ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

L. SAUVAGE

Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles (deuxième mémoire)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 5 (1888), p. 9-22
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1888_3_5__9_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR LES SOLUTIONS RÉGULIÈRES
D'UN
SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
(DEUXIÈME MÉMOIRE),

PAR M. L. SAUVAGE,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE.

1. Nous nous proposons de compléter, sur un point important, la théorie des systèmes d'équations différentielles, linéaires et homogènes, à une variable indépendante et à coefficients uniformes. Dans un Mémoire précédent, nous avons démontré que le système

$$(x-x_0)\frac{dy_i}{dx}=a_{i1}y_1+\ldots+a_{in}y_n \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

admet, dans le domaine du point x_0, un système fondamental de *solutions régulières* dans le cas où les coefficients a sont holomorphes dans ce domaine. Ces solutions régulières ont pour éléments des sommes d'expressions de la forme $(x-x_0)^r\varphi(x-x_0)$, où r est un nombre quelconque, et $\varphi(x-x_0)$ un polynôme entier en $\log(x-x_0)$, dont les coefficients admettent le point x_0 comme pôle ou comme point ordinaire.

L'objet principal de ce Mémoire est la réciproque de la proposition précédente. Nous aurons donc décomposé en deux parties la démonstration de l'important théorème suivant :

Soit un système d'équations différentielles

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

linéaires, homogènes et à coefficients uniformes dans le domaine du point x_0. Pour que ce système ait toutes ses solutions régulières dans le domaine du point x_0, il faut et il suffit qu'il puisse se ramener à la forme

$$(x - x_0)\frac{dv_i}{dx} = b_{i1}v_1 + \ldots + b_{in}v_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

par une substitution de la forme

$$y_i = x^{\rho_i}v_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les exposants ρ_i sont des nombres entiers, choisis de telle manière que les coefficients soient holomorphes dans le domaine du point x_0.

Nous ajouterons à ce théorème quelques considérations sur cette forme remarquable d'un système d'équations différentielles.

Pour simplifier, nous supposerons le point x_0 ramené à l'origine.

2. Rappelons d'abord quelques principes de la théorie générale des équations différentielles linéaires, homogènes, et à coefficients uniformes dans le domaine de l'origine

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Avec les éléments d'un système fondamental quelconque de solutions, on peut former un déterminant D. Ce déterminant satisfait à la relation

$$D = C\,e^{\int (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})\,dx},$$

où C représente une constante.

Parmi tous les systèmes fondamentaux de solutions, il en existe au moins un dont les éléments de chaque solution ont la forme générale

$$y_i = x^r P_i(\log x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

r étant un nombre quelconque qui peut changer avec la solution, et $P(\log x)$ représentant un polynôme entier en $\log x$, dont les coefficients sont uniformes dans le domaine de l'origine.

Parmi toutes les solutions, il en existe au moins une

$$u_i = x^r \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ne contenant aucun logarithme.

Lorsque toutes les solutions du système différentiel sont régulières, les coefficients des polynômes P admettent l'origine comme pôle (ou comme point ordinaire), et réciproquement.

Nous pouvons maintenant aborder la question principale de ce Mémoire et l'énoncer de la manière suivante :

Lorsque l'origine est un pôle pour les coefficients uniformes des polynômes $P(\log x)$, quelle est la forme du système d'équations différentielles?

3. Considérons le système fondamental de solutions dont il vient d'être parlé, et supposons que l'origine soit un pôle des coefficients uniformes des polynômes $P(\log x)$. Les éléments des solutions seront des expressions régulières et non des agrégats linéaires d'expressions régulières. Dans une même solution $x^r P_i(\log x)$, on peut choisir r, de sorte que les coefficients des polynômes P_i soient holomorphes dans le domaine de l'origine. Formons dans ces conditions le déterminant du système fondamental de solutions, et développons-le, nous aurons une expression de la forme $x^R \Pi(\log x)$, où R est un nombre quelconque, où $\Pi(\log x)$ est un polynôme entier en $\log x$ et à coefficients holomorphes. Nous allons montrer que, si l'on simplifie ces coefficients, tous les logarithmes doivent disparaître.

