ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E GOURSAT

Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 4 (1887), p. 317-340
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1887_3_4__317_0>

ÉTUDE DES SURFACES

QUI ADMETTENT

TOUS LES PLANS DE SYMÉTRIE

D'UN POLYÈDRE RÉGULIER,

PAR M. ÉD. GOURSAT,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

TROISIÈME PARTIE.

1. Ce dernier Chapitre est consacré d'abord à la détermination générale, dans le nouveau système de coordonnées tangentielles, des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier. Je traiterai d'abord un problème préliminaire qui nous sera utile.

Soient Σ, Σ', Σ'' les trois substitutions

$$\Sigma(x, y, z; y, x, z), \quad \Sigma'(x, y, z; -y, -x, z), \quad \Sigma''(x, y, z; x, z, y)$$

et T la substitution

$$T(x, y, z; -x, -y, -z).$$

Les substitutions dérivées de Σ, Σ', Σ'' par combinaison et répétition donnent naissance à un groupe fini de 24 substitutions, identique au groupe du tétraèdre dont il a été question dans la première partie de ce travail. Combinées avec T, elles donnent le groupe du cube. On a les relations

$$\Sigma^2 = \Sigma'^2 = \Sigma''^2 = 1,$$
$$\Sigma T = T\Sigma, \qquad \Sigma' T = T\Sigma', \qquad \Sigma'' T = T\Sigma''.$$

Soit $f(x, y, z)$ une fonction quelconque de x, y, z et Σ une substitution linéaire. Désignons, pour abréger, par $f(\Sigma)$ ce que devient f lorsque l'on effectue sur les variables qui entrent dans f la substitution Σ. Nous avons trouvé, dans la première partie de ce travail, l'expression générale des fonctions f qui satisfont aux trois conditions

$$f(\Sigma)=f, \qquad f(\Sigma')=f, \qquad f(\Sigma'')=f;$$

cette expression est

$$f=\mathrm{F}(x^2+y^2+z^2,\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2,\ xyz),$$

F désignant une fonction absolument quelconque [1]. Nous nous proposons de traiter quelques problèmes analogues.

I. Cherchons les fonctions f vérifiant les relations

$$f(\Sigma\mathrm{T})=-f, \qquad f(\Sigma'\mathrm{T})=-f, \qquad f(\Sigma''\mathrm{T})=-f,$$

qui sont identiques aux suivantes :

$$f(\Sigma)=-f(\mathrm{T}), \qquad f(\Sigma')=-f(\mathrm{T}), \qquad f(\Sigma'')=-f(\mathrm{T}).$$

Posons

$$f+f(\mathrm{T})=\Phi, \qquad f-f(\mathrm{T})=\Phi_1;$$

la fonction Φ vérifiera les relations

$$\Phi(\mathrm{T})=\Phi, \qquad \Phi(\Sigma)=\Phi(\Sigma')=\Phi(\Sigma'')=-\Phi.$$

Si l'on pose encore

$$\Phi=(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)\mathrm{F},$$

on aura

$$\mathrm{F}(\Sigma)=\mathrm{F}(\Sigma')=\mathrm{F}(\Sigma'')=\mathrm{F}(\mathrm{T})=\mathrm{F},$$

et par suite Φ sera de la forme

$$\Phi=(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)\,\mathrm{F}(x^2+y^2+z^2,\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2,\ x^2y^2z^2).$$

De même la fonction Φ_1 devra vérifier les relations

$$\Phi_1(\mathrm{T})=-\Phi_1, \qquad \Phi_1(\Sigma)=\Phi_1(\Sigma')=\Phi_1(\Sigma'')=\Phi_1,$$

---

[1] Le raisonnement employé dans la première partie s'applique, quelle que soit la nature de la fonction f; il suffit, pour le voir, d'employer des considérations analogues à celles qui ont été développées au n° 8 de la seconde partie.

et, en posant $\Phi_1 = xyz\,F_1$, on aura

$$F_1(T) = F_1(\Sigma) = F_1(\Sigma') = F_1(\Sigma'') = F_1.$$

Donc Φ_1 sera de la forme

$$\Phi_1 = xyz\,F_1(x^2+y^2+z^2,\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2,\ x^2y^2z^2)$$

et l'expression générale des fonctions f sera

$$\begin{aligned} f = {} & (x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)\,F(x^2+y^2+z^2,\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2,\ x^2y^2z^2) \\ & + xyz\,F_1(x^2+y^2+z^2,\ \ldots), \end{aligned}$$

F et F_1 désignant des fonctions arbitraires.

II. Cherchons les fonctions f qui vérifient les relations précédentes

$$f(\Sigma T) = -f, \qquad f(\Sigma' T) = -f, \qquad f(\Sigma'' T) = -f,$$

et en outre la relation

$$f(T) = -f.$$

La fonction f sera nécessairement de la forme précédente, et, d'après la dernière condition, la fonction F devra être nulle. Donc f sera de la forme

$$f = xyz\,F_1(x^2+y^2+z^2,\ \ldots).$$

III. Soit Σ_1 la substitution

$$(x, y, z;\ x, y, -z).$$

Combinée avec Σ, Σ', Σ'', elle donne encore le groupe du cube et l'on a identiquement

$$\Sigma T \Sigma' = \Sigma_1, \qquad \Sigma\Sigma' = \Sigma_1 T.$$

Cherchons les fonctions f vérifiant les relations

$$f(\Sigma T) = -f, \qquad f(\Sigma' T) = -f, \qquad f(\Sigma'' T) = -f, \qquad f(\Sigma_1) = f.$$

Posons

$$f = (x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)\,F;$$

ces relations deviennent

$$F(\Sigma T) = F, \qquad F(\Sigma' T) = F, \qquad F(\Sigma'' T) = F, \qquad F(\Sigma_1) = F.$$

