Annales scientifiques de l'É.N.S.

Ch. Méray

Sur le sens qu'il convient d'attacher à l'expression nombre incommensurable et sur le critérium de l'existence d'une limite pour une quantité variable de nature donnée

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 4 (1887), p. 341-360
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1887_3_4__341_0>

SUR LE SENS QU'IL CONVIENT D'ATTACHER

A L'EXPRESSION

NOMBRE INCOMMENSURABLE

ET SUR LE CRITÉRIUM

DE L'EXISTENCE D'UNE LIMITE POUR UNE QUANTITÉ VARIABLE DE NATURE DONNÉE,

PAR M. CH. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

1. Il ne me semble pas qu'on ait atteint un degré de netteté satisfaisant pour tous les esprits dans la définition des nombres incommensurables et dans la démonstration de la règle fondamentale servant à reconnaître si une quantité variable donnée tend ou non vers quelque limite. Les divers auteurs émettent encore sur la matière des idées qui ne sont ni bien intelligibles, ni bien concordantes, et souvent ils doivent les appuyer sur l'évidence de certains faits physiques, c'est-à-dire sur des considérations qu'une méthode châtiée devrait faire absolument rejeter de l'Analyse pure.

Cependant j'ai montré, dans les premières lignes de mon *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale,* publié en 1872, que ces deux questions se fondent en quelque sorte l'une dans l'autre, et qu'elles cessent de présenter la moindre obscurité quand, au lieu de s'obstiner à chercher derrière les mots contradictoires *nombre incommensurable* une réalité spéciale qui se dérobe sans cesse, on se contente de les prendre au figuré et de rétablir, à côté des énoncés concernant ces prétendus nombres, les propriétés très précises de certains nombres variables, mais cette fois véritables, qui se dissimulent dans tous. Pour mieux faire connaître cette théorie, je vais la reprendre et la développer plus minutieusement que je ne pouvais le faire dans un Ouvrage où elle était accessoire.

Afin de prévenir toute équivoque, j'avertis le lecteur, une fois pour toutes, que, sauf mention du contraire, je n'entendrai par *nombres* ou *quantités* que les entiers et fractions positifs ou négatifs.

2. Au sortir des premiers éléments et dans toutes les parties des Mathématiques, on rencontre à chaque instant des quantités qui prennent successivement des valeurs numériques déterminées formant une suite indéfinie. On se contente habituellement de les appeler des *quantités variables,* mais il peut en résulter quelque confusion avec les indéterminées nommées *variables indépendantes*, et je conserverai pour elles la dénomination de *variantes* proposée dans mon Ouvrage ci-dessus mentionné. La valeur actuelle d'une variante est liée en général, soit directement, soit indirectement, à celles de un ou plusieurs entiers positifs qui croissent sans cesse, par suite, indéfiniment et indépendamment les uns des autres; je nomme ces entiers les *indices* de la variante.

Il faut, par la pensée, ranger les diverses valeurs d'une variante dans un ordre tel que la somme des indices dans chacune aille sans cesse en croissant, du moins jamais en diminuant. On conçoit ainsi ce qu'il faut entendre par valeurs *antérieures* et *postérieures* à une valeur quelconque donnée. Le nombre des premières est essentiellement limité, celui des dernières toujours illimité.

Cet ordre de succession est multiple quand il y a plus d'un indice; mais, quel qu'il soit, deux valeurs de la variante, dans lesquelles les sommes des indices sont inégales, s'y succèdent toujours de la même manière.

Comme exemples de variantes, je citerai :

1° Le terme général u_m d'une série ordinaire, qui a naturellement l'entier m pour indice;

2° La somme $u_1 + u_2 + \ldots + u_m$, le produit $u_1 u_2 \ldots u_m \ldots$ des m premiers termes de la même série; chacune de ces nouvelles variantes a encore m pour indice;

3° Les termes généraux $u_{m,n}$, $u_{m,n,p\ldots}$, ... des séries dites à *double, triple, ... entrée*, qui sont des variantes à deux, trois, ... indices. Dans une indice à double entrée, la somme des termes où les valeurs des indices ne surpassent pas respectivement les entiers m, n serait une nouvelle variante ayant ces deux entiers pour indices; mais la somme de ceux de ces termes, dans lesquels la somme des mêmes valeurs ne surpasserait pas M, en serait une ayant M pour indice unique, etc.

Quelquefois aucun indice ne semble intervenir, par exemple s'il s'agit d'une variante dont chaque valeur se calcule en prenant une fonction donnée des valeurs antérieures. Mais alors il est clair qu'on peut considérer chacune de ces valeurs comme liée à son rang m dans la suite indéfinie qu'elles forment toutes, et la variante, par suite, comme ayant m pour indice.

Dans certains cas, il y a intérêt à considérer une quantité donnée (invariable) comme une sorte de variante qui conserverait la même valeur, quels que fussent ses indices.

3. *Une fonction donnée* $f(u_m, v_{n,p}, w_{m,r,\dots})$ *des variantes* u_m, $v_{n,p}$, $w_{m,r,\dots}$, ... *ayant ou non des indices communs, constitue évidemment une nouvelle variante ayant pour indices ceux des entiers* m; n, p; m, r; ..., *qui sont distincts les uns des autres.*

4. On dit que la variante $v_{m,n,\dots}$ jouit de telle ou telle propriété donnée *à partir des valeurs* μ, ν, ... de ses indices quand cette propriété appartient à $v_{\mu,\nu,\dots}$ et à toutes les valeurs postérieures (2).

Elle *finit* par jouir d'une propriété donnée quand il est possible d'assigner aux indices des valeurs $\mu, \nu, \dots$, à partir desquelles cette propriété ne cesse de lui appartenir.

