ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉDOUARD GOURSAT

Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 4 (1887), p. 159-200
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1887_3_4__159_0>

ÉTUDE DES SURFACES

QUI ADMETTENT

TOUS LES PLANS DE SYMÉTRIE

D'UN POLYÈDRE RÉGULIER (¹),

PAR M. ÉD. GOURSAT,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Ce Mémoire est consacré à l'étude générale des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un des polyèdres réguliers, et plus particulièrement à l'étude de celles de ces surfaces qui sont en même temps des surfaces *minima*. Il est divisé en trois Parties. Dans la première Partie, je recherche d'abord les équations générales propres à représenter en coordonnées cartésiennes toutes les surfaces ayant la symétrie demandée : ces équations sont obtenues par l'application d'un procédé uniforme, qui n'exige que des calculs tout à fait élémentaires. Vient ensuite une étude sommaire des surfaces du troisième ordre admettant les plans de symétrie du tétraèdre régulier et des surfaces du quatrième ordre admettant les plans de symétrie du tétraèdre et de l'octaèdre. Cette étude est faite surtout au point de vue du nombre des points singuliers. Ce nombre, qui est nul pour la surface générale du quatrième ordre ayant les symétries demandées, peut atteindre sa valeur maximum 16 pour certaines de ces surfaces et peut prendre, sauf deux exceptions, toutes les valeurs inférieures. On rencontre, en

---

(¹) Nous sommes heureux de pouvoir offrir à nos lecteurs ce remarquable Mémoire, qui ne diffère que par la rédaction de celui auquel l'Académie des Sciences, dans sa séance publique de 1886, a accordé le *Grand prix des Sciences mathématiques*, sur le Rapport de notre éminent Confrère, M. Halphen. (Voir *Comptes rendus*, t. CIII, p. 1302.) G. D.

particulier, un faisceau remarquable de surfaces de Kummer, déjà obtenu par M. Kummer lui-même en 1866. Ces surfaces jouissent d'une propriété curieuse qui les distingue nettement de la surface générale à seize points singuliers. Je signale aussi quelques surfaces remarquables du sixième ordre admettant tous les plans de symétrie de l'icosaèdre.

La seconde Partie est consacrée à une recherche toute différente. Je me suis proposé de trouver des formules générales, représentant toutes les surfaces *minima* qui ont les symétries d'un polyèdre régulier. Les équations générales de M. Weierstrass et de M. Sophus Lie, qui donnent toutes les surfaces *minima*, rapprochées des belles recherches de M. Klein sur les formes binaires qui se reproduisent par des substitutions linéaires, permettent de résoudre ce problème. Dans les applications, il y a lieu d'employer de préférence les formules de M. Sophus Lie ou celles de M. Weierstrass suivant qu'il s'agit de surfaces algébriques ou transcendantes. Le développement de ces recherches conduit à distinguer deux espèces de symétrie; avec les méthodes de M. Lie, cette distinction est susceptible d'une interprétation géométrique intéressante, qui en montre bien la nécessité. Parmi les surfaces obtenues, je signalerai en particulier une surface double de *treizième classe*, admettant tous les plans de symétrie du tétraèdre.

La troisième Partie contient plusieurs recherches distinctes. Revenant à la théorie générale, je donne d'abord les équations générales des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier dans le système de représentation sphérique de Gauss. C'est surtout afin de mettre en évidence les différentes espèces de symétrie que j'ai repris la question à ce point de vue général. Je m'occupe ensuite d'une extension de ces recherches à l'espace à n dimensions et des applications que l'on peut en faire à l'espace à trois dimensions.

Ne pouvant citer à chaque instant les travaux qui m'ont été utiles, je donnerai ici la liste des plus importants :

Kummer. — Ueber besondere Arten von Flächen vierten Grades (*Monatsberichte*. Berlin, 1872).

Klein. — Différents Mémoires dans les tomes XII et XIII des *Mathematische Annalen* et son récent Ouvrage, *Vorlesungen über das Ikosaeder*.

SOPHUS LIE. — Beiträge zur Theorie der Minimalflächen (*Mathematische Annalen*, Bd. XIV et XV).

SCHWARZ. — Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen. (*Journal de Borchardt*, t. 80). Forgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen (*Monatsberichte*, Berlin, 1872).

DARBOUX. — Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux. (*Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. VII, 1878).

PREMIÈRE PARTIE.

1. Soient Ox, Oy, Oz trois axes de coordonnées rectangulaires, $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ l'équation d'un plan P passant par l'origine, où α, β, γ vérifient la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Étant donné un point M de coordonnées x, y, z, le point M_1, symétrique du point M par rapport au plan P, aura pour coordonnées

$$\begin{aligned} x_1 &= x - 2\alpha(\alpha x + \beta y + \gamma z),\\ y_1 &= y - 2\beta(\alpha x + \beta y + \gamma z),\\ z_1 &= z - 2\gamma(\alpha x + \beta y + \gamma z). \end{aligned}$$

Cela posé, soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface S admettant le plan P pour plan de symétrie, et supposons que F soit une fonction entière ou, plus généralement, une fonction uniforme de x, y, z. Il faudra évidemment que l'on ait identiquement

$$F\begin{bmatrix} x - 2\alpha(\alpha x + \beta y + \gamma z),\\ y - 2\beta(\alpha x + \beta y + \gamma z),\\ z - 2\gamma(\alpha x + \beta y + \gamma z) \end{bmatrix} = kF(x, y, z), \tag{1}$$

k désignant un facteur constant. Changeons dans cette équation x, y, z

en x_1, y_1, z_1 respectivement; on aura aussi

$$F(x, y, z) = kF\begin{bmatrix} x - 2\alpha(\alpha x + \beta y + \gamma z), \\ y - 2\beta(\alpha x + \beta y + \gamma z), \\ z - 2\gamma(\alpha x + \beta y + \gamma z) \end{bmatrix} = k^2 F(x, y, z),$$

et par suite $k^2 = 1$.

Si l'on supposait $k = -1$, pour tout point de coordonnées a, b, c pris dans le plan de symétrie, on aurait $F(a, b, c) = 0$ et le plan P lui-même devrait faire partie de la surface. Si l'on écarte ce cas singulier, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que la surface $F(x, y, z) = 0$ admette le plan P pour plan de symétrie est exprimée par la relation (1) où l'on fait $k = 1$. En d'autres termes, la fonction $F(x, y, z)$ doit se reproduire identiquement quand on effectue sur les variables la substitution linéaire Σ :

$$\Sigma \left\{ \begin{matrix} x; & x - 2\alpha(\alpha x + \beta y + \gamma z), \\ y; & y - 2\beta(\alpha x + \beta y + \gamma z), \\ z; & z - 2\gamma(\alpha x + \beta y + \gamma z). \end{matrix} \right\}$$

Si $F(x, y, z)$ est une fonction rationnelle entière, chaque groupe homogène de termes jouira de la même propriété.

Au point de vue de la symétrie, les polyèdres réguliers se partagent en trois groupes : 1° le tétraèdre; 2° le cube et l'octaèdre; 3° le dodécaèdre et l'icosaèdre. A ces trois types, il suffit de joindre la pyramide régulière et la double pyramide pour avoir tous les types de corps admettant un nombre *fini* de plans de symétrie. Nous allons examiner successivement chacun de ces cas. Je dirai, pour abréger, qu'une surface a la symétrie d'un polyèdre régulier, lorsqu'elle admet tous les plans de symétrie de ce polyèdre.

2. Double pyramide. — Prenons pour plan des xy le plan de la base commune, pour origine le centre du cercle circonscrit et pour plan des xz un des plans de symétrie. Supposons que la base soit un polygone régulier de m côtés; les $m + 1$ plans de symétrie seront donnés par les équations

$$z = 0, \qquad y = x \tang \frac{k\pi}{m}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Pour qu'une surface admette ces $m+1$ plans de symétrie, il suffit évidemment qu'elle soit symétrique par rapport aux plans des xy et des xz, et qu'elle revienne coïncider avec elle-même par une rotation de $\frac{2\pi}{m}$ autour de l'axe des z. Si l'équation de cette surface est

$$F(x, y, z) = 0,$$

on aura les trois conditions

$$\begin{gathered} F(x, y, -z) = F(x, y, z), \\ F(x, -y, z) = F(x, y, z), \\ F\left(x\cos\frac{2\pi}{m} - y\sin\frac{2\pi}{m},\ x\sin\frac{2\pi}{m} + y\cos\frac{2\pi}{m},\ z\right) = F(x, y, z); \end{gathered}$$

posons

$$s = x + iy, \qquad s_0 = x - iy,$$

et

$$\mathcal{F}(s, s_0, z) = F\left(\frac{s+s_0}{2}, \frac{s-s_0}{2i}, z\right).$$

Les relations ci-dessus peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{F}(s, s_0, z) &&= \mathcal{F}(s_0, s, z), \\ &\mathcal{F}(s, s_0, -z) &&= \mathcal{F}(s, s_0, z), \\ &\mathcal{F}(se^{\alpha i}, s_0 e^{-\alpha i}) &&= \mathcal{F}(s, s_0, z), \end{aligned}\right.$$

où

$$\alpha = \frac{2\pi}{m}.$$

On aperçoit immédiatement trois fonctions répondant à la question :

$$u = z^2, \qquad v = ss_0, \qquad w = s^m + s_0^m;$$

inversement, toute fonction uniforme $\mathcal{F}(s, s_0, z)$ vérifiant les relations (2) est une simple fonction de u, v, w. En effet, à tout système de valeurs de u, v, w correspondent pour z, s, s_0, $4m$ systèmes de valeurs; ces $4m$ systèmes de valeurs fournissent $4m$ points de l'espace qui se déduisent tous de l'un d'eux par la loi de symétrie. D'après les relations (2), la fonction $\mathcal{F}(s, s_0, z)$ reprend la même valeur en ces $4m$ points; $\mathcal{F}$ est donc une fonction uniforme de u, v, w. C. Q. F. D.