En effet, soit

$$D = \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1n} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

le déterminant d'un système quelconque de solutions. Si la variable x fait le tour de l'origine, les nouvelles valeurs des fonctions y sont des fonctions linéaires des anciennes valeurs, de sorte que le déterminant D se reproduit multiplié par un déterminant de constantes. Soit D_1 la nouvelle valeur et C une constante, on aura

$$D_1 = CD.$$

Posons

$$e^{2\pi\rho\sqrt{-1}} = C.$$

Le produit $Dx^{-\rho}$ sera uniforme dans le domaine de l'origine, et l'on pourra poser

$$D = x^\rho \psi(x),$$

en appelant $\psi(x)$ une fonction uniforme dans le domaine de l'origine.

Posons maintenant

$$\Pi(\log x) = p_0 + p_1 \log x + p_2 \log^2 x + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x,$$

$p_0, p_1, \ldots, p_\lambda$ représentant des fonctions holomorphes, et identifions les deux formes du déterminant D, nous aurons

$$x^\rho \psi(x) = x^R (p_0 + p_1 \log x + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x).$$

Faisons faire à la variable x un tour autour de l'origine. Nous aurons, en faisant $\sqrt{-1} = i$,

$$e^{2\pi\rho i} x^\rho \psi(x) = e^{2\pi R i} x^R [p_0 + p_1(\log x + 2\pi i) + \ldots + p_\lambda(\log x + 2\pi i)^\lambda].$$

Posons

$$e^{2\pi R i} = C_1.$$

Cette équation s'écrira

$$Cx^\rho \psi(x) = C_1 x^R (p_0 + p_1 \log x + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x + q_0 + q_1 \log x + \ldots + q_{\lambda-1} \log^{\lambda-1} x),$$

en appelant $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{\lambda-1}$ des fonctions holomorphes. Divisons la seconde opération par la première, nous aurons

$$\begin{aligned} &C(p_0 + p_1 \log x + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x) \\ &\quad = C_1(p_0 + p_1 \log x + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x + q_0 + q_1 \log x + \ldots + q_{\lambda-1} \log^{\lambda-1} x). \end{aligned}$$

En faisant tout passer dans un membre, nous aurons une équation algébrique de degré λ en $\log x$. Une telle équation ne peut exister, car elle aurait une infinité de racines; il faut donc que ses coefficients soient identiquement nuls. Or le coefficient du terme de degré le plus élevé en $\log x$ est $p_\lambda(C - C_1)$. Si p_λ n'est pas nul, il faut que l'on ait $C = C_1$. On en conclut que ρ et R ne diffèrent que par un nombre entier.

L'équation se réduit ensuite à la relation

$$q_0 + q_1 \log x + \ldots + q_{\lambda-1} \log x = 0,$$

qui doit être satisfaite identiquement. Il est facile de voir que les relations

$$q_{\lambda-1} = 0, \qquad q_{\lambda-2} = 0, \qquad \ldots, \qquad q_0 = 0$$

entraînent les relations

$$p_\lambda = 0, \qquad p_{\lambda-1} = 0, \qquad \ldots, \qquad p_1 = 0.$$

Posons $\rho = R + \rho_1$, nous aurons finalement

$$x^\rho \psi(x) = x^R p_0$$

ou

$$\psi(x) = x^{\rho_1} p_0.$$

Nous voyons donc que le déterminant D est une expression régulière sans logarithmes.

Appliquons à la forme définitive du déterminant D la relation

$$D = C e^{\int (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})\, dx}.$$

On sait que cette relation ne peut exister que si le produit $x(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})$ est holomorphe dans le domaine de l'origine. C'est là un résultat fondamental qui va nous conduire au but.

4. Posons $\frac{dy}{dx} = y'$, et du système proposé déduisons le système d'équations

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n,$$

$$\frac{dy'_1}{dx} = a_{11} y'_1 + \ldots + a_{1n} y'_n + a'_{11} y_1 + \ldots + a'_{1n} y_n,$$

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n \quad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Éliminons $y'_2, y'_3, \ldots, y'_n$ au moyen du système proposé : nous aurons

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n,$$
$$\frac{dy'_1}{dx} = a_{11} y'_1 + A_1 y_1 + \ldots + A_n y_n,$$
$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n \quad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Ce système aura toutes ses solutions régulières en même temps que le précédent. Il faudra donc que le produit $x(a_{11} + a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})$ soit holomorphe dans le domaine de l'origine. Par suite, le produit xa_{11} sera aussi holomorphe, puisque le produit $x(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})$ est déjà holomorphe.

