ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON GOHIERRE DE LONGCHAMPS

Mémoire sur une nouvelle méthode de transformation en Géométrie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 3 (1866), p. 321-341

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1866_1_3__321_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1866, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉMOIRE

SUR UNE

NOUVELLE MÉTHODE DE TRANSFORMATION EN GÉOMÉTRIE,

PAR M. GOHIERRE DE LONGCHAMPS,

PROFESSEUR AU LYCÉE IMPÉRIAL DE MONT-DE-MARSAN.

PRÉLIMINAIRES. — Pour bien faire comprendre ce qui nous a dirigé dans ces recherches et la part qu'il y faut laisser à l'invention, il convient de dire quelques mots sur les idées qui nous ont servi de point de départ. Dans un Mémoire publié dans le *Journal de Crelle*, en 1831, sous le titre : *Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes en Géométrie*, M. Magnus a posé les principes généraux qui doivent s'appliquer dans toute méthode de déformation dans laquelle on fait correspondre un point à un point et aussi celle dans laquelle à une droite correspond une droite, puisqu'il suffit de transformer les résultats précédents par les polaires réciproques. Ces résultats sont : que toutes les fois que par une loi géométrique quelconque on fera correspondre un point d'une figure à un autre point, à une droite correspondra une conique passant par trois points fixes, que M. Magnus appelle les *points principaux;* et généralement à une courbe de l'ordre m correspond une courbe de l'ordre $2m$ ayant trois points multiples d'ordre m, les points principaux. Nous compléterons ceci tout d'abord en faisant connaître la classe de la courbe correspondante, quand celle de la proposée est donnée et égale à n. Le théorème ainsi complété s'énoncera :

THÉORÈME. — *Toutes les fois que dans une méthode de Géométrie comparée, à un point correspond un point, à une droite correspondra une conique passant par trois points fixes, et à une courbe de l'ordre m et de la classe n correspondra une courbe de l'ordre $2m$ et de la classe $2m+n$, ayant pour points multiples d'ordre m les trois points fixes.*

Soit en effet A la courbe proposée, laquelle est de l'ordre m et de la classe n;

soit A′ la courbe qui lui correspond et dont nous nous proposons de déterminer la classe, c'est-à-dire le nombre de tangentes qui peuvent lui être menées par un point a'. Soit a le point de la première figure qui correspond à a'; à une tangente menée par le pont a' à la courbe A′ correspond une conique passant par le point a, les trois points fixes, et qui de plus est tangente à la courbe A. Il y aura donc autant de ces tangentes qu'il y a de ces coniques. M. Chasles a démontré (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1er août 1864) que dans un système dont les caractéristiques sont μ et ν, il y a $n\mu + m\nu$ coniques tangentes à une courbe d'ordre m et de la classe n. Dans le cas présent, les coniques passant par quatre points, les caractéristiques sont 1 et 2; il y a donc $n + 2m$ coniques tangentes à la courbe A, ce qui prouve que la classe de la courbe A′ est $n + 2m$, comme nous l'avions annoncé.

En transformant ce théorème par les polaires réciproques, on obtient le théorème corrélatif qui sert pour le cas où l'on fait correspondre une droite à une droite, théorème dont nous ferons usage par la suite. Si l'on applique le théorème général que nous venons d'établir aux sections coniques, on trouve qu'à une conique correspond une courbe du quatrième ordre et de la sixième classe ayant trois points doubles. Il importe de remarquer que toute courbe du quatrième degré ayant trois points doubles peut être considérée comme la transformée d'une certaine section conique convenablement choisie, de telle sorte que les propriétés de ces courbes, déduites de celles des sections coniques par la méthode de M. Magnus, conviennent à toute courbe du quatrième degré, douée de trois points doubles, et non à une famille particulière de ces courbes.

Ce fait n'est pas, on le comprend, sans importance et peut se démontrer bien simplement. On peut voir tout d'abord que pour l'établir il n'est pas nécessaire de rester dans la généralité où M. Magnus s'est placé, mais qu'on peut choisir telle loi géométrique particulière qu'il nous conviendra d'adopter. Supposons, par exemple, que nous fassions correspondre une droite à une droite au moyen d'un triangle. Soient p, q, r les distances des sommets de ce triangle à la première droite, les coordonnées tangentielles de la droite, et p', q', r' celles de la seconde droite. Supposons que ces coordonnées soient liées entre elles par les relations

$$pp' = qq' = rr'$$

à une conique dont l'équation générale dans ce système de coordonnées est, comme on le sait,

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + Dpq + Eqr + Fpr = 0,$$

correspondra une courbe dont l'équation sera

$$\frac{A}{p'^2} + \frac{B}{q'^2} + \frac{C}{r'^2} + \frac{D}{p'q'} + \frac{E}{q'r'} + \frac{F}{p'r'} = 0.$$

Cette courbe est de la quatrième classe, et on peut reconnaître qu'elle admet pour tangentes doubles les côtés du triangle qui a servi à la déformation. Mais, *réciproquement*, si l'on cherche l'équation générale des courbes de la quatrième classe, on trouve une équation de cette forme, qui, transformée suivant la loi adoptée, donne naissance à une section conique, ce qui établit que toute courbe de la quatrième classe ayant trois tangentes doubles, peut être considérée comme la transformée d'une section conique convenablement choisie.

Ceci posé, nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de développer dans ses détails une méthode de transformation par correspondance d'une droite à une droite, la loi géométrique qui unit ces deux droites étant explicitement formulée. Pour le dire en passant, cette loi est celle que nous venons de traduire à l'instant par les formules

$$pp' = qq' = rr'.$$

On conçoit, en effet, que la correspondance d'une droite à une droite pouvant se faire suivant une infinité de lois, les propriétés déduites des coniques pour les courbes d'ordre supérieur diffèrent avec la loi adoptée, et qu'à côté du théorème qui résulte du seul fait que la courbe est considérée comme transformée d'une conique par correspondance d'une droite à une droite, théorème indépendant de la loi choisie pour établir cette correspondance, s'en ajoute un autre dépendant au contraire de cette loi. Il y a donc là un vaste sujet de recherches dont le succès dépend du choix plus ou moins heureux de la loi géométrique qui sert de point de départ, et c'est ce que l'on comprendra fort bien par l'exemple que nous allons en donner.

Méthode de transformation dite par transversales réciproques.

