Annales scientifiques de l'É.N.S.

J. Collet

Sur l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 4 (1887), p. 129-144
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1887_3_4__129_0>

SUR L'INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

A COEFFICIENTS CONSTANTS,

PAR M. J. COLLET,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE GRENOBLE.

Cauchy, dans ses *Anciens Exercices* (¹), applique le calcul des résidus à l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Nous nous proposons, en partant de l'idée même de Cauchy, d'exprimer par une simple quadrature l'*intégrale générale d'une équation linéaire à coefficients constants*. Ce résultat étant d'abord obtenu à l'aide d'une intégration effectuée le long d'un contour convenablement choisi, nous le déduirons ensuite des méthodes ordinaires enseignées dans tous les cours.

I.

Considérons d'abord l'équation homogène

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + P_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + P_m y = 0, \tag{1}$$

dans laquelle $P_1, P_2, \ldots, P_m$ désignent des constantes.

Si l'on pose

$$\varphi(z) = z^m + P_1 z^{m-1} + \ldots + P_m \tag{2}$$

(¹) *OEuvres de Cauchy*, 2ᵉ série, t. VI, p. 252.

et que $\Pi(z)$ représente un polynôme quelconque, l'*intégrale*

(3)
$$y = \int_S \frac{e^{xz}\,\Pi(z)}{\varphi(z)}\,dz,$$

prise le long d'une courbe fermée S *quelconque, sera une intégrale de l'équation* (1).

En effet, de l'équation (3), on déduit

$$\frac{dy}{dx} = \int_S \frac{z\,e^{xz}\,\Pi(z)}{\varphi(z)}\,dz, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \int_S \frac{z^m\,e^{xz}\,\Pi(z)}{\varphi(z)}\,dz;$$

et, portant ces valeurs dans le premier membre de l'équation (1), on obtient

$$\int_S e^{xz}\,\Pi(z)\,dz,$$

qui est identiquement nulle.

L'intégrale y acquiert des valeurs différentes suivant que la courbe S comprend dans son intérieur un nombre plus ou moins grand de points racines de $\varphi(z)$. D'un autre côté, les coefficients arbitraires de $\Pi(z)$ ne disparaissent pas du résultat qui, suivant leur nombre, présentera une plus ou moins grande généralité. Le nombre de ceux qui subsistent ne peut d'ailleurs surpasser m. En effet, si $\Pi(z)$ est d'un ordre supérieur à $m-1$, on pourra poser

$$\frac{\Pi(z)}{\varphi(z)} = \Pi_1(z) + \frac{\Pi_2(z)}{\varphi(z)},$$

$\Pi_1(z)$ et $\Pi_2(z)$ étant entiers, le degré de ce dernier polynôme étant au plus égal à $m-1$. Or ce dernier polynôme importe seul, puisqu'on a identiquement

$$\int_S e^{xz}\,\Pi_1(z)\,dz = 0.$$

En supposant que $\Pi(z)$ *soit d'ordre* $m-1$ *et que la courbe* S *enveloppe tous les points racines de* $\varphi(z)$, *on aura l'intégrale générale de l'équation* (1).

Nous allons montrer, en effet, qu'on peut tirer de (3) la formule connue de l'intégrale générale de l'équation (1).

Soit, pour cela,

$$\varphi(z) = (z - z_1)^\alpha (z - z_2)^\beta \ldots (z - z_n)^\lambda,$$

et

$$\frac{\Pi(z)}{\varphi(z)} = \left[\frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{(z - z_1)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(z - z_1)^\alpha}\right] + \left[\frac{B_1}{z - z_2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(z - z_2)^\beta}\right] + \ldots;$$

le nombre des coefficients A_1, A_2, ..., A_α, B_1, ... étant égal à m, on peut les prendre arbitrairement, ce qui détermine alors les m coefficients entrant dans $\Pi(z)$.