5. Une variante $v_{m,n,\dots}$ est *finie* s'il existe quelque quantité positive invariable L, telle qu'on finisse par avoir numériquement $v_{m,n,\dots} < \mathrm{L}$.

Elle est *de petitesse limitée* si l'on finit, au contraire, par avoir numériquement $v_{m,n,\dots} > l$, l désignant quelque quantité positive invariable (non $= 0$).

Une fonction entière de plusieurs variantes finies est aussi une variante finie (3).

De même pour le quotient d'une variante finie par une autre qui est de petitesse limitée.

Ces deux points sont en quelque sorte évidents.

6. Si, quelque grande que soit la quantité positive $\mathcal{E}$, on finit par avoir numériquement $v_{m,n,\dots} > \mathcal{E}$, la variante $v_{m,n,\dots}$ est dite *infinie*.

7. Si, au contraire, c'est l'inégalité numérique $v_{m,n,\ldots} < \varepsilon$ qui finit par avoir lieu, si petite qu'ait été prise la quantité positive ε, cette variante est dite *infiniment petite*.

Ces deux sortes de variantes se nomment souvent des *quantités infinies* et des *quantités infiniment petites*; mais ces expressions ne doivent pas faire oublier qu'il s'agit non de quantités proprement dites (invariables), mais de choses qui *varient* essentiellement.

8. Voici deux propositions qu'on établira sans peine en s'appuyant sur celles du n° 5 :

Une fonction entière de variantes, les unes finies, les autres infiniment petites, est une variante infiniment petite si elle peut être mise sous forme d'un polynôme dont chaque terme contient comme facteur l'une au moins des variantes infiniment petites données.

Le quotient d'une variante infiniment petite par une variante de petitesse limitée est aussi une variante infiniment petite.

9. Une variante $v_{m,n,\ldots}$ étant donnée, s'il existe une quantité (invariable) V, telle que la différence $V - v_{m,n,\ldots}$ soit une variante infiniment petite, on exprime ce fait en disant que $v_{m,n,\ldots}$ *tend* vers V ou bien encore a V *pour limite*, et en écrivant

$$\lim v_{m,n,\ldots} = V.$$

Une variante infiniment petite tend vers zéro, car $0 - v_{m,n,\ldots} = - v_{m,n,\ldots}$, quantité infiniment petite comme $v_{m,n,\ldots}$.

Si l'on finissait par avoir $v_{m,n,\ldots} = V$, on aurait évidemment

$$\lim v_{m,n,\ldots} = V.$$

10. Le théorème suivant est fondamental dans la théorie des variantes douées de limites :

Si les variantes $u, v, w, \ldots$ (dont nous simplifions la notation en supprimant les indices) tendent respectivement vers les limites U, V, W, ..., *toute fonction entière de ces variantes $f(u, v, w, \ldots)$ tend vers la limite $f(U, V, W, \ldots)$.*

En représentant par $\frac{f_1(u, v, w, \ldots)}{f_2(u, v, w, \ldots)}$ une fonction rationnelle quelconque *des mêmes variantes mises sous forme de quotient des deux polynômes entiers, on a de même*

$$\lim \frac{f_1(u, v, w, \ldots)}{f_2(u, v, w, \ldots)} = \frac{f_1(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}, \ldots)}{f_2(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}, \ldots)},$$

pourvu toutefois que l'on ait

$$f_2(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}, \ldots) \text{ non} = 0.$$

I. *Une variante $v_{m,n,\ldots}$, qui tend vers une certaine limite quelconque* V, *est nécessairement finie* (5); *elle est, en outre, de petitesse limitée si* V *n'est pas nulle.*

On peut écrire

$$v_{m,n,\ldots} = \mathrm{V} - (\mathrm{V} - v_{m,n,\ldots}).$$

Si donc on nomme V′ la valeur numérique de V, ε une quantité positive choisie arbitrairement et $\mu, \nu, \ldots$ des valeurs des indices à partir desquels on a numériquement $\mathrm{V} - v_{m,n,\ldots} < \varepsilon$, l'égalité précédente donne évidemment

$$\text{val. num. } v_{m,n,\ldots} < \mathrm{V}' + \varepsilon$$

pour $m \gtreqless \mu$, $m \gtreqless \nu$, ...

Si V non = 0, on peut supposer $\varepsilon < \mathrm{V}'$; en vertu de la même inégalité, on finit donc par avoir

$$\text{val. num. } v_{m,n,\ldots} > \mathrm{V}' - \varepsilon.$$

II. Si l'on pose

$$\mathrm{U} - u = \alpha, \qquad \mathrm{V} - w = \beta, \qquad \mathrm{W} - w = \gamma, \qquad \ldots,$$

d'où

$$\mathrm{U} = u + \alpha, \qquad \mathrm{V} = v + \beta, \qquad \mathrm{W} = w + \gamma, \qquad \ldots,$$

il viendra, en développant le polynôme

$$f(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}, \ldots) = f(u + \alpha, v + \beta, w + \gamma)$$

par la formule de Taylor,

$$f(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}, \ldots) - f(u, v, w, \ldots) = \Theta,$$

où Θ est un polynôme entier par rapport aux variantes $u, v, w, \ldots$;

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, dont chaque terme contient comme facteur l'une au moins de celles du dernier groupe.