PRINCIPE. — *Étant donnés un triangle* ABC *et une transversale* abc, a *correspondant au côté* BC *et ainsi des autres, si l'on prend les points* a', b', c' *respectivement symétriques des points* a, b, c *par rapport aux points milieux des côtés du triangle sur lesquels ils sont placés, ces trois nouveaux points sont en ligne droite.*

C'est ce qui résulte immédiatement du théorème sur la transversale d'un triangle et de sa réciproque. Ces deux droites, tellement liées l'une à l'autre que la seconde se déduise de la première et inversement, peuvent être appelées *transversales réciproques*, et la méthode de transformation à laquelle elles donnent naissance, *méthode de transformation par transversales réciproques*. Ces deux droites sont liées l'une à l'autre par une loi bien facile à démontrer et que nous énonçons par le théorème suivant.

THÉORÈME I. — *La transversale réciproque est parallèle à la droite qui joint les points milieux du quadrilatère complet que forme la transversale proposée avec le triangle. Ces points milieux et les points où la transversale réciproque rencontre les côtés du triangle forment deux systèmes de points homothétiques; le centre de gravité est le centre de cette homothétie dont le rapport est celui de 2 à 1.*

Nous savons déjà par le théorème de Magnus, que nous avons rappelé en commençant, que dans un tel mode de transformation, à un point de la première figure correspond une conique tangente à trois droites fixes. Ces droites, dans le cas présent, ne sont autre chose que les trois côtés du triangle, ainsi qu'on s'en assure en considérant les droites qui passent par le point proposé et tendent à passer par un sommet du triangle. Mais ce point et cette conique sont liés l'un à l'autre par une loi extrêmement simple qui résulte, comme on va le voir, du théorème précédent.

Considérons, en effet, un point a de la première figure déterminé par deux droites que nous appellerons h et k, et soient h' et k' les droites réciproques de celles-ci. Au point a correspond une conique tangente à ces droites h' et k', et aux trois côtés du triangle; soit O le centre de cette conique. Si l'on considère le quadrilatère formé par la droite h' et les côtés du triangle, la droite qui joint les points milieux des diagonales de ce quadrilatère passe par le centre O de la conique inscrite : c'est le théorème de Newton. Mais nous savons, par le théorème précédent, que cette droite est parallèle à la droite h et que le centre de gravité du triangle proposé est deux fois plus éloigné de cette dernière que de l'autre. Si l'on fait le même raisonnement pour les droites k et k', on arrive à cette conclusion remarquable que le point a, le centre de gravité du triangle et le centre de la conique correspondant au point a sont trois points en ligne droite, et que le centre de gravité partage cette droite dans le rapport de 2 à 1. Nous énoncerons donc ce théorème, qui est fondamental dans cette théorie et qui, par sa simplicité, fait tout le succès du mode de déformation que nous exposons :

THÉORÈME II. — *A un point correspond une conique inscrite au triangle qui sert de base à la transformation; le point, le centre de gravité du triangle et le centre de la conique qui correspond au point sont trois points en ligne droite, et le rapport des distances du centre de gravité à ces deux points, rapport pris dans l'ordre que nous venons d'indiquer, est celui de 2 à 1.*

Si le point proposé est à l'infini, le centre de la conique correspondante s'éloigne lui-même à l'infini, la conique devient une parabole dont l'axe est parallèle à la direction donnée. Comme cette conséquence est importante, nous l'énoncerons par le corollaire suivant :

Corollaire. — *A un point à l'infini de la première figure correspond une parabole dont l'axe est parallèle à la direction donnée.*

On sait combien il est difficile le plus ordinairement de savoir ce que deviennent après une transformation les angles et surtout les propriétés métriques d'une figure donnée, et que si l'on transforme simplement les propriétés descriptives des figures, il n'en est pas de même des autres. Cette difficulté se trouve comme annulée dans le cas présent, et il nous a semblé que c'était là un fait digne de remarque.

En effet, si deux droites dans la première figure se meuvent de façon que l'angle qu'elles font obéisse à une certaine loi, reste constant par exemple, à ces deux droites correspondent deux droites, chacune d'elles détermine avec les trois côtés du triangle une parabole inscrite au quadrilatère ainsi formé, et les axes de ces paraboles étant parallèles aux droites proposées, l'angle de ces axes restera constant ou plus généralement suivra la loi indiquée pour les droites proposées. De même pour les propriétés métriques: si certains points dans la figure proposée sont liés par une certaine relation métrique, à ces points correspondront des coniques dont les centres, formant une figure semblable (Théorème II) à celle formée par les points, jouiront de la même propriété. En un mot, les angles ne se conservent pas dans cette transformation, mais se retrouvent sans altération sur des droites remarquables, qu'on déduit facilement des transversales réciproques, et les relations métriques entre des points se retrouvent modifiées dans le même rapport, conservées, par conséquent, dans les centres des coniques qui correspondent aux points donnés.

Tels sont les principes qui régissent notre mode de transformation, qui sont particuliers à la loi géométrique choisie pour faire correspondre une droite à une droite, et cessent d'être vrais pour une loi différente. Si nous avons bien expliqué notre pensée, on doit comprendre dès à présent l'avantage qui résulte du cas particulier dans lequel nous nous sommes placé, et c'est ce que nous ferons mieux voir encore par les applications que nous donnerons de cette méthode. Mais avant d'entrer dans cette seconde partie de ce travail, nous ferons connaître l'application que nous avons faite de ces transversales réciproques pour la recherche de la loi qui unit les centres de gravité des triangles qui composent un polygone complet.

Recherche du centre de gravité dans les polygones complets.

Expliquons ce que nous nous proposons dans cette recherche et disons tout d'abord que nous n'attachons à ce mot : *centre de gravité dans les polygones complets*, qu'un sens purement géométrique, ainsi qu'on le verra par la définition que nous en donnerons.