En posant

$$z = z_1 + h,$$

d'où

$$e^{x(z_1+h)} = e^{xz_1}\left(1 + \frac{hx}{1} + \ldots + \frac{h^\alpha x^\alpha}{1.2\ldots\alpha} + \ldots\right),$$

$$\frac{\Pi(z_1 + h)}{\varphi(z_1 + h)} = \frac{A_1}{h} + \frac{A_2}{h^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{h^\alpha} + B.$$

B ne renfermant que des puissances positives de h, on trouve que le coefficient de $\frac{1}{h}$, dans le développement de $\frac{e^{xz}\Pi(z)}{\varphi(z)}$ suivant les puissances de h, est égal à

$$e^{xz_1}\left[A_1 + A_2\frac{x}{1} + A_3\frac{x^2}{1.2} + \ldots + A_\alpha \frac{x^{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}\right].$$

Désignons alors simplement par A_k la constante arbitraire $2\pi i \frac{A_k}{1.2\ldots(k-1)}$, et, opérant avec z_2, z_3, ... comme on l'a fait avec z_1, on obtiendra, pour la formule (3) développée, l'expression

$$y = e^{xz_1}(A_1 + A_2 x + \ldots + A_\alpha x^{\alpha-1}) + e^{xz_2}(B_1 + B_2 x + \ldots + B_\beta x^{\beta-1}) + \ldots,$$

ce qui est la formule connue de l'intégrale générale de l'équation homogène (1).

Soit maintenant l'équation complète

$$(5) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_m y = f(x).$$

Pour l'intégrer, nous conserverons la forme (3) de l'intégrale générale de l'équation homogène; mais nous supposerons que le polynôme $\Pi(z)$ y soit remplacé par une fonction $\psi(z, x)$ telle que l'équation (5) soit satisfaite par la nouvelle valeur de y. L'équation de condition qu'on obtiendrait pour ψ renfermerait les dérivées partielles de $\psi(z, x)$, par rapport à x, jusqu'à l'ordre m, et, en général, ne pourrait être intégrée; mais on peut profiter de l'indétermination de la fonction ψ pour lui imposer des conditions propres à simplifier cette équation. Dans ce but, nous déterminerons ψ de telle sorte que les formes des $m-1$ premières dérivées de y ne soient pas modifiées par la substitution de $\psi(z, x)$ à $\Pi(z)$.

Ainsi l'on devra avoir

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= \int_S \frac{e^{xz}\,\psi(z, x)}{\varphi(z)}\,dz, \\ \frac{dy}{dx} &= \int_S \frac{z e^{xz}\,\psi(z, x)}{\varphi(z)}\,dz, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} &= \int_S \frac{z^{m-1} e^{xz}\,\psi(z, x)}{\varphi(z)}\,dz, \\ \frac{d^m y}{dx^m} &= \int_S \frac{z^m e^{xz}\,\psi(z, x)}{\varphi(z)}\,dz + \int_S \frac{\partial\,\psi(z, x)}{\partial x}\,\frac{z^{m-1} e^{xz}}{\varphi(z)}\,dz, \end{aligned}\right.$$

avec les équations de condition qui suivent :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_S \frac{\partial\,\psi(z, x)}{\partial x}\,\frac{e^{xz}}{\varphi(z)}\,dz = 0, \\ &\int_S \frac{\partial\,\psi(z, x)}{\partial x}\,\frac{z e^{xz}}{\varphi(z)}\,dz = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\int_S \frac{\partial\,\psi(z, x)}{\partial x}\,\frac{z^{m-1} e^{xz}}{\varphi(z)}\,dz = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on exprime alors que l'équation (5) est satisfaite par les valeurs (6), on obtient, comme dernière condition,

$$(8)\qquad \int_S \frac{\partial\,\psi(z, x)}{\partial x}\,\frac{z^m e^{xz}}{\varphi(z)}\,dz = f(x).$$

Pour satisfaire aux équations (7), il suffit de poser

$$\frac{\partial \psi(z, x)}{\partial x} e^{xz} = \theta(x),$$

θ étant une fonction arbitraire, et de supposer que la courbe S s'étende à l'infini; car alors, pour $k < m - 1$, on a

$$\int_S \frac{z^k \theta(x)}{\varphi(z)} dz = 0,$$

et l'équation (8) devient

$$\int_S \theta(x) \frac{z^m dz}{\varphi(z)} = f(x).$$

On en tire

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi i} f(x);$$

d'où

$$\frac{\partial \psi(z, x)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi i} e^{-xz} f(x),$$

et, par suite,

$$\psi(z, x) = \Pi(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^{x} e^{-xz} f(x)\, dx;$$

de sorte qu'on aura

$$y = \int_S \frac{e^{xz} \Pi(z)}{\varphi(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^{x} f(u)\, du \int_S \frac{e^{(x-u)z}\, dz}{\varphi(z)}, \tag{9}$$

et ce sera l'intégrale générale de (5) si l'on suppose qu'on prenne, pour la fonction arbitraire $\Pi(z)$, un polynôme d'ordre $m - 1$, la courbe S s'étendant d'ailleurs à l'infini.