Le groupe dérivé des substitutions ΣT, $\Sigma' T$, $\Sigma'' T$, Σ_1 est identique au groupe du cube et, par conséquent, f sera de la forme

$$f = (x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)\,\mathrm{F}(x^2 + y^2 + z^2, \ldots).$$

IV. Cherchons les fonctions f vérifiant les relations

$$f(\Sigma) = f(\Sigma') = f(\Sigma'') = f, \qquad f(\Sigma_1 \mathrm{T}) = -f.$$

Comme $\Sigma\Sigma' = \Sigma_1 \mathrm{T}$, les deux premières relations entraînent la suivante

$$f(\Sigma_1 \mathrm{T}) = f;$$

ce qui nous montre que la fonction f ne peut être uniforme. Les valeurs de f pour un même système de valeurs des variables x, y, z devront être deux à deux égales et de signes contraires. Posons $f^2 = \mathrm{F}$; on aura

$$\mathrm{F}(\Sigma) = \mathrm{F}(\Sigma') = \mathrm{F}(\Sigma'') = \mathrm{F},$$

et par suite f sera de la forme

$$f = \sqrt{\mathrm{F}(x^2 + y^2 + z^2,\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2,\ xyz)}.$$

V. Cherchons les fonctions f vérifiant les relations

$$f(\Sigma\mathrm{T}) = f(\Sigma'\mathrm{T}) = f(\Sigma''\mathrm{T}) = f(\Sigma_1\mathrm{T}) = -f.$$

Comme on a $\Sigma\mathrm{T}\Sigma'\mathrm{T} = \Sigma_1\mathrm{T}$, on aura aussi

$$f(\Sigma_1 \mathrm{T}) = f;$$

d'où l'on tire la même conclusion que tout à l'heure. Posons $\Phi = f^2$; la fonction Φ devra vérifier les relations

$$\Phi(\Sigma\mathrm{T}) = \Phi(\Sigma'\mathrm{T}) = \Phi(\Sigma''\mathrm{T}) = \Phi_1.$$

Posons encore

$$\Phi + \Phi(\mathrm{T}) = \Phi_1, \qquad \Phi - \Phi(\mathrm{T}) = \Phi_2.$$

On démontre comme plus haut que Φ_1 sera de la forme

$$\mathrm{F}(x^2 + y^2 + z^2, \ldots, x^2y^2z^2)$$

et Φ_2 de la forme

$$xyz(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)\,\mathrm{F}_1(x^2 + y^2 + z^2, \ldots, x^2y^2z^2),$$

de sorte que l'expression générale des fonctions f sera

$$f = [\mathrm{F}(x^2 + y^2 + z^2, \ldots) + xyz(x^2 - z^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)\,\mathrm{F}_1(x^2 + y^2 + z^2, \ldots)]^{\frac{1}{2}}.$$

VI. Enfin l'expression générale des fonctions f vérifiant les relations

$$f(\Sigma) = f(\Sigma') = f(\Sigma'') = f, \qquad f(\mathrm{T}) = f(\Sigma\mathrm{T}) = -f$$

sera

$$f = \sqrt{\mathrm{F}(x^2+y^2+z^2, \ldots, x^2y^2z^2)}.$$

Nous aurons encore besoin de la remarque ci-dessous, qui est une conséquence immédiate de ce qui précède. Considérons une sphère de rayon égal à l'unité ayant pour centre l'origine et soient α, β, γ les coordonnées d'un point de cette sphère.

Prenons un cube et un tétraèdre réguliers disposés comme dans la *fig.* 1 de la première partie. Toute fonction de α, β, γ qui prend la même valeur sur la sphère aux quarante-huit points que l'on obtient par les répétitions symétriques du groupe du cube sera de la forme

$$\mathrm{F}(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2,\ \alpha^2\beta^2\gamma^2),$$

et de même toute fonction qui reprend la même valeur pour les vingt-quatre points formant un groupe ayant la symétrie du tétraèdre sera de la forme

$$\mathrm{F}(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2,\ \alpha\beta\gamma).$$

Si l'on prend les variables conjuguées de Riemann s, s_0, on aura, pour l'expression générale de ces fonctions, dans le premier cas,

$$\mathrm{F}\left[\frac{4ss_0(1-ss_0)^2-(s^2-s_0^2)^2}{(1+ss_0)^4},\ \frac{(s^2-s_0^2)^2(1-ss_0)^2}{(1+ss_0)^6}\right],$$

et, dans le second cas,

$$\mathrm{F}\left[\frac{4ss_0(1-ss_0)^2-(s^2-s_0^2)^2}{(1+ss_0)^4},\ \frac{(s^2-s_0^2)(1-ss_0)}{(1+ss_0)^3}\right].$$

On peut employer un raisonnement tout pareil à celui du début. Soient

$$u = \frac{4ss_0(1-ss_0)^2-(s^2-s_0^2)^2}{(1+ss_0)^4}, \qquad v = \frac{(s^2-s_0^2)^2(1-ss_0)^2}{(1+ss_0)^6};$$

il est clair d'abord que u et v se reproduisent par les quarante-huit substitutions du groupe du cube. De plus, à un système de valeurs de u et de v ne correspondent que quarante-huit systèmes de valeurs de

s, s_0 variables avec u et v, car les deux courbes ont vingt-quatre points communs à l'infini sur chacun des axes. Donc, etc.

2. Cela posé, soient

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = D, \qquad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$$

l'équation du plan tangent à une surface dans un système d'axes rectangulaires, M et m les points correspondants de la surface et de la sphère de rayon un ayant pour centre l'origine. La distance D de l'origine au plan tangent est une certaine fonction des coordonnées du point m qui caractérise parfaitement la surface considérée. Mais sur la normale au point M on peut prendre deux directions opposées, de façon que l'on peut indifféremment faire correspondre le même point M de la surface à deux points diamétralement opposés m et m' de la sphère.