Ainsi, *l'équation générale des surfaces qui ont la symétrie de la double pyramide est de la forme*

$$\mathcal{F}(z^2,\ ss_0,\ s^m + s_0^m) = 0, \tag{3}$$

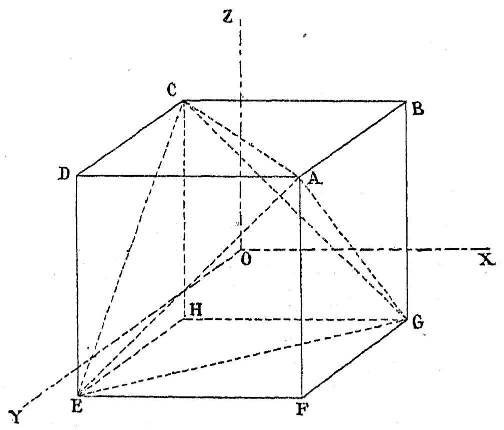
$\mathcal{F}$ désignant une fonction uniforme. On démontrerait de même que

$$\mathcal{F}(z,\ ss_0,\ s^m + s_0^m) = 0 \tag{4}$$

est *l'équation générale des surfaces qui ont la symétrie de la pyramide régulière dont la base est un polygone régulier de m côtés.*

3. Cube et octaèdre. — Le cube et l'octaèdre régulier admettent neuf plans de symétrie, dont trois parallèles aux faces du cube et les six autres passant par deux arêtes opposées. Ces deux solides admettent en outre trois axes de symétrie quaternaire passant par les sommets de l'octaèdre, quatre axes de symétrie ternaire passant par les sommets du cube et six axes de symétrie binaire passant par les milieux des arêtes des deux solides.

Fig. 1.



Prenons pour plans de coordonnées les trois plans parallèles aux faces du cube, menés par le centre (*fig.* 1); les neuf plans de symétrie seront représentés par les équations

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x \pm y = 0, \quad y \pm z = 0, \quad z \pm x = 0.$$

Des substitutions linéaires correspondantes on déduit un groupe d'ordre *fini*, formé par les quarante-huit substitutions linéaires ci-dessous :

$x, y, z,$	$-x, y, z,$	$x, -y, z,$	$x, y, -z,$	$-x, -y, z,$	$-x, y, -z,$	$x, -y, -z,$	$-x, -y, -z,$
$y, x, z,$	$-y, x, z,$	$y, -x, z,$	$y, x, -z,$	$-y, -x, z,$	$-y, x, -z,$	$y, -x, -z,$	$-y, -x, -z,$
$z, y, x,$	$-z, y, x,$	$z, -y, x,$	$z, y, -x,$	$-z, -y, x,$	$-z, y, -x,$	$z, -y, -x,$	$-z, -y, -x,$
$x, z, y,$	$-x, z, y,$	$x, -z, y,$	$x, z, -y,$	$-x, -z, y,$	$-x, z, -y,$	$x, -z, -y,$	$-x, -z, -y,$
$z, x, y,$	$-z, x, y,$	$z, -x, y,$	$z, x, -y,$	$-z, -x, y,$	$-z, x, -y,$	$z, -x, -y,$	$-z, -x, -y,$
$y, z, x,$	$-y, z, x,$	$y, -z, x,$	$y, z, -x,$	$-y, -z, x,$	$-y, z, -x,$	$y, -z, -x,$	$-y, -z, -x.$

A un point (x, y, z) de l'espace correspondent donc quarante-huit points par la loi de symétrie, y compris ce point lui-même, sauf si ce point est dans un des plans de symétrie. Les coordonnées de ces quarante-huit points sont données par le tableau précédent.

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface possédant la symétrie du cube, et supposons que la fonction $F(x, y, z)$ soit uniforme. D'après ce que nous avons vu plus haut, la fonction F devra se reproduire par les quarante-huit substitutions linéaires du groupe précédent. On aperçoit sur-le-champ trois fonctions satisfaisant à cette condition :

$$u = x^2 + y^2 + z^2, \qquad v = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2, \qquad w = x^2y^2z^2;$$

de plus, $F(x, y, z)$ doit être une fonction uniforme de u, v, w. En effet, à un système de valeurs de u, v, w correspondent quarante-huit systèmes de valeurs de x, y, z, qui se déduisent de l'un d'eux par les substitutions écrites plus haut. Donc à un système de valeurs de u, v, w ne correspond qu'une valeur de F. *L'équation générale des surfaces possédant la symétrie du cube sera par conséquent de la forme*

$$F(x^2 + y^2 + z^2,\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2,\ x^2y^2z^2) = 0. \tag{5}$$

Toutes les surfaces algébriques sont d'ordre pair et les surfaces les plus simples après la sphère sont les surfaces du quatrième ordre :

$$A(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + B(x^2 + y^2 + z^2)^2 + C(x^2 + y^2 + z^2) + D = 0.$$

4. Tétraèdre. — Le tétraèdre régulier possède six plans de symétrie dont chacun passe par une arête, quatre axes de symétrie ternaire pas-

sant par les sommets, trois axes de symétrie binaire passant par les milieux des arêtes. Prenons le tétraèdre dans la position ACEG (*fig.* 1); les six plans de symétrie seront donnés par les équations

$$x \pm y = 0, \qquad y \pm z = 0, \qquad z \pm x = 0.$$

Les substitutions linéaires correspondantes donnent naissance à un groupe d'ordre fini de vingt-quatre substitutions, formé par la moitié des substitutions du cube :

$$\begin{array}{llll}
x,\, y,\, z, & -x,\, -y,\, z, & -x,\, y,\, -z, & x,\, -y,\, -z, \\
y,\, x,\, z, & -y,\, -x,\, z, & -y,\, x,\, -z, & y,\, -x,\, -z, \\
z,\, y,\, x, & -z,\, -y,\, x, & -z,\, y,\, -x, & z,\, -y,\, -x, \\
z,\, x,\, y, & -z,\, -x,\, y, & -z,\, x,\, -y, & z,\, -x,\, -y, \\
x,\, z,\, y, & -x,\, -z,\, y, & -x,\, z,\, -y, & x,\, -z,\, -y, \\
y,\, z,\, x, & -y,\, -z,\, x, & -y,\, z,\, -x, & y,\, -z,\, -x.
\end{array}$$

On est conduit, comme tout à l'heure, à rechercher les fonctions uniformes $F(x, y, z)$ qui se reproduisent par les substitutions de ce groupe. On a d'abord les trois fonctions

$$u = x^2 + y^2 + z^2, \qquad v = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2, \qquad w = xyz,$$

et l'on démontre comme plus haut que toute fonction $F(x, y, z)$ répondant à la question est une fonction uniforme de u, v, w.

Ainsi, *l'équation générale des surfaces possédant la symétrie du tétraèdre est de la forme*

$$F(x^2 + y^2 + z^2,\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2,\ xyz) = 0. \tag{6}$$

Après la sphère, les surfaces algébriques les plus simples sont les surfaces du troisième ordre représentées par l'équation

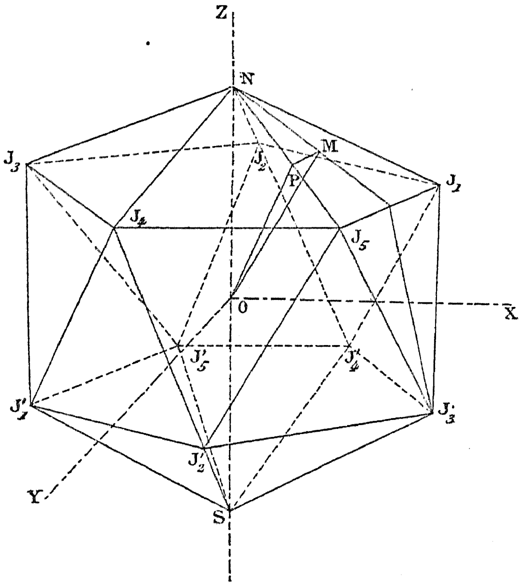
$$Axyz + B(x^2 + y^2 + z^2) + C = 0.$$

5. Icosaèdre et dodécaèdre. — Le dodécaèdre et l'icosaèdre régulier associés sont placés de telle sorte que les sommets de l'un correspon-

dent aux centres des faces de l'autre. Ces deux solides admettent quinze plans de symétrie, six axes de symétrie d'ordre 5, dix axes de symétrie ternaire et quinze axes de symétrie binaire. Prenons pour origine le centre de la sphère circonscrite à l'icosaèdre, pour axe des z un rayon aboutissant à un sommet de l'icosaèdre et pour plan des xz un plan perpendiculaire à l'une des faces qui aboutissent à ce sommet (*fig.* 2).

Ainsi, dans la figure ci-dessous, le plan des xz contient l'arête NJ_3 et la hauteur NM de la face NJ_4J_5. Les quinze plans de symétrie de l'icosaèdre décomposent la sphère circonscrite en cent vingt triangles

Fig. 2.



sphériques, alternativement égaux et symétriques. Imaginons que nous ayons obtenu les équations de ces quinze plans; les substitutions linéaires qui leur correspondent donnent naissance à un groupe d'ordre fini de cent vingt substitutions linéaires, et nous sommes encore conduits à rechercher les fonctions uniformes $F(x, y, z)$ qui se reproduisent quand on effectue sur les variables une quelconque de ces cent vingt substitutions. Il n'est point nécessaire pour cela de former le tableau de ces substitutions; procédant comme nous l'avons déjà fait pour les autres polyèdres réguliers, nous allons chercher trois solutions particulières du problème. On a tout d'abord la solution évidente

$$P = x^2 + y^2 + z^2;$$

on en obtient deux autres de la manière suivante. Imaginons que par l'origine on mène des plans parallèles aux faces du dodécaèdre régulier; on obtient ainsi une surface du sixième degré qui admet tous les plans de symétrie du dodécaèdre et dont ne fait partie aucun de ces plans de symétrie. Soit $Q = 0$ l'équation du système de ces six plans; Q est un polynôme homogène du sixième degré qui, d'après le n° 1, doit se reproduire par les cent vingt substitutions du groupe de l'icosaèdre. De même, en menant par l'origine des plans parallèles aux faces de l'icosaèdre, on obtient une surface du dixième degré répondant à la question. Soit $R = 0$ l'équation de cette surface; R est un polynôme homogène du dixième degré qui se reproduit par les cent vingt substitutions du groupe.

Cela posé, je dis que toute fonction uniforme $F(x, y, z)$, qui ne change pas quand on fait subir aux variables x, y, z une quelconque de ces cent vingt substitutions linéaires, est une fonction uniforme de P, Q, R. En effet, soient

$$P = \alpha, \qquad Q = \beta, \qquad R = \gamma;$$

α, β, γ étant donnés, il y a pour x, y, z cent vingt systèmes de valeurs correspondantes, puisque P, Q, R sont respectivement du second, du sixième et du dixième degré. Ces cent vingt systèmes se déduisent d'un seul d'entre eux par les cent vingt substitutions du groupe de l'icosaèdre. Donc aux valeurs α, β, γ ne correspond pour $F(x, y, z)$ qu'une valeur unique, c'est-à-dire que F est une fonction uniforme de P, Q, R.