Or $u, v, w, \ldots$ sont finies (I) et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont infiniment petites; donc (8) la variante Θ est aussi infiniment petite, et l'on a bien

$$\lim f(u, v, w, \ldots) = f(U, V, W, \ldots).$$

III. *Si* $\lim p = P$, $\lim q = Q$ *et* Q non $= 0$, *on a aussi*

$$\lim \frac{p}{q} = \frac{P}{Q}.$$

Il vient immédiatement

$$\frac{P}{Q} - \frac{p}{q} = \frac{Pq - Qp}{Qq},$$

et l'on a (II)

$$\lim(Pq - Qp) = PQ - QP = 0,$$
$$\lim Qq = Q^2 \quad \text{non} = 0.$$

Ainsi, dans le second membre de la relation ci-dessus, le numérateur est infiniment petit, tandis que le dénominateur est de petitesse limitée (I). Ce second membre est donc infiniment petit (8) et le premier aussi, comme il fallait le prouver.

IV. Le lemme précédent rend maintenant évidente la dernière partie de notre théorème; car on a (II)

$$\lim f_1(u, v, w, \ldots) = f_1(U, V, W, \ldots),$$
$$\lim f_2(u, v, w, \ldots) = f_2(U, V, W, \ldots),$$

et, par hypothèse,

$$f_2(U, V, W, \ldots) \text{ non} = 0.$$

11. Quand une variante donnée $v_{m, n, \ldots}$ tend vers une certaine limite V, la différence variable de deux de ses valeurs, dont les rangs augmentent indéfiniment et indépendamment l'un de l'autre dans la suite générale des valeurs de cette variante, est une quantité infiniment petite, ou bien, si l'on veut employer un langage plus précis, la différence

$$v_{m'', n'', \ldots} - v_{m', n', \ldots}$$

est une variante aux indices m', n', $\ldots$, m'', n'', $\ldots$ qui tend vers zéro.

Effectivement, cette nouvelle variante est égale à

$$(V - v_{m', n', \ldots}) - (V - v_{m'', n'' \ldots}),$$

différence de quantités qui sont toutes deux infiniment petites (9).

Mais il peut en être ainsi pour $v_{m,n\ldots}$ *quand bien même il n'existerait pas de nombre vers lequel tendît cette variante*. J'exprimerai ce fait dans tous les cas, en disant que la variante considérée est *convergente*, expression que, bien entendu, il faut considérer comme n'impliquant aucunement l'existence d'une limite. Les variantes de cette espèce, dont nous allons maintenant nous occuper, se rencontrent à chaque pas et, d'une manière générale, on peut dire qu'*elles jouissent de toutes celles des propriétés de variantes douées de limites, dans les énoncés desquelles ces limites n'interviennent pas*.

12. Nous venons de remarquer que *les variantes pourvues de limites sont toutes convergentes*.

Comme variantes convergentes, nous citerons, en outre, *celles qui, étant finies* (5), *finissent par ne jamais décroître ou bien par ne jamais décroître (algébriquement)*.

Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse de la variante v_m, ne décroissant jamais quand son indice unique augmente. Si elle n'était pas convergente, on pourrait évidemment assigner une quantité positive α, une suite indéfinie d'entiers croissants $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_p, \ldots$ et une seconde suite d'entiers $\mu''_1, \mu''_2, \ldots, \mu''_p, \ldots$ respectivement supérieurs aux précédents, qui donneraient lieu numériquement et même algébriquement, puisque v_m est supposée non décroissante, à la suite illimitée d'inégalités

$$\begin{gathered} v_{\mu''_1} - v_{\mu'_1} > \alpha, \\ v_{\mu''_2} - v_{\mu'_2} > \alpha, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v_{\mu''_p} - v_{\mu'_p} > \alpha, \end{gathered}$$

Et l'on peut supposer $\mu'_2 \geqq \mu''_1$, $\mu'_3 \geqq \mu''_2$, $\ldots$, $\mu'_p \geqq \mu''_{p-1}$, $\ldots$ sauf à supprimer chacune de ces inégalités dont la comparaison avec la précédente ne fournirait pas une semblable relation d'indices.

Comme la suite d'entiers $\mu'_1, \mu''_1, \mu'_2, \mu''_2, \ldots, \mu'_p, \mu''_p, \ldots$ n'est pas décroissante, on a par hypothèse

$$\begin{aligned} & v_{\mu'_2} - v_{\mu''_1} \geqq 0, \\ & v_{\mu'_3} - v_{\mu''_2} \geqq 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & v_{\mu'_p} - v_{\mu''_{p-1}} \geqq 0, \end{aligned}$$

inégalités qui, ajoutées membre à membre avec les p premiers de la suite précédente, donneraient

$$v_{\mu''_p} > v_{\mu'_1} + p\alpha.$$

On pourrait donc prendre p et par suite $m = \mu''_p$ assez grands pour que v_m arrivât à surpasser toute quantité donnée, ce qui est contraire à l'hypothèse. Raisonnement analogue dans les autres cas.

13. J'appelle encore *équivalentes* deux variantes convergentes ayant ou non des indices communs, si leur différence considérée comme variante dépendant de ceux de ces indices qui sont distincts les uns des autres (3) est infiniment petite.

Telles sont, par exemple, deux variantes pourvues de limites quand ces limites sont égales; car, si v, w tendent toutes deux vers V, $v - w$ peut s'écrire $(V - w) - (V - v)$, différence de deux quantités infiniment petites.

Deux variantes dont chacune est équivalente à une même troisième le sont évidemment l'une à l'autre.

14. *La variante $v_{m,n,\ldots}$ étant convergente, si l'on attribue à ses indices une suite indéfinie de systèmes de valeurs particulières*

$$(m_1, n_1, \ldots), \quad (m_2, n_2, \ldots), \quad \ldots, \quad (m_k, n_k, \ldots), \quad \ldots,$$

choisis arbitrairement sous la seule condition que les termes généraux des suites

$$\begin{array}{ccccc} m_1, & m_2, & \ldots, & m_k, & \ldots, \\ n_1, & n_2, & \ldots, & n_k, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

soient tous infinis (6), *le terme général* u_k *de la suite*

$$v_{m_1, n_1, \ldots}, \quad v_{m_2, n_2, \ldots}, \quad \ldots, \quad v_{m_k, n_k, \ldots}, \quad \ldots$$

est une variante qui est convergente et équivalente à la proposée.