Remarquons seulement que les valeurs de D aux deux points m et m' de la sphère doivent être prises égales et de signes contraires. En d'autres termes, si l'on a, pour une certaine surface,

$$D = \varphi(\alpha, \beta, \gamma),$$

on obtiendra la même surface en prenant

$$D = -\varphi(-\alpha, -\beta, -\gamma);$$

si l'on considère D comme fonction des variables de Riemann s, s_0, on peut dire aussi que les deux équations

$$D = \Psi(s, s_0), \qquad D = -\Psi\left(-\frac{1}{s_0}, -\frac{1}{s}\right)$$

donnent une seule surface. Supposons ces deux fonctions analytiquement distinctes et adoptons l'une d'elles dans l'équation de la surface. On voit qu'à deux points de la sphère diamétralement opposés correspondent sur la surface deux groupes de points; autrement dit, les points de la surface où le plan tangent est parallèle à un plan donné se partagent en deux groupes distincts.

Au contraire, si les fonctions $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ et $-\varphi(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ ou, ce qui revient au même, les fonctions $\Psi(s, s_0)$ et $-\Psi\left(-\frac{1}{s_0}, -\frac{1}{s}\right)$ sont identiques, à deux points diamétralement opposés de la sphère correspondent les mêmes points de la surface. Par analogie avec la dénomination adoptée dans le cas des surfaces minima, j'appellerai *surfaces doubles* les surfaces qui jouissent de cette propriété.

Si une surface admet pour centre l'origine, la fonction D prendra les mêmes valeurs en deux points diamétralement opposés de la sphère, à moins que les valeurs de D pour un même point ne soient deux à deux égales et de signes contraires. Si, en outre, la surface considérée est une surface double, D devra satisfaire à la fois aux deux conditions précédentes.

Soient P un plan passant par l'origine, L la perpendiculaire à ce plan menée par l'origine et S une surface symétrique par rapport à P. Prenons sur S deux points M et M' symétriques par rapport au plan P; si S n'est pas une surface double, aux deux points M et M' de la surface correspondent sur la sphère deux points m et m'. On pourra choisir arbitrairement le point m qui correspond à M entre deux points diamétralement opposés; mais, une fois le point m choisi, le point m' sera déterminé. Les deux droites Om, Om' seront symétriques par rapport au plan P, et, par suite, les deux points m, m' seront symétriques par rapport au plan P ou par rapport à la droite L. On a ainsi deux espèces de symétrie à considérer, que nous distinguerons désormais par les noms de *symétrie de première* ou *de seconde espèce*, comme pour les surfaces minima.

Il est bien aisé de découvrir les conditions que doit remplir la fonction $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ pour que la surface admette un plan P pour plan de symétrie. Soit Σ la substitution linéaire qui conduit des coordonnées d'un point quelconque de l'espace aux coordonnées du point symétrique. Si le plan P est un plan de symétrie de première espèce, il faudra que l'on ait

$$\varphi(\Sigma) = \varphi;$$

pour un plan de symétrie de seconde espèce, on aura

$$\varphi(\Sigma T) = -\varphi.$$

Remarquons que la distinction des deux espèces de symétrie n'a plus lieu pour les surfaces doubles. Si une surface coupe un plan de symétrie suivant une ligne géodésique, ce plan est nécessairement de première espèce. Au contraire, la section d'une surface par un plan de symétrie de seconde espèce est une ligne singulière de la surface.

Appliquons ceci au problème que nous nous étions proposé. Prenons les mêmes axes que dans la première partie, nous aurons, pour l'expression générale des fonctions $D = \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ qui donnent une surface ayant les plans de symétrie du cube ou du tétraèdre, les formules suivantes, dont j'omets, pour abréger, la démonstration :

Tétraèdre.

Surfaces non doubles.	Six plans de symétrie de première espèce............	$D = F(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2, \alpha\beta\gamma)$;
	Six plans de symétrie de seconde espèce............	$D = (\alpha^2 - \beta^2)(\beta^2 - \gamma^2)(\gamma^2 - \alpha^2) \times F(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2) + \alpha\beta\gamma\, F_1(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2)$.
Surfaces doubles........................		$D = \alpha\beta\gamma\, F(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2)$.

Cube.

Surfaces non doubles.	Neuf plans de symétrie de première espèce.........	$D = F(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2)$;
	Six plans de symétrie de seconde espèce............ Trois plans de symétrie de première espèce.........	$D = (\alpha^2 - \beta^2)(\beta^2 - \gamma^2)(\gamma^2 - \alpha^2) \times F(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2)$;
	Six plans de symétrie de première espèce............ Trois plans de symétrie de seconde espèce..........	$D = \sqrt{F(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2, \alpha\beta\gamma)}$;
	Neuf plans de symétrie de seconde espèce..........	$D = [F(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2) + \alpha\beta\gamma(\alpha^2 - \beta^2)(\beta^2 - \gamma^2)(\gamma^2 - \alpha^2) \times F_1(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2)]^{\frac{1}{2}}$.
Surfaces doubles........................		$D = \sqrt{F(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2)}$.

Icosaèdre.

Désignons par Q_α, R_α, S_α ce que deviennent les polynômes Q, R, S quand on y remplace les lettres x, y, z par α, β, γ respectivement. On aura de même les expressions suivantes pour D :

$$\begin{array}{ll}
\begin{array}{c}\text{Surfaces}\\ \text{non doubles.}\end{array}\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\text{Quinze plans de symétrie de}\\ \quad\text{première espèce.........}\end{array}\right\} \\
\left.\begin{array}{l}\text{Quinze plans de symétrie de}\\ \quad\text{seconde espèce..........}\end{array}\right\}
\end{array}\right. &
\begin{array}{l} D = F(Q_\alpha, R_\alpha); \\ \\ D = [F(Q_\alpha, R_\alpha) + S_\alpha F_1(Q_\alpha, R_\alpha)]^{\frac{1}{2}}. \end{array} \\
\text{Surfaces doubles.........................} & D = \sqrt{F(Q_\alpha, R_\alpha)}.
\end{array}$$

Il serait facile de déduire de là les expressions générales de D, soit au moyen des variables de M. Bonnet, soit au moyen des variables de Riemann.