Développons maintenant cette formule.

La première partie de y est, comme on l'a vu, l'intégrale générale de l'équation (5) privée de son second membre, et si

$$\varphi(z) = (z - z_1)^{\alpha} (z - z_2)^{\beta} \ldots (z - z_n)^{\lambda},$$

elle pourra se mettre sous la forme $Q_\alpha e^{xz_1} + Q_\beta e^{xz_2} + \ldots$, ou $\Sigma Q_\alpha e^{xz_1}$, Q_α, Q_β, ... désignant des polynômes arbitraires dont les ordres sont successivement $\alpha - 1$, $\beta - 1$, ...

Considérons maintenant la seconde partie de y, et effectuons l'intégration le long de la courbe S. Pour calculer le résidu relatif à la racine z_1 de $\varphi(z)$, on aura

$$e^{(x-u)(z_1+h)} = e^{(x-u)z_1}\left[1 + \frac{x-u}{1}h + \ldots + \frac{(x-u)^{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}h^{\alpha-1} + \ldots\right],$$

$$\frac{1}{\varphi(z_1+h)} = \frac{a_1}{h} + \frac{a_2}{h^2} + \ldots + \frac{a_\alpha}{h^\alpha} + \mathrm{B},$$

B ne renfermant que des puissances positives de h; et, pour le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le produit de ces deux développements, on trouvera

$$e^{(x-u)z_1}\left[a_1 + \frac{a_2(x-u)}{1} + \ldots + \frac{a_\alpha(x-u)^{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}\right],$$

d'où

$$\int_{\mathrm{S}} \frac{e^{(x-u)z}dz}{\varphi(z)} = 2\pi i \sum e^{(x-u)z_1}\left[a_1 + \frac{a_2(x-u)}{1} + \ldots + \frac{a_\alpha(x-u)^{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}\right].$$

Par conséquent, dans tous les cas, l'intégrale générale de l'équation différentielle (5) sera donnée par la formule

$$(10)\quad y = \sum \left\{ \mathrm{Q}_\alpha e^{xz_1} + \int_{x_0}^{x} e^{(x-u)z_1}\left[a_1 + \frac{a_2(x-u)}{1} + \ldots + \frac{a_\alpha(x-u)^{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}\right] f(u)\,du \right\},$$

la somme Σ s'étendant aux diverses racines z_1 de l'équation $\varphi(z) = 0$, α étant l'ordre de multiplicité de la racine z_1. Les coefficients a_1, a_2, …, a_α sont, dans la décomposition de $\frac{1}{\varphi(z)}$ en fractions simples, les numérateurs des fractions répondant à la racine z_1 de $\varphi(z)$; enfin Q_α est un polynôme arbitraire d'ordre $\alpha - 1$.

II.

Lorsque l'équation $\varphi(z) = 0$ n'admet que des racines simples, le résultat fourni par la formule (10) coïncide avec celui qu'on obtient alors à l'aide des méthodes classiques de Cauchy et de Lagrange. Dans ce cas, z_1 est racine simple; d'où

$$a_1 = \frac{1}{\varphi'(z_1)},$$

et l'on a

$$y = \sum \left[C_1 e^{xz_1} + \int_{x_0}^{x} \frac{e^{(x-u)z_1} f(u)}{\varphi'(z_1)} du \right].$$

Nous nous proposons actuellement de tirer de ces mêmes méthodes la démonstration de la formule (10) dans toute sa généralité.

Les deux méthodes en question ne diffèrent que par le point de départ; les calculs auxquels elles conduisent sont au fond identiques. Pour fixer les idées, nous choisirons, par exemple, la méthode de Lagrange; et, pour éviter des longueurs inutiles, nous supposerons que l'équation $\varphi(z) = 0$ admette la racine z_1 avec un ordre de multiplicité α, toutes les autres racines $z_{\alpha+1}, \ldots, z_m$ étant simples.