En général, tout coefficient a_{kk} dont les deux indices sont égaux sera égal au quotient par x d'une fonction holomorphe.

5. Introduisons maintenant une solution

$$u_i = x^r \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dont les éléments ne contiennent pas de logarithmes, et posons

$$y_i = u_i q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$z_h = q_h - q_1 \quad (h = 2, 3, \ldots, n).$$

Nous obtiendrons un système différentiel à coefficients uniformes

$$\frac{dz_h}{dx} = \left(a_{h2}\frac{u_2}{u_h} - a_{12}\frac{u_2}{u_1}\right) z_2 + \ldots + \left(a_{hh} - \frac{u'_h}{u_h} - a_{1h}\frac{u_h}{u_1}\right) z_h + \ldots$$
$$+ \left(a_{hn}\frac{u_n}{u_h} - a_{1n}\frac{u_n}{u_1}\right) z_n \quad (h = 2, 3, \ldots, n).$$

Le système en y ayant toutes ses solutions régulières, le système en q et, par suite, le système en z auront toutes leurs solutions régulières. Nous pouvons appliquer au système en z la proposition du paragraphe précédent, et nous venons de voir que le produit

$$x\left(a_{hh} - \frac{u'_h}{u_h} - a_{1h}\frac{u_h}{u_1}\right)$$

doit être holomorphe dans le domaine de l'origine. Il faudra, pour cela, que le produit $x a_{1h} \frac{u_h}{u_1}$ soit holomorphe, car les produits $x a_{hh}$ et $x \frac{u'_h}{u_h}$ sont déjà holomorphes.

En général, le produit $x a_{ih} \frac{u_h}{u_i}$ sera holomorphe dans le domaine de l'origine.

Remarquons maintenant que nous pouvons poser

$$u_i = x^{r+\rho_i} \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

en appelant r un nombre quelconque, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ des nombres entiers, $\varphi_i(x)$ des fonctions holomorphes différentes de zéro pour $x = 0$.

Nous pouvons aussi poser

$$a_{ih} \frac{u_h}{u_i} = \frac{1}{x} b_{ih},$$

en appelant b_{ih} des fonctions holomorphes toujours dans le même domaine.

Nous tirerons de là

$$\frac{u_h}{u_i} = x^{\rho_h - \rho_i} \frac{\varphi_h}{\varphi_i}$$

et

$$a_{ih} = \frac{b_{ih} \frac{\varphi_i}{\varphi_h}}{x^{\rho_i - \rho_h + 1}} = \frac{\alpha_{ih}}{x^{\rho_i - \rho_h + 1}},$$

et les fonctions α_{ih} seront holomorphes dans le domaine de l'origine.

Nous voyons maintenant que tout système d'équations différentielles linéaires, homogènes, à coefficients uniformes, et dont les solutions sont toutes régulières, peut prendre la forme

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= \frac{\alpha_{11}}{x} y_1 + \frac{\alpha_{12}}{x^{\rho_1 - \rho_2 + 1}} y_2 + \ldots + \frac{\alpha_{1n}}{x^{\rho_1 - \rho_n + 1}} y_n, \\
\frac{dy_2}{dx} &= \frac{\alpha_{21}}{x^{\rho_2 - \rho_1 + 1}} y_1 + \frac{\alpha_{22}}{x} y_2 + \ldots + \frac{\alpha_{2n}}{x^{\rho_2 - \rho_n + 1}} y_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{dy_n}{dx} &= \frac{\alpha_{n1}}{x^{\rho_n - \rho_1 + 1}} y_1 + \frac{\alpha_{n2}}{x^{\rho_n - \rho_2 + 1}} y_2 + \ldots + \frac{\alpha_{nn}}{x} y_n.
\end{aligned}$$

Cette forme générale, où l'on remarquera que l'origine est un pôle de tous les coefficients, peut être enfin simplifiée au moyen d'une substitution.

