq n$.

Soit un système d'équations de la forme

$$(1) \qquad y'_i = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En dérivant ces équations et en éliminant, au moyen des équations (1), les dérivées qui se présentent, on forme facilement un système d'équations de la forme

$$(2)\quad \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ y_1'' = A_{21}y_1 + \ldots + A_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_1^{(n)} = A_{n1}y_1 + \ldots + A_{nn}y_n, \end{cases}$$

et toutes les solutions du système (1) conviennent au système (2).

On peut considérer ces équations comme étant du premier degré en $y_2, \ldots, y_n$, et, comme ces équations sont satisfaites en même temps par les mêmes valeurs de $y_2, \ldots, y_n$ tirées des solutions du système (1), on en conclut que toutes les valeurs de y_1 qui entrent dans les solutions du système (1) satisfont à la condition de compatibilité

$$\begin{vmatrix} y_1' - a_{11}y_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n)} - A_{n1}y_1 & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette condition développée donne une équation linéaire et homogène d'ordre n en y_1. L'ordre n peut s'abaisser dans certains cas.

Supposons maintenant que toutes les solutions du système (1) soient régulières. Tous les éléments y_1 seront des intégrales régulières d'une équation linéaire et homogène d'un ordre au plus égal à n.

Rappelons maintenant certaines propriétés d'une équation linéaire et homogène, d'ordre h par exemple.

Si toutes les intégrales de cette équation sont régulières, l'équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{d^h y}{dx^h} + \frac{p_1}{x}\frac{d^{h-1}y}{dx^{h-1}} + \ldots + \frac{p_h}{x^h}y = 0,$$

où les p sont des fonctions holomorphes dans le domaine de l'origine.

Si toutes les intégrales ne sont pas régulières, celles des intégrales qui sont régulières satisfont à une équation linéaire et homogène de la forme précédente, mais dont l'ordre est égal au nombre de ces intégrales régulières, et, par suite, inférieur à h. Résumons sur ce point la théorie donnée par M. Floquet (¹).

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, Supplément de l'année 1879.

Une équation différentielle linéaire et homogène dont les coefficients ne contiennent qu'un nombre limité de puissances de $\frac{1}{x}$ est dite *réductible* quand elle a au moins une intégrale commune avec une autre équation différentielle linéaire et homogène d'ordre moindre, et dont les coefficients offrent le même caractère.

En partant de cette définition et de la notion d'expression différentielle composée, M. Floquet démontre le théorème suivant :

Si une équation a des intégrales régulières, il existe une autre équation de même forme dont toutes les intégrales sont les intégrales régulières de la première.

C'est précisément le théorème que nous voulions rappeler. Nous ajouterons que cette deuxième équation, n'admettant que des intégrales régulières, sera de la forme donnée plus haut.

Revenons au système (1) dont nous supposons toutes les solutions régulières. Nous pouvons affirmer que les éléments y_1 de ces solutions font partie des intégrales d'une équation linéaire dont toutes les intégrales sont régulières, et nous pouvons écrire

$$\frac{d^{h_1}y_1}{dx^{h_1}}+\frac{p_n}{x}\frac{d^{h_1-1}y_1}{dx^{h_1-1}}+\ldots+\frac{p_{h1}}{x^{h_1}}y_1=0.$$

De même, les y_2 satisferont à une équation analogue, et, en général, les éléments $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des solutions du système (1) satisferont respectivement aux n équations

$$\frac{d^{h_i}y_i}{dx^{h_i}}+\frac{p_{1i}}{x}\frac{d^{h_i-1}y_i}{dx^{h_i-1}}+\ldots+\frac{p_{hi}}{x^{h_i}}y_i=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{3}$$

Pour appliquer le théorème de M. Floquet, il faut que les coefficients des équations différentielles ne présentent qu'un nombre limité de puissances de $\frac{1}{x}$; mais il est facile de voir qu'il suffit pour cela que les coefficients des équations (1) satisfassent à cette même condition, et ce dernier point s'établit facilement dans le cas où toutes les solutions du système (1) sont régulières.

De tout ce qui précède, il résulte que les éléments des solutions du système (1) satisfont au système (3) formé de n équations à une seule variable chacune.

Considérons à part l'une des équations (3)

$$\frac{d^h y}{dx^h} + \frac{p_1}{x}\frac{d^{h-1}y}{dx^{h-1}} + \ldots + \frac{p_n}{x^n}y = 0.$$

Les fonctions $p_1, \ldots, p_n$ sont holomorphes dans le domaine de l'origine.

