ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

C. GUICHARD

Sur les intégrales $\int \frac{G(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 5 (1888), p. 193-210

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1888_3_5__193_0>

SUR LES INTÉGRALES $\int \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$,

PAR M. C. GUICHARD,

MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

INTRODUCTION.

J'étudie ici les intégrales $\int \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$, où $G(x)$ représente une fonction entière, et $R(x)$ un polynôme. En cherchant les périodes d'une telle intégrale, on voit qu'on peut la décomposer en deux parties : l'une qui n'a pas de période et qui est immédiatement intégrable; l'autre qui est l'intégrale d'une différentielle algébrique.

Après avoir effectué cette réduction, je m'occupe de celles de ces intégrales qui ont seulement une ou deux périodes. Les premières conduiront à la résolution des deux problèmes suivants, qui sont intimement liés l'un à l'autre :

1° *Trouver toutes les fonctions entières d'un point d'une courbe* (fonctions qui n'ont de points singuliers qu'à l'infini) *qui ne s'annulent jamais*.

La résolution de ce problème établit une différence entre les fonctions uniformes sur un plan et les fonctions uniformes sur une sphère de Riemann. Dans le premier cas, une fonction qui a un seul point singulier et pas de zéros a son logarithme uniforme. Il n'en est pas de même dans le second cas.

2° *Trouver tous les couples de fonctions entières* X *et* Y, *qui satisfont à l'équation*

$$X^2 + Y^2 - 1 = 0,$$

autrement dit, *trouver toutes les transformations entières d'un cercle en une courbe algébrique*.

Pour certaines courbes particulières, il peut se faire que X et Y soient des polynômes. Les modules de périodicité des intégrales de première et de troisième espèce satisfont à des relations que nous indiquons.

Nous n'avons pas étudié les transformations méromorphes du cercle en courbes algébriques, parce que la nature de nos intégrales ne conduit pas à ce genre de transformations. Ensuite, on sait que parmi ces transformations il en existe une infinité qui sont algébriques.

Le problème que nous avons traité pour un cercle peut être étudié de la même façon pour une courbe unicursale.

Enfin les intégrales qui ont deux périodes permettent de trouver des transformations uniformes de la courbe elliptique.

Réduction de l'intégrale $\int \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$.

1. *Périodes de l'intégrale*

$$\int_0^x \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Soit $R(x) = (1 - a_1 x)(1 - a_2 x)\ldots(1 - a_{2p+2} x)$ un polynôme de degré $2p + 2$; $G(x)$ une fonction de x; je me propose de chercher les diverses valeurs de l'intégrale

$$u = \int_0^x \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

en un point x, en supposant que l'on parte de l'origine avec la valeur $+1$ du radical.

Pour cela, formons des lacets qui vont de l'origine aux points $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, ..., $\frac{1}{a_{p+2}}$. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_{2p+2}$ les valeurs de l'intégrale suivant ces lacets. Désignons par u_1 la valeur de l'intégrale obtenue en allant de o en x suivant un chemin déterminé.

Les valeurs de l'intégrale, quand le chemin qui mène en x est quelconque, sont comprises dans l'une ou l'autre des deux séries suivantes

$$u_1 + m_1(A_2 - A_1) + m_2(A_3 - A_1) + \ldots + m_{2p+1}(A_{2p} - A_1),$$
$$A_1 - u_1 + n_1(A_2 - A_1) + n_2(A_3 - A_1) + \ldots + n_{2p+1}(A_{2p+2} - A_1),$$

où les m et les n sont des entiers positifs ou négatifs.

Cette intégrale a alors, en général, $(2p+1)$ périodes :

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= A_2 - A_1,\\
\omega_2 &= A_3 - A_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\omega_{2p+1} &= A_{2p+2} - A_1.
\end{aligned}$$

Je montrerai d'ailleurs que ces périodes peuvent être prises arbitrairement si l'on choisit convenablement la fonction $G(x)$.

Il peut arriver aussi, dans certains cas particuliers, que ces périodes se réduisent à un nombre moindre.