En effet, quand k croît indéfiniment, tous les entiers m_k, n_k, ... croissent aussi sans limites et réciproquement. Si donc k', k'' sont infinis, les entiers $m_{k'}$, $n_{k'}$, ..., $m_{k''}$, $n_{k''}$, ... le sont tous à la fois et la différence $u_{k''} - u_{k'} = v_{m_{k''}, n_{k''}, \ldots} - v_{m_{k'}, n_{k'}, \ldots}$ est infiniment petite parce que $v_{m,n,\ldots}$ est supposée convergente (11), en d'autres termes u est aussi convergente.

La différence $u_k - v_{m,n,\ldots} = v_{m_k, n_k, \ldots} - v_{m,n,\ldots}$ est infiniment petite pour la même raison quand k, m, n, ... sont tous infinis, parce qu'alors m_k, n_k, ... le sont eux-mêmes; donc u est équivalente à v.

15. *Si la variante* $v_{m,n,\ldots}$ *est convergente, elle est nécessairement finie. Si, en outre, elle n'est pas infiniment petite, elle est de petitesse limitée et finit par conserver un signe constant.*

Par hypothèse, il existe des entiers μ', ν', ..., μ'', ν'', ..., tels qu'en appelant ε une quantité positive choisie arbitrairement, on a numériquement

$$v_{m'', n'', \ldots} - v_{m', n', \ldots} < \varepsilon,$$

pour

$$m' \geqq \mu', \qquad n' \geqq \nu', \qquad \ldots, \qquad m'' \geqq \mu'', \qquad n'' \geqq \nu'', \qquad \ldots.$$

A partir de μ'', ν'', ... on aura donc constamment

$$v_{m,n,\ldots} - v_{\mu',\nu',\ldots} < \varepsilon.$$

Comme on peut écrire d'autre part

$$v_{m,n,\ldots} = v_{\mu',\nu',\ldots} + (v_{m\,n,\ldots} - v_{\mu',\nu',\ldots}),$$

on voit qu'en appelant φ la valeur numérique de $v_{\mu',\nu',\ldots}$ on finit bien par avoir numériquement

$$v_{m,n,\ldots}, < \varphi + \varepsilon.$$

Si, en second lieu, la variante considérée n'était pas de petitesse limitée, en appelant

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_k, \quad \ldots$$

les valeurs successives d'une variante auxiliaire positive et infiniment petite, on pourrait satisfaire indéfiniment aux inégalités numériques

$$v_{m_1, n_1, \dots} < \varepsilon_1, \quad v_{m_2, n_2, \dots} < \varepsilon_2, \quad \dots, \quad v_{m_k, n_k, \dots} < \varepsilon_k, \quad \dots$$

par des valeurs des entiers

$$\begin{array}{lllll} m_1, & m_2, & \dots, & m_k, & \dots, \\ n_1, & n_2, & \dots, & n_k, & \dots, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots, \end{array}$$

qui, dans chacune de ces suites, iraient en croissant sans cesse, et la variante $u_k = v_{m_k, n_k, \dots}$ serait infiniment petite. Mais les variantes u, v sont équivalentes (14); donc $v_{m,n,\dots}$ serait infiniment petite contrairement à l'hypothèse.

Ainsi, on peut assigner une quantité positive l, telle que l'on finisse par avoir numériquement

$$v_{m, n, \dots} > l.$$

Si donc le signe $v_{m,n,\dots}$ ne finissait pas par rester invariable, on pourrait former des suites d'entiers toutes croissantes

$$\begin{array}{lllll} m_1, & m_2, & \dots, & m_k, & \dots, \\ n_1, & n_2, & \dots, & n_k, & \dots, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots, \end{array}$$

telles que $v_{m_{k+1}, n_{k+1}, \dots}$ et $v_{m_k, n_k, \dots}$ fussent toujours de signes contraires. On finirait donc par avoir numériquement pour k infini ou, ce qui revient au même, pour les valeurs toutes infinies des indices m_k, n_k, ..., m_{k+1}, n_{k+1}, ...

$$v_{m_{k+1}, n_{k+1}, \dots} - v_{m_k, n_k, \dots} > 2l$$

et, contrairement à l'hypothèse, $v_{m,n,\dots}$ ne serait pas une variante convergente.

16. Dans la théorie des variantes convergentes quelconques, le théorème que nous allons énoncer a la même importance que celui du n° 10 pour les variantes convergentes douées de limites, et il se démontre à fort peu près de la même manière :

Toute fonction entière $f(u, v, w, \dots)$ des variantes convergentes $u, v, w, \dots$ est aussi une variante convergente; et, si υ, φ, ψ, ... sont des va-

riantes respectivement équivalentes à $u, v, w, \ldots$, *les variantes* $f(u, v, w, \ldots)$, $f(\upsilon, \varphi, \psi, \ldots)$ *sont aussi équivalentes.*

Une fonction rationnelle quelconque $\dfrac{f_1(u, v, w, \ldots)}{f_2(u, v, w, \ldots)}$ *de* $u, v, w, \ldots$ *jouit des mêmes propriétés, si son dénominateur* $f_2(u, v, w, \ldots)$ *n'est pas infiniment petit.*