Il ne nous reste plus qu'à calculer les deux polynômes Q et R. Deux des faces du dodécaèdre sont parallèles au plan des xy et deux autres perpendiculaires au plan des xz. L'angle I de deux faces adjacentes est donné par la formule de Géométrie élémentaire

$$\sin\frac{\mathrm{I}}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{5}};$$

remplaçons $\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{\pi}{5}$ par leurs valeurs, il vient

$$\sin\frac{I}{2} = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

On a ensuite

$$\cos\frac{I}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, \qquad \operatorname{tang}\frac{I}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\operatorname{tang} I = \frac{2\operatorname{tang}\frac{I}{2}}{1-\operatorname{tang}^2\frac{I}{2}} = -2.$$

Le plan mené par l'origine parallèlement aux deux faces du dodécaèdre, qui sont perpendiculaires au plan des xz, aura donc pour équation $z = 2x$ ou, ce qui revient au même,

$$z = s + s_0,$$

en posant

$$s = x + iy, \qquad s_0 = x - iy.$$

Les autres plans parallèles aux faces du dodécaèdre s'obtiendront en faisant tourner celui-ci autour de Oz de $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{8\pi}{5}$, et leurs équations seront respectivement

$$z = e^{\alpha}s + e^{-\alpha}s_0, \quad z = e^{2\alpha}s + e^{-2\alpha}s_0, \quad z = e^{3\alpha}s + e^{-3\alpha}s_0, \quad z = e^{4\alpha}s + e^{-4\alpha}s_0,$$

où

$$\alpha = \frac{2i\pi}{5}.$$

Après quelques réductions faciles, on trouve pour équation du système de ces six plans

$$(7) \qquad Q = z^6 - 5ss_0z^4 + 5s^2s_0^2z^2 - (s^5 + s_0^5)z = 0.$$

Pour trouver R, j'abaisse de l'origine la perpendiculaire OM sur le centre de la face NJ_1J_5 et je joins le point O au milieu P de l'arête NJ_5. Le trièdre ONMP découpe sur la sphère circonscrite un triangle sphérique dont les angles ont pour valeurs $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$. La formule de résolution des triangles sphériques rectangles

$$\cos a = \cot B \cot C$$

nous donne ici

$$\cos(MON) = \cot\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{5};$$

or

$$\cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cot\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

On en tire

$$\cos MON = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, \qquad \sin MON = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}},$$

$$\text{tang} MON = \frac{4}{3+\sqrt{5}}.$$

Le plan mené par l'origine parallèlement à la face NJ_1J_5 aura donc pour équation

$$-\frac{3+\sqrt{5}}{4}z = x;$$

posons encore

$$s = x+iy, \qquad s_0 = x-iy \qquad \text{et} \qquad u = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}z,$$

l'équation de ce plan pourra s'écrire

$$u = s + s_0.$$

Les quatre plans que l'on déduit de celui-là par des rotations successives de $\frac{2\pi}{5}$ autour de l'origine auront respectivement pour équations

$$u = e^{\alpha}s + e^{-\alpha}s_0, \quad u = e^{2\alpha}s + e^{-2\alpha}s_0, \quad u = e^{3\alpha}s + e^{-3\alpha}s_0, \quad u = e^{4\alpha}s + e^{-4\alpha}s_0,$$

et l'ensemble de ces cinq plans sera représenté par l'équation

$$u^5 - 5ss_0u^3 + 5s^2s_0^2u - (s^5 + s_0^5) = 0.$$

On trouve par un calcul analogue que, en posant $v = -\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)z$, l'ensemble des cinq plans parallèles aux autres faces de l'icosaèdre aura pour équation

$$v^5 - 5ss_0v^3 + 5s^2s_0^2v - (s^5 + s_0^5) = 0.$$

Faisons le produit; il vient, après quelques simplifications faciles,

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} R = z^{10} - 35 ss_0 z^8 + 260 s^2 s_0^2 z^6 + 25 s^4 s_0^4 z^2 - 175 s^3 s_0^3 z^4 \\ \qquad + (s^5 + s_0^5)(123 z^5 - 90 ss_0 z^3 + 15 s^2 s_0^2 z) + (s^5 + s_0^5)^2 = 0. \end{array} \right.$$

En définitive, *l'équation générale des surfaces admettant tous les plans de symétrie de l'icosaèdre est de la forme*

$$(9)\qquad F(P, Q, R) = 0,$$

P, Q, R *désignant les polynômes trouvés plus haut.*

On peut remarquer que, dans P, Q, R, tous les coefficients sont des nombres entiers. Toutes les surfaces algébriques sont de degré pair, et les surfaces les plus simples, après la sphère, sont les surfaces du sixième degré

$$\begin{array}{l} z^6 - 5 ss_0 z^4 + 5 s^2 s_0^2 z^2 - (s^5 + s_0^5) z \\ \quad + A(x^2 + y^2 + z^2)^3 + B(x^2 + y^2 + z^2)^2 + C(x^2 + y^2 + z^2) + D = 0, \end{array}$$

qui dépendent de quatre paramètres A, B, C, D.

Remarque. — Des expressions de P, Q, R, il résulte que les trois équations $P = \alpha$, $Q = \beta$, $R = \gamma$ admettent, en général, 120 systèmes de solutions distincts et 120 seulement; cette remarque est nécessaire pour la complète rigueur du raisonnement qui a été fait au début de ce paragraphe.

6. On peut avoir besoin de connaître les équations des quinze plans de symétrie de l'icosaèdre. Nous connaissons déjà un plan de symétrie, le plan des xz. Un calcul facile donne pour équation du plan mené par l'origine perpendiculaire aux arêtes NJ_3, SJ'_3

$$2x + z(\sqrt{5} - 1) = 0.$$

Le plan mené par les arêtes opposées $J_1 J_5$ et $J'_1 J'_5$ sera perpendiculaire aux deux premiers et aura pour équation

$$2x - z(\sqrt{5} + 1) = 0.$$

Pour obtenir les quinze plans de symétrie, on n'a plus qu'à faire tourner ces trois plans de $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{8\pi}{5}$ autour de l'axe Oz. Voici les équations de ces quinze plans, où l'on a posé, pour abréger, $s=x+iy$, $s_0=x-iy$, $u=(1-\sqrt{5})z$, $v=(1+\sqrt{5})z$,

$$(10)\left\{\begin{array}{lllll} s-s_0=0, & e^{\alpha}s-e^{-\alpha}s_0=0, & e^{2\alpha}s-e^{-2\alpha}s_0=0, & e^{3\alpha}s-e^{-3\alpha}s_0=0, & e^{4\alpha}s-e^{-4\alpha}s_0=0; \\ u=s+s_0, & u=e^{\alpha}s+e^{-\alpha}s_0, & u=e^{2\alpha}s+e^{-2\alpha}s_0, & u=e^{3\alpha}s+e^{-3\alpha}s_0, & u=e^{4\alpha}s+e^{-4\alpha}s_0; \\ v=s+s_0, & v=e^{\alpha}s+e^{-\alpha}s_0, & v=e^{2\alpha}s+e^{-2\alpha}s_0, & v=e^{3\alpha}s+e^{-3\alpha}s_0, & v=e^{4\alpha}s+e^{-4\alpha}s_0; \\ & & \alpha=\dfrac{2i\pi}{5}; & & \end{array}\right.$$

l'ensemble de ces quinze plans aura pour équation

$$(11)\left\{\begin{array}{l} S=(s^5-s_0^5)(-4^5.z^{10}+5.4^3.12ss_0z^8-3840s^2s_0^2z^6+1200s^3s_0^3z^4-100s^4s_0^4z^2) \\ \qquad +(s^{10}-s_0^{10})(-352z^5-160ss_0z^3-10zs^2s_0^2)+(s^5-s_0^5)(s^5+s_0^5)^2=0. \end{array}\right.$$

7. Équations tangentielles. — Au moyen de ce qui précède, nous pouvons écrire immédiatement l'équation générale des surfaces algébriques d'un degré donné qui ont la symétrie d'un polyèdre régulier. On pourrait se proposer le même problème en coordonnées tangentielles, mais les nouvelles équations se déduisent tout de suite des précédentes. Soit

$$ux+vy+wz=1$$

l'équation d'un plan quelconque; le plan symétrique de celui-là par rapport au plan $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ aura pour équation

$$u_1x+v_1y+w_1z=1,$$

où

$$\begin{aligned} u_1&=u-2\alpha(\alpha u+\beta v+\gamma w), \\ v_1&=v-2\beta(\alpha u+\beta v+\gamma w), \\ w_1&=w-2\gamma(\alpha u+\beta v+\gamma w). \end{aligned}$$

On voit que u, v, w sont transformés par la même substitution linéaire que x, y, z eux-mêmes. On en conclut que l'équation tangentielle générale des surfaces admettant les plans de symétrie d'un polyèdre régulier sera :

1° Pour le tétraèdre régulier,

$$F(u^2+v^2+w^2,\ u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2,\ uvw)=0;$$

2° Pour le cube,

$$F(u^2+v^2+w^2,\ u^2v^2+v^2w^2+u^2w^2,\ u^2v^2w^2)=0;$$

3° Pour l'icosaèdre

$$F(u^2+v^2+w^2,\ Q_1,\ R_1)=0,$$

en appelant Q_1 et R_1 les polynômes Q et R où l'on a remplacé x, y, z par u, v, w.

Ces résultats sont d'ailleurs évidents *a priori*, si l'on remarque que toute surface ayant la symétrie d'un polyèdre régulier donne une surface jouissant de la même propriété, quand on lui applique la transformation par polaires réciproques par rapport à la sphère

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Ainsi, l'on aura l'équation tangentielle générale en remplaçant x, y, z par u, v, w dans l'équation ponctuelle générale.

8. Surfaces du troisième ordre. — Les surfaces algébriques du moindre degré admettant tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier sont, abstraction faite de la sphère, les surfaces du troisième ordre représentées par l'équation

$$xyz+A(x^2+y^2+z^2)+B=0,$$

qui possèdent la symétrie du tétraèdre régulier.