3. Sur quelques courbes sphériques. — Je n'aborderai point ici la recherche générale des courbes gauches admettant tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier, recherche qui est en dehors des limites de cette étude. Je me propose simplement d'appeler l'attention sur une classe particulière de ces courbes, qui jouissent de propriétés intéressantes, les rapprochant des quartiques bicirculaires et des biquadratiques gauches.

Considérons d'abord un tétraèdre régulier, et soit C une courbe gauche algébrique admettant tous les plans de symétrie de ce tétraèdre. Tout plan perpendiculaire à un axe ternaire coupe la courbe C en six points au moins, d'après la loi de symétrie, et, par conséquent, la courbe C est au moins du sixième degré. De même, toute sphère concentrique à la sphère circonscrite au tétraèdre et passant par un point quelconque de C doit rencontrer cette courbe en vingt-quatre points. Si donc la courbe C est d'ordre inférieur à douze, elle est tout entière sur la sphère. On voit de même que les courbes gauches du moindre degré ayant la symétrie du cube sont du huitième ordre, et les courbes de degré inférieur à vingt-quatre sont des courbes sphériques. Pour l'icosaèdre régulier, les courbes gauches du moindre degré sont du douzième degré. En effet, s'il existait une courbe gauche du dixième ordre, par exemple, qui répondît à la question, comme l'origine doit être centre, le cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice cette courbe serait du cinquième degré, et ce cône devrait admettre tous les plans de symétrie de l'icosaèdre; ce qui est impossible, si la courbe est réelle. Les courbes gauches de degré inférieur à soixante seront des courbes sphériques.

Considérons, en particulier, une courbe sphérique admettant tous les plans de symétrie du tétraèdre régulier. Imaginons que l'on fasse la projection stéréographique de cette courbe, le point de vue étant placé en un point quelconque de la sphère. Tout cercle de la sphère se projette suivant un cercle, et les grands cercles ont pour projections des cercles orthogonaux au cercle imaginaire de rayon $\sqrt{-1}$ ayant pour centre l'origine, le rayon de la sphère étant pris pour unité. La perspective de notre courbe gauche admettra donc *six* cercles d'inversion réels orthogonaux à un cercle imaginaire et, par suite, six séries réelles de cercles doublement tangents. On déduira de même d'une courbe sphérique admettant les plans de symétrie de l'octaèdre ou de l'icosaèdre une courbe plane admettant *neuf* ou *quinze* cercles d'inversion réels et un cercle d'inversion imaginaire, les cercles réels étant tous orthogonaux au cercle imaginaire. Dans cet ordre d'idées, on sait qu'une quartique bicirculaire peut être envisagée comme la perspective d'une biquadratique gauche, intersection d'une sphère et d'un ellipsoïde concentrique. Si le point de vue est un point de la biquadratique, la perspective dégénère en une cubique circulaire.

Pour obtenir des courbes sphériques admettant tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier, il nous suffit évidemment de prendre l'intersection de la sphère avec une autre surface admettant les mêmes plans de symétrie. Ainsi, dans le cas du tétraèdre, on obtiendra les courbes les plus simples répondant à la question en prenant les courbes du sixième ordre définies par les deux équations

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \qquad xyz=b^3;$$

les projections stéréographiques sont des courbes du sixième degré ayant pour points triples les points circulaires à l'infini. Si le point de vue est pris sur la courbe elle-même, la perspective sera une courbe du cinquième ordre ayant pour points doubles les points circulaires à l'infini.

On peut trouver une infinité de systèmes isothermes et orthogonaux formés avec les courbes précédentes. On obtiendra de pareils systèmes au moyen des équations

$$R\{\Psi[H(s)]\} = C, \qquad R\{i\Psi[H(s)]\} = C',$$

Ψ désignant une fonction réelle, et $H(s)$ une des trois fonctions déjà considérées $H(s)$, $H_1(s)$, $H_2(s)$.

4. Généralisation. — Les groupes de substitutions linéaires qui appartiennent au cube et au tétraèdre régulier peuvent immédiatement être généralisés. Considérons un système de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on obtient un groupe d'ordre fini de substitutions linéaires en permutant ces n variables de toutes les manières possibles et en prenant toutes les combinaisons possibles de signes. Un calcul facile donne pour l'ordre de ce groupe $2^n.1.2\ldots n$. Toute fonction symétrique de $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ se reproduit quand on effectue sur les variables une quelconque des substitutions de ce groupe, et, inversement, toute fonction uniforme jouissant de cette propriété est une fonction symétrique de x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2 ou, ce qui revient au même, une fonction uniforme de

$$\Sigma x_1^2, \quad \Sigma x_1^2 x_2^2, \quad \ldots, \quad \Sigma x_1^2 x_2^2 \ldots x_{n-1}^2, \quad (x_1 x_2 \ldots x_n)^2.$$

Je désignerai, pour abréger, le groupe précédent par la lettre G.

On obtient un autre groupe d'ordre fini G_1, en permutant de toutes les manières possibles les n quantités x_1, x_2, ..., x_n et en prenant toutes les combinaisons de signes où entre un nombre pair de fois le signe —. L'ordre du groupe G_1 sera la moitié du précédent, c'est-à-dire $2^{n-1}.1.2\ldots n$. Toute fonction uniforme se reproduisant par les substitutions du groupe G_1 sera une fonction uniforme de

$$\Sigma x_1^2, \quad \Sigma x_1^2 x_2^2, \quad \ldots, \quad \Sigma x_1^2 x_2^2 \ldots x_{n-1}^2, \quad x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Soit encore T la substitution qui consiste à changer x_i en $-x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Le groupe G_1 contiendra la substitution T si n est pair, et dans ce cas seulement.

