ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

EDOUARD COMBESCURE

Sur le déplacement tangentiel de deux surfaces rigides

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 5 (1888), p. 49-78

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1888_3_5__49_0>

SUR

LE DÉPLACEMENT TANGENTIEL

DE

DEUX SURFACES RIGIDES,

PAR M. ÉDOUARD COMBESCURE.

Dans le Tome LXIII du *Journal de Crelle*, je me suis occupé du problème qui a pour objet le déplacement relatif de deux courbes quelconques, assujetties à rester constamment tangentes. J'avais, dès cette époque (1864), songé un moment à traiter la question analogue pour les surfaces, et je possédais les formules essentielles pour cet objet; mais des circonstances diverses m'avaient fait abandonner et perdre absolument de vue cet intéressant sujet. L'apparition récente du bel et important Ouvrage de M. Darboux *Sur la théorie générale des surfaces*, etc., vient de me ramener sur cette difficile question. J'envisage le problème à un point de vue conforme à celui que j'avais adopté pour les courbes et qui est un peu différent de celui où s'est placé l'éminent Auteur. Je dois ajouter que j'emprunte à M. Darboux l'emploi de trois indéterminées λ, μ, μ_1, qui figurent aux pages 71 et 72 de l'Ouvrage cité, et qui jouent un rôle important dans mon analyse.

Je borne le présent travail à l'exposition générale de la théorie, me réservant de faire ultérieurement diverses applications.

§ I. — Remarques préliminaires. — Position de la question.

1. On peut évidemment se poser, sur le déplacement relatif de deux surfaces, une infinité de questions variées, en faisant se correspondre, d'après des conditions bien déterminées, une double série de courbes

appartenant séparément à l'une et à l'autre de ces surfaces. L'un des modes de correspondance les plus naturels consiste à supposer que les courbes de même famille sont constamment et successivement en contact. C'est précisément là le cas, sans contredit l'un des plus intéressants, dont je vais exclusivement m'occuper.

Il est presque superflu d'ajouter que l'on peut, en faisant intervenir trois séries de surfaces appartenant à un espace donné, et trois autres séries appartenant au même espace ou à un autre, donner à ces questions une certaine généralisation par l'introduction de trois paramètres arbitraires et par l'adjonction de conditions convenablement choisies. La même chose peut se dire pour l'espace à n dimensions et ses variétés. Mais je rentre dans mon sujet.

2. Les coordonnées rectangulaires X, Y, Z d'une surface rigide (Σ), rapportée à trois axes rectangulaires fixes OXYZ, sont supposées des fonctions de deux paramètres indépendants α et β. Les coordonnées rectangulaires x, y, z d'une autre surface rigide (S), liée à des axes mobiles O_1xyz, sont supposées pareillement des fonctions de α et β. La même supposition s'étend aux neuf cosinus : a, a', a'' directeurs de OX par rapport à O_1x, y, z; b, b', b'' de OY ; c, c', c'' de OZ.

On place le système d'axes mobiles de telle manière que les deux surfaces (Σ) et (S) se touchent au même point quelconque M, en s'imposant les conditions suivantes : 1° la courbe (c_α) [courbe où α seul varie] de la surface mobile doit être constamment tangente à la courbe (C_α) de la surface fixe, qui passe en M comme la première; 2° une condition analogue est imposée aux courbes (c_β), (C_β); 3° enfin, et pour rendre tout à fait déterminé le déplacement, les éléments correspondants des deux courbes (C_α), (c_α), relatifs au point M, doivent être, dans un rapport $G(\alpha, \beta)$, censé donné, et de même les éléments correspondants de (C_β), (c_β) doivent être dans un rapport $G_1(\alpha, \beta)$ aussi donné.

Il va sans dire que, dans certains cas, ces fonctions G, G_1 peuvent être regardées comme inconnues.

3. Les deux courbes (C_α), (c_α) se touchant actuellement en M, extrémité commune des éléments $d\sigma_\alpha$, ds_α de ces deux courbes, la seconde

extrémité m de ds_α viendra, après le *temps* $d\alpha$, se placer sur la seconde extrémité fixe M′ de $d\sigma_\alpha$, point successif de contact, sous la condition

$$\frac{d\sigma_\alpha}{ds_\alpha} = \mathrm{G}.$$

Il y aura donc un glissement élémentaire de ds_α sur $d\sigma_\alpha$, représenté par

$$ds_\alpha - d\sigma_\alpha = \left(\frac{1}{\mathrm{G}} - 1\right) d\sigma_\alpha.$$

3. Ce glissement disparaît, naturellement, lorsque G est égal à l'unité.

Une chose analogue a lieu pour les courbes (β).

Dans le cas de

$$\mathrm{G} = 1, \qquad \mathrm{G}_1 = 1,$$

si l'on considère deux courbes infiniment voisines (C_α), (C'_α), comprenant une zone infiniment étroite sur la surface fixe (Σ), et les courbes correspondantes (c_α), (c'_α) de la surface mobile (S), la zone appartenant à cette dernière surface, vient, quand on fait varier α seul, *appliquer* successivement ses éléments superficiels du second ordre sur les éléments correspondants de la zone fixe, en sorte que l'on peut se figurer ces deux zones comme l'empreinte réciproque, et de même étendue, des deux surfaces l'une sur l'autre dans le roulement qu'on vient de considérer. Ceci a lieu, naturellement, pour toutes les zones correspondantes obtenues en établissant une relation arbitraire entre α et β.

4. Quand on admet que les éléments superficiels du second ordre de la surface mobile (S) restent fixés, à mesure, sur les éléments correspondants de la surface immobile, de façon que la surface (S) se *déforme* progressivement, on rentre tout à fait dans la conception primitive et purement géométrique de Gauss.

Quoique les locutions *application*, *déformation*, *roulement* n'éveillent pas exactement la même idée, je les emploierai indifféremment, dans le cas de G et G_1 égaux à l'unité, mais j'admettrai implicitement qu'il s'agit toujours de surfaces rigides.

Il est visible que des considérations analogues peuvent s'appliquer, avec quelques légères modifications, au cas où les coefficients de glissement G et G_1 ne sont pas tous les deux égaux à l'unité.

§ II. — Rappel de quelques formules. — Équations immédiates.

5. J'aurai besoin, dans ce qui suit, des formules suivantes, relatives aux cosinus directeurs et aux rotations,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \alpha} &= br - cq, & \frac{\partial a}{\partial \beta} &= br_1 - cq_1,\\ \frac{\partial b}{\partial \alpha} &= cp - ar, & \frac{\partial b}{\partial \beta} &= cp_1 - ar_1,\\ \frac{\partial c}{\partial \alpha} &= aq - bp, & \frac{\partial c}{\partial \beta} &= aq_1 - bp_1,\end{aligned}\right.$$

et les analogues, formules dans lesquelles on a posé

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \sum c\frac{\partial b}{\partial \alpha}, & q &= \sum a\frac{\partial c}{\partial \alpha}, & r &= \sum b\frac{\partial a}{\partial \alpha};\\ p_1 &= \sum c\frac{\partial b}{\partial \beta}, & q_1 &= \sum a\frac{\partial c}{\partial \beta}, & r_1 &= \sum b\frac{\partial a}{\partial \beta},\end{aligned}\right.$$

le Σ affectant les accents pour les cosinus.

Ces équations entraînent le groupe fondamental ou des *rotations*

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \beta} - \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} &= qr_1 - rq_1,\\ \frac{\partial q}{\partial \beta} - \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} &= rp_1 - pr_1,\\ \frac{\partial r}{\partial \beta} - \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} &= pq_1 - qp_1,\end{aligned}\right.$$

qui fait partie d'un Mémoire envoyé par moi à l'Académie des Sciences de Paris (*voir* les *Annales de l'École Normale*, t. IV, 1^re série). Ce dernier groupe n'interviendra qu'un peu plus loin.

6. D'après les conditions de contact, spécifiées aux n^{os} 2 et 3, l'élément ds_α de la courbe (c_α), liée aux axes mobiles, ayant pour projections sur ces axes les quantités $\frac{\partial x}{\partial \alpha}d\alpha$, $\frac{\partial y}{\partial \alpha}d\alpha$, $\frac{\partial z}{\partial \alpha}d\alpha$, sa projection sur l'axe

fixe OX, sera la somme de ces mêmes quantités préalablement multipliées par a, b, c, et, comme l'élément $d\sigma_\alpha$ a pour projection sur le même axe $\frac{\partial X}{\partial \alpha} d\alpha$, on aura, en se rappelant que le rapport du second élément au premier est représenté par G, les six équations suivantes, dont trois correspondent à la courbe (c_β),

$$(4)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \alpha} &= G\left(a\frac{\partial x}{\partial \alpha} + b\frac{\partial y}{\partial \alpha} + c\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right), \\ \frac{\partial X}{\partial \beta} &= G_1\left(a\frac{\partial x}{\partial \beta} + b\frac{\partial y}{\partial \beta} + c\frac{\partial z}{\partial \beta}\right), \end{aligned} \right.$$

où je me dispense d'écrire les deux autres groupes.