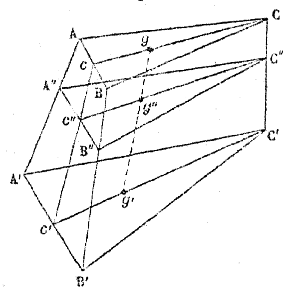
Considérons un point remarquable d'un triangle, c'est-à-dire un point défini par une certaine propriété géométrique, la même pour tous les triangles, et appelons ce point, sans le définir autrement, le point p du triangle. Si nous considérons un quadrilatère complet, nous pourrons dire que ce quadrilatère détermine quatre triangles que l'on obtient en faisant successivement abstraction d'une des droites données ; à ces quatre triangles correspondent quatre points p. Ces quatre points sont liés aux éléments du quadrilatère par une certaine loi plus ou moins simple, plus ou moins facile à découvrir, mais qu'on peut affirmer par avance exister nécessairement, puisqu'on ne peut faire disparaître en même temps une des droites données sans faire disparaître du même coup trois de ces points p. Il y a donc un certain lien entre cette droite et ces trois points qui s'évanouissent ainsi en même temps, et il y a là une loi géométrique qu'on peut se proposer de rechercher. Si cette loi est telle, qu'elle permette de conclure l'existence d'un certain point se déduisant du quadrilatère par une propriété toute semblable à celle qui a servi à définir le point p dans le triangle, nous pourrons assez naturellement appeler ce nouveau point le point p du quadrilatère complet. Si maintenant nous considérons un pentagone complet, qui détermine cinq quadrilatères complets que l'on obtient en faisant successivement abstraction d'une des droites proposées, à ces cinq quadrilatères correspondent cinq points p, et nous pourrons nous proposer de rechercher si la loi ne se continue pas pour ces cinq points, et s'il n'existe pas pour le pentagone complet un point p se déduisant de ces cinq points par la même propriété géométrique qui caractérise ces points. Et de même que, dans l'analyse, quand on soupçonne la loi que suivent les termes d'une série on suppose cette loi vraie pour le terme de rang $(n-1)$ et on démontre que la loi subsiste pour le terme de rang n, de même ici on supposera la loi vraie pour le polygone de $(n-1)$ droites et on démontrera qu'elle subsiste pour le polygone de n droites. C'est en nous laissant guider par ces idées générales, qui s'appliquent aussi bien aux polygones déterminés par des points, que nous avons fait connaître (*Revue des Sociétés savantes*, mars 1866) la loi très-simple qui unit les centres des cercles circonscrits aux divers triangles déterminés par un polygone complet de n droites. Ce qui suit est une application toute semblable de ces idées aux centres de gravité de ces triangles.

Le point de départ de cette étude est le théorème suivant.

THÉORÈME. — *Étant donné un triangle, on considère trois transversales de ce triangle se coupant deux à deux sur les côtés du triangle donné et leurs transversales réciproques qui se coupent également deux à deux sur les côtés du triangle proposé. Ces deux triangles, savoir : celui des transversales et celui des transversales réciproques, jouissent de la propriété que la droite qui joint leurs centres de gravité passe par le centre de gravité du triangle donné, et y est partagée en deux parties égales.*

Ce théorème n'est que la conséquence immédiate d'un théorème plus général. Considérons deux triangles ABC, A'B'C' situés d'une manière quelconque dans l'espace; joignons AA', BB', CC' et partageons ces droites respectivement aux

Fig. 1.



points A'', B'', C'' dans un même rapport, celui de m à n. Je dis que les trois triangles ABC, A''B''C'', A'B'C' ont leurs centres de gravité g, g'', g' en ligne droite, et que la droite gg' est partagée au point g'' dans le rapport de m à n. Si en effet nous considérons le quadrilatère gauche AB, A'B', et si nous considérons le point c milieu de AB, et le point c' milieu de A'B', c'est une propriété bien connue que cette droite ira rencontrer la droite A''B'', qui partage les côtés opposés AA' et BB' dans un même rapport, que le point c'' ainsi obtenu sera le milieu de A''B'', et que la droite cc' sera partagée en ce point c'' dans le rapport de m à n. Si maintenant nous menons les droites Cc, C''c'', C'c', que nous partagions la droite Cc au point g et la droite C'c' au point g', de façon que $\frac{gC}{gc} = 2$, $\frac{g'C'}{g'c'} = 2$, auquel cas les points g, g' sont les centres de gravité des triangles ABC, A'B'C'. La propriété que nous avons déjà invoquée nous montre que la droite gg' ira rencontrer la droite C''c'' en un point g'' qui sera tel :

1° Que $\frac{g''C''}{g''c''} = 2$, ce qui apprend que ce point g'' est le centre de gravité du triangle A''B''C'';

2° Que $\frac{g''g}{g''g'} = \frac{m}{n}$.

Ces deux conclusions nous donnent le théorème général, duquel nous allons conclure le théorème que nous avons annoncé. En effet, le triangle formé par les transversales, le triangle que l'on obtient en joignant les points milieux du triangle donné et le triangle formé par les transversales réciproques réalisent dans le plan la position des trois triangles ABC, A''B''C'', A'B'C', que nous avons considérés dans l'espace. Ici $m = 1$, $n = 1$, ce qui démontre le théorème.

Si maintenant nous considérons deux transversales réciproques abc, $a'b'c'$, les trois points a, b, c et les trois points a', b', c' peuvent être considérés comme formant deux triangles infiniment aplatis, occupant, l'un par rapport à l'autre, la position des triangles que nous avons considérés dans le théorème précédent. Nous concluons de cette remarque le corollaire suivant :

Corollaire. — *Étant donnée une transversale qui rencontre les côtés du triangle* ABC *aux points a, b, c, on considère la transversale réciproque, et soient a', b', c' les points où elle rencontre les côtés du triangle. Le centre de gravité des trois points a, b, c, le centre de gravité des trois points a', b', c' et le centre de gravité du triangle sont trois points en ligne droite; ce dernier partage la distance des deux autres en deux parties égales.*

Si nous rapprochons cette conclusion du théorème II démontré plus haut, nous arriverons, comme on va le voir, à un théorème fort simple sur les centres de gravité des triangles formés par un quadrilatère complet. Soit en effet ABCD un quadrilatère complet : si nous faisons abstraction de la droite D, il reste le triangle ABC, dont je désigne le centre de gravité par G. Considérons la droite D comme une transversale du triangle ABC, et soient a, b, c les points où elle rencontre les côtés de ce triangle. Imaginons la droite D' transversale réciproque de la droite D par rapport au triangle ABC, et soient a', b', c' les points où cette droite rencontre les côtés du triangle. Appelons enfin g le centre de gravité des points a, b, c, g' celui des points a', b', c', lesquels points sont en ligne droite avec le point G, ce point occupant le milieu de la distance gg', ainsi que nous l'avons établi. Si nous considérons en outre la droite qui joint les points milieux des diagonales du quadrilatère ABCD, ces trois points, dont j'appellerai γ le centre de gravité, forment, d'après le théorème II, un système homothétique à celui des trois points a', b', c', et le point G est le centre de cette homothétie, dont le rapport a pour valeur $\frac{1}{2}$. De là résulte que le point g' et le point γ, points homologues dans les deux systèmes, sont en ligne droite avec le point G, et que ce dernier partage la distance des deux centres dans le rapport de 1 à 2. De là résulte que les quatre points g', G, γ, g sont quatre points en ligne droite, et que le point γ est le milieu de Gg. Ce point γ étant un point indépendant de la droite du quadrilatère, dont il a plu de faire abstraction, nous en concluons ce théorème :