Posons

$$y_i = x^{-\rho_i} v_i \quad (i = 1, 2, \ldots; n);$$

nous aurons

$$\frac{dy_i}{dx} = x^{-\rho_i}\frac{dv_i}{dx} - \frac{\rho_i}{x}x^{-\rho_i}v_i.$$

Le terme général du système en v sera

$$\frac{\alpha_{ik}}{x^{\rho_i - \rho_k + 1}}\frac{x^{-\rho_k}}{x^{-\rho_i}}v_k$$

ou

$$\frac{\alpha_{ik}}{x}v_k.$$

Le terme $\frac{\alpha_{kk}}{x}y_k$ sera remplacé par

$$\frac{\alpha_{kk} + \rho_k}{x}v_k,$$

et le système primitif sera remplacé par le système

$$x\frac{dv_i}{dx} = \alpha_{i1}v_1 + \ldots + (\alpha_{ii} + \rho_i)v_i + \ldots + \alpha_{in}v_n$$

ou encore par le système

$$(x - x_0)\frac{dv_i}{dx} = b_{i1}v_1 + \ldots + b_{in}v_n,$$

en reportant l'origine au point x_0 et en appelant b_{ik} des fonctions holomorphes dans le domaine du point x_0, comme au premier paragraphe.

Le théorème important énoncé au commencement de ce travail se trouve donc démontré par l'ensemble des deux Mémoires.

6. Ce théorème donne une importance particulière aux systèmes d'équations de la forme

$$x\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et, pour cette raison, nous ajouterons à ce qui précède quelques considérations sur ces systèmes.

Les coefficients a sont des séries. On peut, dans ces séries, altérer comme on veut les coefficients des termes, sans que le théorème précédent cesse d'être applicable. En particulier, on peut supprimer des termes. On peut, par exemple, supprimer tous les termes, sauf le terme constant dans chaque série.

Les termes constants des séries a ont une importance particulière. Ce sont eux seuls qui servent à former l'équation caractéristique. Nous avons, dans un Mémoire spécial, étudié les systèmes d'équations à coefficients constants. Les propriétés que nous avons signalées pour leurs équations caractéristiques s'étendent aux systèmes à coefficients variables [1].

7. On peut éliminer $n-1$ inconnues y dans un système de n équations. Il est intéressant de savoir si l'équation différentielle qui en résulte présente d'une façon évidente les caractères d'une équation à intégrales régulières. Nous allons faire le calcul de l'élimination, et, pour la symétrie, nous poserons

$$z=\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2+\ldots+\lambda_n y_n,$$

en appelant z une inconnue à déterminer, et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des nombres constants quelconques. Nous formerons même l'équation en z, lorsque $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont déterminées par les équations

$$x^\rho \frac{dy_i}{dx}=a_{i1}y_1+\ldots+a_{in}y_n \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

ρ étant un exposant quelconque, égal à 1 dans le cas particulier des systèmes à solutions régulières. Les coefficients a sont supposés holomorphes dans le domaine de l'origine, et ne sont pas tous nuls pour $x=0$.

Nous pourrons poser, en général,

$$\frac{d^k y_i}{dx^k}=\frac{1}{x^{k\rho}}(A_{i1}^k y_1+\ldots+A_{in}^k y_n)$$

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, novembre 1884.

et, pour ρ entier et positif, les fonctions A_{ij}^k seront holomorphes dans le domaine de l'origine. Les fonctions a_{ij} peuvent s'écrire A_{ij}^1.

La proposition étant vraie pour $k = 1$, il suffit de démontrer que, si elle est vraie pour la valeur k, elle est vraie pour la valeur $k+1$.