2. *Cas où l'intégrale n'a pas de périodes.*

Si $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p+1}$ sont nuls, les quantités $A_1, A_2, \ldots, A_{2p+2}$ ont la même valeur. Soit A cette valeur commune. Alors, en chaque point x, l'intégrale ne peut prendre que deux valeurs; si u_1 est l'une d'elles, l'autre sera $A - u_1$.

Si l'on pose

$$v = u - \frac{A}{2},$$

la fonction v a en chaque point des valeurs égales et de signes contraires; elle reste finie en même temps que x. De plus, $v\sqrt{R(x)}$ est uniforme. Donc

$$v\sqrt{R(x)} = \varphi_1(x),$$

φ_1 étant une fonction entière. Mais φ_1 doit s'annuler en même temps que $R(x)$; car, sans cela, v serait infini pour des valeurs finies de x. Donc

$$v = \sqrt{R(x)}\,\varphi(x)$$

et

$$u = \frac{A}{2} + \sqrt{R(x)}\,\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction entière de x.

Si maintenant on différentie u par rapport à x, on trouve

$$G(x) = \tfrac{1}{2} R'(x) \varphi(x) + R(x) \varphi'(x).$$

Réciproquement, si cette relation est vérifiée, l'intégrale u n'a pas de périodes. Le nombre A est alors donné par l'équation

$$A = -2 \varphi(0).$$

3. *Réduction de l'intégrale u.*

Désignons par u_q l'intégrale

$$\int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt{R(x)}};$$

par $b_{q1}, b_{q2}, \ldots, b_{q,2p+1}$ les périodes de cette intégrale qui correspondent respectivement aux mêmes lacets que $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p+1}$. Il peut se faire d'ailleurs que ces périodes ne soient pas toutes distinctes : c'est ce qui arrive si q est plus petit que $p+1$. Mais cela importe peu. Dans tous les cas, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{12p+1} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{22p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ b_{2p+1,1} & b_{2p+1,2} & \ldots & b_{2p+1,2p+1} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

En effet, s'il en était autrement, on pourrait trouver un polynôme $F(x)$, de degré $2p$,

$$F(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \ldots + \lambda_{2p+1} x^{2p},$$

tel que l'intégrale

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

n'ait pas de périodes. Par suite, on aurait l'identité

$$F(x) = \tfrac{1}{2} R'(x) \varphi(x) + R(x) \varphi'(x),$$

φ étant un polynôme. Or cette identité est impossible, le degré du second membre étant, quel que soit φ, supérieur à $2p$.

Δ étant différent de zéro, on pourra déterminer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2p+1}$ par les équations

$$\omega_i = \lambda_1 b_{1i} + \lambda_2 b_{2i} + \ldots + \lambda_{2p+1} b_{2p+1,i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p+1).$$

Alors l'intégrale

$$\int \frac{G(x) - \lambda_1 - \lambda_2 x - \lambda_3 x^2 - \ldots - \lambda_{2p+1} x^{2p}}{\sqrt{R(x)}} dx$$

n'a pas de périodes; elle est égale à

$$\varphi(x)\sqrt{R(x)},$$

φ étant une fonction entière. On en déduit, pour u, la valeur

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_{2p+1} u_{2p+1} + \varphi(x)\sqrt{R(x)}$$

et, pour $G(x)$, la relation

$$(1) \quad G(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \ldots + \lambda_{2p+1} x^{2p} + \tfrac{1}{2} R'(x)\varphi(x) + R(x)\varphi'(x).$$

Cette décomposition de $G(x)$ ne peut, d'après ce qui précède, être faite que d'une seule manière.

4. *Calcul des coefficients* λ *et de la fonction* φ.