7. Les formules de transformation de coordonnées

$$(5)\qquad X = X_0 + ax + by + cz,$$

où X_0, Y_0, Z_0 désignent les coordonnées absolues de l'origine mobile donnent

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = \frac{\partial X_0}{\partial \alpha} + \sum a\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \sum x\frac{\partial a}{\partial \alpha};$$

d'où, en vertu de (4), on déduit

$$(6)\qquad (G-1)\sum a\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial X_0}{\partial \alpha} + \sum x\frac{\partial a}{\partial \alpha}.$$

Si l'on désigne par δX_0, δY_0, δZ_0 les projections sur les axes mobiles du déplacement élémentaire de l'origine quand α varie seul et augmente de $d\alpha$; par $\delta_1 X_0$, $\delta_1 Y_0$, $\delta_1 Z_0$ les projections du déplacement élémentaire de cette même origine quand β seul varie et augmente de $d\beta$, l'addition des équations (6), préalablement multipliées par a, a', a'', fournira, en ayant égard aux équations (1) et (2), la première du double groupe

$$(7)\qquad \left\{ \begin{aligned} \delta X_0 &= \left[(G-1)\frac{\partial x}{\partial \alpha} + ry - qz\right] d\alpha, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

$$(7_1)\qquad \left\{ \delta_1 X_0 = \left[(G_1-1)\frac{\partial x}{\partial \beta} + r_1 y - q_1 z\right] d\beta, \right.$$

On conclut de là, par la théorie connue et en désignant par x', y', z' des coordonnées courantes relatives aux axes mobiles, les équations suivantes de chacun des axes instantanés glissants qui correspondent séparément au déplacement des courbes (c_α) et des courbes (c_β) :

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} qz' - ry' = \dfrac{(G-1)}{\omega} p \sum p \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} - \left[(G-1)\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} + ry - qz \right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array} \right.$$

$$(8_1)\quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 z' - r_1 y' = \dfrac{(G_1-1)}{\omega_1} p_1 \sum p_1 \dfrac{\partial x}{\partial \beta} - \left[(G_1-1)\dfrac{\partial x}{\partial \beta} + r_1 y - q_1 z \right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

8. On déduit des équations (4) les trois suivantes :

$$(9)\quad \left\{ \begin{array}{r} \sum \dfrac{\partial X^2}{\partial \alpha^2} = G^2 \sum \dfrac{\partial x^2}{\partial \alpha^2}, \\ \sum \dfrac{\partial X^2}{\partial \beta^2} = G_1^2 \sum \dfrac{\partial x^2}{\partial \beta^2}, \\ \sum \dfrac{\partial X}{\partial \alpha}\dfrac{\partial X}{\partial \beta} = GG_1 \sum \dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\dfrac{\partial x}{\partial \beta}, \end{array} \right.$$

qu'on aurait pu écrire immédiatement d'après les conditions de contact adoptées au n° 2, et qui, pour G et G_1 égaux à l'unité, répondent à la définition des surfaces applicables, telle qu'elle a été directement introduite par Gauss.

9. Ces conditions (9) étant admises dans tous les cas et les surfaces (x, y, z), (X, Y, Z) étant supposées convenablement déterminées, on peut se poser la question, dont j'indiquerai plus loin une application importante, de trouver les neuf cosinus $a, b, c, \ldots.$

Les dérivées partielles n'intervenant jusqu'ici que comme des quantités tout à fait quelconques, la solution requise n'est autre que celle du problème algébrique qui suit et où, pour abréger l'écriture, je change la notation, mais où l'on verra, quand cela sera nécessaire, sa correspondance avec les formules (4).

§ III. — Digression algébrique.

10. Il s'agit de résoudre le système d'équations

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{lll} \mathcal{A}a+\mathcal{B}b+\mathcal{C}c=\mathrm{A}, & \mathcal{A}a'+\mathcal{B}b'+\mathcal{C}c'=\mathrm{B}, & \mathcal{A}a''+\mathcal{B}b''+\mathcal{C}c''=\mathrm{C}, \\ \mathcal{A}_1a+\mathcal{B}_1b+\mathcal{C}_1c=\mathrm{A}_1, & \mathcal{A}_1a'+\mathcal{B}_1b'+\mathcal{C}_1c'=\mathrm{B}_1, & \mathcal{A}_1a''+\mathcal{B}_1b''+\mathcal{C}_1c''=\mathrm{C}_1, \\ a^2+b^2+c^2=1; & a'^2+b'^2+c'^2=1; & a''^2+b''^2+c''^2=1, \end{array}\right.$$

où l'on suppose

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2=\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2=g, \\ \mathrm{A}_1^2+\mathrm{B}_1^2+\mathrm{C}_1^2=\mathcal{A}_1^2+\mathcal{B}_1^2+\mathcal{C}_1^2=g_1, \\ \mathrm{AA}_1+\mathrm{BB}_1+\mathrm{CC}_1=\mathcal{A}\mathcal{A}_1+\mathcal{B}\mathcal{B}_1+\mathcal{C}\mathcal{C}_1=h, \end{array}\right.$$

et où les A, $\mathcal{A}$, ... sont censés donnés, les inconnues étant $a, b, c, \ldots$.

Chaque groupe vertical (10) peut se résoudre isolément, et, si l'on adjoint au premier groupe, par exemple, le déterminant

$$\mathrm{R}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & \mathcal{C} \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 & \mathcal{C}_1 \end{vmatrix},$$

dont le carré

$$\mathrm{R}^2=\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{A} & \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{A} & g & h \\ \mathrm{A}_1 & h & g_1 \end{vmatrix}$$

est connu, on obtient les trois premières équations du Tableau qui suit, dans lequel R′, R″ désignent des déterminants analogues à R, et où l'on a posé, pour abréger,

$$k=gg_1-h^2,$$

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} ka=(\mathrm{A}g_1-\mathrm{A}_1h)\mathcal{A}+(\mathrm{A}_1g-\mathrm{A}h)\mathcal{A}_1+\mathrm{R}(\mathcal{B}\mathcal{C}_1-\mathcal{C}\mathcal{B}_1), \\ kb=(\mathrm{A}g_1-\mathrm{A}_1h)\mathcal{B}+(\mathrm{A}_1g-\mathrm{A}h)\mathcal{B}_1+\mathrm{R}(\mathcal{C}\mathcal{A}_1-\mathcal{A}\mathcal{C}_1), \\ kc=(\mathrm{A}g_1-\mathrm{A}_1h)\mathcal{C}+(\mathrm{A}_1g-\mathrm{A}h)\mathcal{C}_1+\mathrm{R}(\mathcal{A}\mathcal{B}_1-\mathcal{B}\mathcal{A}_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ ka'=(\mathrm{B}g_1-\mathrm{B}_1h)\mathcal{A}+(\mathrm{B}_1g-\mathrm{B}h)\mathcal{A}_1+\mathrm{R}'(\mathcal{B}\mathcal{C}_1-\mathcal{C}\mathcal{B}_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ ka''=(\mathrm{C}g_1-\mathrm{C}_1h)\mathcal{A}+(\mathrm{C}_1g-\mathrm{C}h)\mathcal{A}_1+\mathrm{R}''(\mathcal{B}\mathcal{C}_1-\mathcal{C}\mathcal{B}_1), \end{array}\right.$$

Si l'on multiplie les trois premières (12) par $a'b'c'$ et qu'on les ajoute ensuite, on obtiendra, à cause des conditions d'orthogonalité,

$$(Ag_1 - A_1 h)B + (A_1 g - Ah)B_1 + R\Sigma a'(\mathcal{B}\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}\mathcal{B}_1) = 0,$$

où le dernier terme est visiblement RR'. En remettant pour g, g_1, h leurs expressions développées (11), on reconnaît que cette égalité revient à

$$RR' = (BC_1 - CB_1)(CA_1 - AC_1),$$

et l'on trouverait des expressions analogues pour RR'', $R'R''$. On en conclut

$$R = \pm(BC_1 - CB_1), \qquad R' = \pm(CA_1 - AC_1), \qquad R'' = \pm(AB_1 - BA_1),$$

les signes se correspondant.