En dérivant l'équation précédente, on a

$$\frac{d^{k+1}y_i}{dx^{k+1}} = \frac{1}{x^{k\rho}}\left(y_1\frac{dA_{i1}^k}{dx} + \ldots + y_n\frac{dA_{in}^k}{dx}\right)$$
$$+ \frac{1}{x^{k\rho}}\left(A_{i1}^k\frac{dy_1}{dx} + \ldots + A_{in}^k\frac{dy_n}{dx}\right) - \frac{k\rho}{x^{k\rho+1}}(A_{i1}^k y_1 + \ldots + A_{in}^k y_n).$$

En remplaçant les dérivées $\frac{dy_i}{dx}$ par leurs valeurs tirées des équations proposées, on obtient

$$\frac{d^{k+1}y_i}{dx^{k+1}} = \frac{1}{x^{(k+1)\rho}}(A_{i1}^{k+1}y_1 + \ldots + A_{in}^{k+1}y_n),$$

où l'on a

$$A_{ij}^{k+1} = x^\rho\frac{dA_{ij}^k}{dx} - k\rho x^{\rho-1}A_{ij}^k + (A_{i1}^k A_{1j}^1 + \ldots + A_{in}^k A_{nj}^1).$$

On peut donc former les équations

$$\frac{d^k y_i}{dx^k} = \frac{1}{x^{k\rho}}(A_{i1}^k y_1 + \ldots + A_{in}^k y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous aurons ensuite successivement

$$\frac{d^k z}{dx^k} = \lambda_1\frac{d^k y_1}{dx^k} + \ldots + \lambda_n\frac{d^k y_n}{dx^k},$$

$$x^{k\rho}\frac{d^k z}{dx^k} = \lambda_1(A_{11}^k y_1 + \ldots + A_{1n}^k y_n) + \ldots + \lambda_n(A_{n1}^k y_1 + \ldots + A_{nn}^k y_n),$$

$$x^{k\rho}\frac{d^k z}{dx^k} = (\lambda_1 A_{11}^k + \ldots + \lambda_n A_{n1}^k)y_1 + \ldots + (\lambda_1 A_{1n}^k + \ldots + \lambda_n A_{nn}^k)y_n.$$

Nous écrirons plus simplement

$$x^{k\rho}\frac{d^k z}{dx^k} = P_{k1}y_1 + \ldots + P_{kn}y_n.$$

En faisant $k = 1, 2, \ldots, n$ dans cette équation, nous obtenons n équations du premier degré en $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Avec l'équation qui définit z, nous avons un système de $n+1$ équations, auxquelles satisfont toutes les fonctions z formées avec les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Elles satisfont encore à l'équation obtenue en éliminant $y_1, y_2, \ldots, y_n$, c'est-à-dire à l'équation

$$\begin{vmatrix} x^{n\rho}\dfrac{d^n z}{dx^n} & P_{n1} & \ldots & P_{nn} \\ x^{(n-1)\rho}\dfrac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} & P_{n-1,1} & \ldots & P_{n-1,n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ z & \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation développée prend la forme

$$x^{n\rho}\Delta\frac{d^n z}{dx^n} + x^{(n-1)\rho}\Delta_1\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + x^\rho\Delta_{n-1}\frac{dz}{dx} + \Delta_n z = 0$$

et les fonctions $\Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ sont holomorphes dans le domaine de l'origine si le nombre ρ est entier.

La forme de cette équation se prête à l'application des théories de MM. Thomé, Frœbenius et Floquet. Nous n'insisterons que dans le cas important où l'on a $\rho = 1$.

Dans ce cas particulier, l'équation qui résulte de l'élimination sera

$$\frac{d^n z}{dx^n} + \frac{1}{x}\frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{x^{n-1}}\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x^n}\frac{\Delta_n}{\Delta}z = 0.$$

Dans le cas de $\rho = 1$, le système différentiel a toutes ses solutions régulières. Il en sera de même de l'équation précédente. On en conclut que les rapports $\frac{\Delta_i}{\Delta}$ doivent être holomorphes dans le domaine de l'origine.

De là une propriété curieuse des expressions $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Si la première est divisible par une puissance de x, les autres sont aussi divisibles par cette puissance de x. Si l'on démontrait d'une manière directe cette proposition d'Algèbre, on en conclurait que l'équation différentielle d'ordre n a toutes ses intégrales régulières, quels que soient les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et, comme conséquence, il serait prouvé que le système différentiel, dans le cas de $\rho = 1$, a toutes ses solutions régulières, proposition que nous démontrons dans notre premier Mémoire d'une autre manière.

8. Nous ajouterons enfin une remarque au calcul d'élimination précédent. Considérons un système quelconque d'équations différentielles de la forme

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et proposons-nous de chercher dans quels cas l'équation différentielle en $z = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n$ n'est pas d'ordre n.