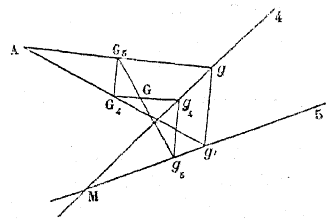
Théorème. — *Étant donné un quadrilatère complet, ce quadrilatère définit quatre triangles que l'on obtient en faisant successivement abstraction d'une des droites données. Que l'on considère l'un de ces triangles en particulier et que l'on joigne son centre de gravité au centre de gravité du système de trois points qui se trouvent sur la quatrième droite, les quatre droites que l'on peut ainsi obtenir concourent au même point et s'y partagent mutuellement en deux parties égales.*

On peut rapprocher bien naturellement ce théorème du théorème des médianes pour le triangle où l'on joint le sommet du triangle au point milieu du côté opposé, c'est-à-dire au centre de gravité des deux points qui se trouvent sur la droite dont on a fait abstraction pour considérer le sommet qui lui correspond. Dans cet ordre d'idées nous pourrons appeler le point que nous venons de trouver le *centre de gravité du quadrilatère complet,* en n'attachant, bien entendu, à ce mot qu'un sens purement géométrique et qui rappelle la manière dont on l'obtient.

Nous nous proposons de généraliser ce résultat. On sait ce que l'on appelle centre de gravité de n points, et nous rappelons que lorsqu'on suppose des masses égales appliquées en ces points, on obtient leur centre de gravité en joignant le centre de gravité de $(n-1)$ de ces points au $n^{ième}$, et partageant cette distance dans le rapport de 1 à $(n-1)$. Cette construction s'applique évidemment au cas où les points considérés sont en ligne droite.

Ceci posé, considérons un pentagone complet 1, 2, 3, 4, 5 formé par les cinq droites 1, 2, 3, 4, 5 indéfiniment prolongées; si nous faisons successivement abstraction des droites 5 et 4, nous obtenons les deux quadrilatères complets 1, 2, 3, 4 et 1, 2, 3, 5, dont je désigne les centres de gravité, points géométriques définis, comme nous l'avons vu tout à l'heure, par G_5 et G_4. Ces deux quadrilatères ont un triangle commun, le triangle 1, 2, 3; soit A le centre de gravité de ce triangle.

Fig. 2.



Le centre de gravité G_5 du quadrilatère 1, 2, 3, 4 s'obtient en joignant le point A au centre de gravité g des trois points (1, 4), (2, 4), (3, 4), et partageant la longueur ainsi obtenue en deux parties égales; de même le point G_4 s'obtient en joignant ce même point A au point g', centre de gravité des trois points (1, 5), (2, 5), (3, 5), et prenant le milieu de cette droite. Soit M le point de rencontre des droites 4 et 5; sur la droite 4 se trouvent quatre points (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4), le point g est le centre de gravité des trois premiers, et le quatrième point est le point M. D'après ce que nous avons rappelé, le centre de gravité g_4 de ces quatre points s'obtiendra en partageant la distance gM dans le rapport de 1 à 3. De même le centre de gravité g_5 des quatre points qui se trouvent sur la droite 5 s'obtiendra en partageant la distance g'M dans le rapport de 1 à 3. La droite $g_4 g_5$ est donc parallèle à gg' et égale aux $\frac{3}{4}$ de cette longueur. D'ailleurs il résulte de la construction des points G_4, G_5 que la droite G_4G_5 est parallèle à gg' et égale à sa moitié. Rapprochant ces deux faits, on conclut que G_4G_5 est parallèle à g_4g_5 et égale à $\frac{2}{3}$ g_4g_5. Si donc nous joignons G_5g_5 et G_4g_4, ces deux droites iront se couper en un point G tel que

$$\frac{Gg_4}{GG_4} = \frac{Gg_5}{GG_5} = \frac{3}{2},$$

ce qui établit que toutes les droites telles que G_4g_4 vont couper la droite G_5g_5 au même point et y sont partagées dans le même rapport, celui de 3 à 2. Nous avons donc ce théorème :

Théorème. — *Étant donné un polygone complet de cinq droites, ce polygone définit cinq quadrilatères complets que l'on obtient en faisant successivement abstraction d'une des droites proposées ; si l'on joint le centre de gravité d'un de ces quadrilatères, point géométrique défini plus haut, au centre de gravité des quatre points, intersections des côtés de ce quadrilatère avec la cinquième droite, les cinq droites que l'on peut ainsi construire concourent en un même point et y sont partagées dans le rapport de* 3 *à* 2.

Dans le triangle, les droites qui concourent au centre de gravité y sont partagées dans le rapport de 1 à 2 ; dans le quadrilatère, nous avons trouvé celui de 1 à 1, ou, si l'on veut, celui de 2 à 2 ; enfin dans le pentagone nous trouvons pour ce rapport $\frac{3}{2}$. On voit la loi que suivent ces fractions, dont le dénominateur est constant et égal à 2, et dont le numérateur s'obtient en retranchant deux unités au nombre des droites qui définissent le polygone. Cette loi, supposée vraie pour un polygone complet de $(n-1)$ droites, se vérifie pour un polygone de n droites en suivant une marche toute semblable à celle que nous avons suivie pour le pentagone, et que nous ne répéterons pas pour abréger. Le théorème général s'énonce ainsi :

Théorème. — *Étant donné un polygone complet de n droites définissant n polygones de $(n-1)$ droites que l'on obtient en faisant successivement abstraction d'une des droites, on considère l'une de ces droites et le polygone des $(n-1)$ autres droites qui lui correspond. Si l'on joint les centres de gravité de ce polygone, point géométrique défini par cette même loi que nous énonçons en ce moment, au centre de gravité des $(n-1)$ points situés sur la $n^{ième}$ droite, les n droites que l'on peut ainsi construire vont concourir en un même point et s'y partagent mutuellement dans le rapport de* 2 *à* $(n-2)$.

Applications de la méthode à la recherche de théorèmes nouveaux.

1° SECTIONS CONIQUES.

On peut dire de la méthode de transformation dont nous avons exposé les principes au commencement de ce travail, qu'elle s'applique à la transformation de théorèmes où entrent des considérations de longueurs ou d'angles, mais qu'elle ne donne aucun théorème nouveau quand on cherche à transformer des propriétés descriptives. Les théorèmes qu'elle donne dans ce dernier cas sont indépendants du choix de la loi géométrique adoptée pour faire correspondre une droite à une droite, et c'est ce que nous allons faire voir.

