A. PICART

Solution géométrique d'un problème d'analyse qui se présente dans la question des lignes isothermes permanentes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 3 (1866), p. 309-319
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1866_1_3__309_0>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE D'UN PROBLÈME D'ANALYSE

QUI SE PRÉSENTE DANS LA QUESTION

DES

LIGNES ISOTHERMES PERMANENTES,

PAR M. A. PICART,

PROFESSEUR AU LYCÉE CHARLEMAGNE.

1. Lorsqu'on se propose de trouver dans un corps solide homogène indéfini, échauffé primitivement d'une manière quelconque, un système de lignes le long desquelles la température reste constamment uniforme pendant toute la durée du refroidissement, on est conduit à résoudre le problème suivant :

Déterminer la forme de deux fonctions α et β de x, y, z, par la condition que les cinq quantités

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2,\\ &\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2,\\ &\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dz},\\ &\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{d^2\alpha}{dy^2}+\frac{d^2\alpha}{dz^2},\\ &\frac{d^2\beta}{dx^2}+\frac{d^2\beta}{dy^2}+\frac{d^2\beta}{dz^2}, \end{aligned}\right.$$

ne dépendent que de α et β (*).

(*) La solution qui va suivre est extraite textuellement d'un Mémoire que j'ai envoyé avant le 1er juillet 1865 au concours ouvert par l'Académie des Sciences sur la question des *lignes isothermes permanentes*. On peut lire dans le *Compte rendu* de la séance annuelle du 5 mars 1866 le jugement porté sur ce travail par le Rapporteur de la Commission. Seulement je dois ajouter ici que lorsque j'abordai la question posée par l'Académie, je la croyais complétement neuve et que j'ignorais l'existence de tout travail sur le même

2. Si l'on pose

$$\alpha = f_1(x, y, z) \tag{2}$$

$$\beta = f_2(x, y, z), \tag{3}$$

et qu'on regarde α et β comme deux paramètres variables, ces deux équations représentent deux familles de surfaces. Il s'agit donc de chercher quelle doit être la nature de ces deux familles de surfaces pour que les cinq quantités (1), que nous désignerons par h^2, k^2, g, p, q, soient des fonctions de α et β.

3. Si l'on considère deux surfaces du système (α), correspondant à deux valeurs infiniment voisines α et $\alpha + d\alpha$ du paramètre, la quantité h, en chaque point de la surface α, est égale au quotient de $d\alpha$ par la portion de normale comprise entre les deux surfaces. De même, la quantité k, relativement aux surfaces infiniment voisines β et $\beta + d\beta$, est, pour chaque point de la surface β, en raison inverse de la distance des deux surfaces en ce point.

Quant à la quantité g, on sait que l'angle sous lequel se coupent en chaque point de leur ligne d'intersection deux surfaces des systèmes (α) et (β) a pour cosinus $\frac{g}{hk}$.

D'après cette signification géométrique des trois quantités h, g, k, on voit d'abord que *les deux familles de surfaces* (α) *et* (β) *doivent être telles, que deux surfaces quelconques de système différent se coupent partout sous le même angle, et que le long de chaque ligne d'intersection, la distance de l'une ou l'autre surface à la surface infiniment voisine reste constante.*

En combinant ces deux conditions, on démontre facilement que *chacun des deux systèmes de surfaces détermine sur une surface quelconque de l'autre système une série de courbes parallèles qui*, d'après un théorème de Gauss, *ont pour trajectoires orthogonales un système de lignes géodésiques.*

4. Poursuivons les conséquences de cette double condition.

Rappelons d'abord que si l'on a deux systèmes de lignes (x) et (y) décomposant une surface en rectangles infiniment petits tels que $aa'b'b$ (*fig.* 1), la variation di de l'angle sous lequel une ligne quelconque v coupe les lignes d'un système est exprimée par la formule

$$di = \frac{dv}{\rho_v} - \frac{dx}{\rho_x} - \frac{dy}{\rho_y}, \tag{4}$$

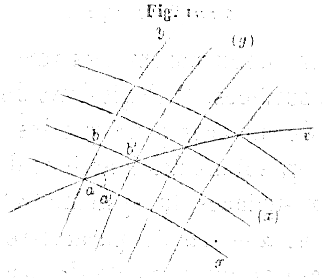
où dx, dy, dv représentent les éléments aa', ab, ab' des lignes x, y, v et ρ_x, ρ_y, ρ_v

---

sujet. Ce n'est qu'au mois de décembre 1865 que j'eus connaissance d'un Mémoire de M. Bertrand touchant cette question, publié dans le *Journal de M. Liouville* (1^re série, t. XIV), sous le titre : *Sur les simplifications que peuvent apporter des changements de coordonnées dans les questions relatives au mouvement de la chaleur*, et où se trouve une première solution très-élégante du problème qui fait l'objet de cet article.