Faisons, en particulier, dans la formule (1), $G(x) = x^n$; nous aurons l'identité

$$x^n = \lambda_{1,n} + \lambda_{2,n} x + \ldots + \lambda_{2p+1,n} x^{2p} + \tfrac{1}{2} R'(x)\varphi_n(x) + R(x)\varphi'_n(x).$$

Les formules de réduction des intégrales hyperelliptiques permettent de calculer de proche en proche les éléments de cette identité. Si

$$R(x) = A_0 x^{2p+2} + A_1 x^{2p+1} + \ldots,$$

on a, pour les λ, les formules de récurrence

$$\lambda_{i,2p+1+k} A_0[\tfrac{1}{2}(2p+2) + k] + \lambda_{i,2p+k} A_1[\tfrac{1}{2}(2p+1) + k] + \ldots + \lambda_{i,k-1} = 0$$
$$(i = 1, 2,, \ldots, 2p+1).$$

Pour les φ, on a une équation qui ne diffère de la précédente que par le second membre, qui est alors x^k.

Si maintenant on suppose

$$G(x) = \sum^{\infty} B_n x^n,$$

on aura les formules

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda_i &= \sum_0^\infty \lambda_{i,n} B_n, \\ \varphi &= \sum_0^\infty \varphi_n B_n \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, 2p+1).$$

Pour démontrer ces relations, décomposons $G(x)$ en deux parties,

$$G(x) = G_q(x) + g(x)$$

où

$$G_q(x) = \sum_0^{q-1} B_n x^n,$$

$$g(x) = \sum_q^\infty B_n x^n;$$

on aura, en appliquant la formule (1) à ces fonctions

$$\begin{aligned} G_q(x) &= \mu_1 + \mu_2 x + \mu_3 x^2 + \ldots + \mu_{2p+1} x^{2p} + \tfrac{1}{2} R'(x) \psi(x) + R(x) \psi'(x), \\ g(x) &= \nu_1 + \nu_2 x + \nu_3 x^2 + \ldots + \nu_{2p+1} x^{2p} + \tfrac{1}{2} R'(x) \chi(x) + R(x) \chi'(x). \end{aligned}$$

En comparant avec (1), on a

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \mu_i + \nu_i, \\ \varphi &= \psi + \chi. \end{aligned}$$

D'autre part, les formules (2) sont applicables à G_q, qui est un polynôme; donc

$$\mu_i = \sum_0^{q-1} h_{i,n} B_n,$$

$$\psi = \sum_0^{q-1} \psi_n B_n.$$

Il suffira donc de montrer, pour légitimer les formules (2), que ν_i et χ deviennent infiniment petits quand q croît indéfiniment.

Or on pourra choisir q suffisamment grand pour que, à l'intérieur d'une aire qui renferme tous les lacets, le module de $g(x)$ soit moindre que toute quantité donnée.

L'intégrale

$$\int \frac{g(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

prise suivant un lacet quelconque, devient infiniment petite quand q croît indéfiniment. Il en est de même des périodes, par suite des quantités ν. La formule de décomposition de $g(x)$ montre que, dans ces conditions, χ devient infiniment petit.

Intégrales simplement périodiques.

1. *Formation d'intégrales qui n'ont qu'une période.*

La formule

$$G(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \ldots + \lambda_{2p+1} x^{2p} + \tfrac{1}{2} R'(x)\,\varphi(x) + R(x)\,\varphi'(x)$$

montre que les deux intégrales

$$\int \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \int \frac{\lambda_1 + \lambda_2 x + \ldots + \lambda_{2p+1} x^{2p}}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$

ont les mêmes périodes. On peut donc, dans la recherche des périodes, raisonner sur des différentielles algébriques.

Nous savons qu'on peut choisir $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2p+1}$ de façon à donner aux $2p+1$ périodes des valeurs arbitraires. Nous pourrons donc former $2p+1$ intégrales particulières, ayant une seule période égale à 2π. Nous désignerons ces intégrales par $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{2p+1}$; ν_i est choisi de telle sorte que ses périodes sont

$$\omega_k = 0 \quad (k \gtrless i),$$
$$\omega_i = 2\pi.$$

Les intégrales ainsi formées sont linéairement indépendantes. Toute intégrale de la forme

$$\nu = \int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

où $F(x)$ est un polynôme de degré $2p$ au plus, est une combinaison linéaire de $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{2p+1}$. Celles des intégrales ν, dont toutes les périodes sont des multiples de 2π, sont de la forme

$$\nu = m_1\nu_1 + m_2\nu_2 + \ldots + m_{2p+1}\nu_{2p+1},$$

où les m sont des nombres entiers.