Supposons, en effet, en restant dans toute la généralité que comporte la transformation de M. Magnus, que nous fassions correspondre une droite à une droite; à un point a correspondra une conique A′ dont je désigne le centre par a', et cette conique sera tangente aux *trois tangentes principales*. De cette façon, considérant d'une part la figure formée par les points a, et d'autre part la figure formée par les points a', nous pourrons dire qu'à un point de la première figure correspond un point de la seconde figure et un *seul*. Inversement, prenons un point a' dans la seconde figure et considérons ce point comme le centre d'une conique tangente aux trois tangentes principales. On sait qu'une *seule* conique satisfait à ces conditions; à cette conique correspond dans la première figure un certain point a, donc et *inversement* à un point de la deuxième figure correspond un point de la première, et un *seul*. Enfin, si le point a parcourt une droite dans la première figure, la conique A′ enveloppera une droite; comme ces coniques A′ ont déjà trois tangentes communes, les tangentes principales, on en conclut, par le théorème de Newton, que le point a' de la deuxième figure décrit une droite, et *inversement*, si le point a' décrit une droite, le point a se meut sur une droite dans la première figure. De là résulte cette remarque que les deux systèmes de points que nous avons considérés sont *homographiques*. Nous énonçons ce résultat par le théorème suivant :

Théorème. — *Dans toute méthode de transformation par la correspondance d'une droite à une droite, les points de la figure proposée et les centres des coniques qui leur correspondent dans la figure transformée forment deux systèmes de points homographiques.*

Il résulte de là que si des droites concourent dans la première figure en un point, les droites qui joignent les centres des coniques qui correspondent à ces points concourent aussi en un point, et que, généralement, si un point de la première figure se meut sur une courbe d'un ordre et d'une classe donnés, le centre de la conique qui correspond à ce point se meut sur une courbe du même ordre et de la même classe. De là résulte encore que si quatre points en ligne droite de la première figure ont un rapport anharmonique égal à λ, les quatre points de la seconde figure, qui sont aussi en ligne droite, ont leur rapport anharmonique égal à λ. Ces remarques donnent lieu à des théorèmes nouveaux, comme nous allons le montrer par quelques exemples.

Comme il ne sera considéré dans ce qui va suivre que des coniques tangentes à trois mêmes droites, cette triple condition sera sous-entendue, et nous dirons simplement : soit $C(Oa_1, Oa_2)$ une conique tangente aux droites Oa_1 et Oa_2; soit $C(Oa, O')$ une conique tangente à la droite Oa et passant par le point O'; soit $C(Oa, Oa)$ une conique tangente à la droite Oa au point O; soit enfin $C(O, O')$ une conique passant par les points O et O'.

Ceci posé, voici quelques théorèmes en regard desquels nous plaçons les théorèmes fournis par notre remarque :

1° Lorsqu'un triangle est circonscrit à une conique, les droites qui joignent les sommets du triangle aux points de contact des côtés opposés concourent au même point.

2° Lorsque quatre droites sont tangentes à une conique, toute tangente à la conique rencontre ces quatre droites en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.

3° Une conique étant inscrite dans un triangle ABC, si, par deux points m et m' conjugués harmoniques par rapport aux points B et C, on mène des tangentes à la

1° Étant données trois droites auxquelles sont tangentes les diverses coniques dont nous allons parler et trois droites concourantes Oa_1, Oa_2, Oa_3, on considère les deux coniques $C(Oa_1, Oa_2)$ et $C(Oa_2, Oa_3)$ et la droite qui joint le centre de cette dernière au centre de la première. Cette droite et les deux autres analogues concourent au même point.

2° Étant données trois droites auxquelles seront tangentes les diverses coniques dont nous allons parler et quatre droites concourantes Oa_1, Oa_2, Oa_3, Oa_4, on considère une cinquième droite Oa mobile autour du point O et les quatre coniques

$$\Sigma C(Oa, Oa_1).$$

Ces quatre coniques, on le sait, ont leurs centres en ligne droite comme tangentes à quatre mêmes droites; le rapport anharmonique de ces quatre points est constant quand varie la droite Oa.

3° Étant donnés un triangle ABC auquel seront inscrites les diverses coniques dont nous allons parler et un point O, on joint ce point à deux points m et m' conjugués conique, la droite qui joint les points de contact va passer par le sommet A du triangle.

harmoniques par rapport aux points B et C et l'on considère les coniques $C(Om, Om)$, $C(Om', Om')$: la droite qui joint les coniques passe par le milieu du côté BC.

4° Une conique étant inscrite à un triangle, si par trois points en ligne droite sur les côtés de ce triangle on mène des tangentes à la conique, les droites qui joignent les sommets du triangle aux points de contact correspondants concourent au même point.

Le théorème subsiste dans le cas où les points choisis sur les côtés du triangle donnent trois droites concourantes quand on les joint aux sommets du triangle.

4° Étant donnés un triangle ABC auquel seront inscrites les diverses coniques dont nous aller parler et un point O, si l'on joint ce point O à trois points a, b, c pris en ligne droite sur les côtés du triangle ABC (a sur le côté BC, et ainsi des autres), et si l'on considère la conique $C(Oa, Oa)$, la droite qui joint le centre de cette conique au point milieu du côté BC et les deux droites analogues concourent au même point.

Mais s'il est indifférent, pour trouver ces théorèmes, de spécifier la loi géométrique par laquelle on fait correspondre une droite à une droite, cette particularisation de la méthode de M. Magnus, que nous avons exposée, est nécessaire pour transformer des propriétés métriques ou des propriétés angulaires. Nous avons établi en effet qu'en transformant une figure donnée en une autre par le procédé des transversales réciproques, les points de la première figure et les centres des coniques qui entrent dans la transformée forment, non plus seulement des figures *homographiques,* mais des figures *homothétiques* ayant le centre de gravité du triangle de référence pour centre d'homothétie, et que le rapport des deux figures était celui de 2 à 1. Nous avons déjà insisté sur ce point, qui résume tout ce travail et constitue l'avantage du cas particulier dans lequel nous nous sommes placé sur la méthode générale. Il nous reste à montrer ceci par quelques exemples.

1° La droite qui joint le sommet d'un angle circonscrit à une conique au milieu de la corde de contact passe par un point fixe, centre de la conique donnée.

1° Étant donnés un triangle auquel seront inscrites les diverses coniques dont nous allons parler et un point fixe O, par ce point O on mène deux droites Oa_1, Oa_2 et l'on considère les coniques $C(Oa_1, Oa_1)$, $C(Oa_2, Oa_2)$, $C(Oa_1, Oa_2)$. La droite qui joint le centre de cette dernière au point milieu de la distance des centres des deux premières passe par un point fixe quand varient les droites Oa_1 et Oa_2.