Supposons A et B réels et $A \gtrless 0$. On peut toujours, par une transformation d'homothétie, ramener cette équation à la forme

$$x^2+y^2+z^2-2xyz+k=0. \tag{12}$$

Tout plan parallèle à l'un des plans de coordonnées coupe la surface suivant une conique et une droite rejetée à l'infini. La surface contient donc toujours trois droites *réelles*, qui sont les intersections des trois plans de coordonnées avec le plan de l'infini. On trouve aisément les vingt-quatre droites que contient encore la surface. Coupons la surface par le plan $z=h$; la conique d'intersection

$$x^2+y^2-2hxy+h^2+k=0$$

se compose d'un système de deux droites si l'on a $h^2+k=0$, ou $h^2=1$. Les quatre plans $z=\pm\sqrt{-k}$, $z=\pm 1$ coupent donc la surface suivant un système de deux droites. Par raison de symétrie, il en est de même des huit plans

$$x = \mp\sqrt{-k}, \qquad x = \pm 1, \qquad y = \pm\sqrt{-k}, \qquad y = \pm 1.$$

Cela fait en tout vingt-quatre droites à distance finie dont voici les équations :

$$\begin{aligned}
&z = \sqrt{-k}, && z = -\sqrt{-k},\\
&y = x(\sqrt{-k} \pm \sqrt{-k-1}); && y = x(-\sqrt{-k} \pm \sqrt{-k-1});\\[4pt]
&x = \sqrt{-k}, && x = -\sqrt{-k},\\
&z = y(\sqrt{-k} \pm \sqrt{-k-1}); && z = y(-\sqrt{-k} \pm \sqrt{-k-1});\\[4pt]
&y = \sqrt{-k}, && y = -\sqrt{-k},\\
&x = z(\sqrt{-k} \pm \sqrt{-k-1}); && x = z(-\sqrt{-k} \pm \sqrt{-k-1});\\[4pt]
&z = 1, && z = -1,\\
&y = x \pm \sqrt{-k-1}; && y = -x \pm \sqrt{-k-1};\\[4pt]
&x = 1, && x = -1,\\
&z = y \pm \sqrt{-k-1}; && z = -y \pm \sqrt{-k-1};\\[4pt]
&y = 1, && y = -1,\\
&x = z \pm \sqrt{-k-1}; && x = -z \pm \sqrt{-k-1}.
\end{aligned}$$

Toutes ces droites sont réelles si k est inférieur à -1, et toutes imaginaires dans le cas contraire. La surface contient trois cercles situés dans les plans de coordonnées et en outre vingt-quatre cercles imaginaires situés dans les plans imaginaires :

$$\begin{aligned}
z - 1 \pm i(y - x \pm \sqrt{-k-1}) &= 0,\\
z + 1 \pm i(y + x \pm \sqrt{-k-1}) &= 0,\\
x - 1 \pm i(z - y \pm \sqrt{-k-1}) &= 0,\\
x + 1 \pm i(z + y \pm \sqrt{-k-1}) &= 0,\\
y - 1 \pm i(x - z \pm \sqrt{-k-1}) &= 0,\\
y + 1 \pm i(x + z \pm \sqrt{-k-1}) &= 0.
\end{aligned}$$

La forme de cette surface dépend du paramètre k, comme on le voit par une discussion facile, dont je résume brièvement les résultats.

Premier cas : $k < -1$. — Tout plan parallèle à l'un des plans de coordonnées coupe la surface suivant une conique réelle. La surface se compose d'une seule nappe et contient *vingt-sept droites réelles*, dont trois à l'infini.

Deuxième cas : $k = -1$. — On trouve la surface réciproque de la surface de Steiner. Elle admet comme points doubles les quatre sommets du tétraèdre et chaque arête du tétraèdre compte pour quatre droites confondues de la surface.

Troisième cas : $0 > k > -1$. — La surface ne contient plus que trois droites réelles à l'infini et vingt-quatre droites imaginaires. Le plan $z = h$ coupe la surface suivant une ellipse réelle tant que $h^2 < -k$; si h^2 est compris entre $-k$ et 1, la section est une ellipse imaginaire. Enfin, si h^2 est > 1, la section est une hyperbole. Il suit de là que la surface se composera de cinq nappes distinctes, une nappe fermée et quatre nappes infinies asymptotes aux quatre plans

$$z = \pm 1, \qquad x = \pm 1, \qquad y = \pm 1.$$

Quatrième cas : $k = 0$. — La surface contient toujours trois droites réelles seulement, elle se compose de quatre nappes infinies et d'un point double isolé à l'origine.

Cinquième cas : $k > 0$. — La surface ne se compose plus que de quatre nappes infinies distinctes, qui s'éloignent indéfiniment lorsque k grandit au delà de toute limite.

A ces surfaces, il faut joindre la surface particulière

$$xyz = \mathrm{H},$$

qui se compose de quatre nappes infinies asymptotes aux plans de coordonnées et dont M. Cayley a déterminé les lignes de courbure, et M. Appell les lignes asymptotiques (*Archives de Grunert*, 1877).

9. Il est évident *a priori* qu'une surface du troisième degré ne pourra pas en général être ramenée à une des surfaces précédentes par une transformation homographique, puisque l'équation réduite (12) ne contient qu'un paramètre arbitraire. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la transformation soit possible peuvent être énoncées sous une forme géométrique. Considérons une des droites de la sur-

face rejetées à l'infini, par exemple la droite à l'infini dans le plan des xy. Les deux droites de la surface

$$z = 1,$$
$$y = x \pm \sqrt{-k-1}$$

coupent cette droite en un même point, et il en est de même des deux autres droites de la surface

$$z = -1,$$
$$y = -x \pm \sqrt{-k-1}.$$

A cause de la symétrie, on voit qu'il y a sur la surface un triangle ABC, tel que par deux points pris sur chaque côté de ce triangle passent deux autres droites situées sur la surface et dans un même plan avec ce côté. Inversement toute surface du troisième ordre jouissant de cette propriété peut être transformée homographiquement en une surface admettant tous les plans de symétrie du tétraèdre.

Pour le démontrer, supposons qu'on ait rejeté à l'infini le plan du triangle ABC. En un point M pris sur le côté AC se coupent les deux droites D, D_1 de la surface, situées dans un plan P; en un autre point M' de AC se coupent deux droites D', D'_1 de la surface situées dans un plan P'. Soit OAC le plan conjugué harmonique du plan ABC par rapport aux deux plans P, P'; nous prendrons ce plan OAC pour un des plans de coordonnées et nous choisirons de même les deux autres plans de coordonnées. Dans ce système d'axes, l'équation de la surface considérée sera de la forme

$$2xyz + Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz$$
$$+ 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + H = 0.$$

Les deux plans $z = \pm 1$ devant couper la surface suivant deux droites parallèles, on aura les deux conditions

$$(B'' + 1)^2 - AA' = 0,$$
$$(B'' - 1)^2 - AA' = 0;$$

d'où l'on tire $B'' = 0$, $AA' = 1$. On aura de même $B = 0$, $A'A'' = 1$, $B' = 0$, $AA'' = 1$, et par suite

$$B = B' = B'' = 0,$$
$$A = A' = A'' = \pm 1.$$

Prenons le signe $+$; l'équation de la surface sera de la forme

$$2xyz + (x^2 + y^2 + z^2) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + H = 0.$$

Pour que les deux plans $z = \pm 1$ coupent la surface suivant un système de deux droites parallèles, il faudra que l'on ait à la fois

$$C = C', \qquad C = -C',$$

et par suite $C = C' = 0$. On voit de même qu'il faut prendre $C'' = 0$ et l'équation de la surface sera bien de la forme (12).

On peut écrire autrement l'équation de ces surfaces. Considérons le tétraèdre ACEG (*fig.* 1) et soient

$$\begin{aligned}
u_1 &= z + x + y + a = 0,\\
u_2 &= z - x - y + a = 0,\\
u_3 &= -z + x - y + a = 0,\\
u_4 &= -z - x + y + a = 0
\end{aligned}$$

les équations des quatre faces de ce tétraèdre. On a

$$u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + u_4^3 = 12a(x^2 + y^2 + z^2) + 24xyz + 4a^3,$$

et l'équation générale des surfaces du troisième ordre écrite plus haut est identique à l'équation

$$u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + u_4^3 = H.$$

On voit que toutes ces surfaces admettent un pentaèdre commun formé des quatre faces du tétraèdre et du plan de l'infini. En particulier, si l'on suppose $H = 0$, l'équation réduite sera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz + \frac{1}{3} = 0.$$

Pour cette surface particulière, la hessienne se réduit aux quatre faces du tétraèdre et l'on sait en trouver les lignes asymptotiques, d'après un théorème dû à M. Darboux. Avec la surface réciproque de la surface de Steiner, nous avons ainsi deux surfaces de l'espèce considérée dont on connaît les lignes asymptotiques.

Plus généralement, les surfaces ayant pour équation

$$u_1^m + u_2^m + u_3^m + u_4^m = C$$

ont la symétrie du tétraèdre. Si $C = 0$, on peut trouver leurs lignes asymptotiques. C'est ainsi que l'équation de la surface à quatre points doubles peut s'écrire

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = 0.$$

10. Surfaces du quatrième ordre. — L'équation générale des surfaces du quatrième ordre admettant tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier est, comme nous l'avons vu,

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &A(x^2+y^2+z^2)^2 + B(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \\ &\qquad + Cxyz + D(x^2+y^2+z^2) + E = 0; \end{aligned}\right.$$

elle dépend de quatre paramètres arbitraires, que l'on peut réduire à trois par une transformation d'homothétie. Si $C \neq 0$, la surface a la symétrie du tétraèdre; si $C = 0$, elle a la symétrie du cube.

Supposons que B et C soient différents de zéro; on trouve aisément

$$u_1 u_2 u_3 u_4 = (x^2+y^2+z^2-a^2)^2 - 4(x^2z^2+z^2y^2+x^2y^2) + 8axyz,$$

u_1, u_2, u_3, u_4 ayant la même signification que tout à l'heure, et, en choisissant convenablement la constante a, on voit que l'équation (13) pourra se ramener à l'une des trois formes

$$\begin{aligned} (x^2+y^2+z^2-R^2)(x^2+y^2+z^2-R'^2) + \lambda u_1 u_2 u_3 u_4 &= 0, \\ x^2+y^2+z^2-R^2 \quad + \lambda u_1 u_2 u_3 u_4 &= 0, \\ \mu + \lambda u_1 u_2 u_3 u_4 &= 0. \end{aligned}$$

Si C est nul, on pourra encore ramener l'équation (13) à l'une des trois formes précédentes, mais il faudra prendre dans les formules $a = 0$.