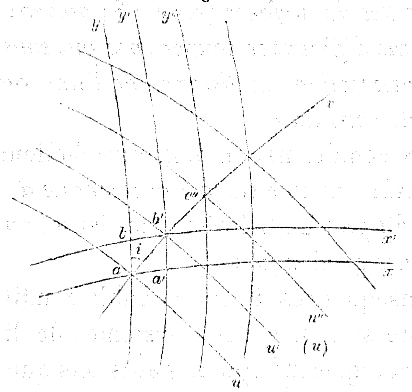
les rayons de courbure géodésique, pris avec un signe convenable, de ces trois lignes, en leur point d'intersection a.

Fig. 1.



Considérons maintenant une série de surfaces infiniment voisines du système (α), qui coupent l'une des surfaces (β) suivant les lignes parallèles u, u', u'', etc. (*fig.* 2). Soit, sur la surface β, une ligne géodésique v coupant orthogonalement ces courbes aux points a, b', c'', etc., et imaginons sur les surfaces (α) les lignes géodésiques y, y', y'', etc., respectivement perpendiculaires à u, u', u'', etc., aux points a, b', c'', etc.; ces lignes peuvent être considérées comme appartenant à une certaine surface γ. Soient x, x' deux trajectoires orthogonales de ces lignes, pas-

Fig. 2.



sant par a et b', et aa', bb' les éléments de ces trajectoires compris entre y et y'. Si l'on désigne par i et $i + di$ les angles que forme la ligne v avec y et y'; par ρ_x, ρ_y, ρ_v les rayons de courbure géodésique des lignes x, y, v au point a, on aura, en appliquant la formule précédente,

$$di = \frac{ab'}{\rho_v} - \frac{aa'}{\rho_x} - \frac{ab}{\rho_y}. \tag{5}$$

Remarquons tout de suite que ρ_y et ρ_v sont les rayons de courbure proprement dits des deux lignes y et v, car les plans osculateurs de ces lignes sont normaux à la courbe u en a, et, par suite, se confondent avec le plan tangent en a à la surface γ.

Examinons ce que devient cette relation (5) lorsque le point a se déplace sur la ligne d'intersection u des surfaces α et β.

D'abord di reste constant, puisque les deux surfaces α et $\alpha + d\alpha$ coupent respectivement la surface β sous des angles qui demeurent invariables tout le long des lignes u et u'; aa' reste aussi constant, puisque c'est la distance, en a, de la surface α à la surface infiniment voisine $\alpha + d\alpha$, et que cette distance ne change pas le long de la ligne u; en outre, de l'invariabilité de i et de aa' résulte celle de ab et ab'. Quant à la courbure géodésique $\frac{1}{\rho_x}$ de la ligne x au point a, on sait qu'elle est égale, au signe près, à $\frac{bb' - aa'}{aa' \cdot ab}$; et, comme l'élément bb', qui est la distance en b' des surfaces α et $\alpha + d\alpha$, reste aussi constant le long de la ligne u', on en conclut que la quantité $\frac{1}{\rho_x}$ est elle-même invariable.

Les seuls éléments qui, le long de la ligne u, pourraient varier dans l'équation (6), sont donc ρ_y et ρ_v. Mais, si l'on remarque que l'on peut former, relativement aux deux surfaces β et $\beta + d\beta$ et à la surface α, une seconde équation analogue à (5), dans laquelle entrent ρ_y et ρ_v avec d'autres éléments qui restent constants le long de u, on en déduira que les rayons de courbure des courbes y et v, au point a, demeurent eux-mêmes invariables sur tout le parcours de la ligne u.