Si le plus grand commun diviseur des nombres m est l'unité, l'intégrale ν n'a qu'une seule période égale à 2π. C'est là la forme générale des intégrales qui jouissent de cette propriété.

2. *Fonctions uniformes d'un point de la courbe $y^2 = R(x)$, ayant des points singuliers à l'infini seulement et qui ne s'annulent jamais.*

Toute fonction uniforme sur la courbe $y^2 = R(x)$, qui reste finie avec x, est de la forme

$$\varphi(x) + y\,\psi(x),$$

φ et ψ étant des fonctions entières. Il est clair que les fonctions

$$\pi = e^{\varphi + y\psi} \tag{1}$$

n'ont de points singuliers qu'à l'infini et ne s'annulent jamais. Mais ce ne sont pas les seules qui jouissent de ces propriétés.

En effet, les fonctions

$$\pi_i = e^{\sqrt{-1}\,\nu_i} \tag{2}$$

satisfont à ces deux conditions, sauf le cas où l'infini ν_i devient infini comme un logarithme. Alors, en l'un des points situés à l'infini, π_i aurait un zéro et, en l'autre point, un pôle; mais cela ne peut arriver que pour l'une au plus des $2p+1$ fonctions (2) et seulement pour des courbes hyperelliptiques à modules particuliers.

Je dis maintenant que toutes les fonctions cherchées s'obtiennent en multipliant les fonctions (1) par les fonctions (2). En effet, soit F une telle fonction. Sa dérivée logarithmique est uniforme; de plus, elle ne peut être discontinue que pour x infini ou pour les points critiques. On en conclut l'équation

$$\frac{F'_x}{F} = \frac{f(x) + y f_1(x)}{y}$$

f et f_1 étant des fonctions entières.

En intégrant, on aura

$$LF = \int f_1(x)\,dx + \int \frac{f(x)\,dx}{y}.$$

La première intégrale est une fonction entière de x; la seconde est une de celles que nous avons étudiées. Comme toutes ces périodes doivent être des multiples de $2i\pi$, on en conclut

$$\int \frac{f(x)\,dx}{y} = \varphi(x)\sqrt{R(x)} + i(m_1\nu_1 + m_2\nu_2 + \ldots + m_{2p+1}\nu_{2p+1})$$

et, par suite,

$$F = e^{\int f_1(x)dx}\, e^{\varphi(x)\sqrt{R(x)}}\, \pi_1^{m_1}\pi_2^{m_2}\ldots\pi_{2p+1}^{m_{2p+1}},$$

où les m sont des entiers positifs ou négatifs.

3. *Solutions entières de l'équation différentielle*

$$\frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} = \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Soit $X = \varphi(x)$ une fonction entière qui vérifie cette équation différentielle. Égalons les deux différentielles à $d\nu$, de telle sorte qu'on ait

$$d\nu = \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} = \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

La première équation est résolue de la manière la plus générale, en faisant

$$X = \cos(\nu + \alpha);$$

$\cos(\nu + \alpha)$ étant une fonction uniforme de x, l'intégrale

$$\int \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

a pour périodes des multiples de 2π.

Réciproquement, s'il en est ainsi, l'équation différentielle admet une solution entière. En effet, soit A la valeur de l'intégrale

$$\nu = \int_0^x \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

prise suivant un lacet quelconque. Les valeurs de l'intégrale en un point x_1 sont, abstraction faite de multiples de 2π,

$$\nu \quad \text{et} \quad A-\nu;$$

par conséquent,

$$\cos\left(\nu - \frac{A}{2}\right)$$

ne possède qu'une seule valeur en chaque point x; cette fonction reste finie en même temps que x. C'est une fonction entière de x $\varphi(x)$. Cette fonction étant une solution de l'équation différentielle, on a

$$\frac{\varphi'^2}{1-\varphi^2} = \frac{G^2}{R},$$

$$R\varphi'^2 = (1-\varphi^2)G^2.$$

On voit, d'après cela, R n'ayant que des facteurs simples, que $1-\varphi^2$ est divisible par R et que le quotient est un carré parfait. La fonction entière φ satisfait à la relation

$$1-\varphi^2 = R\psi^2. \tag{1}$$

Réciproquement, si une fonction entière φ satisfait à l'équation (1), c'est une solution d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varphi^2}} = \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