Posons

$$\begin{aligned} y &= x^{h-1}u_h, \\ \frac{dy}{dx} &= x^{h-2}u_{h-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{d^{h-1}y}{dx^{h-1}} &= u_1, \end{aligned}$$

Nous aurons d'abord

$$\frac{du_1}{dx} + \frac{p_1}{x}u_1 + \ldots + \frac{p_n}{x}u_h = 0,$$

et ensuite les deux équations

$$\frac{d^k y}{dx^k} = x^{h-k-1}u_{h-k} \quad \text{et} \quad \frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} = x^{h-k-2}u_{h-k-1};$$

nous tirerons de là

$$(h-k-1)x^{h-k-1}\frac{u_{h-k}}{x} + x^{h-k-1}\frac{du_{h-k}}{dx} = \frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} = x^{h-k-1}\frac{u_{h-k-1}}{x}$$

ou

$$\frac{du_{h-k}}{dx} = \frac{u_{h-k-1}}{x} - \frac{(h-k-1)u_{h-k}}{x}.$$

On aura donc le système de n équations linéaires et homogènes

$$\begin{aligned} &\frac{du_1}{dx} + \frac{p_1}{x}u_1 + \ldots + \frac{p_h}{x}u_h = 0, \\ &x\frac{du_2}{dx} = a_{21}u_1 + a_{12}u_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &x\frac{du_h}{dx} = a_{hh-1}u_{h-1} + a_{hh}u_h. \end{aligned}$$

Il est facile de donner à ce système la forme canonique.

On peut donc remplacer chaque équation (3) par un système canonique. Il est évident que l'ensemble de n systèmes canoniques indépendants forme lui-même un système canonique.

Dans le cas actuel, toute solution du système (1) convient au système canonique d'ensemble, dont le nombre des équations variera de n à n^2, et c'est ainsi que se trouve démontrée la proposition que nous avons énoncée plus haut.

5. Quelle que soit donc la manière dont on traite un système d'équations différentielles linéaires et homogènes, il faudra toujours, dans le cas de la régularité, arriver à considérer un système canonique, c'est-à-dire un système de la forme

$$xy'_i = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les coefficients a sont holomorphes dans le domaine de l'origine.

Il nous reste à étudier, spécialement au point de vue de la pratique du calcul, ces systèmes dont les propriétés font l'objet du premier Mémoire que j'ai publié, et de l'important Mémoire de M. Grünfeld. Nous avons peu de chose à ajouter.

Si l'on considère les équations (3) du premier paragraphe, elles prennent la forme

$$a^0_{i1}\varphi^0_1 + \ldots + (a^0_{ii} - r)\varphi^0_i + \ldots + a^0_{in}\varphi^0_n = 0.$$

Les doubles parenthèses ne sont plus nécessaires. Ces équations entraînent l'équation caractéristique en r, ou encore l'équation fondamentale déterminante, selon l'expression de M. Fuchs. Soit $f(r) = 0$ cette équation.

Il n'y a aucune difficulté à calculer les coefficients φ^0_i, φ^1_i, φ^2_i, ... par des calculs de proche en proche dans le cas où r est une racine simple. En effet, on voit facilement que, $f'(r)$ n'étant pas nul, tous les mineurs du premier ordre de $f(r)$ ne peuvent être nuls, et, par suite, le système en φ^0_1, ..., φ^0_n admet une solution et une seule pour les valeurs proportionnelles de ces inconnues φ^0_i.

Supposons que r soit une racine multiple de $f(r) = 0$, et, pour simplifier, prenons seulement une racine double. Nous aurons une solution de la forme

$$y_i = x^r(\psi_i + \varphi_i \log x).$$

En faisant l'identification, nous aurons à considérer les deux systèmes d'équations

$$x\left(\frac{r}{x}\varphi_i + \varphi_i'\right) = a_{i1}\varphi_1 + \ldots + a_{ii}\varphi_i + \ldots + a_{in}\varphi_n,$$

$$x\left(\frac{r}{x}\psi_i + \psi_i' + \frac{\varphi_i}{x}\right) = a_{i1}\psi_1 + \ldots + a_{ii}\psi_i + \ldots + a_{in}\psi_n.$$

Considérons le premier système, qui ne contient que les lettres φ. Nous en tirerons

$$a_{i1}^0\varphi_1^0 + \ldots + (a_{ii}^0 - r)\varphi_1^0 + \ldots + a_{in}^0\varphi_n^0 = 0.$$

Nous remarquerons que, r étant racine double de $f(r) = 0$, les mineurs du second ordre de $f(r)$ ne seront pas tous nuls, mais que les mineurs du premier ordre peuvent être nuls tous à la fois ou non. De là deux cas.