Ainsi, *le système de lignes géodésiques qui coupe orthogonalement toutes les courbes parallèles suivant lesquelles chaque surface d'un système est rencontrée par les surfaces de l'autre système, jouit de cette propriété que le long d'une trajectoire orthogonale quelconque, le rayon de courbure de toutes ces lignes a une valeur constante.*

Voilà donc deux conséquences importantes déduites de la condition que les trois quantités h, g, k soient des fonctions de α et β, savoir : 1° *les lignes suivant lesquelles chaque surface d'un système est rencontrée par toutes les surfaces de l'autre système ont pour trajectoires orthogonales un système de lignes géodésiques;* 2° *le rayon de courbure de ces trajectoires orthogonales conserve une valeur constante le long de chacune des lignes d'intersection.*

5. Il reste à exprimer que les quantités p et q ne dépendent elles-mêmes que des paramètres α et β.

On sait que si l'on a une famille de surfaces représentée par l'équation

$$\alpha = f_1(x, y, z),$$

la somme des courbures principales $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r'}$ ou la *courbure sphérique* d'une surface quelconque de ce système, en un point, est liée aux quantités h et p par la formule

$$(6)\qquad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{dh}{d\alpha} - \frac{p}{h},$$

dh étant la variation que subit la quantité h, lorsqu'on passe d'un point de la surface α à la surface infiniment voisine $\alpha + d\alpha$, suivant la direction de la normale en ce point.

Cette formule a été donnée pour la première fois par M. Lamé dans son remarquable ouvrage intitulé : *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, § XXV, p. 42. Mais la manière dont l'illustre géomètre la découvre semble impliquer que les surfaces (α) fassent partie d'un système triple orthogonal. Il ne sera donc pas inutile d'en indiquer ici une démonstration directe.

Si l'on pose, pour abréger,

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d\alpha}{dx} = \mathrm{P}, & \dfrac{d\alpha}{dy} = \mathrm{Q}, & \dfrac{d\alpha}{dz} = \mathrm{R}, \\ \dfrac{d^2\alpha}{dx^2} = \mathrm{P}', & \dfrac{d^2\alpha}{dy^2} = \mathrm{Q}', & \dfrac{d^2\alpha}{dz^2} = \mathrm{R}', \\ \dfrac{d^2\alpha}{dy\,dz} = \mathrm{P}'', & \dfrac{d^2\alpha}{dx\,dz} = \mathrm{Q}'', & \dfrac{d^2\alpha}{dx\,dy} = \mathrm{R}'', \end{array}\right.$$

l'équation du second degré en ρ, qui donne les deux rayons de courbure principaux de la surface α au point x, y, z, est

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} [\mathrm{P}^2(\mathrm{Q}'\mathrm{R}' - \mathrm{P}''^2) + \mathrm{Q}^2(\mathrm{P}'\mathrm{R}' - \mathrm{Q}''^2) + \mathrm{R}^2(\mathrm{P}'\mathrm{Q}' - \mathrm{R}''^2) \\ \quad + 2\mathrm{QR}(\mathrm{Q}''\mathrm{R}'' - \mathrm{P}'\mathrm{P}'') + 2\mathrm{PR}(\mathrm{P}''\mathrm{R}'' - \mathrm{Q}'\mathrm{Q}'') + 2\mathrm{PQ}(\mathrm{P}''\mathrm{Q}'' - \mathrm{R}'\mathrm{R}'')]\rho^2 \\ \qquad + h(h^2 p - \mathrm{P}^2\mathrm{P}' - \mathrm{Q}^2\mathrm{Q}' - \mathrm{R}^2\mathrm{R}' - 2\mathrm{QRP}'' - 2\mathrm{PRQ}'' - 2\mathrm{PQR}'')\rho + h^4 = 0. \end{array}\right.$$

La somme des inverses des racines de cette équation est égale à

$$\frac{\mathrm{P}^2\mathrm{P}' + \mathrm{Q}^2\mathrm{Q}' + \mathrm{R}^2\mathrm{R}' + 2\mathrm{QRP}'' + 2\mathrm{PRQ}'' + 2\mathrm{PQR}''}{h^3} - \frac{p}{h}.$$