I. En attribuant aux indices de $u, v, w, \ldots$ deux systèmes de valeurs que nous ferons toutes croître indéfiniment et indépendamment les unes des autres, en nommant généralement $u', v', w', \ldots, u'', v'', w'', \ldots$ les deux groupes correspondants de valeurs de nos variantes et en posant

$$u''-u'=\alpha, \qquad v''-v'=\beta, \qquad w''-w'=\gamma, \ \ldots$$

d'où

$$u''=u'+\alpha, \qquad v''=v'+\beta, \qquad w''=w'+\gamma, \ \ldots,$$

il viendra, si l'on développe le polynôme

$$f(u'', v'', w'', \ldots)=f(u'+\alpha, v''+\beta, w'+\gamma, \ldots)$$

par la formule de Taylor,

$$f(u'', v'', w'', \ldots)-f(u', v', w', \ldots)=\Theta$$

où, comme au nº 10, Θ est un polynôme entier par rapport à u', v', $w', \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$, dont chaque terme contient en facteur l'une au moins de ces dernières quantités. Comme $u', v', w', \ldots$ sont finies (15) et que $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont des quantités infiniment petites parce que $u, v, w, \ldots$ sont convergentes (11), Θ est nécessairement une quantité infiniment petite et, par suite, $f(u, v, w, \ldots)$ une variante convergente.

Comme les différences $u-\upsilon$, $v-\varphi$, $w-\psi, \ldots$ sont toutes infiniment petites, un raisonnement identique prouvera que

$$f(u, v, w, \ldots)-f(\upsilon, \varphi, \psi, \ldots)$$

l'est aussi, ou bien, ce qui revient au même, que les deux termes de cette différence sont des variantes équivalentes.

II. *En appelant* p, q *deux variantes convergentes dont la seconde n'est pas infiniment petite, et* ϖ, χ *deux autres variantes respectivement équi-*

valentes à celles-ci, la variante $\frac{p}{q}$ *est convergente et en outre équivalente à* $\frac{\varpi}{\chi}$.

Donnons aux indices de p, q deux systèmes de valeurs que nous ferons toutes croître indéfiniment d'une manière quelconque et soient p', q' et p'', q'' les valeurs correspondantes de p, q. On a

$$\frac{p''}{q''}-\frac{p'}{q'}=\frac{p''q'-p'q''}{q'q''},$$

expression qui est infiniment petite (8), parce que son numérateur l'est lui-même, tandis que son dénominateur est de petitesse limitée.

Effectivement p', p'' sont des variantes équivalentes entre elles, parce qu'elles le sont chacune à p (13), (14) et de même pour q', q''; les variantes $p''q'$, $p'q''$ sont donc équivalentes (I); en d'autres termes, leur différence est infiniment petite. D'autre part, q étant, par hypothèse, une variante convergente non infiniment petite, est de petitesse limitée (15). En appelant donc l quelque quantité positive, on finit par avoir numériquement $q > l$ et par suite $q'q'' > l^2$.

L'équivalence de $\frac{p}{q}$, $\frac{\varpi}{\chi}$ se démontre exactement de la même manière.

III. La dernière partie de notre théorème est maintenant évidente; car, en vertu de la première et des hypothèses admises, les variantes $f_1(u, v, w, \ldots)$, $f_2(u, v, w, \ldots)$, $f_1(\upsilon, \varphi, \psi, \ldots)$, $f_2(\upsilon, \varphi, \psi, \ldots)$ jouissent des propriétés supposées à p, q, ϖ, χ dans l'alinéa précédent.

17. Quand des variantes convergentes sont douées de limites, on a pour énoncer et démontrer leurs propriétés le choix entre deux méthodes : l'une directe, c'est-à-dire sans parler de ces limites comme nous avons fait dans les n^{os} 14, 15, 16, l'autre indirecte en les faisant intervenir comme dans le n^{o} 10 Quand elles en sont dépourvues, il est clair que la deuxième méthode n'est plus praticable, ce qui est désavantageux, car elle est plus expéditive que l'autre et surtout elle fait mieux image. On ne peut assurément en conserver le bénéfice pour le *fond des démonstrations*, mais il est bien facile de le faire pour leur *forme* et pour les énoncés : il suffit effectivement de *conserver pour les variantes*

convergentes dépourvues de limites, MAIS ALORS AU FIGURÉ, *le langage que procure la considération des limites pour celles qui en sont douées*. On est conduit ainsi à un ensemble de conventions dont voici les principales.

A toute variante convergente dépourvue de limite, on en assigne une *fictive* que l'on représente par les mêmes signes que si les données numériques de la question assuraient à cette variante la possession d'une limite véritable. Cette convention fondamentale n'implique évidemment aucune contradiction; *elle permet de formuler la convergence d'une variante toujours dans les mêmes termes, en disant simplement qu'elle tend vers une certaine limite (qui, naturellement, est tantôt véritable, tantôt supposée)*.

Par exemple, au lieu de parler comme au n° 12, on dira (au figuré si besoin est) qu'une variante tend vers une limite quand, étant finie, elle arrive à ne jamais décroître ou bien à ne jamais croître.

Pour exprimer, quand elle a lieu, l'équivalence de deux variantes convergentes données, on dira dans tous les cas que leurs limites (ou pseudo-limites) sont égales.

A une fonction rationnelle donnée de quantités invariables et de variantes convergentes données, et conformément aux conventions précédentes combinées avec le théorème du n° 16, on attribuera une limite, tantôt fictive, tantôt véritable, que l'on nommera la même fonction rationnelle des quantités invariables et des limites ou pseudo-limites des variantes convergentes dont il s'agit. Moyennant quoi le théorème cité s'énoncera dans les mêmes termes que celui du n° 10.