Lorsque $n = 3$, les groupes G et G_1 sont précisément les groupes du cube et du tétraèdre régulier. Si n est > 3, on peut donner de ces groupes une interprétation géométrique par l'emploi de considérations empruntées à la géométrie à n dimensions.

Rappelons d'abord, en quelques mots, les principales conventions et formules qui nous seront utiles. Appelons *point* dans l'espace à n dimensions un système de valeurs particulières attribuées aux n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *plan* l'ensemble des solutions d'une équation linéaire, telle que

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n + B = 0,$$

et plus généralement *surface* l'ensemble des points dont les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfont à une certaine relation

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

La *distance* de deux points

$$\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, \\ x'_1, & x'_2, & \ldots, & x'_n \end{array}$$

sera la racine carrée de l'expression

$$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \ldots + (x_n - x'_n)^2;$$

on appellera *sphère* le lieu des points qui sont à une distance R d'un point fixe, ou dont les coordonnées satisfont à une équation de la forme

$$(x_1 - X_1)^2 + (x_2 - X_2)^2 + \ldots + (x_n - X_n)^2 = R^2.$$

Le point $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est le centre de la sphère, et R le rayon.

Soient

$$\begin{array}{cccc} x'_1, & x'_2, & \ldots, & x'_n, \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \end{array}$$

deux systèmes de quantités fixes, les dernières vérifiant la relation

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1;$$

nous dirons que les équations

$$x_1 = x'_1 + \alpha_1 \rho, \qquad x_2 = x'_2 + \alpha_2 \rho, \qquad \ldots, \qquad x_n = x'_n + \alpha_n \rho,$$

où ρ désigne un paramètre variable, représentent une *ligne droite*, et les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ seront les cosinus directeurs. L'*angle* V de deux droites, dont les cosinus directeurs sont respectivement

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n,$$
$$\alpha'_1, \quad \alpha'_2, \quad \ldots, \quad \alpha'_n,$$

sera donné par la formule

$$\cos V = \alpha_1 \alpha'_1 + \alpha_2 \alpha'_2 + \ldots + \alpha_n \alpha'_n.$$

Une fois qu'on a défini le plan, la ligne droite, la sphère, la distance de deux points et l'angle de deux droites, on définira, comme dans l'espace à trois dimensions, la symétrie par rapport à un plan et par rapport à une sphère. On arrive ainsi aux formules suivantes.

Soit

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n = 0$$

l'équation d'un plan passant par l'origine, où

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1;$$

soient, de plus, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un point quelconque de l'espace et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ les coordonnées du point symétrique par rapport à ce plan. On aura

$$x'_i = x_i - 2\alpha_i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soient, de même,

$$(X_1 - a_1)^2 + (X_2 - a_2)^2 + \ldots + (X_n - a_n)^2 = R^2$$

l'équation d'une sphère et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ les coordonnées de deux points symétriques par rapport à cette sphère. On aura

$$x'_i - a_i = \frac{R^2(x_i - a_i)}{\Sigma(x_i - a_i)^2}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Remarquons que, pour $n = 3$, ces formules se réduisent bien aux formules ordinaires.

Je définirai encore une autre opération qui nous sera utile. Considérons une sphère de rayon égal à l'unité ayant pour centre l'origine et le point P de coordonnées $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$, $x_n = 1$. Prenons la droite qui joint ce point P à un point quelconque de la sphère et dans les équations de cette droite faisons $X_n = 0$; les autres coordonnées prennent des valeurs $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$, que l'on peut regarder comme les coordonnées d'un point dans un espace à $n-1$ dimensions. De cette façon à tout point de la sphère correspond un point unique dans l'espace à $n-1$ dimensions et inversement. J'appellerai l'opération précédente une *perspective* de la sphère sur l'espace à $n-1$ dimensions, le point de vue étant au point P. Les formules sont les suivantes. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un point de la sphère et $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ les coordonnées de sa projection; on aura

$$X_i = \frac{x_i}{1-x_n}, \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1),$$

et inversement

$$x_1 = \frac{2X_1}{1+\Sigma X_i^2}, \qquad \ldots, \qquad x_{n-1} = \frac{2X_{n-1}}{1+\Sigma X_i^2}, \qquad x_n = \frac{\Sigma X_i^2 - 1}{1+\Sigma X_i^2}.$$

On peut prendre pour point de vue un point quelconque de la sphère de rayon un; mais il faudra d'abord effectuer une transformation orthogonale, de façon à faire passer la droite Ox_n par le nouveau point de vue.

Considérons l'intersection de la sphère par le plan

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta = 0;$$

la perspective de cette intersection aura pour équation, dans l'espace à $n-1$ dimensions,

$$2(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_{n-1} X_{n-1}) + \alpha_n(\Sigma X_i^2 - 1) + \beta(1 + \Sigma X_i^2) = 0.$$

Cette perspective sera donc une sphère, à moins que l'on n'ait $\beta + \alpha_n = 0$, c'est-à-dire que le plan en question passe par le point de vue.