On peut donner aux formules (12) une forme un peu différente et plus condensée. Si l'on remet, dans ces formules, pour g, g_1, h leurs expressions développées (11) et que l'on représente par (AB_1) un déterminant tel que $(AB_1 - BA_1)$, on obtient facilement

$$(12_1) \qquad ka = (\mathcal{A}B_1)(AB_1) + (\mathcal{A}C_1)(AC_1) \pm (BC_1)(\mathcal{B}\mathcal{C}_1),$$

d'où l'on déduit les autres cosinus par des permutations convenables des lettres.

11. J'ajouterai un mot sur ce calcul algébrique.

Je suppose que les relations (11) aient lieu, sans admettre préalablement la triple orthogonalité des directions (abc), $(a'b'c')$, $(a''b''c'')$, mais sous les trois conditions

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \qquad b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \qquad c^2 + c'^2 + c''^2 = 1.$$

Cela étant, si l'on fait

$$bc + b'c' + b''c'' = \lambda, \qquad ac + a'c' + a''c'' = \mu, \qquad ab + a'b' + a''b'' = \nu,$$

les équations (10) donneront, dans tous les cas,

$$\begin{aligned} \Sigma A^2 &= \Sigma\mathcal{A}^2 + 2\Sigma\mathcal{B}\mathcal{C}\lambda, \\ \Sigma A_1^2 &= \Sigma\mathcal{A}_1^2 + 2\Sigma\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1\lambda, \\ \Sigma AA_1 &= \Sigma\mathcal{A}\mathcal{A}_1 + \Sigma(\mathcal{B}\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}\mathcal{B}_1)\lambda; \end{aligned}$$

par conséquent, sous les nouvelles conditions (11), on aura nécessairement

$$\Sigma \mathcal{B}\mathcal{C}\lambda = 0, \qquad \Sigma \mathcal{B}_1 \mathcal{C}_1 \lambda = 0, \qquad \Sigma(\mathcal{B}\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}\mathcal{B}_1)\lambda = 0.$$

Le déterminant des coefficients de λ, μ, ν dans ces équations étant égal au produit

$$(\mathcal{B}\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}\mathcal{B}_1)(\mathcal{C}\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}\mathcal{C}_1)(\mathcal{A}\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}\mathcal{A}_1),$$

si aucun des facteurs n'est nul, on aura nécessairement

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0.$$

Cela est simplement destiné à constater, *a posteriori*, la triple orthogonalité des directions (12), la vérification directe étant assez compliquée.

12. Les cosinus étant calculés par les formules (12), on peut, par leur moyen, former les composantes de rotation P, Q, R, relatives à une variable indépendante quelconque t. Mais il est préférable généralement de procéder un peu différemment. En différentiant, en effet, la première ligne (10) et ajoutant les équations obtenues, après les avoir multipliées par a, a', a'', on obtient, en ayant égard aux équations (1) et (2), la première du groupe

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{B}R - \mathcal{C}Q = \dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} - \left(a\dfrac{\partial A}{\partial t} + a'\dfrac{\partial B}{\partial t} + a''\dfrac{\partial C}{\partial t}\right), \\ \mathcal{B}_1 R - \mathcal{C}_1 Q = \dfrac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t} - \left(a\dfrac{\partial A_1}{\partial t} + a'\dfrac{\partial B_1}{\partial t} + a''\dfrac{\partial C_1}{\partial t}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Les deux premières fourniront R et Q quand on aura introduit aux seconds membres les expressions (12) des cosinus. Les deux suivantes feront connaître P, ...

§ IV. — Développement analytique des conditions de contact.

13. Je reviens aux équations (4) du § II. En exprimant, pour chaque groupe, la condition d'intégrabilité, on obtient

$$\begin{aligned} &(G - G_1)\left(a\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} + b\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial\beta} + c\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right) + \frac{\partial G}{\partial\beta}\left(a\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \ldots\right) \\ &\quad - \frac{\partial G_1}{\partial\alpha}\left(a\frac{\partial x}{\partial\beta} + \ldots\right) + G\left(\frac{\partial a}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \ldots\right) - G_1\left(\frac{\partial a}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} + \ldots\right) = 0 \end{aligned}$$

et deux autres équations analogues.

Ces trois équations, multipliées respectivement par a, a', a'' et ensuite ajoutées, se transforment, en ayant égard aux formules (1) et (2) du § II, dans les trois suivantes :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&(G-G_1)\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial G}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\alpha}-\frac{\partial G_1}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}+G\left(q_1\frac{\partial z}{\partial\alpha}-r_1\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)-G_1\left(q\frac{\partial z}{\partial\beta}-r\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)=0,\\
&(G-G_1)\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial G}{\partial\beta}\frac{\partial y}{\partial\alpha}-\frac{\partial G_1}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}+G\left(r_1\frac{\partial x}{\partial\alpha}-p_1\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)-G_1\left(r\frac{\partial x}{\partial\beta}-p\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)=0,\\
&(G-G_1)\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial G}{\partial\beta}\frac{\partial z}{\partial\alpha}-\frac{\partial G_1}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}+G\left(p_1\frac{\partial y}{\partial\alpha}-q_1\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)-G_1\left(p\frac{\partial y}{\partial\beta}-q\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)=0.
\end{aligned}\right.$$

Lorsque

$$G=G_1,$$

ces équations se réduisent à

$$(14_1)\quad \frac{\partial G}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\alpha}-\frac{\partial G_1}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}+G\left(q_1\frac{\partial z}{\partial\alpha}-r_1\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)-G_1\left(q\frac{\partial z}{\partial\beta}-r\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)=0$$

et les deux analogues.

Enfin, dans le cas de

$$G=G_1=1,$$

elles prennent la forme encore plus réduite

$$(14_2)\qquad \left(q_1\frac{\partial z}{\partial\alpha}-r_1\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)-\left(q\frac{\partial z}{\partial\beta}-r\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)=0$$

et les deux analogues.

Ces dernières équations sont précisément celles qui figurent, avec une légère différence dans la notation, à la page 71 de l'Ouvrage cité de M. Darboux.

Je vais principalement m'occuper de ce dernier cas, qui est le plus simple et en même temps le plus important.

V. — Cas du roulement seul.

14. J'emprunte à M. Darboux la représentation particulière des six composantes de rotation au moyen des formules

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
p&=\lambda\frac{\partial x}{\partial\alpha}-\mu\frac{\partial x}{\partial\beta}, & q&=\lambda\frac{\partial y}{\partial\alpha}-\mu\frac{\partial y}{\partial\beta}, & r&=\lambda\frac{\partial z}{\partial\alpha}-\mu\frac{\partial z}{\partial\beta},\\
p_1&=-\lambda\frac{\partial x}{\partial\beta}+\mu_1\frac{\partial x}{\partial\alpha}, & q_1&=-\lambda\frac{\partial y}{\partial\beta}+\mu_1\frac{\partial y}{\partial\alpha}, & r_1&=-\lambda\frac{\partial z}{\partial\beta}+\mu_1\frac{\partial z}{\partial\alpha}
\end{aligned}\right.$$

qui vérifient, comme on peut le reconnaître immédiatement, les trois équations du premier degré (14_2), quelles que soient les indéterminées λ, μ, μ_1. La signification cinématique de ces indéterminées a été indiquée dans l'Ouvrage mentionné, et l'on voit tout de suite qu'après leur multiplication par certains facteurs, on peut les assimiler à des rotations tangentielles dont les rotations introduites (p, q, r), (p_1, q_1, r_1) seraient les résultantes : les composantes normales à la surface (x, y, z) étant visiblement nulles d'après ces expressions (15) elles-mêmes, ou d'après la condition initiale du roulement supposé.