En posant

$$\xi = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_\alpha x^{\alpha-1},$$

l'intégrale générale de l'équation privée de second membre s'écrira

$$y = \xi e^{xz_1} + C_{\alpha+1} e^{xz_{\alpha+1}} + \ldots + C_m e^{xz_m}.$$

En supposant que $C_1, C_2, \ldots, C_m$ restent constants, les dérivées successives de y seront de la forme

$$\frac{d^h y}{dx^h} = z_1^h \xi e^{xz_1} + \binom{h}{1} z_1^{h-1} \xi' e^{xz_1} + \ldots$$
$$+ \binom{h}{i} z_1^{h-i} \xi^i e^{xz_1} + \ldots + z_{\alpha+1}^h C_{\alpha+1} e^{xz_{\alpha+1}} + \ldots + z_m^h C_m e^{xz_m},$$

et il y aura lieu de distinguer le cas où l'on a $h < \alpha$ de celui où l'on a $h \geqq \alpha$. Pour plus de simplicité, nous posons

$$\xi^i = \frac{d^i \xi}{dx^i}, \qquad \binom{h}{i} = \frac{h(h-1)\ldots(h-i+1)}{1.2\ldots i},$$

et nous représenterons par ξ_1, ξ_1^i ce que deviennent ξ et ξ^i quand on y remplace $C_1, C_2, \ldots, C_\alpha$ par leurs dérivées $C'_1, C'_2, \ldots, C'_\alpha$. Alors les valeurs de C'_1, C'_2, ..., C'_m sont fournies par les équations linéaires suivantes :

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l}
\xi_1 e^{xz_1} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + C'_{\alpha+1} e^{xz_{\alpha+1}} \quad + \ldots = 0,\\
z_1 \xi_1 e^{xz_1} + \xi'_1 e^{xz_1} \qquad\qquad\qquad + z_{\alpha+1} C'_{\alpha+1} e^{xz_{\alpha+1}} + \ldots = 0,\\
z_1^2 \xi_1 e^{xz_1} + \binom{2}{1} z_1 \xi'_1 e^{xz_1} + \xi''_1 e^{xz_1} \qquad + z_{\alpha+1}^2 C'_{\alpha+1} e^{xz_{\alpha+1}} + \ldots = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
z_1^{\alpha-1} \xi_1 e^{xz_1} + \binom{\alpha-1}{1} z_1^{\alpha-2} \xi'_1 e^{xz_1} + \binom{\alpha-1}{2} z_1^{\alpha-3} \xi''_1 e^{xz_1} + \ldots\\
\qquad\qquad + \binom{\alpha-1}{\alpha-1} \xi_1^{\alpha-1} e^{xz_1} + z_{\alpha+1}^{\alpha-1} C'_{\alpha+1} e^{xz_{\alpha+1}} + \ldots = 0,\\
z_1^{\alpha} \xi_1 e^{xz_1} + \binom{\alpha}{1} z_1^{\alpha-1} \xi'_1 e^{xz_1} + \binom{\alpha}{2} z_1^{\alpha-2} \xi''_1 e^{xz_1} + \ldots\\
\qquad\qquad + \binom{\alpha}{\alpha-1} z_1 \xi_1^{\alpha-1} e^{xz_1} + z_{\alpha+1}^{\alpha} C'_{\alpha+1} e^{xz_{\alpha+1}} + \ldots = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
z_1^{m-1} \xi_1 e^{xz_1} + \binom{m-1}{1} z_1^{m-1} \xi'_1 e^{xz_1} + \binom{m-1}{2} z_1^{m-2} \xi''_1 e^{xz_1} + \ldots\\
\qquad\qquad + \binom{m-1}{\alpha-1} z_1^{m-\alpha} \xi_1^{\alpha-1} e^{xz_1} + z_{\alpha+1}^{m-1} C'_{\alpha+1} e^{xz_{\alpha+1}} + \ldots = f(x).
\end{array}\right.$$

Si dans ces équations on pose

$$x_1 = \xi_1 e^{xz_1}, \qquad x_2 = \xi'_1 e^{xz_1}, \qquad \ldots, \qquad x_\alpha = \xi_1^{\alpha-1} e^{xz_1},$$
$$x_{\alpha+1} = C'_{\alpha+1} e^{xz_{\alpha+1}}, \qquad \ldots, \qquad x_m = C'_m e^{xz_m},$$

les valeurs de x_1, x_2, ..., x_m, définies par les équations (11) transformées, pourront se déduire aussi de la décomposition de $\frac{1}{\varphi(z)}$ en fractions simples (*voir* la Note II).