Si $B = 0$, $C \neq 0$, l'équation (13) pourra de même s'écrire

$$(x^2+y^2+z^2-R^2)(x^2+y^2+z^2-R'^2) + \lambda xyz = 0.$$

En résumé, l'équation générale de ces surfaces est de la forme

$$(A)\qquad pqrs + kSS' = 0,$$

les équations $p=0$, $q=0$, $r=0$, $s=0$, représentant quatre plans, formant, en général, un tétraèdre, et les équations $S=0$, $S'=0$ deux sphères concentriques. Comme cas particuliers, on peut avoir l'une des trois formes

$$\text{(B)} \qquad pqrs + kS^2 = 0,$$
$$\text{(C)} \qquad pqrs + kS = 0,$$
$$\text{(D)} \qquad pqrs + k = 0.$$

La surface générale (A) contient huit cercles, intersections des deux sphères $S=0$, $S'=0$ par les quatre faces du tétraèdre $p=0$, $q=0$, $r=0$, $s=0$. Pour le type (B), les quatre faces sont des plans tangents singuliers qui touchent la surface suivant quatre cercles. Les surfaces de cette espèce ont été étudiées par M. Kummer dans le Mémoire cité au début. Elles admettent trois faisceaux de surfaces circonscrites du second ordre, représentées par les trois équations

$$\alpha^2 pq + 2\alpha\,\Phi + rs = 0,$$
$$\beta^2 pr + 2\beta\,\Phi + qs = 0,$$
$$\gamma^2 ps + 2\gamma\,\Phi + qr = 0,$$

l'équation de la surface étant mise sous la forme

$$\Phi^2 = pqrs.$$

11. Laissant de côté ces généralités, je m'occupe plus particulièrement des surfaces du quatrième ordre ayant la symétrie du cube. Ces surfaces sont intéressantes; car elles donnent, comme cas particuliers, un grand nombre de surfaces ayant des points singuliers. On peut d'ailleurs, grâce à la symétrie, se faire une idée assez nette de leur forme. L'équation générale de ces surfaces peut s'écrire

$$(14) \qquad x^4+y^4+z^4+\lambda(x^2+y^2+z^2)^2+2\mu(x^2+y^2+z^2)+\nu=0,$$

ou encore, d'après un calcul déjà fait,

$$(14') \qquad \left\{\begin{aligned} &(\lambda+\tfrac{1}{2})(x^2+y^2+z^2)^2+2\mu(x^2+y^2+z^2)+\nu \\ &\quad +\tfrac{1}{2}(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)=0;\end{aligned}\right.$$

elle dépend de trois coefficients arbitraires, que l'on peut réduire à deux par une transformation d'homothétie.

Étudions la section de cette surface par le plan de l'infini et considérons pour cela le cône asymptote

$$x^4 + y^4 + z^4 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

L'expression

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

où x, y, z prennent tous les systèmes de valeurs réelles, sauf $x = y = z = 0$, passe par un maximum et un minimum. Le maximum est égal à l'unité et a lieu lorsque deux des quantités x, y, z sont nulles. Le minimum est égal à $\frac{1}{3}$ et a lieu pour $x^2 = y^2 = z^2$. Il suit de là que le cône asymptote n'est réel que si λ est compris entre -1 et $-\frac{1}{3}$.

Premier cas : $\lambda < -1$ ou $\lambda > -\frac{1}{3}$. — La section de la surface par le plan de l'infini est une courbe imaginaire sans points doubles.

Deuxième cas. — Soit $\lambda = -1$. Le cône asymptote se réduit à trois droites doubles réelles isolées Ox, Oy, Oz. La surface a trois points doubles à l'infini dans la direction des axes.

Troisième cas. — Soit $-1 < \lambda < -\frac{1}{3}$ et $\lambda \neq -\frac{1}{2}$. Le cône asymptote est réel et indécomposable; la surface n'a pas de point double à l'infini.

Quatrième cas : $\lambda = -\frac{1}{2}$. — Le cône asymptote se décompose en quatre plans parallèles aux faces de l'octaèdre régulier. La surface admet six points doubles à l'infini sur les droites

$$(z = 0,\ x = \pm y), \qquad (x = 0,\ y = \pm z), \qquad (y = 0,\ z = \pm x).$$

Cinquième cas : $\lambda = -\frac{1}{3}$. — Le cône asymptote se réduit à quatre droites doubles réelles, isolées, perpendiculaires aux faces de l'octaèdre. La surface aura quatre points doubles réels à l'infini sur ces droites $x = \pm y = \pm z$.

Cherchons encore les points doubles que peut avoir la surface à distance finie. Posons, en rendant homogène,

$$f(x, y, z, t) = x^4 + y^4 + z^4 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 2\mu(x^2 + y^2 + z^2)t^2 + \nu t^4;$$

on a

$$\frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial x} = x[x^2 + \lambda(x^2+y^2+z^2) + \mu],$$
$$\frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial y} = y[y^2 + \lambda(x^2+y^2+z^2) + \mu],$$
$$\frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial z} = z[z^2 + \lambda(x^2+y^2+z^2) + \mu],$$
$$\frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial t} = \mu(x^2+y^2+z^2) + \nu.$$

Égalons à zéro les trois premières dérivées et portons les solutions dans la quatrième. Plusieurs cas sont à distinguer :

Première solution. — Soit $x = y = z = 0$; on devra avoir $\nu = 0$ et la surface aura un point double à l'origine.

Deuxième solution. — Prenons les solutions

$$\left(x = y = 0,\ z^2 = -\frac{\mu}{1+\lambda}\right),$$
$$\left(y = z = 0,\ x^2 = -\frac{\mu}{1+\lambda}\right),$$
$$\left(z = x = 0,\ y^2 = -\frac{\mu}{1+\lambda}\right).$$

Ces solutions appartiendront à la dernière équation, pourvu que l'on ait $\nu = \frac{\mu^2}{1+\lambda}$. Si cette condition est remplie, la surface aura six points doubles sur les axes de coordonnées.

Troisième solution. — Prenons les solutions

$$\left(x = 0,\ y^2 = z^2 = -\frac{\mu}{1+2\lambda}\right),$$
$$\left(y = 0,\ z^2 = x^2 = \frac{-\mu}{1+2\lambda}\right),$$
$$\left(z = 0,\ x^2 = y^2 = \frac{-\mu}{1+2\lambda}\right);$$

ces solutions fourniront douze points doubles pour la surface, situés aux milieux des arêtes d'un cube, pourvu que l'on ait

$$\nu = \frac{2\mu^2}{1+2\lambda}.$$

Quatrième solution. — Il nous reste à examiner la solution

$$x^2 = y^2 = z^2 = \frac{-\mu}{1+3\lambda}.$$

On trouve de même que la surface aura huit points doubles aux sommets du cube, pourvu que l'on ait

$$\nu = \frac{3\mu^2}{1+3\lambda}.$$

Étudions encore les sections de la surface par des plans parallèles aux plans de symétrie. La section de la surface par le plan $z = h$ a pour équation

$$x^4 + y^4 + \lambda(x^2+y^2)^2 + 2(\mu+\lambda h^2)(x^2+y^2) + h^4(1+\lambda) + 2\mu h^2 + \nu = 0;$$

pour que cette section se décompose en un système de deux coniques, il faut et il suffit qu'elle possède *quatre* points doubles. Ces points doubles seront fournis par les deux équations

$$x[x^2 + \lambda(x^2+y^2) + \mu + \lambda h^2] = 0,$$
$$y[y^2 + \lambda(x^2+y^2) + \mu + \lambda h^2] = 0.$$

Laissant de côté la solution $x = y = 0$, qui ne peut fournir qu'un seul point double, les huit autres solutions se décomposent en deux groupes de quatre,

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} y = 0, & x = 0, \\ x^2 = -\dfrac{\mu+\lambda h^2}{1+\lambda}; & y^2 = -\dfrac{\mu+\lambda h^2}{1+\lambda}; \end{array} \right.$$

$$\text{(II)} \qquad x^2 = y^2 = -\frac{\mu+\lambda h^2}{1+2\lambda}.$$

Le premier groupe donnera une quartique décomposée en deux coniques, pourvu que h vérifie l'équation bicarrée

$$h^4(1+2\lambda) + 2\mu h^2 + \nu(1+\lambda) - \mu^2 = 0.$$

Le second groupe conduira de même à l'équation

$$h^4(1+3\lambda) + 2\mu h^2 + \nu(1+2\lambda) - 2\mu^2 = 0;$$

il y aura donc en tout *huit* plans parallèles au plan des xy coupant la surface suivant un système de deux coniques. On trouve par un calcul analogue qu'il existe en général *quatre* plans parallèles à chacun des plans

$$x \pm y = 0, \qquad y \pm z = 0, \qquad z \pm x = 0,$$

qui coupent la surface suivant un système de deux coniques. On a déjà fait remarquer que les quatre plans

$$x + y + z = 0, \qquad x - y + z = 0, \qquad x + y - z = 0, \qquad x - y - z = 0$$

coupaient la surface suivant deux cercles. Donc la surface générale de l'espèce considérée contient cent quatre coniques, dont huit sont des circonférences.

Je vais maintenant énumérer les surfaces les plus remarquables possédant des droites ou des points siuguliers.

12. Surfaces contenant des droites. — Si l'on coupe la surface (14) par une droite perpendiculaire à l'un des plans de symétrie, on obtient une équation du quatrième ordre qui sera forcément bicarrée quand on choisit l'inconnue d'une façon convenable. Or l'équation (14) contient justement trois paramètres arbitraires. On pourra donc en disposer de façon que l'équation qui donne les points d'intersection soit identiquement satisfaite, et la droite sera tout entière sur la surface.

Considérons, par exemple, la droite ayant pour équations

$$x = \alpha, \qquad y = \beta;$$

l'équation qui donne les z des points d'intersection est ici

$$z^4(1+\lambda) + 2z^2[\mu + \lambda(\alpha^2+\beta^2)] + \lambda(\alpha^2+\beta^2)^2 + 2\mu(\alpha^2+\beta^2) + \alpha^4 + \beta^4 + \nu = 0.$$

La droite sera tout entière sur la surface si l'on a

$$1 + \lambda = 0, \qquad \mu - (\alpha^2+\beta^2) = 0, \qquad \nu = -(\alpha^2+\beta^2)^2 - \alpha^4 - \beta^4.$$

Connaissant α et β, ces équations donnent λ, μ, ν.

Inversement, si dans l'équation (14) on a $\lambda = -1$, les équations précédentes nous donnent α et β en fonction de μ et de ν. Les surfaces ainsi obtenues contiennent, outre la droite donnée, toutes ses répétitions symétriques qui sont au nombre de vingt-quatre, puisque la droite est perpendiculaire à un des plans de symétrie. Il est aisé de se rendre compte de la disposition de ces droites dans l'espace. Sur les faces d'un cube traçons des carrés égaux ayant même centre que les faces du cube et leurs côtés parallèles aux arêtes. On obtient ainsi un système de vingt-quatre droites ayant la symétrie du cube et situées sur une même surface du quatrième ordre. Comme cas particulier, il peut arriver que ces droites passent par le centre des faces du cube, ou se confondent avec les arêtes de ce polyèdre. Dans les deux cas, leur nombre est diminué de moitié.