En effet, le premier membre de cette équation se transforme, en vertu de (1), en

$$\frac{\varphi'(x)\,dx}{\psi(x)\sqrt{R(x)}}.$$

Il suffit donc de montrer que φ' contient tous les zéros de ψ. Or, en différentiant la relation (1), on trouve

$$-2\varphi\varphi' = \psi(R'\psi + 2\psi' R);$$

mais φ et ψ n'ont pas de zéros communs. Il en résulte que φ' est divisible par ψ.

Notre méthode permet de trouver toutes les fonctions entières qui satisfont à l'équation (1).

En effet, nous aurons déjà $2p+1$ solutions particulières $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2p+1}$ qui correspondent respectivement aux intégrales $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{2p+1}$, de telle sorte que

$$\varphi_i(x) = \cos(\nu_i - \alpha_i),$$

les α_i étant des constantes convenablement choisies.

Si maintenant φ est une solution quelconque, l'intégrale ν qui lui correspond pourra s'écrire

$$\nu = \chi(x)\sqrt{\mathrm{R}(x)} + m_1\nu_1 + m_2\nu_2 + \ldots + m_{2p+1}\nu_{2p+1}$$

ou encore

$$\nu - \mathrm{A} = \chi(x)\sqrt{\mathrm{R}(x)} + m_1(\nu_1 - \alpha_1) + m_2(\nu_2 - \alpha_2) + \ldots + m_{2p+1}(\nu_{2p+1} - \alpha_{2p+1}),$$
$$\mathrm{A} = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots + m_{2p+1}\alpha_{2p+1}.$$

Dans ces conditions, le second membre prend en chaque point x des valeurs égales et de signes contraires, abstraction faite de multiples de 2π. La fonction $\varphi(x)$ est égale à $\cos(\nu - \mathrm{A})$; on voit alors comment elle se déduit des fonctions φ_i et de la fonction

$$\cos\left[\chi(x)\sqrt{\mathrm{R}(x)}\right].$$

4. *Transformations entières du cercle en courbe hyperelliptique.*

Si maintenant on pose

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \varphi(x), \\ \mathrm{Y} = y\,\psi(x), \end{cases}$$

à chaque point de la courbe $y^2 = \mathrm{R}(x)$ on fait correspondre un point du cercle $\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - 1 = 0$.

Les formules (2) donnent une substitution entière qui transforme le cercle en une courbe hyperelliptique.

On peut déduire de là des transformations un peu plus générales, qui sont données par les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathrm{X} = f(x) + y\,f_1(x), \\ \mathrm{Y} = \mathrm{F}(x) + y\,\mathrm{F}_1(x). \end{cases}$$

Puisque $\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - 1$ doit être nul, les quatre fonctions f doivent vérifier les deux relations

$$f^2 + F^2 + R(x)[f_1^2 + F_1^2) - 1 = 0, \tag{4}$$

$$ff_1 + FF_1 = 0. \tag{5}$$

Soit maintenant φ_1 une fonction qui contient les zéros communs à f et à F; ψ_1 une autre qui contient les zéros communs à f_1 et F_1. La relation (5) peut s'écrire

$$\frac{f}{\varphi_1}\frac{f_1}{\psi_1} + \frac{F}{\varphi_1}\frac{F_1}{\psi_1} = 0.$$

Les fonctions $\frac{f}{\varphi_1}, \frac{F_1}{\psi_1}$ d'une part, les fonctions $\frac{f_1}{\psi_1}, \frac{F}{\varphi_1}$ d'autre part, ont les mêmes zéros. Elles ne diffèrent donc que par un facteur de la forme $e^{\lambda(x)}$. On peut supposer qu'on ait fait entrer ce facteur dans φ_1 ou ψ_1, de sorte qu'on peut écrire

$$\frac{f}{\varphi_1} = \frac{F_1}{\psi_1}, \qquad \frac{f_1}{\psi_1} = -\frac{F}{\varphi_1}.$$