Prenons, en particulier, un plan passant par l'origine

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0,$$

où

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1.$$

Soient

$$\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, \\ x'_1, & x'_2, & \ldots, & x'_n \end{array}$$

les coordonnées de deux points symétriques par rapport à ce plan,

$$\begin{gathered} X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_{n-1}, \\ X'_1, \quad X'_2, \quad \ldots, \quad X'_{n-1} \end{gathered}$$

les coordonnées de leurs projections dans l'espace à $n-1$ dimensions. On a les formules

$$x'_i = x_i - 2\alpha_i \sum_{h=1}^{h=n} \alpha_h x_h, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\Sigma \alpha_h x_h = \frac{2 \sum_{h=1}^{h=n-1} \alpha_h X_h + \alpha_n (\Sigma X_h^2 - 1)}{1 + \Sigma X_h^2} = \frac{P}{1 + \Sigma X_h^2},$$

en posant, pour abréger,

$$P = \alpha_n (\Sigma X_h^2 - 1) + 2 \sum_{h=1}^{n-1} \alpha_h X_h.$$

D'autre part, on a aussi

$$X'_h = \frac{x'_h}{1 - x'_n}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1);$$

éliminons les x_i et les x'_i de ces relations, il vient

$$X'_h = \frac{X_h - \alpha_h P}{1 + \alpha_n P}.$$

Ces formules sont identiques aux formules d'inversion par rapport à la sphère $P = 0$. Remarquons encore que deux points diamétralement opposés de la sphère donnent par perspective deux points symétriques par rapport à la sphère de rayon $\sqrt{-1}$ ayant pour centre l'origine.

Ces notions établies, considérons dans l'espace à n dimensions les n^2 plans

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad x_n = 0,$$

$$x_i \pm x_k = 0, \qquad \left(\begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} = 1, 2, \ldots, n \Big)$$

et soit

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

l'équation d'une surface que je suppose algébrique, pour fixer les idées, admettant tous ces plans de symétrie. Le polynôme F devra se reproduire par toutes les substitutions du groupe G, et par suite l'équation sera de la forme

$$F(\Sigma x_1^2, \Sigma x_1^2 x_2^2, \ldots, \Sigma x_1^2 x_2^2 \ldots x_{n-1}^2, x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2) = 0.$$

Je dirai, pour abréger, que ces surfaces ont la symétrie du cube dans l'espace à n dimensions; elles admettent toujours l'origine comme centre.

Considérons de même les $n(n-1)$ plans

$$x_i \pm x_k = 0, \qquad i \neq k, \qquad \left(\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots, n\Big).$$

Toute surface admettant ces $n(n-1)$ plans pour plans de symétrie sera représentée par une équation de la forme

$$F(\Sigma x_1^2, \Sigma x_1^2 x_2^2, \ldots, \Sigma x_1^2 x_2^2 \ldots x_{n-1}^2, x_1 x_2 \ldots x_n) = 0;$$

je dirai, pour abréger, que ces surfaces possèdent la symétrie du tétraèdre dans l'espace à n dimensions. Elles auront pour centre l'origine si n est pair.

Cela posé, considérons dans l'espace à n dimensions l'intersection de la sphère de rayon un, ayant pour centre l'origine, avec une autre surface admettant la symétrie du cube, et faisons la perspective de cette intersection dans un espace à $n-1$ dimensions, le point de vue étant placé en un point quelconque de la sphère. Les n^2 plans de symétrie se projettent suivant n^2 sphères réelles, et l'intersection donne pour projection une surface admettant n^2 sphères réelles d'inversion orthogonales à une sphère imaginaire de rayon $\sqrt{-1}$, qui est aussi une sphère d'inversion pour la surface. De même, si l'on projette l'intersection de la sphère et d'une surface ayant la symétrie du tétraèdre, la projection sera une surface admettant $n(n-1)$ sphères d'inversion réelles. La sphère imaginaire orthogonale à celle-là sera elle-même une sphère d'inversion si n est pair.

Imaginons, en particulier, que nous ayons pris pour point de vue le point de coordonnées $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$, $x_n = 1$. Les intersections de la sphère avec les $(n-1)^2$ plans

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = 0,$$
$$x_i \pm x_k = 0, \quad \left(\begin{Bmatrix} i \\ k \end{Bmatrix} = 1, 2, \ldots, n-1\right)$$

donnent par projection $(n-1)^2$ plans

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \ldots, \quad X_{n-1} = 0,$$
$$X_i \pm X_k = 0, \quad \left(\begin{Bmatrix} i \\ k \end{Bmatrix} = 1, 2, \ldots, n-1\right).$$

Ces plans seront encore des plans de symétrie pour la projection, de sorte que cette projection aura la même symétrie dans l'espace à $n-1$ dimensions que la surface primitive dans l'espace à n dimensions. Mais en outre les intersections de la sphère avec les $2n-1$ plans

$$x_n = 0, \quad x_n \pm x_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

donnent par projection $2n-1$ sphères d'inversion pour la surface dans l'espace à $n-1$ dimensions. Dans le cas du tétraèdre, on n'aurait que $2n-2$ sphères d'inversion et $(n-1)(n-2)$ plans de symétrie pour la projection.

Pour avoir des résultats applicables à l'espace ordinaire, faisons $n = 4$. Considérons, dans l'espace à quatre dimensions, l'intersection de la sphère et de la surface

$$F(\Sigma x_1^2, \Sigma x_1^2 x_2^2, \Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^3, x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2) = 0,$$

et faisons la perspective de cette intersection dans l'espace à trois dimensions, le point de vue étant le point de coordonnées

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = 1.$$

Les neuf plans

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_1 \pm x_2 = 0, \quad x_2 \pm x_3 = 0, \quad x_1 \pm x_3 = 0$$

se projettent suivant les neuf plans de symétrie d'un cube

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad X \pm Y = 0, \quad X \pm Z = 0, \quad Y \pm Z = 0;$$

les sept plans

$$x_4=0,\qquad x_1\pm x_4=0,\qquad x_2\pm x_4=0,\qquad x_3\pm x_4=0$$

se projettent suivant les sept sphères

$$\begin{aligned}
&X^2+Y^2+Z^2=1\\
&X^2+Y^2+Z^2\pm 2X-1=0,\\
&X^2+Y^2+Z^2\pm 2Y-1=0,\\
&X^2+Y^2+Z^2\pm 2Z-1=0.
\end{aligned}$$