Or, lorsqu'on passe de la surface α à la surface infiniment voisine $\alpha + d\alpha$, suivant la normale à la première surface, les coordonnées x, y, z subissent des accroissements représentés par $\dfrac{\mathrm{P}\,d\alpha}{h^2}$, $\dfrac{\mathrm{Q}\,d\alpha}{h^2}$, $\dfrac{\mathrm{R}\,d\alpha}{h^2}$; par suite, on trouve pour la variation dh de la quantité h

$$\frac{d\alpha[\mathrm{P}(\mathrm{PP}' + \mathrm{QR}'' + \mathrm{RQ}'') + \mathrm{Q}(\mathrm{PR}'' + \mathrm{QQ}' + \mathrm{RP}'') + \mathrm{R}(\mathrm{PQ}'' + \mathrm{QP}'' + \mathrm{RR}')]}{h^3}$$

ou

$$\frac{d\alpha(\mathrm{P}^2\mathrm{P}' + \mathrm{Q}^2\mathrm{Q}' + \mathrm{R}^2\mathrm{R}' + 2\mathrm{QRP}'' + 2\mathrm{PRQ}'' + 2\mathrm{PQR}'')}{h^3};$$

donc la somme des courbures principales de la surface est bien égale à $\dfrac{dh}{d\alpha} - \dfrac{p}{h}$.

6. Il résulte de là que la *courbure sphérique* des surfaces (α) et (β) doit être

constante le long de chacune de leurs lignes d'intersection. Mais la somme des courbures de deux sections normales rectangulaires, en un point d'une surface, est constante autour de ce point. On peut donc dire que la somme des courbures des sections normales menées, en chaque point, suivant la ligne d'intersection de deux surfaces α et β et la ligne géodésique qui lui est perpendiculaire sur chacune de ces surfaces, doit rester invariable; et comme déjà la courbure dans le sens de la ligne géodésique est constante, il en doit être de même de la courbure dans le sens de la ligne d'intersection.

Ainsi *les deux systèmes de surfaces* (α) *et* (β) *sont tels, que la courbure des sections normales, menées tangentiellement à leurs lignes d'intersection, est constante le long d'une même ligne.*

7. Considérons la ligne d'intersection u de deux surfaces α et β; comme, d'une part, ces surfaces se coupent partout sous le même angle, et que, d'autre part, leurs sections normales, menées tangentiellement à la ligne u, ont une courbure constante le long de cette ligne, on en déduit aisément, par le théorème de Meusnier, que le rayon de courbure de la ligne u est constant, et que son plan osculateur fait partout le même angle avec chacune des deux surfaces.

On peut donc dire que *toutes les surfaces d'un système déterminent sur une surface de l'autre système une série de lignes d'*ÉGALE COURBURE GÉODÉSIQUE.

8. Nous allons maintenant démontrer que *lorsque, sur une surface, un système de lignes d'égale courbure géodésique a pour trajectoires orthogonales un système de lignes géodésiques, la courbure de la surface est constante le long d'une ligne quelconque du premier système* (*).

Soient, en effet, (u) une série de lignes d'égale courbure géodésique, et (v) le système de leurs trajectoires orthogonales. Désignons par du et δv les éléments respectifs des deux lignes u et v, et par $\frac{1}{\rho_u}$ la courbure géodésique de la ligne u. On sait que, dans le passage de la ligne u à la ligne infiniment voisine u', la variation $\delta.du$ de l'élément du (sans avoir égard au signe) est égale à $du.\delta v.\frac{1}{\rho_u}$. Comme δv et $\frac{1}{\rho_u}$ sont constants le long de la ligne u, on en conclut déjà que les variations suc-

(*) Une pareille surface est applicable sur une surface de révolution. On peut, en effet, énoncer le théorème suivant : *Toute surface, sur laquelle il existe un système de lignes d'égale courbure géodésique ayant pour trajectoires orthogonales un système de lignes géodésiques, est nécessairement applicable sur une surface de révolution.* A l'aide de ce théorème on reconnaît immédiatement que les surfaces héliçoïdales sont applicables sur des surfaces de révolution, comme l'a démontré, pour la première fois, Edmond Bour, dans son beau *Mémoire sur la déformation des surfaces;* car on voit tout de suite que les hélices décrites par les différents points du profil générateur sont des lignes *parallèles* et présentant sur toute leur étendue la même courbure géodésique.