15. J'associe, de mon côté, aux formules (15) les relations inverses

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = p\rho - p_1\sigma, & \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = q\rho - q_1\sigma, & \dfrac{\partial z}{\partial \alpha} = r\rho - r_1\sigma, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \beta} = -p_1\rho + p\sigma_1, & \dfrac{\partial y}{\partial \beta} = -q_1\rho + q\sigma_1, & \dfrac{\partial z}{\partial \beta} = -r_1\rho + r\sigma_1, \end{cases}$$

les indéterminées ρ, σ, σ_1 étant liées aux précédentes par les relations

$$(17)\qquad \rho = \frac{\lambda}{\lambda^2 - \mu\mu_1}, \qquad \sigma = \frac{\mu}{\lambda^2 - \mu\mu_1}, \qquad \sigma_1 = \frac{\mu_1}{\lambda^2 - \mu\mu_1},$$

qui entraînent, à leur tour,

$$(17_1)\qquad \lambda = \frac{\rho}{\rho^2 - \sigma\sigma_1}, \qquad \mu = \frac{\sigma}{\rho^2 - \sigma\sigma_1}, \qquad \mu_1 = \frac{\sigma_1}{\rho^2 - \sigma\sigma_1}$$

et

$$(\lambda^2 - \mu\mu_1)(\rho^2 - \sigma\sigma_1) = 1.$$

VI. — Question incidente concernant les indéterminées introduites.

16. Les quantités λ, μ, μ_1 ou ρ, σ, σ_1 peuvent s'exprimer algébriquement au moyen des paramètres différentiels du premier ordre de la surface (S), ainsi que de la grandeur et de l'angle des deux rotations (p, q, r) (p_1, q_1, r_1).

Je poserai généralement

$$l = \Sigma \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^2}, \qquad m = \Sigma \frac{\partial x^2}{\partial \beta^2}, \qquad \mathrm{v} = \Sigma \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta},$$
$$\omega = \Sigma p^2, \qquad \omega_1 = \Sigma p_1^2, \qquad v = \Sigma p p_1.$$

Cela étant, on aura, par des combinaisons visibles des équations (16),

$$\begin{aligned} l &= \omega\rho^2 - 2\varphi\rho\sigma + \omega_1\sigma^2, \\ m &= \omega_1\rho^2 - 2\varphi\rho\sigma_1 + \omega\sigma_1^2, \\ \mathrm{v} &= -\varphi\rho^2 + \omega_1\rho\sigma_1 + \omega\rho\sigma_1 - \varphi\sigma\sigma_1. \end{aligned}$$

Si, par des combinaisons pareilles des équations (15), on forme le système homologue et que l'on y remplace ensuite λ, μ, μ_1 par les expressions (17_1), on obtiendra un système équivalent au premier, savoir

$$\begin{aligned} \Delta^2\omega &= l\rho^2 - 2\mathrm{v}\rho\sigma + m\sigma^2, \\ \Delta^2\omega_1 &= m\rho^2 - 2\mathrm{v}\rho\sigma_1 + l\sigma_1^2, \\ \Delta^2\varphi &= -\mathrm{v}\rho^2 + m\rho\sigma + l\rho\sigma_1 - \mathrm{v}\sigma\sigma_1, \end{aligned}$$

où, pour abréger, on a posé

$$\Delta = \rho^2 - \sigma\sigma_1.$$

Des combinaisons faciles de ces deux systèmes fournissent d'abord

$$\Delta^2 = \frac{\mathrm{v}^2 - lm}{\varphi^2 - \omega\omega_1}.$$

Δ étant actuellement connu, on peut écrire les deux premières équations du premier système sous la forme

$$\begin{aligned} l - \omega\Delta &= (\omega\sigma_1 - 2\varphi\rho + \omega_1\sigma)\sigma, \\ m - \omega_1\Delta &= (\omega\sigma_1 - 2\varphi\rho + \omega_1\sigma)\sigma_1, \end{aligned}$$

en sorte que, θ étant une indéterminée, il est permis de poser

$$\sigma = \theta(l - \omega\Delta), \qquad \sigma_1 = \theta(m - \omega_1\Delta),$$

ce qui entraîne

$$\omega\sigma_1 - 2\varphi\rho + \omega_1\sigma = \frac{1}{\theta}.$$

La considération du second système conduit pareillement à

$$l\sigma_1 - 2\mathrm{v}\rho + m\sigma = -\frac{\Delta}{\theta}.$$

En éliminant ρ entre ces deux dernières équations et substituant ensuite les expressions ci-dessus de σ, σ_1 en θ, on obtiendra, pour déterminer cette dernière quantité, l'équation

$$(\omega \mathrm{v} - l v)(m - \omega_1 \Delta) + (\omega_1 \mathrm{v} - m v)(l - \omega \Delta) = \frac{\mathrm{v} + v\Delta}{\theta^2}.$$

On tirera de trois des dernières équations les expressions de σ, σ_1, ρ, sans introduction d'autres irrationnelles que Δ et θ.

VII. — Des deux problèmes principaux concernant le roulement seul.

17. Il se présente maintenant deux questions principales et en quelque sorte réciproques. La première consiste à regarder x, y, z comme des fonctions données de α, β, et à en déduire toutes les autres quantités : et d'abord les six composantes de rotation. Ces composantes connues, on en conclura les cosinus par l'intégration des différentielles totales (1), et l'on aura enfin X, Y, Z par les quadratures (4). Si l'on tient à connaître le mouvement de l'origine, ses coordonnées seront alors fournies par les formules (5). La seconde question consiste à se donner les rotations ou, si l'on veut, les cosinus, en un mot ce que j'appellerai le *déplacement angulaire*, et à en déduire x, y, z et, par suite, X, Y, Z.

Je nommerai la première question *problème I*, et la seconde *problème II*.

VIII. — Du problème I.

18. Les équations (15) donnent

$$pq_1 - qp_1 = (\lambda^2 - \mu\mu_1)\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta}\right),$$

et l'on observera que, en excluant l'hypothèse de $\lambda^2 - \mu\mu_1$ égal à zéro, ainsi que le cas des surfaces cylindriques où y, par exemple, serait fonction de x, aucun des déterminants $(pq_1 - qp_1)$ ne peut être nul.

En posant, pour abréger,

$$\mathrm{A} = \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \qquad \mathrm{B} = \ldots, \qquad \mathrm{C} = \ldots,$$

les équations fondamentales (3) du § II, que je fais actuellement intervenir, pourront s'écrire

$$
(18)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial\beta}-\frac{\partial p_1}{\partial\alpha}=(\lambda^2-\mu\mu_1)\,\mathrm{A},\\
&\frac{\partial q}{\partial\beta}-\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}=(\lambda^2-\mu\mu_1)\,\mathrm{B},\\
&\frac{\partial r}{\partial\beta}-\frac{\partial r_1}{\partial\alpha}=(\lambda^2-\mu\mu_1)\,\mathrm{C}.
\end{aligned}
\right.
$$

En vertu de (15), ces équations reviennent aux suivantes

$$
(19)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}-\frac{\partial\mu_1}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}-\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)\frac{\partial x}{\partial\beta}\\
&\qquad+2\lambda\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\mu\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2}-\mu_1\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}=(\lambda^2-\mu\mu_1)\,\mathrm{A}
\end{aligned}
\right.
$$

et deux autres analogues.

On peut les remplacer par les suivantes

$$
(20)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}-\frac{\partial\mu_1}{\partial\alpha}\right)\sum\frac{\partial x^2}{\partial\alpha^2}+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}-\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)\sum\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}\\
&\qquad+2\lambda\sum\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\mu\sum\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2}-\mu_1\sum\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}=0,\\
&\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}-\frac{\partial\mu_1}{\partial\alpha}\right)\sum\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}-\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)\sum\frac{\partial x^2}{\partial\beta^2}\\
&\qquad+2\lambda\sum\frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\mu\sum\frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2}-\mu_1\sum\frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}=0,\\
&2\lambda\sum\mathrm{A}\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\mu\sum\mathrm{A}\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2}-\mu_1\sum\mathrm{A}\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}=(\lambda^2-\mu\mu_1)\sum\mathrm{A}^2,
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$
\sum\mathrm{A}^2=\sum\frac{\partial x^2}{\partial\alpha^2}\sum\frac{\partial x^2}{\partial\beta^2}-\left(\sum\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)^2.
$$

Dans les deux premières ne figurent que les paramètres différentiels du premier ordre de la surface (xyz) et leurs premières dérivées. La troisième, qui est finie en λ, μ, μ_1, introduit des éléments se rattachant à la courbure dans un sens général. Dans tous les cas, soit sous la forme (19), soit sous les formes (20), les seules inconnues qui figurent dans ces équations sont, d'après les hypothèses admises, les indéterminées λ, μ, μ_1 de M. Darboux.