Supposons, par exemple, $\alpha = 0$, $\beta = 1$. On en tire $\mu = 1$, $\nu = -2$. La surface correspondante, dont nous parlerons plus loin, a quinze points singuliers.

Au contraire, soit $\alpha = \beta = 1$; on aura $\mu = 2$, $\nu = -6$; la surface obtenue, qui contient les arêtes du cube, a onze points singuliers. Pour étudier les droites parallèles aux arêtes de l'octaèdre, nous ferons d'abord la transformation de coordonnées

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}};$$

l'équation de la surface devient

$$\frac{x'^4 + y'^4}{2} + 3x'^2y'^2 + z^4 + \lambda(x'^2 + y'^2 + z^2)^2 + 2\mu(x'^2 + y'^2 + z^2) + \nu = 0.$$

La droite $x' = \alpha$, $z = \beta$ sera tout entière sur la surface si l'on a à la fois

$$2\lambda + 1 = 0, \qquad 2\mu = \beta^2 - 2\alpha^2, \qquad 2\nu = (2\alpha^2 + 3\beta^2)(2\alpha^2 - \beta^2).$$

Nous voyons que, si $\lambda = -\frac{1}{2}$, la surface contiendra des droites parallèles aux arêtes de l'octaèdre, car les deux dernières équations nous donnent α et β en fonction de μ et de ν. Les répétitions symétriquesde la première droite sont encore au nombre de vingt-quatre, dont on peut aisément se représenter la disposition dans l'espace. Imaginons que sur les faces d'un octaèdre on trace des triangles équilatéraux égaux, chacun d'eux étant concentrique et homothétique au triangle qui limite la face sur laquelle il est tracé. On obtient ainsi un système de vingt-quatre droites qui admet la symétrie de l'octaèdre; d'après ce que nous venons de voir, ces vingt-quatre droites appartiennent à une même surface du quatrième ordre.

Comme cas particulier, il peut arriver que ces droites viennent se confondre avec les arêtes de l'octaèdre. C'est ce qui arrivera si l'on prend $\beta = 0$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On tire des équations qui précèdent

$$\mu = -\tfrac{1}{2}, \qquad \nu = \tfrac{1}{2}.$$

La surface obtenue, dont nous parlerons plus loin, admet comme points doubles les sommets de l'octaèdre; elle possède en outre six points doubles à l'infini.

Il peut arriver aussi que les vingt-quatre droites précédentes se confondent deux à deux en se réduisant aux diagonales des faces du cube. C'est ce qui arrivera si l'on fait $\alpha = 0$, $\beta = 1$; on aura ensuite

$$\mu = \tfrac{1}{2}, \qquad \nu = \tfrac{3}{2}.$$

La surface obtenue, dont il sera question plus loin, possède quatorze points singuliers, dont six à l'infini et les huit autres aux sommets du cube.

Ces surfaces limites ont aussi des plans tangents singuliers. Prenons, par exemple, la surface qui passe par les arêtes de l'octaèdre. Considérons une surface très peu différente contenant deux droites infiniment voisines de cette arête situées sur chacune des faces adjacentes. Il est clair que le plan de ces deux droites devient à la limite un plan tangent à la surface tout le long de l'arête considérée. Et de même dans les autres cas.

13. Surface a seize points doubles. — On obtient cette surface en supposant

$$\lambda = -\frac{1}{3}, \qquad \nu = \frac{2\mu^2}{1+2\lambda} = 6\mu^2.$$

Elle aura, d'après ce que nous avons vu, quatre points doubles réels à l'infini sur les diagonales du cube, et douze points doubles à distance finie, aux milieux des arêtes d'un cube. Ces derniers seront réels ou imaginaires suivant le signe de μ. Supposons d'abord que ces points doubles soient réels; μ devra être négatif. On pourra prendre $\mu = -\frac{1}{3}$ et par suite $\nu = \frac{2}{3}$, et l'équation de la surface pourra s'écrire

$$(15)\qquad x^4 + y^4 + z^4 - (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - (x^2 + y^2 + z^2) + 1 = 0,$$

ou encore

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 2)^2 + 3(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z) = 0.$$

La disposition des points doubles, que l'on vient d'indiquer, offre un cas particulier remarquable de la configuration de Kummer. Il est aisé d'avoir les seize plans tangents singuliers. On a d'abord les quatre plans parallèles aux faces de l'octaèdre, qui sont tangents à la surface suivant un cercle. Les autres plans sont les plans menés parallèlement aux arêtes et contenant quatre des points doubles précédents :

$$x \pm y = \pm 1, \qquad x \pm z = \pm 1, \qquad y \pm z = \pm 1.$$

Voici comment on peut se faire une idée de la forme de cette surface. La section par le plan $z = 0$ se décompose en deux coniques imaginaires

$$x^2 - 1 + \alpha(y^2 - 1) = 0, \qquad x^2 - 1 + \beta(y^2 - 1) = 0,$$

α et β désignant les deux racines cubiques imaginaires de l'unité. Portons l'origine au point double $z = 0$, $x = y = 1$ en posant

$$x = 1 + X, \qquad y = 1 + Y;$$

l'équation de la surface dans le nouveau système sera

$$\begin{aligned}(1 + X)^4 + (1 + Y)^4 + Z^4 - (1 + X)^2(1 + Y)^2 \\ - Z^2(1 + X)^2 - Z^2(1 + Y)^2 - (1 + X)^2 - (1 + Y)^2 - Z^2 + 1 = 0,\end{aligned}$$

et le cône des tangentes en ce point aura pour équation

$$4X^2 + 4Y^2 - XY = \tfrac{3}{4}Z^2.$$

De même le cylindre des tangentes au point double à l'infini sur la droite $x = y = z$ aura pour équation

$$(y - x)^2 + (z - x)^2 - (y - x)(z - x) = \tfrac{3}{4}.$$

La surface se compose de huit nappes égales se rejoignant aux points doubles, chaque nappe étant limitée par quatre points doubles dont un à l'infini. Par exemple, la nappe située dans le trièdre $oxyz$ est limitée aux trois points doubles $(x=0,\ y=z=1)$, $(y=0,\ x=z=1)$, $(z=0, x=y=1)$ et au point à l'infini sur la droite $x=y=z$. La surface appartient au type I_a de M. Rohn (*Mathematische Annalen*. Bd. XVIII). Chaque nappe a la forme d'un tétraèdre dont les faces seraient remplacées par des segments elliptiques et les arêtes par des segments hyperboliques.

Si μ est positif, on pourra prendre $\mu=\frac{1}{3}$. L'équation de la surface sera dans ce cas

$$x^4+y^4+z^4-(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+x^2+y^2+z^2+1=0.$$

Elle admet encore quatre points doubles réels à l'infini et quatre plans tangents doubles réels. Les autres éléments, ainsi que la surface elle-même, sont imaginaires. Elle appartient au type IV_b de M. Rohn.

Revenons à la surface réelle (15). Si l'on rend l'équation homogène, elle prend la forme symétrique très simple

$$\Sigma x^4-\Sigma x^2y^2=0.$$

Sous cette forme, on reconnaît que l'équation ne change pas quand on permute x, y, z, t de toutes les manières possibles, et qu'on prend toutes les combinaisons de signes. On a ainsi un groupe de 192 substitutions linéaires qui font revenir la surface sur elle-même.

L'équation (15) peut encore s'écrire

$$(x^2+y^2+z^2-2t^2)^2+3(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)=0,$$
$$(x^2+y^2-2z^2+3tz-2t^2)^2-3(z-x-t)(z+x-t)(z-y-t)(z+y-t);$$

au moyen des permutations signalées, on en déduit un grand nombre d'équations de même forme représentant la même surface. Ces diverses équations mettent en évidence les points singuliers et les plans tangents singuliers, ainsi que les faisceaux de surfaces circonscrites du second degré.

14. Surface a quinze points singuliers. — On obtient cette surface en prenant $\lambda=-1$, $\nu=\frac{2\mu^2}{1+2\lambda}$. Elle a trois points doubles réels à l'infini

sur les axes de coordonnées, et douze points doubles à distance finie, aux milieux des arêtes d'un cube, dont les coordonnées sont

$$(x = 0,\ y^2 = z^2 = \mu), \qquad (y = 0,\ x^2 = z^2 = \mu), \qquad (z = 0,\ x^2 = y^2 = \mu);$$

ces points seront tous réels si μ est positif. S'il en est ainsi, on pourra prendre $\mu = 1$, et l'on en déduit $\nu = -2$. La surface correspondante a pour équation

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - (x^2 + y^2 + z^2) + 1 = 0,$$

ou encore

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 2)^2 - (x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z) = 0;$$

cette dernière forme nous montre que les quatre plans menés par l'origine parallèlement aux faces de l'octaèdre sont des plans tangents singuliers, tangents à la surface le long d'un cercle.

On a déjà reconnu que cette surface contenait douze droites parallèles aux axes, données par les équations telles que

$$z^2 = 1, \qquad xy = 0.$$

Les six plans $z = \pm 1$, $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ sont encore des plans tangents singuliers qui touchent la surface le long de deux droites.

Surface a quatorze points singuliers. — On obtient cette surface en supposant $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\nu = \dfrac{3\mu^2}{1 + 3\lambda}$. Elle a six points doubles réels à l'infini dans la direction des bissectrices des angles des axes, et huit points doubles à distance finie, situés aux sommets d'un cube, qui seront réels si μ est positif. Soit $\mu = \frac{1}{2}$; on trouve $\nu = -\frac{2}{3}$ et l'équation de la surface devient

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 2(x^2 + y^2 + z^2) - 3 = 0.$$

Elle contient douze lignes droites parallèles aux arêtes de l'octaèdre, données par des équations telles que

$$z^2 = 1, \qquad y^2 - x^2 = 0.$$

Les six plans $z = \pm 1$, $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ sont des plans tangents singuliers, dont chacun touche la surface le long de deux de ces droites.

Surface a douze points singuliers. — On l'obtient en prenant $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\nu = \frac{\mu^2}{1+\lambda}$. Elle a six points doubles réels à l'infini comme la précédente et six points doubles à distance finie aux sommets de l'octaèdre. Ces derniers seront réels si μ est négatif. Supposons $\mu = -\frac{1}{2}$; on aura $\nu = \frac{1}{2}$ et l'équation de la surface sera

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + x^2 + y^2 + z^2) + 1 = 0.$$

Sous forme homogène, cette équation peut s'écrire

$$\Sigma x^4 - 2\,\Sigma x^2 y^2,$$

équation analogue à celle de la surface de Kummer trouvée plus haut.