On pourrait d'ailleurs déduire de ce théorème un moyen de former l'équation générale des surfaces applicables sur les surfaces de révolution.

cessives de l'élément du entre deux trajectoires orthogonales consécutives sont les mêmes d'une trajectoire à l'autre. Or, en appelant r, r' les rayons de courbure principaux de la surface, on a, d'après Gauss,

$$\frac{\partial^2 . du}{\partial v^2} + \frac{du}{rr'} = 0;$$

donc rr' est constant le long de chacune des lignes (u).

9. Revenons aux deux systèmes de surfaces (α) et (β). Le long de la ligne d'intersection u de deux surfaces de système différent, la somme des inverses des rayons de courbure principaux de chacune des surfaces est constante, ainsi que le produit de ces rayons; par suite, chacun des rayons de courbure est lui-même invariable. D'ailleurs, la courbure de la section normale menée tangentiellement à la ligne u est constante. Donc, *cette ligne u fait partout le même angle avec les lignes de courbure de chaque surface.*

Désignons par ε l'angle constant qu'elle forme, sur l'une des surfaces, avec la section principale de rayon r. Sa torsion géodésique, par rapport à cette surface, est, d'après une formule de M. Bertrand, représentée, au signe près, par

$$\sin\varepsilon \cos\varepsilon \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right).$$

Elle est donc constante. Par suite, le système de lignes géodésiques (v) qui coupe orthogonalement la ligne u a la même torsion géodésique le long de cette ligne. Or, on sait que généralement l'angle de torsion géodésique d'une ligne tracée sur une surface est égale à son angle de torsion proprement dite, diminué de la variation de l'angle que forme son plan osculateur avec la normale à la surface; que, par conséquent, pour une ligne géodésique, la torsion géodésique n'est autre que la torsion absolue. Donc *les lignes géodésiques (v) ont la même torsion le long de la ligne u.* Nous avons déjà reconnu qu'elles ont la même courbure; elles ont d'ailleurs le même élément ∂v compris entre deux trajectoires orthogonales consécutives. Dès lors, nous pouvons conclure, en dernière analyse, que *toutes ces lignes sont des courbes* SUPERPOSABLES.

Les surfaces (α) et (β) peuvent donc être considérées comme engendrées chacune par une ligne qui se déplace, sans se déformer, de manière qu'à chaque instant l'élément de trajectoire de chacun de ses points soit normal à son plan osculateur en ce point.

10. Pour l'étude de cette génération il y a deux cas à distinguer :

1° *La ligne mobile est plane.*

Les éléments de trajectoire des différents points de cette ligne devant être normaux à son plan, on voit sans peine que le déplacement de cette ligne, à chaque instant, doit être produit par un mouvement de rotation autour d'un axe situé dans son plan. Il en résulte que, dans ce cas, on devrait regarder chacune des surfaces (α) et (β) comme engendrée par un profil, de forme quelconque, qui se meut en tournant à chaque instant autour d'une droite de son plan, c'est-à-dire comme une *surface moulure* relative à une surface développable quelconque; et que, pour se représenter ensemble les deux systèmes de surfaces (α) et (β), il faudrait imaginer dans un plan deux systèmes de lignes dépendant de deux paramètres (a) et (b), et supposer que ce plan roule sans glisser sur une surface développable quelconque; les deux systèmes de courbes (a) et (b) engendreraient les systèmes de surfaces (α) et (β).

Mais il est facile de reconnaître que ce double système de *surfaces moulures* relatives à la même développable se réduit ici à un *double système de surfaces de révolution autour d'un même axe*.

En effet, remarquons d'abord que le profil d'une surface moulure est dans toutes ses positions une ligne de courbure d'un système de la surface, et que les trajectoires des différents points de ce profil constituent les lignes de courbure de l'autre système. Or, le rayon de courbure de la surface, le long de chacune de ces trajectoires, doit être constant, d'après le n° 6; la surface a donc l'un de ses rayons de courbure constant le long de chaque ligne de courbure d'un système. Il en résulte que les normales à la surface, menées le long d'une même ligne de courbure de ce système, se coupent en un même point, que, par suite, la surface est l'enveloppe d'une sphère mobile, et que le système de lignes de courbure formé par les trajectoires est circulaire, ce qui ne peut évidemment avoir lieu que si le profil tourne constamment autour d'un même axe situé dans son plan, c'est-à-dire engendre une *surface de révolution*.