D'abord z satisfait à une équation différentielle linéaire et homogène. Supposons, en effet, que la variable x tourne autour de l'origine. Les fonctions $y_{1i}, \ldots, y_{ni}$ prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires à coefficients constants de la forme

$$Y_{ki} = C_{i1} y_{k1} + \ldots + C_{in} y_{kn}.$$

Les n fonctions

$$z_i = \lambda_1 y_{1i} + \ldots + \lambda_n y_{ni} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

deviendront

$$Z_i = \lambda_1 Y_{1i} + \ldots + \lambda_n Y_{ni}$$

ou

$$Z_i = \lambda_1 (C_{i1} y_{11} + \ldots + C_{in} y_{1n}) + \ldots + \lambda_n (C_{1i} y_{n1} + \ldots + C_{in} y_{nn})$$

ou

$$Z_i = C_{i1} (\lambda_1 y_{11} + \ldots + \lambda_n y_{n1}) + \ldots + C_{in} (\lambda_1 y_{1n} + \ldots + \lambda_n y_{nn})$$

ou

$$Z_i = C_{i1} z_1 + \ldots + C_{in} z_n.$$

On sait que, dans ce cas, les n fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_n$ forment un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n, mais à la condition que ces n fonctions soient linéairement indépendantes. Dans le cas contraire, l'ordre de l'équation différentielle est inférieure à n.

La question que nous nous sommes posée revient donc à chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que les n fonctions z soient linéairement indépendantes.

Soient d'abord donnés des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Écrivons qu'il y a une relation de la forme $C_1 z_1 + \ldots + C_n z_n = 0$ entre les n fonctions z définies par les relations

$$z_i = \lambda_1 y_{1i} + \ldots + \lambda_n y_{ni}.$$

Cette relation donnera

$$C_1(\lambda_1 y_{11} + \ldots + \lambda_n y_{n1}) + \ldots + C_n(\lambda_1 y_{1n} + \ldots + \lambda_n y_{nn}) = 0$$

ou

$$\lambda_1(C_1 y_{11} + \ldots + C_n y_{1n}) + \ldots + \lambda_n(C_1 y_{n1} + \ldots + C_n y_{nn}) = 0.$$

Or les parenthèses contiennent les éléments d'une certaine solution du système différentiel. Nous voyons donc que, dans le cas où l'équation en z est d'ordre inférieur à n, il correspond aux nombres donnés λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ une certaine solution $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ du système différentiel, et entre les éléments de cette solution existe la relation

$$\lambda_1 \eta_1 + \ldots + \lambda_n \eta_n = 0.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe une solution $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ du système différentiel dont les éléments satisfassent à la relation

$$\lambda_1 \eta_1 + \ldots + \lambda_n \eta_n = 0.$$

Exprimons ces éléments en fonctions des éléments d'un système fondamental de solutions, nous aurons

$$\eta_i = C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in}$$

et, par suite,

$$\lambda_1(C_1 y_{11} + \ldots + C_n y_{1n}) + \ldots + \lambda_n(C_1 y_{n1} + \ldots + C_n y_{nn}) = 0$$

ou

$$C_1(\lambda_1 y_{11} + \ldots + \lambda_n y_{n1}) + \ldots + C_n(\lambda_1 y_{1n} + \ldots + \lambda_n y_{nn}) = 0.$$

Il en résulte que les n fonctions

$$z_i = \lambda_1 y_{1i} + \ldots + \lambda_n y_{ni}$$

ne seront pas linéairement indépendantes.

On peut conclure de là que, à toute solution $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ du système différentiel satisfaisant à une relation de la forme

$$\lambda_1 \eta_1 + \ldots + \lambda_n \eta_n = 0$$

correspond une équation différentielle en

$$z = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n$$

d'ordre inférieur à n.

En résumé, l'équation en $z = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n$ où les λ restent indéterminés sera toujours d'ordre n, sauf dans le cas très particulier où *toutes les solutions* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ du système différentiel satisferaient à des relations linéaires et homogènes dont les coefficients constants correspondraient respectivement à chacune de ces solutions.