Plus généralement :

2° Lorsqu'un quadrilatère complet est circonscrit à une conique, la droite qui joint

Plus généralement :

2° Étant données quatre droites concourantes Oa_1, Oa_2, Oa_3, Oa_4 et trois droites les points milieux des diagonales du quadrilatère passe par un point fixe, centre de la conique.

auxquelles seront tangentes les diverses coniques dont nous allons parler, on considère les six coniques $\Sigma C(Oa_1, Oa_2)$ dont les centres, situés trois à trois en ligne droite, forment un quadrilatère complet: la droite qui joint les points milieux des diagonales de ce quadrilatère passe par un point fixe.

3° Dans une section conique, le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée est une droite.

3° Étant donnés un triangle auquel seront inscrites les diverses coniques dont nous allons parler, un point O et une parabole inscrite au triangle donné, soit at une tangente à cette parabole: on considère les deux coniques $C_1(O, at)$, $C_2(O, at)$; le point milieu de la distance des centres de ces deux coniques décrit une droite quand la droite at roule sur la parabole donnée.

Montrons enfin comment on transforme par ce procédé un théorème où entrent des considérations d'angles :

1° Si autour de deux points fixes pris sur un cercle on fait tourner deux droites qui se coupent sur le cercle, l'angle de ces deux droites est constant.

1° Étant donnés un triangle et un point O centre du cercle inscrit au triangle que l'on obtient en menant par les sommets du proposé des parallèles à ses côtés, on considère le système des coniques qui passe par ce point O et sont inscrites au triangle donné; soient C′, C″ deux de ces coniques que je suppose fixes, C une troisième conique mobile; soient $a't'$, $a''t''$ les tangentes communes à C et C′ d'une part, C et C″ d'autre part. Les paraboles $P(a't')$, $P(a''t'')$, qui sont inscrites au triangle donné, ont leurs axes qui font un angle constant.

2° Si autour d'un point d'une conique, comme sommet, on fait tourner un angle droit, la corde que ses côtés interceptent dans la courbe passe toujours par un même point.

2° Étant donnés un triangle auquel seront inscrites les diverses coniques dont nous allons parler, un point O et une conique passant par ce point et inscrite au triangle, soient at, $a't'$ deux tangentes à la conique, tellement choisies que les paraboles $P(at)$, $P(a't')$ aient leurs axes rectangulaires; la droite qui joint les centres des coniques $C(O, at)$, $C(O, a't')$ passe par un point fixe.

3° Étant donnée une conique inscrite à un triangle, si une tangente mobile à cette conique rencontre les trois côtés du triangle en trois points, il existe un certain point d'où ces trois points sont vus sous des angles constants.

3° Étant donnés un triangle auquel seront inscrites les diverses coniques dont nous aller parler et un point O, autour de ce point on fait tourner une droite qui rencontre les côtés du triangle donné en trois points a, b, c. Il existe une conique inscrite au triangle et qui est telle, que si on lui mène par les points a, b, c des tangentes at, bt', ct'', les paraboles $P(at)$, $P(bt')$, $P(ct'')$ ont leurs axes inclinés l'un sur l'autre d'angles constants.

Nous bornons là ces exemples, et nous nous proposons maintenant de dire quelques mots sur les courbes de la quatrième classe à trois tangentes doubles, courbes qui se déduisent des sections coniques, comme nous l'avons expliqué en commençant.

2° COURBES DE LA QUATRIÈME CLASSE A TROIS TANGENTES DOUBLES.

En appliquant aux sections coniques le théorème général que nous avons donné plus haut, on trouve qu'à une telle courbe correspond une courbe de la quatrième classe et du sixième ordre ayant trois tangentes doubles. Il faut remarquer que dans ce cas la condition à laquelle cette courbe est assujettie, d'être du sixième ordre, est une conséquence des deux autres, savoir : qu'elle est de la quatrième classe et qu'elle a trois tangentes doubles. En effet, une courbe de la quatrième classe peut être du douzième ordre quand elle n'a pas de tangentes singulières; mais chaque tangente double abaissant l'ordre de deux unités, la présence des trois tangentes doubles abaisse l'ordre de six unités, ce qui le réduit à six. Nous avons fait remarquer aussi que les courbes que nous obtenions ainsi étaient les courbes générales de la quatrième classe à trois tangentes doubles, de telle sorte que toute courbe de cette famille jouit des propriétés que l'on peut déduire des sections coniques considérées comme transformées de ces courbes. Il faut remarquer que ces courbes ne sont pas les seules que l'on puisse obtenir par ce mode de correspondance. On voit en effet que si la courbe que l'on déforme passe par un, deux ou trois des sommets du triangle de référence qui sert à la transformation, l'ordre de la courbe correspondante s'abaisse d'une, de deux ou de trois unités. Cela tient à ce que deux des tangentes que l'on peut mener par le sommet du triangle venant à se confondre en une seule, deux des points de contact de la tangente multiple opposée au sommet considéré viennent se réunir en un seul, ce qui donne lieu à un point d'inflexion, lequel abaisse l'ordre de trois unités, d'une unité de plus, par conséquent, que ne le faisait la tangente multiple de tout à l'heure. Nous pourrons donc étudier au moyen des sections coniques les courbes suivantes :

1° *Courbes de la quatrième classe à trois tangentes doubles: l'ordre de ces courbes est égal à* 6.

2° *Courbes de la quatrième classe ayant deux tangentes doubles et une tangente à un point d'inflexion : l'ordre est égal à* 5.

3° *Courbes de la quatrième classe ayant une tangente double et deux tangentes à deux points d'inflexion : l'ordre est égal à* 4.

4° *Courbes de la quatrième classe ayant trois tangentes à trois points d'inflexion : l'ordre est égal à* 3.

Pour abréger nous nous bornerons à donner quelques théorèmes sur les premières de ces courbes, ces théorèmes s'appliquant aux autres avec de légères modifications qu'on aperçoit sans difficulté.

Considérons le triangle ABC, qui sert à la transformation. Par le point A nous pouvons mener deux tangentes (réelles ou imaginaires) à la conique; soient a_1, a_2 les points où ces tangentes rencontrent le côté BC. En considérant les tangentes infiniment voisines de celles-ci et construisant leurs réciproques, on reconnaît que les points de contact de la courbe avec ses tangentes doubles s'obtiennent en prenant les symétriques des points a_1 et a_2 par rapport au point milieu de BC. Or c'est un théorème connu que les points a_1 et a_2 sont sur une conique; il résulte du théorème de Carnot et de sa réciproque que les symétriques de ces points sont aussi sur une conique, d'où résulte ce théorème :

Théorème. — *Dans toute courbe de la quatrième classe ayant trois tangentes doubles, les six points de contact (réels ou imaginaires) de la courbe avec les tangentes doubles sont six points d'une même conique.*

Si l'on considère les points où la conique proposée coupe les côtés du triangle de référence, les tangentes en ces points, les tangentes infiniment voisines et leurs réciproques, on en conclut cet autre théorème :

Théorème. — *Une telle courbe, étant du sixième ordre, après avoir touché ses tangentes doubles en deux points, les rencontre encore en deux autres points. Ces six nouveaux points sont six points d'une même conique.*

En transformant ces théorèmes par polaires réciproques, on obtient deux théorèmes pour les courbes du quatrième degré à trois points doubles. Ces théorèmes, le premier au moins, ne sont pas nouveaux (*Salmon's Higher plane Curves*, p. 201); mais ignorant si on en avait donné quelque démonstration géométrique, nous avons cru pouvoir donner celle qui précède.