19. Bien qu'il puisse être avantageux, dans des cas particuliers, de conserver le système simultané (19) ou (20), il n'est pas sans intérêt, au moins théorique, de faire voir que l'intégration de l'un ou de l'autre de ces systèmes équivalents peut être ramenée à celle d'une équation unique du second ordre, qui présente cette particularité que les dérivées partielles du second ordre y figurent sous forme linéaire seulement, tandis que, dans les méthodes parvenues à ma connaissance, il s'introduit, sauf des cas spéciaux, la quantité $(rt - s^2)$ (notations classiques) qui caractérise les équations étudiées par Monge, Ampère et d'autres géomètres. Or ces dernières équations doivent être considérées généralement comme offrant un peu plus de difficulté d'intégration que les premières, et je ne sache pas qu'on les ait réduites, dans la présente question, à la forme annoncée.

Pour opérer la réduction, j'observe que, la troisième équation (20) pouvant s'écrire

$$K\mu + K_1\mu_1 + \mu\mu_1 = \lambda^2 - 2H\lambda,$$

où K, K_1, H sont des fonctions données, la substitution

$$\mu = \nu - K_1, \qquad \mu_1 = \nu_1 - K,$$

la ramène à

$$\nu\nu_1 = \lambda^2 - 2H\lambda + KK_1 = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1).$$

Or je dis que la nouvelle substitution

$$\nu = \theta(\lambda - \lambda_0), \qquad \nu = \frac{1}{\theta}(\lambda - \lambda_1),$$

où θ est une indéterminée, conduira au but proposé.

En effet, les deux premières équations (20), résolues par rapport aux parenthèses, donnent

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} - \frac{\partial\mu}{\partial\beta} = f, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} - \frac{\partial\mu_1}{\partial\alpha} = F,$$

où les seconds membres contiennent linéairement λ, μ, μ_1. La substitution précédente les transforme dans

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} - \theta\frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = f_1, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = F_1,$$

en comprenant dans f_1 et F_1 toutes les autres quantités qu'introduit la différentiation, particulièrement θ et les dérivées premières de θ, lesquelles entrent dans les seconds membres sous forme linéaire. En multipliant la seconde équation par θ et l'ajoutant ensuite à la première, les deux dérivées de λ disparaissent en même temps. L'équation résultante

$$f_1 + \theta F_1 = 0$$

contient linéairement les dérivées premières de θ; λ y entre aussi linéairement et sous forme finie. En tirant de cette équation l'expression de λ pour la substituer dans l'une des précédentes, on obtiendra une équation en θ, linéaire par rapport aux dérivées du second ordre de cette fonction, et où θ et ses dérivées du premier ordre entreront sous forme rationnelle.

Les équations (20), qui sont tout à fait générales, subissent des simplifications : 1° dans le cas où les courbes (c_α), (c_β) sont orthogonales; 2° lorsqu'on adopte quelques formes réduites, connues, pour les paramètres différentiels du premier ordre; 3° dans le cas surtout des variables imaginaires symétriques. Mais il me paraît inutile d'insister sur ce point pas plus que sur la transformation géométrique des coefficients de la troisième équation (20). J'entrerai dans plus de détails au sujet du problème II, qui n'a pas été, à ma connaissance, considéré jusqu'ici dans sa généralité. On en trouve quelques traces particulières dans le célèbre Mémoire de Bour (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIX^e Cahier), à propos des surfaces *réciproques*.

§ IX. — Du problème II.

20. On suppose connues les six composantes de rotation et l'on se propose de trouver la surface (x, y, z) et, par suite, (X, Y, Z).

Les formules (16), § V, donnent, en exprimant les conditions d'intégrabilité,

$$(21)\quad p\left(\frac{\partial\rho}{\partial\beta} - \frac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha}\right) + p_1\left(\frac{\partial\rho}{\partial\alpha} - \frac{\partial\sigma}{\partial\beta}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial\beta} + \frac{\partial p_1}{\partial\alpha}\right)\rho - \frac{\partial p_1}{\partial\beta}\sigma - \frac{\partial p}{\partial\alpha}\sigma_1 = 0,$$

et deux autres équations analogues. En posant, pour abréger,

$$\mathcal{A} = qr_1 - rq_1, \qquad \mathcal{B} = \ldots, \qquad \mathcal{C} = \ldots,$$

on déduit de ces trois équations le système équivalent

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial\rho}{\partial\beta}-\frac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha}\right)\sum p^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}-\frac{\partial\sigma}{\partial\beta}\right)\sum pp_1\\
&\qquad+\rho\sum p\left(\frac{\partial p}{\partial\beta}+\frac{\partial p_1}{\partial\alpha}\right)-\sigma\sum p\frac{\partial p_1}{\partial\beta}-\sigma_1\sum p\frac{\partial p}{\partial\alpha}=0,\\
&\left(\frac{\partial\rho}{\partial\beta}-\frac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha}\right)\sum pp_1+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}-\frac{\partial\sigma}{\partial\beta}\right)\sum p_1^2\\
&\qquad+\rho\sum p_1\left(\frac{\partial p}{\partial\beta}+\frac{\partial p_1}{\partial\alpha}\right)-\sigma\sum p_1\frac{\partial p_1}{\partial\beta}-\sigma_1\sum p_1\frac{\partial p}{\partial\alpha}=0,\\
&\qquad\rho\sum \mathcal{A}\left(\frac{\partial p}{\partial\beta}+\frac{\partial p_1}{\partial\alpha}\right)-\sigma\sum \mathcal{A}\frac{\partial p_1}{\partial\beta}-\sigma_1\sum \mathcal{A}\frac{\partial p}{\partial\alpha}=0,
\end{aligned}\right.$$

où les inconnues ρ, σ, σ_1 et leurs dérivées entrent sous forme linéaire seulement.

21. On peut faire dépendre la détermination de ces trois quantités de l'intégration d'une équation linéaire, unique, du second ordre. En effet, les deux premières (22) déterminent généralement les expressions

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\beta}-\frac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha}\right)\quad\text{et}\quad\left(\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}-\frac{\partial\sigma}{\partial\beta}\right)$$

comme des fonctions linéaires de ρ, σ, σ_1, et la troisième (22) est de la forme

$$K\sigma+K_1\sigma_1=H\rho,$$

où K, K_1, H sont donnés.

Si l'on pose

$$\sigma=k\rho+K_1u,\qquad \sigma_1=k_1\rho-Ku,$$

u étant une indéterminée et les quantités k et k_1, également inconnues, étant assujetties à la condition

$$kK+k_1K_1=H,$$

la substitution dans les expressions précédentes fournira

$$\frac{\partial\rho}{\partial\beta}-\frac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha}=\frac{\partial\rho}{\partial\beta}-k_1\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}+\ldots,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}-\frac{\partial\sigma}{\partial\beta}=\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}-k\frac{\partial\rho}{\partial\beta}+\ldots.$$

On voit par là que la combinaison

$$k\left(\frac{\partial\rho}{\partial\beta}-\frac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha}\right)+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}-\frac{\partial\sigma}{\partial\beta}\right)$$

fera disparaître à la fois, au second membre, $\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}$ et $\frac{\partial\rho}{\partial\beta}$, si l'on prend

$$kk_1=1,$$

équation qui, jointe à celle écrite un peu plus haut, détermine complètement k et k_1. On est ainsi conduit à une équation contenant ρ sous forme finie et linéaire, et dans laquelle u et ses dérivées du premier ordre entrent également sous forme linéaire. L'élimination de ρ entre cette équation et l'une des précédentes fournira une équation du second ordre, purement linéaire par rapport à u et à toutes ses dérivées du premier et du second ordre ([1]).

22. Il est presque inutile de faire observer que, lorsque ρ, σ, σ_1 auront été déterminés (les cosinus étant d'ailleurs déduits des rotations), les équations (16) donneront x, y, z par des quadratures et l'on aura ensuite X, Y, Z par d'autres quadratures. Et l'on peut remarquer, à ce sujet, qu'il ne figurera dans les expressions de x, y, z et de X, Y, Z d'autres arbitraires que celles qu'introduit l'intégration du système (22). Les deux surfaces associées se distingueront généralement par la nature seule des transcendantes différentes que pourront amener les quadratures.

A chaque solution particulière de l'équation linéaire du second ordre, dont il a été question au numéro précédent, correspondra une couple de surfaces bien déterminées, susceptibles de roulement réciproque l'une sur l'autre. Si l'on savait intégrer généralement cette équation linéaire quand on adopte la forme la plus générale des rotations (au moyen des formules d'Euler, par exemple), on aurait toutes les couples possibles de surfaces à roulement réciproque. Mais, pour savoir, à l'égard d'une surface déterminée (x, y, z), quelles sont toutes

---

([1]) Cette réduction et celle relative au précédent problème m'ont paru présenter assez d'intérêt pour devenir l'objet d'une brève Communication aux *Comptes rendus* (5 septembre 1887).

les surfaces (X, Y, Z) susceptibles de rouler sur la proposée, il faudrait assujettir à des conditions spéciales les trois fonctions arbitraires que les formules dont il s'agit introduisent dans le calcul et, conjointement, les fonctions arbitraires qu'amène l'intégration de l'équation linéaire du second ordre. Or, suivant les cas, ceci peut être plus simple ou plus compliqué que l'intégration directe de l'équation non linéaire dont dépend le problème I.