Si quelque fonction rationnelle de quantités invariables et de variantes convergentes est infiniment petite, on dira qu'il existe entre ces quantités invariables et les limites ou pseudo-limites des variantes une équation ayant pour second membre zéro et pour premier membre la même fonction rationnelle de toutes ces quantités tant véritables que fictives.

Quand une variante convergente finit par conserver, soit le signe +, soit le signe — (15), on dira que sa limite ou pseudo-limite est positive dans le premier cas, négative dans le second.

L'excès d'une variante convergente sur une quantité invariable ou sur une autre variante convergente est lui-même une variante convergente (16) et finit ainsi par conserver un signe constant s'il n'est pas infiniment petit. *Selon que le signe final est + ou —, on dira que la limite de la* *première variante est supérieure dans le premier cas, inférieure dans le second à la quantité invariable ou à la limite de la seconde variante convergente,* le sens du mot *limite* pouvant être, comme ci-dessus et suivant la circonstance, propre ou figuré.

18. Un nombre quelconque A étant donné, ainsi qu'une quantité positive δ, si la différence $A - a$ est numériquement inférieure à δ, on dit que a est *une valeur approchée de* A *à* δ *près par défaut ou par excès, selon que cette différence est positive ou négative.*

Quand A est la limite d'une variante convergente connue $v_{m,n,\ldots}$, le calcul de telle ou telle de ses valeurs approchées peut s'exécuter au moyen de la simple discussion de cette variante. Effectivement, si l'on cherche des entiers $\mu, \nu, \ldots$, à partir desquels on ait numériquement $v_{m,n,\ldots} - v_{\mu,\nu,\ldots} < \frac{1}{2}\delta$, on aura toujours aussi, mais algébriquement,

$$v_{m,n,\ldots} - v_{\mu,\nu,\ldots} + \tfrac{1}{2}\delta > 0, \qquad v_{m,n,\ldots} - v_{\mu,\nu,\ldots} - \tfrac{1}{2}\delta < 0;$$

d'où

$$A - v_{\mu,\nu,\ldots} + \tfrac{1}{2}\delta > 0, \qquad A - v_{\mu,\nu,\ldots} - \tfrac{1}{2}\delta < 0.$$

Par suite, $v_{\mu,\nu,\ldots} - \frac{1}{2}\delta$, $v_{\mu,\nu,\ldots} + \frac{1}{2}\delta$, quantité dont la différence est numériquement égale à δ, sont des valeurs approchées à δ près de A, la première par défaut, la seconde par excès.

En opérant de la même manière dans le cas où $v_{m,n,\ldots}$ serait une variante convergente sans limite véritable, on obtiendra *les mêmes valeurs approchées de sa limite fictive.*

19. Ce que l'on a appelé les *nombres incommensurables,* ce sont précisément ces limites fictives de variantes convergentes ne tendant pas vers de véritables nombres. Quant aux *nombres commensurables,* ce sont naturellement, par opposition, les nombres proprement dits, c'est-à-dire les entiers et les fractions pris positivement ou négativement.

Les principes de la théorie de ces prétendus nombres sont contenus implicitement dans les deux numéros précédents, où l'on voit clairement ce qu'il faut entendre par l'égalité de deux nombres incommensurables, l'inégalité dans un sens ou dans l'autre entre deux nombres commensurables ou incommensurables, une fonction rationnelle de ces deux sortes de nombres, une équation entre les uns et les autres, telle valeur approchée d'un nombre incommensurable donné, etc.

En examinant attentivement les divers points de cette théorie, on constatera qu'*il n'existe aucune propriété des nombres incommensurables qui ne soit la traduction, dans un autre langage, de quelque propriété intéressant exclusivement des nombres proprement dits variables*.

En dehors de cette conception, rien ne semble satisfaire pleinement l'esprit. Écrire, par exemple, comme on le fait souvent, qu'*un nombre incommensurable est la mesure d'une grandeur qui n'en a point de commune avec son unité*, c'est assembler des mots qui se contredisent; car, à part le cas (dominant tous les autres) où l'idée d'un nombre naît de la contemplation d'un groupe d'objets considérés au point de vue exclusif de leur pluralité, elle ne peut provenir que de la comparaison de deux grandeurs simultanément décomposables en parties toutes identiques, c'est-à-dire possédant une *commune mesure*. Autant donc vaudrait-il dire qu'*un nombre incommensurable est la mesure d'une grandeur qui n'en a point*.

On dit encore qu'*un nombre incommensurable est la limite du nombre mesurant une quantité variable qui, sans cesser d'avoir une commune mesure avec son unité, se rapproche indéfiniment de quelque grandeur fixe qui n'en a point*. Ici, c'est le mot *limite* qui est inintelligible, car il ne correspond à rien que l'esprit puisse connaître au moment où se pose cette définition; effectivement, les seules limites dont il a pu être question antérieurement sont des nombres (proprement dits) fixes, dont certains nombres variables se rapprochent indéfiniment, etc.

Enfin, puisque les sciences des grandeurs concrètes, telles que la Géométrie, la Mécanique, etc., puisent tous leurs principes logiques dans l'Analyse, c'est s'engager dans un cercle vicieux que de fonder la moindre théorie purement analytique sur d'autres considérations que celles concernant exclusivement des nombres abstraits.