Nous savons déjà que cette surface contient les arêtes d'un octaèdre régulier. L'une de ces arêtes a pour équation

$$z = 0, \qquad y = x + 1,$$

et un calcul qu'il est aisé de refaire prouve que cette droite appartient bien à la surface. Toutes les droites qui s'en déduisent en permutant $\pm x$, $\pm y$, $\pm z$, $\pm t$ de toutes les manières possibles doivent aussi appartenir à la surface. On n'obtient ainsi que seize droites, les douze arêtes de l'octaèdre et les quatre droites d'intersection des faces de l'octaèdre avec le plan de l'infini. Remarquons que par chaque point double passent quatre droites de la surface. Les seize plans $x \pm y \pm z = 0$, $x \pm y \pm t = 0$, $x \pm z \pm t = 0$, $y \pm z \pm t = 0$ touchent chacun la surface suivant une droite.

Surface a onze points singuliers. — Soient $\lambda = -1$, $\nu = \frac{3\mu^2}{1+3\lambda}$. La surface obtenue a trois points doubles réels à l'infini sur les axes de coordonnées, et huit points doubles à distance finie aux sommets d'un cube, dont les coordonnées sont données par les équations

$$x^2 = y^2 = z^2 = \frac{\mu}{2}.$$

Ces points seront réels si μ est positif. Soit $\mu = 2$; on aura pour équation de la surface

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2) + 3 = 0.$$

Elle contient les douze arêtes d'un cube, comme on l'a déjà remarqué, de sorte que par chaque point double à distance finie passent trois droites de la surface. Les douze plans

$$x \pm y \pm 1 = 0, \qquad y \pm z \pm 1 = 0, \qquad z \pm x \pm 1 = 0$$

touchent chacun la surface suivant une de ces arêtes.

Surface à dix points singuliers. — Soient $\lambda = -\frac{1}{3}$, $\nu = \frac{\mu^2}{1+\lambda}$. La surface a quatre points doubles réels à l'infini et six points doubles à distance finie qui seront réels si μ est négatif. Prenons $\mu = -\frac{1}{3}$; on aura $\nu = \frac{2}{3}$, et l'équation de la surface devient

$$x^4 + y^4 + z^4 - (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2(x^2 + y^2 + z^2) + 1 = 0.$$

On aura encore les surfaces suivantes possédant des points singuliers.

Je n'écris, pour abréger, que les relations entre les paramètres λ, μ, ν.

Surface à 12 points singuliers... $\nu = \frac{2\mu^2}{1+2\lambda}$,

» 8 points singuliers... $\nu = \frac{3\mu^2}{1+3\lambda}$,

» 7 points singuliers... $\nu = 0$, $\lambda = -\frac{1}{2}$,

» 6 points singuliers... Deux espèces $\begin{cases} 1^\circ & \lambda = -\frac{1}{2}, \\ 2^\circ & \nu = \frac{\mu^2}{1+\lambda}, \end{cases}$

» 5 points singuliers.... $\nu = 0$, $\lambda = -\frac{1}{3}$,

» 4 points singuliers... Deux espèces $\begin{cases} 1^\circ & \lambda = -\frac{1}{3}, \\ 2^\circ & \lambda = -1, \quad \nu = 0. \end{cases}$

» 3 points singuliers... $\lambda = -1$,

» 1 point singulier..... $\nu = 0$.

15. SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE AYANT LA SYMÉTRIE DU TÉTRAÈDRE. — On peut énumérer de la même façon les surfaces les plus remarquables du quatrième ordre, douées de points doubles, ayant la symétrie du tétraèdre. L'équation générale peut être mise sous la forme

$$A(x^4+y^4+z^4)+\lambda(x^2+y^2+z^2)^2+4axyz+2\mu(x^2+y^2+z^2)+\nu=0;$$

le coefficient a est forcément différent de zéro, mais A peut être nul. Je suppose d'abord $A \neq 0$ et, en rendant l'équation homogène, je pose

$$(16) \quad \begin{cases} f(x,y,z,t)=x^4+y^4+z^4+\lambda(x^2+y^2+z^2)^2 \\ \qquad +4axyzt+2\mu(x^2+y^2+z^2)t^2+\nu t^4=0. \end{cases}$$

On voit d'abord, comme plus haut, que la surface n'aura de nappes infinies réelles que si λ est compris entre -1 et $-\frac{1}{3}$. Si $\lambda=-1$, la surface aura trois points doubles à l'infini sur les axes de coordonnées; si $\lambda=-\frac{1}{2}$, on aura six points doubles réels à l'infini sur les arêtes du tétraèdre.

Cherchons pour quelles valeurs des paramètres a, λ, μ, ν la surface aura des points doubles. Posons, pour abréger

$$A=\frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial x}=x^3+\lambda x(x^2+y^2+z^2)+ayz+\mu x,$$

$$B=\frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial y}=y^3+\lambda y(x^2+y^2+z^2)+azx+\mu y,$$

$$C=\frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial z}=z^3+\lambda z(x^2+y^2+z^2)+axy+\mu z,$$

$$D=\frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial t}=axyz+\mu(x^2+y^2+z^2)+\nu;$$

posons encore

$$P=yA-xB=(xy-az)(x^2-y^2),$$

$$Q=zB-yC=(yz-ax)(y^2-z^2),$$

$$R=xC-zA=(zx-ay)(z^2-x^2).$$

Toute solution commune aux trois équations $A=0$, $B=0$, $C=0$

vérifiera aussi les trois équations $P=0$, $Q=0$, $R=0$. Or, ces trois surfaces du quatrième ordre ont en commun treize droites représentées par les équations

$$(x=\pm y=\pm z),\quad (x=y=0),\quad (x=z=0),\quad (y=z=0),$$
$$(z=a,\ y=x),\quad (z=-a,\ y=-x),\quad (x=a,\ y=z),$$
$$(x=-a,\ y=-z),\quad (y=a,\ x=z),\quad (y=-a,\ x=-z),$$

c'est-à-dire les quatre hauteurs du tétraèdre, les droites joignant les milieux des arêtes opposées et les six arêtes elles-mêmes. Ces treize droites se partagent en trois groupes, et il suffit évidemment de considérer une droite de chaque groupe.

I. Prenons la droite $x=y=z=\rho$. Cette droite rencontre les surfaces $A=0$, $B=0$, $C=0$ en trois points communs; les valeurs correspondantes de ρ sont données par l'équation

$$\rho^3+3\lambda\rho^3+a\rho^2+\mu\rho=0$$

ou, en supprimant le facteur ρ, par l'équation

$$\rho^2(1+3\lambda)+a\rho+\mu=0.$$

Sur chacune des quatre hauteurs du tétraèdre on a ainsi, outre l'origine, deux points communs aux trois surfaces $A=0$, $B=0$, $C=0$. Pour que ces points soient des points doubles de la surface $f=0$, il faut, en outre, qu'ils appartiennent à la surface $D=0$ ou que l'équation en ρ précédente ait une racine commune avec l'équation

$$a\rho^3+3\mu\rho^2+\nu=0,$$

qui détermine les points communs à la droite $x=y=z$ et à la surface $D=0$. Si ces deux équations ont une seule racine commune, la surface aura quatre points doubles; elle en aura huit si les deux équations ont deux racines communes. Pour que les quatre hauteurs soient des droites singulières, il faudrait que les deux équations en ρ se réduisissent à des identités, c'est-à-dire que l'on eût

$$1 + 3\lambda = 0, \qquad a = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0.$$

La surface se compose alors, comme on l'a vu, de deux cônes imaginaires du second degré, se coupant suivant quatre droites réelles, les quatre hauteurs du tétraèdre.

II. Considérons, dans le second groupe, la droite $x = y = 0$. Elle coupe les trois surfaces $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ en deux points communs donnés par l'équation

$$z^2(1 + \lambda) + \mu = 0.$$

Ces points seront des points doubles de $f = 0$ si l'on a en même temps

$$\mu z^2 + \nu = 0$$

et, par suite,

$$\nu(1 + \lambda) - \mu^2 = 0.$$

Cette condition étant remplie, la surface aura six points doubles sur les axes de coordonnées. Pour que ces axes soient des droites singulières, il faudrait que les deux équations en z se réduisissent à des identités, c'est-à-dire que l'on eût

$$1 + \lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0.$$

On obtient ainsi la surface de Steiner

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2axyz = 0.$$

III. Enfin prenons une des arêtes du tétraèdre, par exemple la droite $y = a$, $z = x$. Elle rencontre les trois surfaces $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ en deux points communs, déterminés par l'équation du second degré

$$x^2(1 + 2\lambda) + a^2(1 + \lambda) + \mu = 0;$$

on a ainsi deux points sur chaque arête du tétraèdre. Pour que ces douze points soient des points doubles de $f = 0$, il faut, en outre, que ces valeurs de x vérifient l'équation du second degré

$$x^2(a^2+2\mu)+\mu a^2+\nu=0,$$

que l'on obtient en faisant $y=a$, $z=x$ dans l'équation $D=0$. L'équation de condition exprime précisément, comme il est aisé de s'en assurer, que l'équation de la surface appartient au type B (*voir* n° 10). On peut écrire cette équation

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2-\mu' a^2)^2\\&\quad+\lambda'(x+y+z+a)(x-y-z+a)(-x+y-z+a)(-x-y+z+a)=0;\end{aligned}$$

sous cette forme, on reconnaît immédiatement que les points de rencontre des arêtes du tétraèdre avec la sphère

$$x^2+y^2+z^2=\mu' a^2$$

sont des points doubles de la surface. M. Kummer a étudié ces surfaces en détail dans le Mémoire cité au début.

Les arêtes du tétraèdre seront des droites singulières de $f=0$ si l'on a à la fois

$$1+2\lambda=0,\qquad 2\mu+a^2=0,\qquad \mu a^2+\nu=0;$$

mais la surface se réduit alors aux quatre faces du tétraèdre.

16. On peut, au moyen de ce qui précède et en combinant les divers cas qui viennent d'être examinés, énumérer toutes les surfaces possédant des points doubles. Je me bornerai à celles de ces surfaces qui possèdent le nombre maximum de points doubles. Nous savons déjà que les surfaces représentées par l'équation

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2-\alpha a^2)^2\\&\quad-\beta(x+y+z+a)(x-y-z+a)(-x+y-z+a)(-x-y+z+a)=0\end{aligned}$$

ont douze points doubles, qui seront réels si la sphère rencontre les arêtes du tétraèdre. Pour leur attribuer quatre nouveaux points doubles, on peut faire deux combinaisons : 1° supposer ces quatre points doubles sur les hauteurs du tétraèdre; 2° supposer un de ces points doubles à l'origine et les trois autres à l'infini sur les axes de coordonnées. Dans le premier cas, on devra prendre $\beta = \frac{3\alpha - 1}{3 - \alpha}$ et l'on obtient ainsi un faisceau de surfaces qui contient, comme surface limite, la surface de Kummer trouvée plus haut, admettant la symétrie du cube. On obtient cette surface en prenant $a = 0$, $\alpha = \infty$, $\alpha a^2 = 2$.