23. Voici une remarque qui n'est pas dépourvue d'importance. Si l'on connaît deux surfaces particulières (x, y, z), (X, Y, Z) applicables l'une sur l'autre, on pourra, par les formules du § III, en déduire les cosinus $a, b, c, \ldots$ et, par suite, les rotations (p, q, r), (p_1, q_1, r_1). On sera donc en mesure de construire le système (21) ou (22). L'intégration fournira ensuite les quantités ρ, σ, σ_1 qui conduiront, ainsi que cela a été indiqué, à la série complète des couples de surfaces à roulement réciproque et répondant au mouvement angulaire donné.

24. A cause de la forme linéaire de l'équation finale aux différentielles partielles, le problème II doit être considéré, en général, comme plus simple que le problème I. Il offre pour l'intégration beaucoup plus de latitude que celui-ci et présente des particularités et des facilités qui lui sont propres. Ainsi, par exemple, si p_1, q_1, r_1 ne dépendent que de α [1], les équations (22) ne contiennent point σ en dehors du signe de différentiation. La troisième équation fournit une expression de la forme

$$\rho = M\sigma_1$$

et, comme les deux premières, résolues par rapport aux parenthèses, donnent, par suite,

$$\frac{\partial\rho}{\partial\beta} - \frac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha} = N\,\sigma_1,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\alpha} - \frac{\partial\sigma}{\partial\beta} = N_1\sigma_1,$$

---

[1] On peut remarquer que si p_1, q_1, r_1 sont des fonctions données quelconques de α et β, les équations (3), § II, fournissent p, q, r, par l'intégration d'un système linéaire censé aux différentielles ordinaires.

M, N, N_1 étant des fonctions connues de α, β : l'introduction de $\rho = M\sigma_1$ dans l'avant-dernière, la transformera dans une équation linéaire du premier ordre, à la seule inconnue σ_1. La dernière donnera ensuite σ, par une quadrature.

§ X. — Des rotations imaginaires.

25. Supposons que, par rapport à deux variables indépendantes quelconques ξ, η, on connaisse, en fonctions de ces dernières quantités, les rotations

$$P = \sum c\frac{\partial b}{\partial \xi}, \qquad P_1 = \sum c\frac{\partial b}{\partial \eta}, \qquad \cdots.$$

Si l'on substitue à ξ, η deux nouvelles variables indépendantes α, β, on aura visiblement

$$p = \sum c\frac{\partial b}{\partial \alpha} = P\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + P_1\frac{\partial \eta}{\partial \alpha},$$
$$p_1 = \sum c\frac{\partial b}{\partial \beta} = P\frac{\partial \xi}{\partial \beta} + P_1\frac{\partial \eta}{\partial \beta},$$

et de même pour les autres composantes. De là résulte

$$\Sigma p^2 = \frac{\partial \xi^2}{\partial \alpha^2}\Sigma P^2 + 2\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\Sigma PP_1 + \frac{\partial \eta^2}{\partial \alpha^2}\Sigma P_1^2,$$
$$\Sigma p_1^2 = \frac{\partial \xi^2}{\partial \beta^2}\Sigma P^2 + 2\frac{\partial \xi}{\partial \beta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta}\Sigma PP_1 + \frac{\partial \eta^2}{\partial \beta^2}\Sigma P_1^2;$$

et l'on peut déterminer la substitution de variables par la condition, par exemple, que

$$\Sigma p^2 = 0, \qquad \Sigma p_1^2 = 0.$$

Il suffira pour cela d'annuler les seconds membres des équations précédentes et d'en déduire, par l'intégration séparée de deux équations différentielles du premier ordre, les éléments de la substitution demandée. Ce calcul est tout à fait conforme à ce qui se pratique dans la théorie des surfaces.

26. Ayant ainsi

$$\Sigma p^2 = 0, \qquad \Sigma p_1^2 = 0,$$

si l'on fait

$$\Sigma pp_1 = v,$$

on obtiendra, en ayant égard au groupe (3), § II,

$$\sum p\frac{\partial p}{\partial\alpha}=0,\qquad \sum p_1\frac{\partial p}{\partial\beta}=0,\qquad \sum p\frac{\partial p_1}{\partial\alpha}=0,$$
$$\sum p_1\frac{\partial p}{\partial\alpha}=\frac{\partial v}{\partial\alpha},\qquad \sum p\frac{\partial p_1}{\partial\beta}=\frac{\partial v}{\partial\beta},$$

et les deux premières équations (22) se transformeront dans

$$(22_1)\qquad v\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}-\frac{\partial\,\sigma v}{\partial\beta}=0,\qquad v\frac{\partial\rho}{\partial\beta}-\frac{\partial\,\sigma_1 v}{\partial\alpha}=0.$$

Les trois équations (22) sont actuellement remplacées par (22_1) et l'une de ces mêmes équations (22).

27. On peut considérer directement les rotations imaginaires. Les trois équations (3) peuvent alors être remplacées par les trois équivalentes

$$\sum p\frac{\partial p_1}{\partial\alpha}=0,\qquad \sum p_1\frac{\partial p}{\partial\beta}=0,$$
$$\frac{\partial r}{\partial\beta}-\frac{\partial r_1}{\partial\alpha}=pq_1-qp_1.$$

Si l'on pose, φ et φ_1 étant deux indéterminées,

$$p=ir\sin\varphi,\qquad p_1=ir_1\sin\varphi_1,$$
$$q=ir\cos\varphi,\qquad q_1=ir_1\cos\varphi_1$$

on obtient aisément, pour les transformées des équations précédentes,

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r}{\partial\beta}=\cot\left(\dfrac{\varphi_1-\varphi}{2}\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta},\\[2mm] \dfrac{1}{r_1}\dfrac{\partial r_1}{\partial\alpha}=-\cot\dfrac{\varphi_1-\varphi}{2}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha},\\[2mm] \dfrac{\partial r}{\partial\beta}-\dfrac{\partial r_1}{\partial\alpha}=rr_1\sin(\varphi_1-\varphi);\end{cases}$$

à quoi l'on peut joindre la relation

$$2rr_1\sin^2\left(\frac{\varphi_1-\varphi}{2}\right)=v.$$

Il est bon de noter ces autres relations

$$(24)\quad \begin{cases} \sum \dfrac{\partial p^2}{\partial \alpha^2} = -r^2 \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial \alpha^2}, & \sum \dfrac{\partial p_1^2}{\partial \alpha^2} = -r_1^2 \dfrac{\partial \varphi_1^2}{\partial \alpha^2}, \\ \sum \dfrac{\partial p^2}{\partial \beta^2} = -r^2 \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial \beta^2}, & \sum \dfrac{\partial p_1^2}{\partial \beta^2} = -r_1^2 \dfrac{\partial \varphi_1^2}{\partial \beta^2}, \\ \sum \dfrac{\partial p}{\partial \alpha} \dfrac{\partial p}{\partial \beta} = -r^2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta}, & \sum \dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha} \dfrac{\partial p_1}{\partial \beta} = -r_1^2 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \beta}. \end{cases}$$

28. Le système (23) peut être considéré en lui-même; mais, quand la substitution de variables, ci-dessus mentionnée, a été effectuée sur des rotations données (vérifiant, bien entendu, le groupe fondamental qui leur répond), les équations qui le composent deviennent nécessairement des identités. Dans tous les cas, si l'on adjoint aux équations (22_1), du n° 26, la troisième équation (21), on formera le groupe complet correspondant aux rotations imaginaires, savoir :

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial \sigma}{\partial \beta} = \dfrac{1}{v} \dfrac{\partial v}{\partial \beta} \sigma, \qquad \dfrac{\partial \rho}{\partial \beta} - \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial \alpha} = \dfrac{1}{v} \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} \sigma_1, \\ \left(\dfrac{\partial r}{\partial \beta} + \dfrac{\partial r_1}{\partial \alpha}\right) \rho + \left(\dfrac{r_1}{v} \dfrac{\partial v}{\partial \beta} - \dfrac{\partial r_1}{\partial \beta}\right) \sigma + \left(\dfrac{r}{v} \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial r}{\partial \alpha}\right) \sigma_1 = 0, \end{cases}$$

qui ne conserve plus de trace des auxiliaires φ et φ_1, et présente une certaine simplicité relative.