Si l'on pose

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \frac{a_1}{z-z_1} + \frac{a_2}{(z-z_1)^2} + \ldots + \frac{a_\alpha}{(z-z_1)^\alpha} + \frac{a_{\alpha+1}}{z-z_{\alpha+1}} + \ldots + \frac{a_m}{z-z_m},$$

on aura en général, quel que soit h,

$$x_h = a_h f(x),$$

ce qui donne

$$(12)\quad \begin{cases} \xi_1 \quad = a_1 f(x) e^{-xz_1}, \\ \xi'_1 \quad = a_2 f(x) e^{-xz_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \xi_1^{\alpha-1} = a_\alpha f(x) e^{-xz_1}; \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} C'_{\alpha+1} = a_{\alpha+1} f(x) e^{-xz_{\alpha+1}} \\ C'_{\alpha+2} = a_{\alpha+2} f(x) e^{-xz_{\alpha+2}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ C'_m \quad = a_m f(x) e^{-xz_m}. \end{cases}$$

Pour une racine simple z_h, on a simplement $a_h = \frac{1}{\varphi'(z_h)}$; par suite les égalités (13) donnent, en général,

$$C_{\alpha+k} = \gamma_{\alpha+k} + \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-xz_{\alpha+k}} f(x)}{\varphi'(z_{\alpha+k})} dx,$$

$\gamma_{\alpha+k}$ désignant une constante arbitraire.

Quant aux équations (12), il faut encore les résoudre pour obtenir les valeurs de $C'_1, C'_2, \ldots; C'_\alpha$.

Si nous développons ces équations, nous obtenons le système suivant :

$$(14)\quad \begin{cases} C'_1 + x C'_2 + x^2 C'_3 + \ldots + x^{\alpha-1} C'_\alpha = a_1 e^{-xz_1} f(x), \\ C'_2 + 2x\, C'_3 + \ldots + (\alpha-1) x^{\alpha-2} C'_\alpha = a_2 e^{-xz_1} f(x), \\ 2.1.C'_3 + \ldots + (\alpha-1)(\alpha-2) x^{\alpha-3} C'_\alpha = a_3 e^{-xz_1} f(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots 3.2.1\, C'_\alpha = a_\alpha e^{-xz_1} f(x). \end{cases}$$

Or, en posant en général

$$C'_{h+1} = x_{h+1}, \qquad a_{h+1} e^{-xz_1} f(x) = b_h,$$

et, remplaçant x par a, le système (14) devient identique à celui qui est résolu dans la Note I; on tirera donc des équations (14)

$$C'_{h+1} = \frac{e^{-xz_1} f(x)}{1.2\ldots h} \left[a_{h+1} - \frac{x}{1} a_{h+2} + \frac{x^2}{1.2} a_{h+3} + \ldots + (-1)^{\alpha-h-1} \frac{x^{\alpha-h-1}}{1.2\ldots(\alpha-h-1)} a_\alpha \right];$$

d'où

$$(15)\quad \begin{cases} C_{h+1}x^h e^{xz_1} = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{x^h}{1.2\ldots h}\Big[a_{h+1} - \frac{u}{1}a_{h+2} + \frac{u^2}{1.2}a_{h+3} + \ldots \\ \qquad\qquad + (-1)^{\alpha-h-1}\dfrac{u^{\alpha-h-1}}{1.2\ldots(\alpha-h-1)}a_\alpha\Big] e^{(x-u)z_1} f(u)\,du. \end{cases}$$

En donnant à h, dans la formule (15), les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1$ et en ajoutant les résultats obtenus, la somme des premiers membres sera égale à ξ.

Dans la somme des seconds membres, réunissons les termes dans lesquels entre un facteur commun a_{p+1}. En donnant à h, dans (15), les valeurs $p, p-1, \ldots$, on obtiendra chaque fois, dans le second membre, un terme de la forme considérée, et l'on trouve facilement, pour l'ensemble de ces termes,

$$a_{p+1}\int_{x_0}^{x} e^{(x-u)z_1} f(u)\frac{(x-u)^p}{1.2\ldots p}\,du;$$

d'où

$$\begin{aligned} \xi &= (C_1 + C_2 x + \ldots + C_\alpha x^{\alpha-1})e^{xz_1} \\ &= \int_{x_0}^{x} e^{(x-u)z_1}\left[a_1 + a_2\frac{x-u}{1} + \ldots + a_\alpha\frac{(x-u)^{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}\right] f(u)\,du, \end{aligned}$$

ce qui conduit bien à la formule qui a été précédemment obtenue à l'aide d'une intégration effectuée le long d'une courbe S s'étendant à l'infini.