20. Pour mieux éclaircir tout ceci, je vais en faire l'application à la théorie de l'extraction des racines arithmétiques, opération la plus élémentaire de toutes celles qui conduisent à des nombres incommensurables. Voici, à ce sujet, tout ce que l'on peut positivement établir :

I. *Une quantité positive quelconque* A *étant donnée, ainsi qu'un expo-*

sant entier m, il existe quelque variante positive dont la $m^{\text{ième}}$ puissance a A *pour limite.*

En supposant $A > 1$ pour fixer les idées, nommons u une quantité positive supérieure à 1 aussi et formons la progression géométrique

$$1, \quad u, \quad u^2, \quad \ldots.$$

Comme ses termes vont en croissant indéfiniment, il y en a certainement deux consécutifs, u^{k_u}, u^{k_u+1}, donnant

$$u^{k_u} < A \leqq u^{k_u+1};$$

d'où

$$A - u^{k_u} \leqq u^{k_u+1} - u^{k_u} \leqq u^{k_u}(u-1) < A(u-1)$$

et, par suite,

$$\lim u^{k_u} = A,$$

quand on fait tendre u vers 1.

Soient maintenant q_u, r_u le quotient et le reste de la division de k_u par m et posons $u^{q_u} = v$. A cause de $k_u = mq_u + r_u$, on aura

$$v^m = \frac{u^{k_u}}{u^{r_u}}$$

et, de plus, $\lim u^{r_u} = 1$ à cause de $\lim u = 1$, $r_u < m$.

On aura donc (10)

$$\lim v^m = \frac{\lim u^{k_u}}{1} = A,$$

ce qu'il fallait prouver.

Le raisonnement est le même pour $A < 1$, à cela près qu'il faut prendre $u < 1$; pour $A = 0$ ou $A = 1$, le point en question est évident.

II. *Toute variante positive v, dont la $m^{\text{ième}}$ puissance tend vers* A, *est convergente.*

Il existe évidemment quelque quantité positive α (non $= 0$), dont la $m^{\text{ième}}$ puissance est inférieure à A; et v finit par la surpasser, car autrement v^m ne finirait pas par surpasser α^m et, par suite, ne tendrait pas vers A, qui est $> \alpha^m$.

Cela posé, soient v', v'' deux valeurs de v dont nous ferons croître indéfiniment les indices (que nous nous sommes dispensés de noter).

En appelant ε', ε'' deux certaines quantités infiniment petites, on a, par hypothèse,

$$A - v'^m = \varepsilon', \qquad A - v''^m = \varepsilon'';$$

d'où

$$v''^m - v'^m = -(\varepsilon'' - \varepsilon'),$$

puis

$$v'' - v' = -\frac{\varepsilon'' - \varepsilon'}{v''^{m-1} + v''^{m-2}v' + \ldots + v'^{m-1}},$$

et finalement, en valeur numérique,

$$v'' - v' < \frac{\varepsilon'' - \varepsilon'}{m\alpha^{m-1}}.$$

On a donc bien $\lim(v'' - v') = 0$.

III. *Deux variantes, telles que v, sont toujours équivalentes.*

En raisonnant exactement comme dans l'alinéa précédent, on prouvera que la différence de ces variantes est infiniment petite.

Quand A se trouve être la puissance $m^{\text{ième}}$ de quelque quantité a, toutes les variantes, telles que v, ont a pour limite commune; les faits ci-dessus deviennent à peu près évidents et cessent même d'offrir un intérêt sérieux.

Dans le cas contraire, ils s'énoncent en disant, pour les deux premiers, que A *a toujours quelque racine $m^{\text{ième}}$ positive, mais alors incommensurable;* pour le dernier, que *cette racine est unique.* On lui conserve la notation $\sqrt[m]{A}$ ou $A^{\frac{1}{m}}$ qui la désignerait si elle existait réellement, je veux dire comme véritable nombre.

21. Les conventions faites au n° 17 permettent évidemment de raisonner de la même manière quand A est une quantité incommensurable quelconque, c'est-à-dire de définir exactement dans tous les cas l'expression $\sqrt[m]{A}$. Ce point acquis, la théorie des valeurs arithmétiques des radicaux s'établit sans obscurité en utilisant, pour les démonstrations, les propositions des n$^{\text{os}}$ 11, 13, 15, 16 et, pour la simplification des énoncés, les conventions des n$^{\text{os}}$ 17, 18, 19.

22. Ayant étendu aux quantités incommensurables combinées entre elles exclusivement ou bien avec des quantités commensurables les

diverses opérations élémentaires (le calcul d'une fonction rationnelle les comprend toutes), nous avons aussi étendu implicitement aux variantes passant par des valeurs successives incommensurables toutes les notions concernant les autres : définition de la convergence, de l'équivalence, des limites véritables ou fictives. Cette extension est nécessaire quand on a à définir exactement la *valeur d'une fonction non rationnelle, pour des valeurs quelconques, commensurables ou incommensurables, attribuées à ses variables indépendantes*, car une pareille fonction se présente habituellement comme limite d'une variante qui est une fonction connue des mêmes variables; par exemple e^x est la limite du polynôme entier $1 + \frac{x}{1} + \ldots + \frac{x^m}{1.2\ldots m}$ qui dépend de l'indice infini m et dont la valeur est, en général, incommensurable quand celle de x l'est elle-même. Mais je me contente de la mentionner pour éviter des redites.

Quand une variante $v_{m,n,\ldots}$ qui passe par des valeurs incommensurables est convergente, on peut toujours en assigner une autre convergente $u_{m,n,\ldots}$ qui lui est équivalente, mais dont toutes les valeurs successives sont commensurables.