§ XI. — Remarques sur le déplacement de l'origine.

29. Ce déplacement a été éliminé dès le début, sauf pour ce qui concerne les équations des axes instantanés glissants. Les coordonnées X_0, Y_0, Z_0 se trouvent, en effet, jointes par simple soustraction aux coordonnées X, Y, Z dans les formules de transformation. Il est clair, cependant, qu'on peut les faire intervenir de diverses manières et suivant des conditions convenablement choisies, ainsi que M. Darboux en a donné de remarquables exemples. Mais il est des cas où l'on peut se ramener aux problèmes ci-dessus exposés. Supposons, par exemple, que l'on donne X, Y, Z et X_0, Y_0, Z_0; alors, en posant

$$X' = X - X_0, \qquad Y' = Y - Y_0, \qquad Z' = Z - Z_0,$$

et considérant comme fixe la surface (x, y, z), et comme mobile la surface X′, Y′, Z′, on rentre tout à fait dans les conditions du problème I.

Je vais considérer maintenant le déplacement avec roulement et glissement combinés. Je m'occuperai spécialement d'un cas particulier qui conduit, par une voie nouvelle, aux principales formules de la théorie ordinaire de la déformation des surfaces.

§ XII. — Roulement et glissement d'un plan.

30. Supposons que les deux familles de courbes (c_α), (c_β) de la surface mobile (S) soient orthogonales et prenons pour cette surface le plan xy. On pourra, dans le cas présent, adopter les expressions simples

$$x = \alpha, \qquad y = \beta,$$

de façon que les axes O_1x, O_1y soient respectivement parallèles aux tangentes aux courbes fixes (C_α), (C_β) de la surface (Σ). Les équations (14) fourniront

$$\frac{\partial G}{\partial \beta} + G_1 r = 0, \qquad \frac{\partial G_1}{\partial \alpha} - G r_1 = 0,$$
$$G q_1 + G_1 p = 0,$$

où G et G_1 sont censés donnés. On aura ici

$$G^2 = \sum \frac{\partial X^2}{\partial \alpha^2}, \qquad G_1^2 = \sum \frac{\partial X^2}{\partial \beta^2}.$$

Si l'on tire de là r et r_1 et

$$q_1 = -\frac{G_1}{G} p = hp,$$

la substitution de ces expressions dans les équations (3) conduira à un système de trois équations équivalentes aux formules si connues de M. Codazzi pour le cas où les courbes (C_α), (C_β) sont orthogonales (1).

---

(1) Je ferai remarquer, à cette occasion, que les formules (3), et *a fortiori* d'autres formules analogues de mon ancien Mémoire (*Annales de l'École Normale*) ne sont pas généralement, comme celles de M. Codazzi, soumises à la restriction que l'un des axes soit constamment normal à une même surface.

On peut, comme au § VIII, faire dépendre la solution de l'intégration d'une équation unique du second ordre. On connaît, en effet, r et r_1, et si, dans la dernière équation (3), on remplace q_1 par hp, cette équation pourra s'écrire

$$qp_1 = hp^2 + k = h(p - k_0)(p - k_1),$$

k étant une quantité donnée. En désignant par θ une indéterminée et faisant

$$p_1 = \theta h(p - k_0), \qquad q = \frac{1}{\theta}(p - k_1),$$

la substitution de ces expressions et de celle de q_1 transformera les deux premières (3) dans

$$\frac{\partial p}{\partial \beta} - \theta h \frac{\partial p}{\partial \alpha} = \mathrm{F}, \qquad \frac{1}{\theta}\frac{\partial p}{\partial \beta} - h\frac{\partial p}{\partial \alpha} = \mathrm{F}_1,$$

F et F_1 contenant p sous forme linéaire et finie. Or on a

$$\mathrm{F} - \theta \mathrm{F}_1 = 0, \qquad \ldots.$$

31. Dans le cas des coordonnées imaginaires qui répond aux conditions

$$\sum \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^2} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x^2}{\partial \beta^2} = 0,$$

en supposant toujours z égal à zéro, on peut adopter les expressions

$$x = \alpha + \beta, \qquad y = i(\alpha - \beta).$$

Les relations

$$\sum \frac{\partial \mathrm{X}^2}{\partial \alpha^2} = \mathrm{G}^2 \sum \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^2}, \qquad \sum \frac{\partial \mathrm{X}^2}{\partial \beta^2} = \mathrm{G}_1^2 \sum \frac{\partial \mathrm{X}^2}{\partial \beta^2}, \qquad \sum \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \alpha}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \beta} = \mathrm{G}\mathrm{G}_1 \sum \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}$$

deviennent ici

$$\sum \frac{\partial \mathrm{X}^2}{\partial \alpha^2} = 0, \qquad \sum \frac{\partial \mathrm{X}^2}{\partial \beta^2} = 0, \qquad 2\mathrm{H} = \sum \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \alpha}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \beta} = 2\mathrm{G}\mathrm{G}_1,$$

où H est censé donné. Les équations (14), après la substitution des expressions précédentes de x, y, fournissent

$$r_1 = -i\frac{\partial \log \mathrm{G}}{\partial \beta}, \qquad r = i\frac{\partial \log \mathrm{G}_1}{\partial \alpha},$$

$$\mathrm{G}(q_1 - ip_1) = \mathrm{G}_1(q + ip).$$

On peut poser, λ désignant une indéterminée,

$$q + ip = 2i\lambda G, \qquad q_1 - ip_1 = 2i\lambda G_1.$$

La dernière équation (3) devient

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log H}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \lambda(G_1 p - G p_1) + p p_1.$$

Les deux premières (3) fournissent généralement la combinaison

$$\frac{\partial(q+ip)}{\partial\beta} - ir_1(q+ip) = \frac{\partial(q_1+ip_1)}{\partial\alpha} - ir(q_1+ip_1),$$

et celle qu'on en déduit par le changement de i en $-i$. Par l'élimination de q et q_1, ces équations reviennent à

$$\frac{\partial(\lambda G_1^2 + G_1 p_1)}{\partial\alpha} = H\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}, \qquad \frac{\partial(\lambda G^2 - G p)}{\partial\beta} = H\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}.$$

En posant

$$\lambda G - p = G_1 u, \qquad \lambda G_1 + p_1 = G v,$$

on obtient ainsi le système

$$(26)\qquad H\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} - \frac{\partial H u}{\partial\beta} = 0, \qquad H\frac{\partial\lambda}{\partial\beta} - \frac{\partial H v}{\partial\alpha} = 0, \qquad \lambda^2 - uv = \frac{1}{2H}\frac{\partial^2 \log H}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

Comme on a ici

$$q + ip = 2iG\lambda, \qquad q_1 - ip_1 = 2iG_1\lambda,$$
$$q - ip = 2iG_1 u, \qquad q_1 + ip_1 = 2iG v;$$

si l'on fait

$$a + ib = G_1\xi, \qquad a - ib = G\eta,$$

les équations (1), propres à la détermination des cosinus pourront être ramenées aux suivantes

$$i\frac{\partial\xi}{\partial\alpha} = 2uc, \qquad i\frac{\partial H\eta}{\partial\alpha} = 2H\lambda c, \qquad i\frac{\partial c}{\partial\alpha} = -H\lambda\xi - Hu\eta,$$
$$i\frac{\partial H\xi}{\partial\beta} = 2H\lambda c, \qquad i\frac{\partial\eta}{\partial\beta} = 2vc, \qquad i\frac{\partial c}{\partial\beta} = -H\lambda\eta - Hv\xi;$$

et l'on aura enfin

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = H\xi, \qquad \frac{\partial X}{\partial \beta} = H\eta,$$

et les analogues.