En portant ces valeurs dans (4), on trouve

$$[\varphi_1^2 + R(x)\psi_1^2]\left[\left(\frac{f_1}{\psi_1}\right)^2 + \left(\frac{F_1}{\psi_1}\right)^2\right] - 1 = 0.$$

Les deux parenthèses ne s'annulant pour aucune valeur de x, on pourra les représenter : la première par $e^{2g(x)}$, la seconde par $e^{-2g(x)}$. Si alors on fait

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= e^{g(x)}\varphi,\\
\psi_1 &= e^{g(x)}\psi,\\
\frac{f_1}{\psi_1} &= -e^{-g(x)}\pi,\\
\frac{F_1}{\psi_1} &= +e^{-g(x)}\pi_1,
\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}
\varphi^2 + R(x)\psi^2 &= 1,\\
\pi^2 + \pi_1^2 &= 1.
\end{aligned}$$

Nous savons déterminer toutes les fonctions entières φ et ψ qui satisfont à la première relation : ce sont celles qui entrent dans les substitutions (2).

La seconde relation montre que π et π_1 sont le sinus et le cosinus d'une même fonction entière ([1]). On peut donc poser

$$\pi = \sin\lambda(x), \qquad \pi_1 = \cos\lambda(x);$$

alors la substitution prend la forme

$$(3') \qquad \begin{cases} X = \varphi \cos\lambda(x) - y\,\psi \sin\lambda(x), \\ Y = \varphi \sin\lambda(x) + y\,\psi \cos\lambda(x). \end{cases}$$

On aurait pu arriver à ce résultat en partant des formules (3) et en exprimant que l'intégrale $\int \frac{dX}{Y}$, prise par rapport à x, n'a qu'une période et reste finie avec x.

Remarquons maintenant que les fonctions $X + iY$, $X - iY$ sont analogues aux fonctions formées dans le n° 2. Ce sont des fonctions qui ne s'annulent pour aucune valeur finie de x.

5. *Cas où* X *et* Y *sont des polynômes.*

D'après les formules (3'), si X et Y sont des polynômes, la fonction $\lambda(x)$ est une constante, φ et ψ sont des polynômes. Or on a toujours

$$\varphi + iy\,\psi = e^{i\nu},$$

ν étant une des intégrales qui ont pour périodes des multiples de 2π.

Si le premier membre est un polynôme, pour x infini, ν doit être infini logarithmique; $i\nu$ sera donc composé linéairement à l'aide des intégrales normales de première espèce et à l'aide de l'intégrale normale de troisième espèce qui est discontinue à l'infini.

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ les premières, U la dernière; désignons les modules de périodicité de u_k par

$$0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 2i\pi, \quad \ldots, \quad 0; \quad b_{k1}, \quad b_{k2}, \quad \ldots, \quad b_{pk};$$

les modules correspondants de U par

$$0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0; \quad 0, \quad B_1, \quad B_2, \quad \ldots, \quad B_p;$$

on aura

$$i\nu = +mU + m_1 u_1 + m_2 u_2 + \ldots + m_p u_p.$$

([1]) On démontre, en effet, très facilement que, si $\sin u$ et $\cos u$ sont des fonctions entières de x, il en est de même de u.

Toutes les périodes du premier membre étant des multiples de $2i\pi$, il faut déjà que les m soient entiers; de plus, il faut que l'on ait les p relations

$$(1) \qquad -m\mathrm{B}_i \equiv \sum_{k=1}^{k=p} m_k b_{ki} \qquad (i=1, 2, \ldots, p),$$

le signe $\equiv$ indiquant que les deux membres ne peuvent différer que de multiples de $2i\pi$.

Ces équations ne peuvent pas être satisfaites pour $m=0$, car alors il existerait une intégrale de première espèce ayant une seule période.

D'autre part, si l'on a un système de solutions des équations (1), on en obtiendra une infinité en multipliant tous les m par un entier quelconque.