La première a pour centre l'origine et pour rayon l'unité; les six autres ont respectivement pour centres les centres des faces d'un cube et pour rayon $\sqrt{2}$. Il en résulte que toute surface représentée par une équation de la forme

$$F(U,V,W^2)=0,$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
U&=\frac{4(X^2Y^2+Y^2Z^2+Z^2X^2)+(1-X^2-Y^2-Z^2)^2(X^2+Y^2+Z^2)}{(1+X^2+Y^2+Z^2)^4},\\
V&=\frac{4X^2Y^2Z^2+(1-X^2-Y^2-Z^2)^2(X^2Y^2+Y^2Z^2+Z^2X^2)}{(1+X^2+Y^2+Z^2)^6},\\
W&=\frac{XYZ(1-X^2-Y^2-Z^2)}{(1+X^2+Y^2+Z^2)^4},
\end{aligned}$$

admet, outre les neuf plans de symétrie du cube, les sept sphères d'inversion précédentes, auxquelles il faut joindre la sphère imaginaire

$$X^2+Y^2+Z^2+1=0.$$

Les surfaces les plus simples de cette espèce sont les surfaces du huitième ordre ayant pour équation

$$U=C,$$

qui admettent comme ligne triple le cercle imaginaire de l'infini.

Considérons de même, dans l'espace à quatre dimensions, l'intersection de la sphère

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$$

avec une surface ayant la symétrie du tétraèdre dans cet espace

$$F(\Sigma x_1^2 x_2^2, \Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2, x_1 x_2 x_3 x_4) = 0,$$

et projetons dans l'espace à trois dimensions, le point de vue étant encore au point

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \qquad x_4 = 1.$$

Cette projection sera une surface ayant pour équation

$$F(U, V, W) = 0.$$

D'après ce qui a été dit plus haut, cette surface admet, outre les six plans de symétrie du tétraèdre, six sphères d'inversion réelles, ayant pour centres les milieux des arêtes du tétraèdre et pour rayon $\sqrt{2}$, et la sphère imaginaire d'inversion $X^2 + Y^2 + Z^2 + 1 = 0$.

Des surfaces précédentes on déduira, au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques, des surfaces ayant respectivement dix-sept sphères d'inversion (dont seize réelles) et treize sphères d'inversion (dont douze réelles).

5. Le groupe G, pour $n = 4$, se compose de 384 substitutions. De même qu'au groupe G pour $n = 3$ on peut rattacher une division régulière du plan ou de la sphère en triangles d'arcs de cercle, on peut rattacher à ce nouveau groupe G (pour $n = 4$) une division régulière de l'espace en 384 tétraèdres à faces sphériques. Nous n'avons pour cela qu'à prendre les neuf plans de symétrie du cube avec les sept sphères trouvées plus haut. Considérons, par exemple, le tétraèdre limité par les trois plans

$$Y = 0, \qquad Z + X = 0, \qquad Z + Y = 0,$$

et la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 2X - 1 = 0;$$

si l'on prend le tétraèdre symétrique de celui-là par rapport à une face et ainsi de suite, on obtient seulement 384 tétraèdres dont les faces appartiennent toutes, soit aux neuf plans, soit aux sept sphères précédentes.

De même, les six plans de symétrie du tétraèdre avec les six sphères ayant pour centres les milieux des arêtes donnent une division régulière de l'espace en 192 tétraèdres à faces planes ou sphériques. Les répétitions de l'un de ces tétraèdres par la loi de symétrie donnent tous les autres et ceux-là seulement.

Cette remarque suggère une question intéressante par son analogie avec la question résolue par M. Schwarz dans son beau Mémoire sur la série hypergéométrique (*Journal de Borchardt*, t. 75). Considérons un tétraèdre dont les faces soient planes ou sphériques; imaginons que l'on prenne le tétraèdre symétrique de celui-là par rapport à une de ses faces, et ainsi de suite. Dans quels cas arrivera-t-on à un nombre *fini* de répétitions symétriques différentes?

On voit d'abord que la sphère orthogonale aux quatre faces du tétraèdre doit être imaginaire. Supposons que nous ayons pris le centre de cette sphère pour origine, et que l'unité linéaire ait été choisie de telle façon que le rayon soit égal à $\sqrt{-1}$. Imaginons que l'on fasse une perspective de l'espace à trois dimensions sur la sphère

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

de l'espace à quatre dimensions. Il résulte des développements qui précèdent que le problème en question est équivalent à celui-ci : *Trouver quatre plans passant par l'origine dans l'espace à quatre dimensions, tels que les substitutions linéaires correspondantes donnent naissance à un groupe d'ordre fini*. J'appelle *substitution* correspondant à un plan celle qui permet de passer des coordonnées d'un point quelconque aux coordonnées du point symétrique par rapport à ce plan. Puisqu'on connaît, depuis les recherches de M. Jordan, tous les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire à quatre variables, on voit que le problème peut être résolu complètement. Remarquons pourtant que tout groupe d'ordre fini ne répond pas à la question; il faut, en outre, que l'on puisse faire dériver ce groupe de substitutions fondamentales dont la forme canonique soit

$$(X_1, X_2, X_3, X_4; X_1, X_2, X_3, -X_4).$$

6. On peut déduire des recherches de M. Darboux sur les surfaces

orthogonales un certain nombre de systèmes triples formés de surfaces admettant les plans de symétrie du cube.