32. Les deux cas qui précèdent sont les plus usuels. Je suppose actuellement que les courbes (C_α), (C_β) se coupent sous un angle variable quelconque. En prenant

$$z = 0, \qquad x = \xi(\alpha, \beta), \qquad y = \eta(\alpha, \beta),$$

ξ et η étant des fonctions censées connues de α, β, et posant

$$\sum \frac{\partial X^2}{\partial \alpha^2} = L^2, \qquad \sum \frac{\partial X^2}{\partial \beta^2} = M^2, \qquad \sum \frac{\partial X}{\partial \alpha}\frac{\partial X}{\partial \beta} = LM\cos\nu;$$

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial \eta^2}{\partial \alpha^2} = g^2, \qquad \frac{\partial \xi^2}{\partial \beta^2} + \frac{\partial \eta^2}{\partial \beta^2} = g_1^2, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\frac{\partial \eta}{\partial \beta} = gg_1\cos\nu,$$

on aura

$$G = \frac{L}{g}, \qquad G_1 = \frac{M}{g_1},$$

où L, M, ν sont supposés donnés. Quant aux quantités ξ, η, elles sont assujetties à l'unique condition

$$\frac{\dfrac{\partial \xi}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \xi}{\partial \beta} + \dfrac{\partial \eta}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \eta}{\partial \beta}}{\sqrt{\dfrac{\partial \xi^2}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial \eta^2}{\partial \alpha^2}}\sqrt{\dfrac{\partial \xi^2}{\partial \beta^2} + \dfrac{\partial \eta^2}{\partial \beta^2}}} = \cos\nu,$$

en sorte que l'une d'elles reste arbitraire. Ainsi, par exemple, on peut prendre

$$\xi = \alpha,$$

et tirer η, par une quadrature, de l'équation

$$\frac{\dfrac{\partial \eta}{\partial \alpha}}{\sqrt{1 + \dfrac{\partial \eta^2}{\partial \alpha^2}}} = \cos\nu.$$

Dans tous les cas, si, dans les équations (14), on remplace z par zéro, x et y par ξ et η, on obtient d'abord deux équations qui ne contiennent que r et r_1, et qui, en isolant ces deux quantités, reviennent aux suivantes :

$$(G - G_1)\frac{\partial g}{\partial \beta} + g\frac{\partial G}{\partial \beta} - g_1 \cos\nu \frac{\partial G_1}{\partial \alpha} + G_1 g_1 \sin\nu\, r = 0,$$

$$(G - G_1)\frac{\partial g_1}{\partial \alpha} + g_1 \cos\nu \frac{\partial G}{\partial \beta} - g_1 \frac{\partial G_1}{\partial \alpha} + G g \sin\nu\, r_1 = 0.$$

La troisième équation (14) se réduit d'ailleurs à

$$G\left(p_1\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} - q_1\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\right) - G_1\left(p\frac{\partial \eta}{\partial \beta} - q\frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right) = 0.$$

Ainsi l'on connaît r et r_1, et l'on a, de plus, une relation linéaire entre les quatre autres composantes p, p_1, q, q_1, relation que j'écrirai sous la forme

$$q_1 = \mathcal{A} p + \mathcal{A}_1 p_1 + \mathcal{B} q,$$

où l'on peut supposer, si l'on veut, que $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}$ sont des quantités données tout à fait quelconques. On aura, d'après cela,

$$pq_1 - qp_1 = \mathcal{A} p^2 + \mathcal{A}_1 pp_1 + (\mathcal{B} p - p_1) q.$$

En posant

$$\mathcal{B} p - p_1 = p_2,$$

le second membre pourra s'écrire

$$(\mathcal{A} + \mathcal{A}_1 \mathcal{B}) p^2 + (q - \mathcal{A}_1 p) p_2$$

ou encore

$$(\mathcal{A} + \mathcal{A}_1 \mathcal{B}) p^2 - p_2 q_2,$$

en prenant

$$\mathcal{A}_1 p - q = q_2.$$

La troisième équation (3) deviendra, par conséquent,

$$p_2 q_2 = hp^2 + k = h(p - k_0)(p - k_1),$$

où

$$h = \mathcal{A} + \mathcal{A}_1 \mathcal{B}$$

et où k désigne une quantité censée connue. Si l'on fait, θ étant une indéterminée,

$$p_2 = h\theta(p - k_0), \qquad q_2 = \frac{1}{\theta}(p - k_1),$$

la substitution employée sera finalement

$$\begin{aligned}
p_1 &= (\mathfrak{B} - h\theta)p + hk_0\theta,\\
q &= \left(\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{\theta}\right)p + \frac{k_1}{\theta},\\
q_1 &= \left(\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{\theta}\right)(\mathfrak{B} - h\theta)p + \mathfrak{A}_1 hk_0\theta + \frac{\mathfrak{B}k_1}{\theta}.
\end{aligned}$$

En ne faisant attention qu'aux dérivées de p, on aura

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial \beta} - \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} &= \frac{\partial p}{\partial \beta} - (\mathfrak{B} - h\theta)\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \ldots,\\
\frac{\partial q}{\partial \beta} - \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} &= \left(\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{\theta}\right)\frac{\partial p}{\partial \beta} - \left(\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{\theta}\right)(\mathfrak{B} - h\theta)\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \ldots,
\end{aligned}$$

par où l'on voit que l'on élimine les deux dérivées de p par simple soustraction, après avoir multiplié la première équation par $\left(\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{\theta}\right)$. On sera amené, de cette façon, à une équation en θ de même nature que celle dont il a été question au n° 19.

Cela conduit, par un calcul et sous une forme peut-être plus simple, à des résultats équivalents aux formules générales de M. Codazzi, formules que j'avais retrouvées un peu différemment dans la rédaction primitive de mon ancien Mémoire, déjà cité. Mais la réduction à l'équation en θ n'a pas, je crois, été signalée jusqu'ici, comme je l'ai déjà fait observer.

XIII. — Réduction du problème général qui correspond au Problème I.

33. La question à résoudre est celle-ci : on suppose donnés la surface (x, y, z) ainsi que les coefficients de glissement G et G_1, et il s'agit de trouver les autres quantités et spécialement X, Y, Z.

Puisque G et G_1 sont donnés et qu'il en est de même de x, y, z, on connaît les trois fonctions L, M, V provenant des relations

$$\begin{aligned} L^2 &= \sum \frac{\partial X^2}{\partial \alpha^2} = G^2 \sum \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^2}, \\ M^2 &= \sum \frac{\partial X^2}{\partial \beta^2} = G_1^2 \sum \frac{\partial x^2}{\partial \beta^2}, \\ V &= \sum \frac{\partial X}{\partial \alpha}\frac{\partial X}{\partial \beta} = GG_1 \sum \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}. \end{aligned}$$

On peut donc, par la théorie de l'*application*, chercher toutes les surfaces (X, Y, Z) qui répondent aux paramètres différentiels donnés L^2, M^2, V. Une quelconque de ces surfaces étant associée à la surface x, y, z, on pourra, d'après le paragraphe III, déterminer les cosinus $a, b, c, \ldots$, et l'on aura tous les éléments propres à réaliser le mouvement de la surface (x, y, z) sur la surface adoptée (X, Y, Z), conformément aux conditions primitives qu'on s'était imposées.

XIV. — Du cas général correspondant au Problème II.

34. On donne les coefficients de glissement G et G_1, ainsi que les six composantes de rotation (ou, si l'on veut, les cosinus), et il s'agit de déterminer x, y, z et, par suite, X, Y, Z.

La question ainsi posée revient à l'intégration générale des équations (14), où $p, q, r; p_1, q_1, r_1$ sont donnés et où les inconnues sont x, y, z. Malgré la forme linéaire de ces équations, le présent problème me paraît le plus difficile de ceux rencontrés jusqu'ici.

Dans le cas où toutes les composantes de rotation sont nulles, les fonctions se séparent et chacune est déterminée par une équation telle que

$$(G - G_1)\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial G}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial G_1}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0,$$

qu'on sait intégrer dans quelques cas particuliers. Par exemple, si

$$G = \beta, \qquad G_1 = -\alpha,$$

on a

$$x = \frac{A + B}{\alpha + \beta}, \qquad y = \frac{A_1 + B_1}{\alpha + \beta}, \qquad z = \frac{A_2 + B_2}{\alpha + \beta},$$

les A, B étant des fonctions arbitraires. La surface associée est, par suite,

$$X = \frac{A'\beta - B'\alpha}{\alpha + \beta}, \qquad Y = \frac{A'_1\beta - B'_1\alpha}{\alpha + \beta}, \qquad Z = \frac{A'_2\beta - B'_2\alpha}{\alpha + \beta},$$

où

$$A' = aA + bA_1 + cA_2, \qquad B' = aB + bB_1 + cB_2, \qquad \ldots$$

On peut trouver d'autres cas d'intégration; mais je ne m'arrêterai pas, en ce moment, à des applications, pas plus qu'à diverses transformations dont les équations (14) sont susceptibles, les transformées ne m'ayant pas paru présenter généralement des avantages sensibles.