Si, enfin, on a deux systèmes de solutions des équations (1), les inconnues m sont proportionnelles. En effet, soient deux systèmes de solutions

$$-m\,\mathrm{B}_i \equiv \Sigma m_k b_{ki},$$
$$-m'\mathrm{B}_i \equiv \Sigma m'_k b_{ki};$$

on en déduit

$$0 \equiv \Sigma(m_k m' - m'_k m) b_{ki}$$

et, par suite,

$$m_k m' - m'_k m = 0, \qquad k=(1, 2, \ldots, p).$$

D'après cela, quand les équations (1) peuvent être vérifiées, il y a un système de solutions pour lequel la valeur absolue des inconnues est minima; toutes les autres solutions peuvent se déduire de celle-ci en multipliant les inconnues par un même nombre entier.

On voit alors que, en général, X et Y ne sont pas des polynômes; mais si, pour une courbe donnée $y^2 = \mathrm{R}(x)$, on trouve une transformation algébrique entière, il y en aura une infinité.

Elles pourront toutes se déduire de l'une d'elles de la façon suivante: on donnera, dans les équations (1), aux inconnues leur valeur minima; on en déduira une transformation

$$\mathrm{X} = \varphi(x),$$
$$\mathrm{Y} = y\psi(x);$$

on posera

$$\varphi(x) = \cos t,$$
$$y\,\psi(x) = \sin t.$$

Les transformations les plus générales qui seront formées à l'aide de polynômes seront

$$X = \cos(nt + \alpha),$$
$$Y = \sin(nt + \alpha),$$

où n est un entier positif ou négatif et α une constante arbitraire.

Ainsi, si $R(x) = 1 - x^2$, on a la transformation évidente

$$X = x, \qquad Y = y,$$

d'où l'on déduit toutes les autres transformations algébriques entières.

Si $R(x) = (1 - x^2)(1 - k^2x^2)$, l'intégrale

$$\int \frac{a\,x\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

où a est choisi de telle sorte que la période soit 2π, conduit aux formules de transformation

$$X = -\frac{1+k^2}{1-k^2} + \frac{2k^2}{1-k^2}x^2,$$
$$Y = \frac{2ik}{1-k^2}y,$$

qui permet de former toutes les autres.

Intégrales doublement périodiques.

1. *Formation de ces intégrales.*

La recherche des périodes de l'intégrale $\int \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ se ramène à la recherche des périodes de $\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$, où $F(x)$ est un polynôme de degré $2p$ au plus; mais cette dernière est une combinaison linéaire de $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{2p+1}$. Soit donc

$$\nu = A_1\nu_1 + A_2\nu_2 + \ldots + A_{2p+1}\nu_{2p+1}$$

une de ces intégrales. Si ν a pour périodes $2\pi\alpha$, $2\pi\beta$, la valeur de ν, prise suivant le chemin qui donne la période de ν_i, sera

$$2\pi(m_i\alpha + n_i\beta),$$

m_i et n_i étant entiers; d'où il résulte

$$A_i = m_i\alpha + n_i\beta$$

et

$$\nu = \sum_1^{2p+1} (m_i\alpha + n_i\beta)\nu_i.$$

Si maintenant on prend une intégrale de cette forme, il est facile de trouver sa période suivant un cycle quelconque. Un tel cycle peut être remplacé par une combinaison des cycles qui donnent les périodes de $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{2p+1}$. Donc, en désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2p+1}$ des entiers quelconques, la période de ν suivant le cycle correspondant sera

$$2\pi\alpha\Sigma m_i\lambda_i + 2\pi\beta\Sigma n_i\lambda_i.$$

Si les m sont proportionnels aux n, il n'y a qu'une seule période; dans le cas contraire, il y a deux périodes.