A un point de la conique proposée correspond, dans la seconde figure, une conique tangente aux trois tangentes doubles et à la courbe; il résulte de la remarque que nous avons faite sur l'homographie des deux systèmes de points formés, le premier par les points de la figure donnée, le second par les centres des coniques qui leur correspondent, un théorème que nous énonçons :

Théorème. — *Dans une courbe de la quatrième classe à trois tangentes doubles, le lieu des centres des coniques inscrites à ce triangle et tangentes à la courbe est une section conique.*

Ce système de coniques jouit de propriétés simples relativement à tout système du même genre dans lequel entrent des coniques tangentes à trois droites et à la courbe, et cela tient à ce que les caractéristiques de ce système sont simples relativement à celles des autres systèmes. Nous pouvons voir cela d'une manière générale pour des courbes d'ordre quelconque. Soit U_n^m une courbe de l'ordre m et de la classe n, on sait comment on détermine les caractéristiques d'un système de coniques tangentes à trois droites et à la courbe

$$(3\text{d.}, U_n^m) \equiv N(3\text{d.}, U_n^m, 1\text{p.}), \quad N(3\text{d.}, U_n^m, 1\text{d.}).$$

Or on a

$$(3\text{d.}, 1\text{p.}) \equiv (4, 2) \quad \text{et} \quad (4\text{d.}) \equiv (2, 1),$$

et comme on sait que dans un système μ, ν il y a $n\mu + m\nu$ coniques tangentes à une courbe de l'ordre m et de la classe n, on en conclut

$$(3\text{d.}, U_n^m) \equiv (4n + 2m, 2n + m).$$

Si nous transformons la courbe U_n^m par la correspondance d'une droite à une droite, on sait qu'à une telle courbe correspond une courbe de la classe $2n$ et de l'ordre $2n + m$; en appliquant la formule précédente, on aura les caractéristiques d'un système de coniques tangentes à trois droites et à la courbe. Mais il ne faudrait pas croire que l'on puisse appliquer cette même formule si, parmi les droites que l'on considère, il y a des tangentes singulières de la courbe, ou plus généralement une droite liée à la courbe par une circonstance particulière, car cette circonstance peut influer sur la valeur des caractéristiques du système, et c'est ce qui nécessite un examen spécial pour chacune de ces questions.

Proposons-nous, par exemple, de chercher les caractéristiques du système de coniques tangentes aux trois tangentes multiples d'ordre n et à la courbe. La première de ces caractéristiques, c'est le nombre de ces coniques qui passe par un point donné a; ce point a provient d'une conique de la première figure inscrite au triangle de référence, et il y a autant de coniques passant par le point a qu'il y a de points communs à la conique transformée et à la courbe d'ordre m : d'où l'on conclut que la première caractéristique est $2m$. La deuxième caractéristique, c'est le nombre des coniques qui touchent une droite. Or, à cette droite correspond une droite de la première figure, et il y a autant de ces coniques qu'il y a de points communs à la droite et à la courbe d'ordre m, c'est-à-dire m. Les caractéristiques cherchées sont donc $2m$ et m. En appliquant ce résultat aux courbes de la quatrième classe à trois tangentes doubles, nous aurons ce théorème :

THÉORÈME. — *Les caractéristiques du système de coniques tangentes aux trois tangentes doubles d'une courbe de la quatrième classe et à la courbe sont* 4 *et* 2.

En appliquant la formule générale, on eût trouvé 28 et 14 pour ces caractéristiques.

Les courbes de la quatrième classe à trois tangentes doubles ont quatre points doubles, six points de rebroussement et six branches infinies. En effet, toute conique inscrite au triangle de référence et ayant un double contact avec la conique proposée donne un point double dans la figure transformée. Or, si l'on désigne par la lettre w la condition d'avoir un double contact avec une conique w, on trouve (CHASLES, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, août 1864) que les caractéristiques du système $(2\,\mathrm{d.}, w) \equiv (4, 4)$. Il y a donc quatre coniques inscrites au triangle de référence et ayant un double contact avec la proposée, par suite quatre points doubles dans la courbe transformée. Si maintenant on considère les coniques inscrites au triangle de référence et osculatrices à la conique donnée, on trouve (CHASLES, *ibid.*), en désignant par O la condition d'être osculatrice à une conique O, que les caractéristiques du système $(2\,\mathrm{d.}, \mathrm{O}) \equiv (12, 6)$. Il y a donc six coniques inscrites au triangle et osculatrices à la conique donnée; par suite il y a six points de rebroussement dans la courbe. Enfin il y a généralement six branches infinies parce qu'il y a six paraboles tangentes à trois droites et à une conique donnée. Enfin nous ajouterons qu'il résulte de l'influence de la présence des points singuliers sur l'abaissement de la classe, et des tangentes singulières sur l'abaissement de l'ordre, que ces courbes n'ont pas d'autres points singuliers ni d'autres tangentes singulières que ceux et celles que nous avons signalés. Nous résumons ces résultats dans le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Une courbe de la quatrième classe, à trois tangentes doubles, a forcément quatre points doubles, six points de rebroussement et six branches infinies.*

Ces points doubles jouissent de propriétés nombreuses et intéressantes que l'on déduit des propriétés bien connues des coniques ayant un double contact. Du théorème connu sur ces points doubles (*Salmon's Higher plane Curves*, p. 202), que les huit tangentes à la courbe en ces points enveloppent une même conique, on déduit un théorème sur les coniques ayant un double contact; c'est le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant donnés un triangle et une conique indépendante de ce triangle, on peut mener quatre coniques inscrites au triangle et ayant un double contact avec la proposée. Il y a de la sorte huit points de contact sur la conique donnée. Si on* *considère la tangente en l'un de ces points, le quadrilatère complet qu'elle détermine avec les trois droites données et la droite qui joint les points milieux des diagonales de ce quadrilatère, les huit droites qu'on peut ainsi construire enveloppent une même conique.*