2° *La ligne mobile est à double courbure.*

On sait que tout déplacement infiniment petit d'une figure peut être produit par un mouvement hélicoïdal infiniment petit, c'est-à-dire par une rotation infiniment petite autour d'un axe qui glisse infiniment peu sur lui-même. La génératrice doit donc être telle, que, par un pareil mouvement, chacun de ses points décrive un élément de trajectoire perpendiculaire au plan osculateur de la courbe en ce point. [On conçoit qu'une ligne quelconque puisse ne pas satisfaire à cette condition; si l'on cherche en effet quelles sont les lignes qui, en tournant d'un mouvement hélicoïdal infiniment petit autour de l'axe des z, jouissent de cette propriété, on trouve qu'elles doivent satisfaire à l'équation différentielle

$$y\,dx - x\,dy = c\,dz,$$

dans laquelle c exprime le rapport des quantités infiniment petites de glissement et de rotation, et que, en conséquence, elles sont données par les équations

$$\left\{\begin{aligned} x &= y\varphi(z) \\ c &= y^2\varphi'(z), \end{aligned}\right.$$

qui renferment une fonction arbitraire $\varphi(z)$ et sa dérivée $\varphi'(z)$].

Imaginons une ligne qui, dans un premier déplacement infiniment petit, remplisse la condition ci-dessus énoncée; il est évident que pour ne pas cesser de la remplir à tout instant de son mouvement, elle doit continuer à tourner autour du même axe et de la même manière. On voit donc que la surface qu'elle engendre n'est autre qu'une *surface héliçoïdale.*

Il résulte de là que, dans le cas où la ligne mobile est à double courbure, les deux systèmes de surfaces (α) et (β) ne peuvent être que des *héliçoïdes de même axe et de même pas, ayant pour profils deux séries de lignes quelconques.*

11. Nous pouvons donc enfin formuler la conclusion suivante :

Pour que les cinq quantités h^2, g, k^2, p, q ne dépendent que de α et β, il faut et il suffit que les surfaces représentées par les équations

$$\alpha = f_1(x, y, z),$$
$$\beta = f_2(x, y, z)$$

soient ou *deux systèmes de surfaces de révolution autour d'un même axe,* ou *deux systèmes de surfaces héliçoïdales de même axe et de même pas.*

12. Si l'on prend pour axe des z l'axe de chaque système, ces surfaces ont pour équations :

1° Le double système de *surfaces de révolution*

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned} &(9) \quad \alpha = \varphi(z, x^2 + y^2), \\ &(10) \quad \beta = \psi(z, x^2 + y^2); \end{aligned}\right.$$

2° Le double système d'*héliçoïdes*

$$(\mathrm{B})\qquad \left\{\begin{aligned} &(11) \quad \alpha = \varphi_1\left(z - m \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2}\right), \\ &(12) \quad \beta = \psi_1\left(z - m \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2}\right), \end{aligned}\right.$$

φ, ψ, φ_1, ψ_1 étant des caractéristiques de fonctions complétement arbitraires, et m un coefficient quelconque.

Si m est nul, le second système d'équations se confond avec le premier. Le système (B) exprime donc la forme la plus générale que puissent avoir les fonctions f_1 et f_2 dans les équations (2) et (3), pour que les cinq quantités h^2, k^2, g, p, q ne dépendent que de α et β (*).

(*) Il serait plus exact de dire que les fonctions les plus générales sont celles qu'on déduit des équations (B) en y remplaçant x, y, z par les fonctions linéaires de x, y, z auxquelles donne lieu une transformation de coordonnées.

Est-il besoin d'ajouter que ces fonctions peuvent être tout simplement linéaires en x, y, z, auquel cas les quantités h^2, g, k^2 sont constantes, et les deux autres, p et q, nulles?

13. On peut encore énoncer la conclusion qui précède sous une autre forme, en disant que *les équations* (2) *et* (3), *considérées simultanément, ne peuvent représenter d'autres systèmes de lignes que des droites parallèles, ou des circonférences de même axe, ou des hélices de même axe et de même pas.*

Généralisation de la solution précédente.