Pour que les périodes soient réellement $2\pi\alpha$ et $2\pi\beta$, il faut que les nombres m et n soient tels qu'on puisse résoudre en nombres entiers les équations

$$\Sigma m_i\lambda_i = 1,$$
$$\Sigma n_i\lambda_i = 0$$

et

$$\Sigma m_i\lambda'_i = 0,$$
$$\Sigma n_i\lambda'_i = 1.$$

2. *Solutions méromorphes de l'équation différentielle*

$$\frac{dX}{\sqrt{(1-X^2)(1-k^2X^2)}} = \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Soit $X = \dfrac{f(x)}{\psi(x)}$ une solution méromorphe. Posons

$$d\nu = \frac{dX}{\sqrt{(1-X^2)(1-k^2X^2)}} = \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Faisons décrire à la variable x un cycle quelconque. L'intégrale

$$v = \int \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

prise suivant ce cycle, est une combinaison linéaire et entière des périodes. Mais X est revenu à sa valeur primitive; si donc 2ω, ω' sont les périodes de

$$\int \frac{dX}{\sqrt{(1-X^2)(1-k^2X^2)}},$$

toutes les périodes de

$$\int \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

seront de la forme

$$2m\omega + n\omega',$$

m et n étant entiers.

On a donc, d'après ce qui précède,

$$v = \int \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \chi(x)\,R(x) + \sum \left(m_i \frac{2\omega}{2\pi} + n_i \frac{\omega'}{2\pi}\right) v_i.$$

Réciproquement, s'il en est ainsi, l'équation différentielle admet une solution méromorphe.

En effet, en un point x, les valeurs de v sont, abstraction faite de multiples de 2ω et ω',

$$v \quad \text{et} \quad A - v.$$

Si donc

$$\alpha = \frac{A}{2} - \frac{\omega}{2},$$

$\operatorname{sn}(v-\alpha)$ a, en chaque point x, une seule valeur. Cette fonction a pour pôles tous les points x pour lesquels

$$v = \alpha + \frac{\omega'}{2} + m\omega + n\omega;$$

elle n'a de points singuliers qu'à l'infini. C'est donc une fonction méromorphe.

$R(x)$ étant donné, on voit que toutes les solutions cherchées se déduisent d'un certain nombre d'entre elles en appliquant les formules de l'addition et de la multiplication des arguments des fonctions elliptiques.

En exprimant que $\frac{f}{\psi}$ vérifie l'équation différentielle, on trouve

$$\frac{(f'\psi - \psi' f)^2}{(\psi^2 - f^2)(\psi^2 - k^2 f^2)} = \frac{G^2(x)}{R}.$$

Il en résulte que la fonction entière $(\psi^2 - f^2)(\psi^2 - k^2 f^2)$ est divisible par R et que le quotient est un carré parfait, de telle sorte que l'on a

$$(\psi^2 - f^2)(\psi^2 - k^2 f^2) = R\varphi^2.$$

Réciproquement, si f et ψ satisfont à cette équation, $\frac{f}{\psi}$ sera une solution de notre équation différentielle. Il suffit pour cela de montrer que φ divise $f'\psi - \psi' f$. Or tout zéro de φ est zéro double de l'un des facteurs $\psi - f$, $\psi + f$, $\psi + kf$, $\psi - kf$; mais on a

$$f'\psi - \psi' f = (\psi + af)f' - (\psi' + af')f;$$

par suite, tout zéro double de $\psi + af$ annule $f'\psi - \psi' f$.

Si maintenant on pose

$$X = \frac{f(x)}{\psi(x)}, \qquad Y = \frac{\varphi(x)}{\psi^2(x)} y,$$

à chaque point de la courbe $y^2 = R(x)$, on fait correspondre un point de la courbe

$$Y^2 = (1 - X^2)(1 - k^2 X^2).$$

En faisant

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \operatorname{sn}(t), \qquad \frac{\varphi(x)}{\psi^2(x)} y = \operatorname{cn}(t)\operatorname{dn}(t),$$

on aura d'autres transformations par les formules

$$X = \operatorname{sn}(mt + \alpha),$$
$$Y = \operatorname{cn}(mt + \alpha)\operatorname{dn}(mt + \alpha),$$

où α est une constante et m un entier.

Pour qu'il existe des transformations rationnelles algébriques, il faut et il suffit que l'intégrale ν soit formée uniquement d'intégrales de première espèce. (*Voir* à ce sujet un Mémoire de M^{me} de Kowalevsky, *Acta mathematica, IV.*)