C'est le théorème de Géométrie élémentaire qu'il eût fallu connaître pour en déduire le théorème relatif aux courbes d'ordre supérieur d'où nous l'avons tiré, et c'est ainsi probablement que beaucoup de théorèmes sur les courbes supérieures nous sont cachés faute de savoir certains théorèmes sur les sections coniques. Nous dirons enfin que l'on peut déduire de tout théorème connu sur les sections coniques un théorème correspondant pour les courbes de la quatrième classe à trois tangentes doubles, et même deux théorèmes : un premier que l'on obtient par le procédé de M. Magnus, et un second en s'appuyant sur la remarque que nous avons faite sur l'homographie des deux systèmes de points dont il a été question. Quant aux propriétés métriques ou aux propriétés angulaires, elles se transforment en s'appuyant sur la similitude de ces deux systèmes de points. Nous ne donnerons aucun exemple nouveau de ces transformations, qui se font de la même façon que celles que nous avons données pour les sections coniques, et nous nous proposons de dire quelques mots sur la méthode de transformation par correspondance d'un point à un point, qui est celle que M. Magnus a spécialement développée dans le Mémoire que nous avons cité.

Remarques sur la méthode de transformation par correspondance d'un point à un point.

Il y a à faire sur cette méthode des remarques analogues à celles que nous avons faites précédemment sur la méthode qui fait correspondre une droite à une droite, remarques qui ne sauraient se déduire de celles-là au moyen des polaires réciproques. Il y a là encore deux systèmes de points homographiques, ainsi que nous allons le démontrer, en supposant connu le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donnés un triangle et une conique circonscrite au triangle, on joint les trois sommets du triangle à un point a de cette conique : ces droites rencontrent les côtés du triangle en trois points par lesquels on mène une conique inscrite au triangle, ce qui est possible. Le lieu des centres de ces coniques est une droite, quand le point a se meut sur la conique donnée.*

Ceci posé, supposons, en nous plaçant dans la généralité que comporte la méthode de M. Magnus, que nous fassions correspondre un point à un point. Si nous supposons que le point a de la première figure se meut sur une droite, le point a', qui lui correspond dans la seconde figure, se meut sur une conique circonscrite au triangle des trois points principaux. Si nous joignons le point a' aux trois points principaux, ces droites rencontrent les côtés du triangle en trois points par lesquels on peut mener une conique inscrite au triangle. Soit $C[a']$ cette conique. Nous désignerons, dans ce qui va suivre, par cette notation une conique déduite du point a', comme il vient d'être expliqué. Si nous appelons α' le centre de cette conique, et que nous considérions la figure formée par ces points α', nous pourrons dire qu'à un point a de la première figure correspond un point α' de la seconde, et *un seul*. De plus, si nous supposons que le point a décrive une droite, il résulte du théorème précédent que le point α' décrit lui-même une droite; donc à une droite de la première figure correspond une droite de la seconde. Ce raisonnement pouvant se répéter en sens inverse, nous en concluons que les deux systèmes de points a et α' sont *homographiques*. Ce résultat s'énonce en disant :

Théorème I. — *Toutes les fois qu'on transformera une figure en une autre par la correspondance d'un point a à un point a', si l'on considère les centres α' des coniques* $C[a']$, *les deux figures formées par les points a d'une part et les points α' d'autre part sont deux figures homographiques.*

On peut aller plus loin, et, comme nous l'avons fait dans l'étude précédente, démontrer qu'il existe une loi géométrique particulière pour laquelle les deux figures dont il vient d'être question sont deux figures *semblables*. Nous avons vu en effet plus haut, dans la transformation par transversales réciproques, qu'à un point correspondait une section conique dont on déterminait le centre par une loi simple, inutile à rappeler.

Mais nous avons négligé de faire remarquer comment les points de contact se déduisaient du point considéré. Il est facile de reconnaître que si l'on joint le point donné à un des sommets du triangle, que l'on prolonge cette droite, s'il est besoin, jusqu'à ce qu'elle rencontre le côté opposé au sommet considéré, et que l'on prenne le symétrique du point ainsi obtenu par rapport au point milieu du côté considéré, on obtient le point de contact de la conique qui correspond au point donné. Dès lors, supposons que nous fassions correspondre un point à un point en partant du principe suivant :

Principe de transformation. — *Étant donnés un triangle et un point, on joint ce point aux sommets du triangle et on prend, par rapport aux points milieux des côtés du triangle, les symétriques des points où ces droites rencontrent ces côtés; on obtient de la sorte trois nouveaux points qui, joints aux sommets du triangle, donnent trois droites qui concourent au même point.*

Il résulte de ce que nous venons dire le théorème suivant :

Théorème II. — *Si l'on fait correspondre un point a à un point a', par la loi* *que nous venons d'indiquer, et que l'on considère le centre α' de la conique* C[a'], *le point* a, *le centre de gravité du triangle de référence et le point α' sont trois points en ligne droite, et le centre de gravité partage la distance des deux autres comme* 2 *est à* 1.

On peut, au moyen de ces deux théorèmes, faire un travail tout semblable à celui que nous avons exposé plus haut, et transformer soit par le premier, soit par le second, quand l'autre est insuffisant, tous les théorèmes sur les sections coniques en d'autres théorèmes sur les sections coniques ou sur les courbes du quatrième degré à trois points doubles; ces théorèmes étant, comme il importe de le remarquer, distincts de ceux que l'on peut déduire pour les courbes du quatrième degré à trois points doubles des théorèmes que nous avons donnés pour les courbes de la quatrième classe à trois tangentes doubles, en les transformant par la théorie des polaires réciproques.

Sans donner d'application de ces remarques, nous résumerons en quelques mots les résultats que nous venons d'exposer.

M. Magnus, dans le Mémoire que nous avons cité au commencement de ce travail, a montré qu'un théorème sur les sections coniques se transformait par sa méthode générale en quatre autres théorèmes sur les sections coniques et quatre autres sur les courbes du quatrième degré à trois points doubles. La remarque que nous avons faite sur l'homographie de deux systèmes de points convenablement choisis, soit quand on fait correspondre une droite à une droite, soit quand on fait correspondre un point à un point, permet de doubler le nombre de ces théorèmes. Enfin nous avons montré qu'en faisant choix d'une loi géométrique particulière, on pouvait transformer les théorèmes où entrent des propriétés métriques ou des relations angulaires en d'autres théorèmes sur les sections coniques ou les courbes d'ordre supérieur, en conservant à ces derniers la même simplicité que celle qui caractérisait les théorèmes desquels on les a déduites.