III.

Le calcul de l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire, à l'aide d'une intégration effectuée le long d'une courbe fermée, peut encore être employé, dans le cas où les coefficients sont variables, si, par un changement de variable, on peut transformer l'équation proposée en une autre dont les coefficients soient constants. C'est ce qui arrive, en particulier, pour l'équation

$$(16)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + \frac{A_1}{ax+b}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{A_2}{(ax+b)^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{A_m}{(ax+b)^m}y = f(x).$$

En posant $ax + b = e^t$, t étant une nouvelle variable, et indiquant par le symbole D une dérivée prise par rapport à t, on aura, en général,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a^n e^{-nt} D(D-1)(D-2)\ldots(D-n+1)y.$$

Si l'on appelle $F(t)$ ce que devient $f(x)$ par le changement de la variable indépendante, on aura, pour l'équation (16) transformée,

$$\begin{aligned} a^m D(D-1)\ldots(D-m+1)y + a^{m-1}A_1 D(D-1)\ldots(D-m+2)y + \ldots \\ + a^{m-n}A_n D(D-1)\ldots(D-m+n+1)y + \ldots + A_m = e^{mt}F(t). \end{aligned}$$

En posant

$$\varphi(z) = a^m z(z-1)\ldots(z-m+1) + a^{m-1}A_1 z(z-1)\ldots(z-m+2) + \ldots + A_m,$$

l'intégrale générale de l'équation privée du second membre serait

$$y = \int_S \frac{e^{tz}\Pi(z)}{\varphi(z)}\,dz,$$

la courbe S enveloppant tous les points racines de $\varphi(z)$ et le polynôme $\Pi(z)$ étant du degré $m-1$, et cette même intégrale s'exprimerait de la manière suivante au moyen de la première variable x :

$$y = \int_S \frac{(ax+b)^z\Pi(z)}{\varphi(z)}\,dz.$$

C'est la formule donnée par Cauchy [1].

On passera de là à l'intégrale générale de l'équation complète (16), comme on l'a fait plus haut pour l'équation (5), et l'on trouvera l'expression

$$y = \int_S \frac{(ax+b)^z\Pi(z)}{\varphi(z)}\,dz + \frac{a}{2\pi i}\int_{x_0}^{x}(au+b)^{m-1}f(u)\,du\int_S\left(\frac{ax+b}{au+b}\right)^z\frac{dz}{\varphi(z)},$$

dans laquelle $\Pi(z)$ est un polynôme arbitraire d'ordre $m-1$, le contour d'intégration S s'étendant d'ailleurs à l'infini. Enfin l'intégration le long de ce contour peut être effectuée, et le résultat qu'on obtien-

---

(1) *Œuvres de Cauchy*, 2e Série, t. VI, p. 316.

drait ne serait autre que celui qu'on déduit immédiatement de l'application de la formule générale (10) précédemment établie.

NOTE I.

Soit à résoudre le système suivant d'équations linéaires :

$$
(1)\quad \left\{
\begin{array}{l}
x_1 + a x_2 + a^2 x_3 + \ldots + a^h x_{h+1} + \ldots + a^{n-1} x_n = b_0 \\
x_2 + 2a\, x_3 + \ldots + h a^{h-1} x_{h+1} + \ldots + (n-1) a^{n-2} x_n = b_1 \\
2.1.x_3 + \ldots + h(h-1) a^{h-2} x_{h+1} + \ldots + (n-1)(n-2) a^{n-3} x_n = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
h(h-1)\ldots 3.2.1\, x_{h+1} + \ldots + (n-1)\ldots(n-h+1) a^{n-h} x_n = b_h \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1\, x_n = b_{n-1}.
\end{array}
\right.
$$

Ces équations admettent toujours un système unique et bien déterminé de solutions.