14. On peut généraliser le problème qui vient d'être résolu, en se proposant de trouver $n-1$ fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$ des n variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ qui soient telles, que les quantités

$$(13)\quad\left\{\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\alpha_1}{dx_i}\right)^2,\quad \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\alpha_2}{dx_i}\right)^2,\ldots,\quad \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\alpha_k}{dx_i}\right)^2,\ldots,\quad \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\alpha_{n-1}}{dx_i}\right)^2,\\
\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\alpha_1}{dx_i}\cdot\frac{d\alpha_2}{dx_i}\right),\quad \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\alpha_1}{dx_i}\cdot\frac{d\alpha_3}{dx_i}\right),\ldots,\quad \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\alpha_k}{dx_i}\cdot\frac{d\alpha_h}{dx_i}\right),\ldots,\quad \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\alpha_{n-2}}{dx_i}\cdot\frac{d\alpha_{n-1}}{dx_i}\right),\\
\sum_{i=1}^{i=n}\frac{d^2\alpha_1}{dx_i},\quad \sum_{i=1}^{i=n}\frac{d^2\alpha_2}{dx_i},\ldots,\quad \sum_{i=1}^{i=n}\frac{d^2\alpha_k}{dx_i},\ldots,\quad \sum_{i=1}^{i=n}\frac{d^2\alpha_{n-1}}{dx_i},
\end{array}\right.$$

ne dépendent que de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$.

Il est facile de reconnaître que les fonctions

$$(14)\quad\left\{\begin{array}{l}
\alpha_1=\varphi_1\left(x_n-\mu_{n-2}\arccos\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\ x_{n-1}-\mu_{n-3}\arccos\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\ldots,\right.\\
\qquad\qquad\left. x_3-\mu_1\arccos\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\ \sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\\
\alpha_2=\varphi_2\left(x_n-\mu_{n-2}\arccos\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\ x_{n-1}-\mu_{n-3}\arccos\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\ldots,\right.\\
\qquad\qquad\left. x_3-\mu_1\arccos\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\ \sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_{n-1}=\varphi_{n-1}\left(x_n-\mu_{n-2}\arccos\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\ x_{n-1}-\mu_{n-3}\arccos\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\ldots,\right.\\
\qquad\qquad\left. x_3-\mu_1\arccos\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-x_2^2}},\ \sqrt{x_1^2+x_2^2}\right),
\end{array}\right.$$

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{n-2}$ étant les constantes quelconques, et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ des caractéristiques de fonctions arbitraires; il est facile, dis-je, de reconnaître que ces fonctions satisfont à la condition ci-dessus énoncée. Il suffit de poser

$$x_n - \mu_{n-2} \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \lambda_{n-2}, \quad x_{n-1} - \mu_{n-3} \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \lambda_{n-3}, \ldots,$$

$$x_3 - \mu_1 \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \lambda_1, \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \theta,$$

et de former les valeurs des quantités (13) : on trouve qu'elles ne dépendent que de $\theta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-2}$, et, par suite, en vertu des équations (14), que de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$.

Mais, pour avoir la forme la plus générale des fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, il faut faire une substitution linéaire analogue à celle qui constitue la transformation des coordonnées, c'est-à-dire substituer dans les équations (14), aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les fonctions linéaires suivantes :

$$(15) \quad \begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{2,1} x_2 + a_{3,1} x_3 + \ldots + a_{n,1} x_n \\ a_{1,2} x_1 + a_{2,2} x_2 + a_{3,2} x_3 + \ldots + a_{n,2} x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1,n} x_1 + a_{2,n} x_2 + a_{3,n} x_3 + \ldots + a_{n,n} x_n, \end{cases}$$

dont les coefficients satisfont aux relations

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{i,1}^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{i,2}^2 = 1, \ldots, \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{i,k}^2 = 1, \ldots, \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{i,n}^2 = 1;$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{i,1} a_{i,2} = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{i,1} a_{i,3} = 0, \ldots, \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{i,k} a_{i,h} = 0, \ldots, \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{i,n-1} a_{i,n} = 0.$$