Il suffit effectivement pour cela d'appeler $\varepsilon_{m,n,\ldots}$ une quantité positive infiniment petite quelconque et de prendre, pour $u_{m,n,\ldots}$, une valeur approchée commensurable de $v_{m,n,\ldots}$ à $\varepsilon_{m,n,\ldots}$ près (18); car les inégalités numériques

$$v_{m',n',\ldots} - u_{m',n',\ldots} < \varepsilon_{m',n',\ldots}, \qquad v_{m'',n'',\ldots} - u_{m'',n'',\ldots} < \varepsilon'',$$

entraînant

$$(v_{m'',n'',\ldots} - v_{m',n',\ldots}) - (u_{m'',n'',\ldots} - u_{m',n',\ldots}) < \varepsilon' + \varepsilon'',$$

montrent que la différence $u_{m'',n'',\ldots} - u_{m',n',\ldots}$ est, comme $v_{m'',n'',\ldots} - v_{m',n',\ldots}$, infiniment petite pour m', n', ...; m'', n'', ... tous infinis, c'est-à-dire que u est une variante convergente. D'ailleurs, elle est équivalente à v par sa définition même.

23. On formule habituellement dans ces termes la règle fondamentale servant à décider si une variante donnée $v_{m,n,\ldots}$ tend ou non vers quelque limite :

Pour que cette variante ait une limite, il est nécessaire et suffisant que *la différence*

$$v_{m+p,\, n+q,\, \ldots} - v_{m,\, n,\, \ldots}$$

tende vers zéro pour m, n,... *infinis, quelques relations que l'on puisse établir entre ces indices et les valeurs simultanées des entiers additionnels* p, q, ...

Comme m, n, ...; $m+p$, $n+q$, ... ne constituent alors pas autre chose qu'un système de valeurs des entiers m', n', ...; m'', n'', ... considérés comme des indices infinis, nous pouvons, en utilisant la définition du n° 11, dire plus simplement :

Pour qu'une variante tende vers quelque limite, il faut et il suffit qu'elle soit convergente.

Aucune démonstration satisfaisante de cette proposition n'a encore été donnée; bien plus, *aucune ne le sera jamais*. En faisant même bon marché de tout ce qu'il y a d'obscur dans les idées courantes sur les nombres incommensurables, il resterait encore pour cela cette raison bien simple que, en Mathématiques, toute preuve de l'existence d'une quantité comporte essentiellement l'indication d'un procédé à l'aide duquel on pourrait au moins théoriquement en calculer la valeur. Or la définition générale d'une variante ne contient évidemment rien qui permettrait d'en calculer effectivement la limite.

Mais, dans l'ordre d'idées que je propose, la règle en question n'est plus à démontrer; elle est exacte *par elle-même* s'il existe quelque nombre proprement dit vers lequel tend la variante, ce qui est compatible avec l'énoncé (12), *par convention* (17) s'il n'en existe point.

24. Tout le monde admet comme principe fondamental évident qu'*une variante finie tend toujours vers quelque limite quand, algébriquement, elle finit par ne jamais décroître ou par ne jamais croître*. D'après ce que je viens de dire, ce principe n'est pour moi ni évident, ni même intelligible, à moins, bien entendu, que son énoncé ne soit interprété conformément à ma théorie. Mais, pour ceux qui préféreraient le conserver, il n'est pas sans intérêt de prouver qu'*une variante convergente quelconque est toujours équivalente à quelque autre, soit tendant vers une limite, soit appartenant à l'espèce ci-dessus mentionnée;* car, à leur point de vue, la règle discutée au numéro précédent se trouverait alors établie. Voici comment on peut raisonner.

I. Si une infinité de valeurs de la variante considérée $v_{m,n,\ldots}$ sont égales à une même quantité φ, la suite de ces valeurs est illimitée, et son terme général peut être considéré comme une variante équivalente à $v_{m,n,\ldots}$ (14). Or cette nouvelle variante a évidemment φ pour limite.

II. S'il arrive que, au delà des valeurs $\mu, \nu, \ldots$ des indices, il y ait une infinité de valeurs de $v_{m,n,\ldots}$ qui soient inférieures à $v_{\mu,\nu,\ldots}$ et aussi une infinité d'autres valeurs qui soient, au contraire, supérieures à $v_{\mu,\nu,\ldots}$, en appelant $v_{m',n',\ldots}$, $v_{m'',n'',\ldots}$ les termes généraux de ces deux suites indéfinies, on aura

$$v_{m'',n'',\ldots} - v_{\mu,\nu,\ldots} < v_{m'',n'',\ldots} - v_{m',n',\ldots};$$

d'où, pour m', n', ...; m'', n'', ..., tous infinis, $\lim v_{m'',n'',\ldots} = v_{\mu,\nu,\ldots}$, parce que $v_{m,n,\ldots}$ est supposée convergente. Or les valeurs de $v_{m'',n'',\ldots}$ sont celles d'une variante équivalente à la proposée (14).

III. Si aucune de ces circonstances ne se présente, nous supprimerons les unes après les autres dans la suite des valeurs de la variante :

1° Celles qui se trouveraient égales à quelque valeur antérieure;

2° Toutes celles dont les excès sur quelque valeur antérieure offriraient un même signe et qui seraient en nombre limité;

3° Puis, enfin, toutes celles comprises entre deux autres telles, que la variante varierait dans un même sens de la première à la dernière, mais en sens contraire, de la dernière à celle qui la suit.

Les valeurs de $v_{m,n,\ldots}$, laissées par ces diverses suppressions, forment encore une suite illimitée, comme on s'en assure avec tant soit peu d'attention, et le terme général u de cette suite est une variante convergente, partant finie, qui est équivalente à $v_{m,n,\ldots}$.

Cela posé, il arrivera de deux choses l'une : ou bien u variera dans un sens constant, ou bien chacune de ses valeurs sera comprise entre les deux précédentes, cas auquel il est évident que celles de rangs pairs varieront dans un sens constant et celles de rangs impairs dans le sens opposé. Donc, suivant les circonstances, les valeurs mêmes de u ou bien celles dont les rangs sont d'une même parité quelconque appartiendront à une variante satisfaisant aux conditions de l'énoncé.