Pour les obtenir, multiplions les équations respectivement par

$$1,\quad \frac{\lambda_1}{1},\quad \frac{\lambda_2}{1.2},\quad \ldots,\quad \frac{\lambda_h}{1.2\ldots h},\quad \ldots,\quad \frac{\lambda_{n-1}}{1.2\ldots(n-1)},$$

et ajoutons. Dans la somme, le coefficient de x_{h+1} sera

$$a^h + \frac{h}{1} a^{h-1}\lambda_1 + \frac{h(h-1)}{1.2} a^{h-2}\lambda_2 + \ldots + \frac{h(h-1)\ldots 3.2.1}{1.2\ldots(h-1)h}\lambda_h.$$

Pour annuler les coefficients de toutes les inconnues, sauf celui de x_1, il suffira de poser, en général, $\lambda_k = (-1)^k a^k$. Les multiplicateurs deviendront alors

$$(2)\qquad 1,\quad -\frac{a}{1},\quad +\frac{a^2}{1.2},\quad \ldots,\quad (-1)^k \frac{a^k}{1.2\ldots k},\quad \ldots,\quad (-1)^{n-1}\frac{a^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)},$$

et ils donneront

$$x_1 = b_0 - \frac{a}{1} b_1 + \frac{a^2}{1.2} b_2 + \ldots + (-1)^h \frac{a^h}{1.2\ldots h} b_h + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{a^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} b_{n-1}.$$

Cette première inconnue étant déterminée, on fera abstraction de la première équation, et l'on calculera x_2 dans le nouveau système comme on a calculé x_1 dans le premier, et ainsi de suite.

On peut facilement obtenir la formule générale qui donne les valeurs de toutes les inconnues.

Pour calculer x_{h+1}, par exemple, considérons le système formé par les $n-h$ dernières équations et ajoutons-les après les avoir multipliées respectivement par les $(n-h)$ premiers termes de la suite (2) des multiplicateurs employés pour le calcul de x_1. En supposant $k > h$, le coefficient de x_{k+1}, dans la somme, sera

$$k(k-1)\ldots(k-h+1)a^{k-h}\left[1-\frac{k-h}{1}+\frac{(k-h)(k-h-1)}{1.2}+\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^{k-h}\frac{(k-h)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots(k-h)}\right]=0,$$

et l'on aura simplement

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x_{h+1} = \frac{1}{1.2.3\ldots(h-1)h}\Big[& b_h - \frac{a}{1}b_{h+1} + \frac{a^2}{1.2}b_{h+2} - \ldots \\ & + (-1)^{n-h-1}\frac{a^{n-h-1}}{1.2\ldots(n-h-1)}b_{n-2}\Big],\end{aligned}\right.$$

formule qui donne toutes les solutions en y faisant successivement $h=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Remarquons enfin qu'en posant

$$\varphi(a) = x_1 + ax_2 + a^2x_3 + \ldots + a^{n-1}x_n,$$

le système (1) est identique au suivant :

$$\begin{aligned} &\varphi(a) = b_0, \\ D_a\ &\varphi(a) = b_1, \\ D_a^2\ &\varphi(a) = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ D_a^{n-1}\ &\varphi(a) = b_{n-1}. \end{aligned}$$

NOTE II.

En supposant que l'équation

$$(1) \qquad \varphi(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

admette la racine z_1 d'ordre α de multiplicité, toutes les autres racines $z_{\alpha+1}, \ldots, z_m$ étant simples, on compose, à l'aide de ces racines, le système suivant d'équations linéaires à m inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$(2) \left\{\begin{array}{l}
x_1 + x_{\alpha+1} + \ldots + x_m = b_0, \\
z_1 x_1 + x_2 + z_{\alpha+1} x_{\alpha+1} + \ldots + z_m x_m = b_1, \\
z_1^2 x_1 + \binom{2}{1} z_1 x_2 + \binom{2}{2} x_3 + z_{\alpha+1}^2 x_{\alpha+1} + \ldots + z_m^2 x_m = b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
z_1^{\alpha-1} x_1 + \binom{\alpha-1}{1} z_1^{\alpha-2} x_2 + \binom{\alpha-1}{2} z_1^{\alpha-3} x_3 + \ldots \\
\qquad + \binom{\alpha-1}{\alpha-1} x_\alpha + z_{\alpha+1}^{\alpha-1} x_{\alpha+1} + \ldots + z_m^{\alpha-1} x_m = b_{\alpha-1}, \\
z_1^{\alpha} x_1 + \binom{\alpha}{1} z_1^{\alpha-1} x_2 + \binom{\alpha}{2} z_1^{\alpha-2} x_3 + \ldots \\
\qquad + \binom{\alpha}{\alpha-1} z_1 x_\alpha + z_{\alpha+1}^{\alpha} x_{\alpha+1} + \ldots + z_m^{\alpha} x_m = b_\alpha, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
z_1^{m-1} x_1 + \binom{m-1}{1} z_1^{m-2} x_2 + \binom{m-1}{2} z_1^{m-3} x_3 + \ldots \\
\qquad + \binom{m-1}{\alpha-1} z_1^{m-\alpha} x_\alpha + z_{\alpha+1}^{m-1} x_{\alpha+1} + \ldots + z_m^{m-1} x_m = b_{m-1}.
\end{array}\right.$$