Si l'on prend la seconde hypothèse, on trouve qu'il faut poser $\beta = 1$, $\alpha = 1$. La surface correspondante est la surface de Steiner déjà signalée, qui peut aussi être considérée comme cas limite des surfaces de Kummer précédentes, obtenue en prenant $\alpha = 1$.

Ce sont là les seules surfaces à seize points singuliers admettant la symétrie du tétraèdre. En effet, si l'on examine toutes les combinaisons possibles de points doubles donnant le nombre seize pour somme, on n'en trouve qu'une nouvelle qui consisterait à prendre six points doubles à l'infini, six sur les axes de coordonnées et quatre sur les hauteurs. On trouve ainsi les conditions

$$\lambda = -\tfrac{1}{2}, \qquad \mu = -\frac{a^2}{2}, \qquad \nu = 2\mu^2,$$

et la surface correspondante se réduit aux quatre faces du tétraèdre.

Parmi les surfaces ayant la symétrie du cube, on a trouvé des surfaces ayant 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16 points doubles. Au nombre des surfaces ayant la symétrie du tétraèdre se trouvent des surfaces à *treize* points singuliers, représentées par l'équation

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2-\alpha a^2)^2\\ &\quad -\beta(x+y+z+a)(x-y-z+a)(-x-y+z+a)(-x+y-z+a)=0,\end{aligned}$$

où $\beta = \alpha^2$; mais on ne peut obtenir de surfaces ayant neuf ou deux points singuliers ordinaires.

Il resterait, pour être complet, à rechercher les points singuliers des surfaces

$$(x^2+y^2+z^2)^2 + 4axyz + 2\mu(x^2+y^2+z^2) + \nu = 0.$$

On trouve ainsi les résultats suivants :

1° Si $\nu = 0$, l'origine est un point singulier;

2° Si $\nu = \mu^2$, la surface a six points doubles sur les axes de coordonnées et six à l'infini;

3° Si les deux équations

$$\begin{aligned} 3\rho^2 + a\rho \quad + \mu &= 0, \\ a\rho^3 + 3\mu\rho^2 + \nu &= 0 \end{aligned}$$

ont une ou deux racines communes, la surface a quatre ou huit points doubles sur les axes de coordonnées.

17. On sait que les coordonnées d'un point d'une surface de Kummer peuvent s'exprimer par des fonctions Θ de deux paramètres. Dans le cas des surfaces considérées, les fonctions Θ de deux variables qui interviennent dans la représentation se ramènent aux fonctions Θ d'une seule variable. C'est ce qui s'établit aisément au moyen d'un élégant théorème dû à M. Darboux (*Comptes rendus*, 22 juin 1881). M. Darboux démontre qu'on peut toujours faire correspondre point par point une surface de Kummer à une surface ayant pour équation

$$z^2 = f(x, y),$$

f étant un polynôme du sixième degré en x, y; et la courbe

$$f(x, y) = 0$$

se composant de six droites tangentes à une même conique. On peut toujours, par une transformation préalable, faire en sorte que cette conique ait pour équation

$$x^2 - y = 0.$$

Posons maintenant

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = x_1 x_2,$$

et regardons x_2 comme un paramètre variable et x_1 comme une quantité fixe; ces deux équations définissent une tangente à la conique précédente. Supposons que les six tangentes données correspondent à

$$x_1 = a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_6.$$

Soient maintenant

$$y_1^2 = (x_1 - a_1)(x_1 - a_2)\ldots(x_1 - a_6),$$
$$y_2^2 = (x_2 - a_1)(x_2 - a_2)\ldots(x_2 - a_6).$$

Le produit $y_1^2 y_2^2$, qui est une fonction symétrique de x_1 et x_2, est un polynôme du sixième degré en x, y. D'ailleurs il est nul pour

$$x_1 = a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_6,$$

quel que soit x_2; donc il ne diffère de $f(x, y)$ que par un facteur constant que l'on peut supposer égal à l'unité. Cela posé, on satisfait à l'équation

$$z^2 = f(x, y)$$

en posant

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = x_1 x_2, \qquad z = y_1 y_2,$$

y_1 et y_2 ayant les valeurs écrites plus haut. Si l'on considère les équations abéliennes

$$\int^{x_1} \frac{dx_1}{y_1} + \int^{x_2} \frac{dx_2}{y_2} = u,$$
$$\int^{x_1} \frac{x_1\,dx_1}{y_1} + \int^{x_2} \frac{x_2\,dx_2}{y_2} = v,$$

ces équations nous donnent pour $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$, $y_1 y_2$ des fonctions abéliennes de u et de v. L'exposition qui précède est empruntée à un Mémoire de M. Picard sur les intégrales de différentielles totales (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. II).

Remarquons maintenant que, si les six tangentes représentées par l'équation

$$f(x, y) = 0$$

sont deux à deux symétriques par rapport à l'axe des y, les valeurs de a_1, a_2, ..., a_6 sont deux à deux égales et de signes contraires. Par suite y_1 et y_2 auront les formes suivantes :

$$y_1 = \sqrt{x_1^6 + A x_1^4 + B x_1^2 + C}, \qquad y_2 = \sqrt{x_2^6 + A x_2^4 + B x_2^2 + C};$$

les intégrales ci-dessus se ramènent à des intégrales elliptiques en posant $x_1^2 = X$; et l'on sait que, dans ce cas, les fonctions Θ de deux variables correspondantes se ramènent à des fonctions Θ d'une seule variable. Or la méthode de M. Darboux nous montre immédiatement que nous nous trouvons dans ce cas singulier. Considérons, en effet, une surface de Kummer ayant un plan de symétrie passant par un point double α de cette surface. Une droite passant par ce point double rencontre la surface en deux autres points; si l'on détermine cette droite par le point où elle rencontre un plan fixe perpendiculaire au plan de symétrie, on aura représenté la surface sur un *plan double*. Les six droites qui constituent la *courbe de passage* sont évidemment symétriques deux à deux par rapport à l'intersection du plan de symétrie et du plan de la représentation, et, par suite, le polynôme du sixième degré aura ses racines en involution.

Il est clair que cette conclusion s'applique en particulier aux surfaces de Kummer qui ont la symétrie du cube ou du tétraèdre.

18. Surfaces du sixième ordre. — Nous avons trouvé plus haut l'équation générale des surfaces du sixième ordre qui ont la symétrie de l'icosaèdre

$$\begin{aligned} & z^6 - 5(x^2+y^2)z^4 + 5(x^2+y^2)^2 z^2 - 2z(x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4) \\ & \quad + A(x^2+y^2+z^2)^3 + B(x^2+y^2+z^2)^2 + C(x^2+y^2+z^2) + D = 0. \end{aligned}$$

Coupons la surface par la droite $x = \alpha$, $z = \beta$; nous avons une équation du sixième degré en y qui ne contient que des termes de degré pair, et nous pouvons disposer des quatre paramètres arbitraires A, B, C, D, de façon que cette équation se réduise à une identité. On trouve ainsi les équations de condition

$$\begin{gathered} A = 0, \\ 5\beta^2 - 10\alpha\beta + B = 0, \\ 10\alpha^2\beta^2 - 5\beta^4 + 20\beta\alpha^3 + 2B(\alpha^2+\beta^2) + C = 0, \\ \beta^6 - 5\beta^2\alpha^2(\beta^2-\alpha^2) - 2\beta\alpha^5 + B(\alpha^2+\beta^2)^2 + C(\alpha^2+\beta^2) + D = 0. \end{gathered}$$

Les paramètres A, B, C, D étant choisis de cette façon, la surface du sixième contiendra soixante lignes droites, qui se déduisent de la première d'après la loi de symétrie. De plus, comme A est nul, elle aura quinze points doubles à l'infini dans la direction des arêtes de l'icosaèdre et du dodécaèdre.

Pour nous rendre compte de la disposition des soixante lignes droites dans l'espace, nous distinguerons deux cas. Soit OL la trace du plan de symétrie

$$2x - z(\sqrt{5} + 1) = 0,$$

sur le plan des xz, et OL' la trace du plan de symétrie

$$2x + z(\sqrt{5} - 1) = 0,$$

sur le plan des xz. A cause de la symétrie, on peut supposer que la trace M sur le plan des xz de la droite ($x = \alpha$, $z = \beta$) est dans l'angle LOL'. Supposons d'abord que le point M soit dans l'angle ZOL. Imaginons un icosaèdre homothétique à l'icosaèdre considéré par rapport à l'origine et dont une face passe par le point M. Sur chacune des faces de cet icosaèdre traçons un triangle équilatéral concentrique, et homothétique au premier, on obtient ainsi vingt triangles dont les côtés sont les répétitions symétriques de la droite considérée. Comme cas particulier, il peut arriver que les côtés de ces triangles viennent se confondre deux à deux avec les arêtes de l'icosaèdre; c'est ce qui arrivera si le point M est sur la droite OL. La surface correspondante contient les trente arêtes de l'icosaèdre; les douze sommets sont des points singuliers. Le plan passant par une arête, également incliné sur les deux faces adjacentes et laissant l'icosaèdre tout entier du même côté, est tangent à la surface tout le long de cette arête. Il suffit pour le voir de répéter un raisonnement qui a été fait pour le cas de l'octaèdre.

Un autre cas limite est celui où le point M vient sur OZ; les soixante droites se partagent en douze groupes de cinq passant par les sommets de l'icosaèdre régulier ou, ce qui revient au même, par les centres des faces du dodécaèdre régulier.

Supposons en second lieu que le point M soit dans l'angle OZL'. Au lieu d'un icosaèdre, prenons un dodécaèdre régulier dont la face parallèle au plan des xy passe par le point M, et sur chaque face construisons, comme tout à l'heure, un pentagone concentrique, homothétique et intérieur au premier. Les soixante côtés de ces douze pentagones sont les répétitions symétriques de l'un d'eux. Le cas limite où le point M vient sur OZ vient d'être examiné; si M vient sur OL', ces soixante droites se confondent deux à deux avec les arêtes du dodécaèdre. La surface correspondante passe par ces trente arêtes, et admet les vingt sommets du dodécaèdre comme points singuliers. Tout plan passant par une arête, également incliné sur les deux faces adjacentes et laissant le dodécaèdre tout entier du même côté, est tangent à la surface tout le long de cette arête.