Ainsi l'on sait que les enveloppes des surfaces

$$u = \left(\lambda + \frac{x^2}{m}\right)^m \left(\lambda + \frac{x^2}{n}\right)^n \left(\lambda + \frac{x^2}{p}\right)^p \lambda^q,$$

où l'on fait varier λ, forment un système triplement orthogonal. Supposons $m = n = p$; il est clair que ces surfaces enveloppes auront, comme les enveloppées elles-mêmes, tous les plans de symétrie du cube. Plus généralement, les enveloppes des surfaces

$$u = (\lambda + x_1^2)(\lambda + x_2^2)\ldots(\lambda + x_n^2)\lambda^\alpha,$$

où l'on fait varier λ, forment, dans l'espace à n dimensions, un système orthogonal dont toutes les surfaces ont la symétrie du cube. D'un autre côté, M. Darboux a montré, dans le même Mémoire, comment on pouvait déduire d'un système orthogonal, dans l'espace à n dimensions, un système orthogonal dans l'espace à $n - 1$ dimensions. L'interprétation géométrique des opérations analytiques qu'il faut effectuer pour cela montre immédiatement que, si le système primitif a la symétrie du cube, il en sera de même du second. En continuant ainsi, on voit que l'on peut obtenir un nombre illimité de systèmes orthogonaux formés de surfaces algébriques qui ont la symétrie du cube.

NOTE.

En même temps que les surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier, on peut considérer des surfaces plus générales qui reviennent sur elles-mêmes par toutes les rotations qui font coïncider avec lui-même un polyèdre régulier, sans avoir la symétrie de ce polyèdre. Les équations générales de ces surfaces s'obtiennent aisément par des procédés analogues à ceux dont il a été fait usage dans la première partie de ce travail.

Prenons, par exemple, un tétraèdre régulier; soit g le groupe des douze rotations qui font revenir ce polyèdre sur lui-même ou plutôt le groupe des douze substitutions linéaires correspondantes, qui est dérivé des deux substitutions

$$(x,\ y,\ z;\quad -x,\ -y,\ z),$$
$$(x,\ y,\ z;\quad y,\quad z,\quad x);$$

ce groupe g est permutable à la substitution

$$(x, y, z; y, x, z),$$

et, combiné avec elle, il donne naissance au groupe G de vingt-quatre substitutions considéré dans la première partie de ce Mémoire. Cela posé, cherchons d'abord l'expression générale des fonctions uniformes $F(x, y, z)$ qui se reproduisent identiquement quand on effectue sur les variables x, y, z toutes les substitutions de g. Posons, pour cela,

$$F(x, y, z) + F(y, x, z) = \Phi\ (x, y, z),$$
$$F(x, y, z) - F(y, x, z) = \Phi_1(x, y, z);$$

il est clair que la fonction $\Phi(x, y, z)$ se reproduira par toutes les substitutions du groupe G, et il en sera de même de la fonction uniforme Ψ obtenue en posant

$$\Phi_1(x, y, z) = (x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)\,\Psi(x, y, z).$$

On obtiendra donc l'expression la plus générale cherchée en prenant pour $F(x, y, z)$ une fonction uniforme quelconque de

$$x^2 + y^2 + z^2,\quad x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2,\quad xyz,\quad (x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2).$$

Soit maintenant $f(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface qui revient sur elle-même par toutes les rotations qui ramènent le tétraèdre sur lui-même, $f(x, y, z)$ désignant une fonction uniforme. Si l'on fait subir aux variables x, y, z une substitution linéaire correspondant à une de ces rotations, la fonction f devra se reproduire à un facteur constant près, et, comme cette fonction est supposée uniforme, ce facteur devra être $+1$ ou -1 pour une rotation de π et $+1$, α ou α^2 pour une rotation de $\frac{2\pi}{3}$. Comme deux rotations autour de deux axes ternaires peuvent être remplacées par une rotation autour d'un axe binaire, on ne pourra faire que deux hypothèses. Soient OA et OB deux axes de symétrie ternaire, OC l'axe de symétrie binaire, tel que deux rotations successives de $\frac{2\pi}{3}$ autour de OA et de OB peuvent être remplacées par une rotation de π autour de OC; ou bien le facteur par lequel $f(x, y, z)$ est multiplié sera $+1$ pour les trois axes, ou bien on aura respectivement pour multiplicateurs α, α^2, $+1$. Dans le premier cas, la fonction f se reproduit par toutes les substitutions du groupe g; dans le second cas, il en sera de même du quotient obtenu en divisant la fonction f par $x^2 + \alpha y^2 + \alpha^2 z^2$. En définitive, on a pour $f(x, y, z)$ l'expression générale ci-dessous :

$$f(x, y, z) = \mathrm{M}\,\mathrm{F}[x^2 + y^2 + z^2,\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2,\ xyz,\ (x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)],$$

M étant égal à l'unité ou à $x^2 + \alpha y^2 + \alpha^2 z^2$.

Une discussion analogue s'applique aux autres polyèdres, et l'on est conduit aux équations suivantes pour représenter les surfaces qui reviennent sur elles-mêmes par toutes les rotations qui font revenir sur lui-même un corps régulier :

1° Pyramide régulière :

$$\mathrm{M}\,\mathrm{F}(ss_0, s^m, s_0^m, z) = 0;$$

$$s = x + iy, \qquad s_0 = x - iy, \qquad \mathrm{M} = s^p, \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, m - 1);$$

2° Double pyramide régulière :

$$\mathrm{M}\,\mathrm{F}[ss_0, s^m + s_0^m, z(s^m - s_0^m), z^2] = 0;$$

$$m = 2p + 1, \qquad \mathrm{M} = 1, \qquad \mathrm{M} = z;$$
$$m = 2p, \qquad \mathrm{M} = 1, \qquad \mathrm{M} = z, \qquad \mathrm{M} = s^p \pm s_0^p;$$

3° Octaèdre :

$$\mathrm{M}\,\mathrm{F}[x^2 + y^2 + z^2,\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2,\ x^2y^2z^2,\ xyz(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)] = 0,$$
$$\mathrm{M} = 1, \qquad \mathrm{M} = xyz;$$

4° Icosaèdre :

$$\mathrm{F}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \mathrm{S}) = 0,$$

P, Q, R, S ayant les valeurs données dans la première partie [formules (7), (8) et (11)].

Je ferai remarquer aussi qu'on trouve, dans la deuxième partie, les formules propres à représenter les surfaces minima qui reviennent sur elles-mêmes par les rotations considérées.