Si l'on désigne alors par $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_{m-1}(z)$ les coefficients des puissances successives de ζ dans le quotient de $\varphi(\zeta)$ par $\zeta - z$, et si l'on pose

$$F(z) = b_{m-1}\varphi_0(z) + b_{m-2}\varphi_1(z) + \ldots + b_0\varphi_{m-1}(z),$$

nous nous proposons de démontrer que *les valeurs des inconnues* x_1,

$x_2, \ldots, x_m$, *définies par les équations* (2), *sont les numérateurs des fractions simples résultant de la décomposition de la fraction rationnelle* $\frac{F(z)}{\varphi(z)}$.

Remarquons d'abord que, de l'identité

$$\varphi(\zeta) = (\zeta - z)[\zeta^{m-1}\varphi_0(z) + \zeta^{m-2}\varphi_1(z) + \ldots + \varphi_{m-1}(z)] + \varphi(z),$$

en posant

$$f(\zeta) = \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z)}{\zeta - z} = \frac{\varphi(z) - \varphi(\zeta)}{z - \zeta}, \tag{3}$$

on déduit

$$f(\zeta) = \zeta^{m-1}\varphi_0(z) + \zeta^{m-2}\varphi_1(z) + \ldots + \varphi_{m-1}(z),$$

et aussi, la valeur de $f(\zeta)$ ne changeant pas quand on permute ζ et z dans son expression,

$$f(\zeta) = z^{m-1}\varphi_0(\zeta) + z^{m-2}\varphi(\zeta) + \ldots + \varphi_{m-1}(\zeta).$$

Ceci posé, formons l'équation qui se déduit des équations (2) en les additionnant après les avoir multipliées par

$$\varphi_{m-1}(z), \quad \varphi_{m-2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_1(z), \quad \varphi_0(z).$$

Le second membre de cette équation sera $F(z)$; et, dans le premier, les coefficients de $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ seront

$$f(z_1), \quad \frac{1}{1}f'(z_1), \quad \ldots, \quad \frac{1}{1.2\ldots(\alpha-1)}f^{\alpha-1}(z_1),$$

ceux de $x_{\alpha+1}, x_{\alpha+2}, \ldots, x_m$ étant respectivement

$$f(z_{\alpha+1}), \quad f(z_{\alpha+2}), \quad \ldots, \quad f(z_m).$$

Pour ces derniers, la formule (3) donne immédiatement

$$f(z_{\alpha+h}) = \frac{\varphi(z)}{1.2.3\ldots z_{\alpha+h}} \quad (h = 1.2.3\ldots m - \alpha).$$

Quant aux précédents, la formule (3) donnant, pour $n \leq \alpha - 1$,

$$f^n(z_1) = 1.2.3\ldots n \frac{\varphi(z)}{(z - z_1)^{n+1}},$$

leurs valeurs seront successivement

$$\frac{\varphi(z)}{z - z_1}, \quad \frac{\varphi(z)}{(z - z_1)^2}, \quad \frac{\varphi(z)}{(z - z_1)^3}, \quad \ldots, \quad \frac{\varphi(z)}{(z - z_1)^\alpha}.$$

Par suite, de l'équation ainsi formée, on tirera

$$(4) \qquad \frac{F(z)}{\varphi(z)} = \frac{x_1}{z - z_1} + \frac{x_2}{(z - z_1)^2} + \ldots + \frac{x_\alpha}{(z - z_1)^\alpha} + \frac{x_{\alpha+1}}{z - z_{\alpha+1}} + \ldots,$$

ce qui démontre la proposition énoncée, et il est manifeste qu'elle subsiste quand l'équation (1) admet des racines multiples en nombre quelconque.