Supposons d'abord que les mineurs du premier ordre ne soient pas tous nuls. Alors les équations

$$a_{i1}^0\varphi_1^0 + \ldots + (a_{ii} - r)\varphi_i^0 + \ldots + a_{in}^0\varphi_n^0 = 0$$

ont une solution unique en $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$. On en conclut que les équations

$$x\left(\frac{r}{x}\varphi_i + \varphi_i'\right) = a_{i1}\varphi_1 + \ldots + a_{in}\varphi_n$$

admettent une solution et une seule, correspondant à la valeur donnée de r. De là cette conclusion, qu'à la valeur donnée de r correspondent deux solutions ayant les formes

$$y_{i1} = x^r\varphi_i,$$
$$y_{i2} = x^r(\psi_i + \varphi_i \log x),$$

et, pour achever de déterminer la seconde de ces solutions, il suffit de calculer les fonctions ψ_i (nous retrouvons là un théorème connu sur le coefficient de la plus haute puissance de $\log x$).

Les ψ_i satisfont au système d'équations

$$x\left(\frac{r}{x}\psi_i + \psi_i' + \frac{\varphi_i}{x}\right) = a_{i1}\psi_1 + \ldots + a_{jn}\psi_n,$$

et l'on doit avoir d'abord

$$a_{i1}^0\psi_1^0 + \ldots + (a_{ii}^0 - r)\psi_i^0 + \ldots + a_{in}^0\psi_n^0 = \varphi_i^0.$$

Ces équations devant admettre une solution, et le déterminant des coefficients des inconnues $f(r)$ étant nul, il faut que ce système se compose seulement de $n-1$ équations, linéairement distinctes : on peut prendre pour ces $n-1$ équations celles dans lesquelles entre le déterminant des coefficients des inconnues $\psi_1^0, \ldots, \psi_{n-1}^0$; ce déterminant est un mineur du premier ordre de $f(r)$, et l'on peut supposer ce mineur différent de zéro. On pourra alors calculer $\psi_1^0, \ldots, \psi_{n-1}^0$ en fonction de ψ_n^0 arbitraire, et de $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$ déjà calculés.

La suite du calcul des coefficients $\psi_i^1, \psi_i^2, \ldots$ n'offre aucun intérêt.

Supposons maintenant que tous les mineurs du premier ordre de $f(r)$ soient nuls. Alors, dans les équations

$$a_{i1}^0\varphi_1^0 + \ldots + (a_{ii}^0 - r)\varphi_i^0 + \ldots + a_{in}^0\varphi_n^0 = 0,$$

on peut prendre arbitrairement deux des inconnues φ_n^0 et φ_{n-1}^0 et exprimer les autres inconnues $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_{n-2}^0$ en fonction de ces deux-là. De là résulte que l'on pourra construire deux solutions

$$y_{i1} = x^r\varphi_{i1},$$
$$y_{i2} = x^r\varphi_{i2}$$

linéairement distinctes. Il suffira pour cela que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi_{n-1\,1}^0 & \varphi_{n\,1}^0 \\ \varphi_{n-1\,2}^0 & \varphi_{n\,2}^0 \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Toute solution $y_i = x^r\theta_i$, correspondant à la même racine r, sera composée linéairement avec les solutions y_{i1}, y_{i2}, car il n'y a que deux solutions linéairement distinctes correspondant à une racine double r de $f(r) = 0$. Donc, dans le cas qui nous occupe, le logarithme disparaît.

Nous n'insisterons pas sur ces remarques de calcul, la théorie générale n'étant plus à faire [1].

---

[1] Au sujet de l'extension de la théorie des solutions régulières aux équations différentielles à plusieurs variables indépendantes, on consultera avec fruit l'important Mémoire publié par M. Horn dans les *Acta mathematica* (octobre 1888) sous le titre *Ueber ein System linearer partieller Differentialgleichungen*.