G. FLOQUET

Sur une classe d'équations différentielles linéaires non homogènes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 4 (1887), p. 111-128
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1887_3_4__111_0>

SUR UNE CLASSE

D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

NON HOMOGÈNES,

PAR M. G. FLOQUET,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY.

Il est d'usage, dans les Cours d'Analyse, lorsqu'on s'occupe des équations différentielles linéaires pourvues d'un second membre, de mentionner un cas très simple où l'intégration s'effectue immédiatement: c'est celui où, le premier membre étant à coefficients constants, le second est représenté soit par un polynôme multiplié par une exponentielle, soit par une expression telle que $a\cos px + b\sin px$. On montre qu'il existe alors une intégrale particulière, consistant soit dans le produit d'un polynôme par l'exponentielle, soit en une expression, telle que $\mathrm{A}\cos px + \mathrm{B}\sin px$, multipliée par une puissance entière, nulle ou positive, de x; c'est-à-dire que, dans les deux cas, cette solution particulière rentre dans le type

$$\mathfrak{P}(x) = \chi_0(x) + x\chi_1(x) + x^2\chi_2(x) + \ldots + x^s\chi_s(x),$$

où les coefficients $\chi(x)$ sont uniformes et se reproduisent à un même facteur constant près ε lorsqu'on augmente x d'une constante ω. Ces fonctions $\chi(x)$ peuvent s'appeler, par abréviation, des fonctions *périodiques de seconde espèce*, de *période* ω et de *multiplicateur* ε; s est le *degré* de $\mathfrak{P}(x)$.

Cette forme d'une intégrale n'est pas spéciale aux équations considérées, et il est facile de l'étendre à toute une classe d'équations linéaires pourvues d'un second membre, en se reportant aux propriétés des équations différentielles linéaires homogènes, à coefficients périodiques [1].

1. Soit l'équation linéaire

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = \varpi_0(x) + x\,\varpi_1(x) + \ldots + x^n\,\varpi_n(x),$$

dont je représenterai le premier et le second membre respectivement par $P(y)$ et $\varpi(x)$. Les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sont supposés uniformes, avec le seul point singulier essentiel $x = \infty$, et en outre périodiques, de période ω. Les coefficients $\varpi_0, \varpi_1, \ldots, \varpi_n$ seront aussi des fonctions uniformes de x, sans autre singularité essentielle que l'infini, mais périodiques de seconde espèce, de période ω et de même multiplicateur ε.

Parmi les équations différentielles linéaires homogènes, à coefficients uniformes et périodiques, de période ω, qui admettent le second membre $\varpi(x)$ comme intégrale, je construis la plus simple, celle d'ordre minimum.

Soit

$$Q(y) = \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} + q_1 \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + q_{n+1} y = 0$$

cette équation, qui est d'ordre $n + 1$.

Considérons l'équation composée

$$Q[P(y)] = 0,$$

c'est-à-dire

$$R(y) = \frac{d^{n+1} P(y)}{dx^{n+1}} + q_1 \frac{d^n P(y)}{dx^n} + \ldots + q_{n+1} P(y) = 0.$$

Elle est linéaire, homogène, d'ordre $m + n + 1$, et ses coefficients sont exactement de même nature que les coefficients p et q.

Nous supposerons que l'intégrale générale de $R(y) = 0$ est uniforme, avec le seul point singulier essentiel $x = \infty$, ce que l'on saura reconnaître, d'après les principes posés par M. Fuchs. Il en sera alors de même des intégrales de $P(y) = 0$ et de $P(y) = \varpi(x)$, car toute solution de chacune de ces équations satisfait à $R(y) = 0$.

---

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 2^e série, t. XII.

2. On sait que $R(y) = 0$ admet, comme intégrales distinctes, $m+n+1$ polynômes de la forme $\mathfrak{P}(x)$, dont les divers multiplicateurs sont les racines de l'équation fondamentale $\Delta_r = 0$, relative à la période ω. On peut même supposer que m de ces polynômes, convenablement choisis, satisfont à $P(y) = 0$.

Soit donc $y_1, y_2, \ldots, y_m; y_{m+1}, \ldots, y_{m+n+1}$ le système fondamental, ainsi constitué, dont les m premiers éléments $y_1, y_2, \ldots y_m$ annulent $P(y)$. Les expressions $P(y_{m+1}), P(y_{m+2}), \ldots, P(y_{m+n+1})$, qui sont évidemment des polynômes de même forme que $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+n+1}$, sont alors différentes de zéro, et en outre satisfont à $Q(y) = 0$. De plus, elles sont linéairement indépendantes; car une relation linéaire homogène entre ces quantités exprimerait qu'une combinaison linéaire de $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+n+1}$ satisfait à $P(y) = 0$, de sorte que le système y_1, $y_2, \ldots, y_{m+n+1}$ ne serait pas fondamental.

De là plusieurs conséquences :

Les polynômes $P(y_{m+1}), P(y_{m+2}), \ldots, P(y_{m+n+1})$ appartenant évidemment aux mêmes multiplicateurs que $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+n+1}$, les multiplicateurs de $y_1, y_2, \ldots, y_{m+n+1}$ se composeront de ceux de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et de ceux de $P(y_{m+1}), P(y_{m+2}), \ldots, P(y_{m+n+1})$. Autrement dit, les racines de l'équation fondamentale $\Delta_r = 0$ sont les racines des équations fondamentales $\Delta_p = 0$ et $\Delta_q = 0$, qui, relativement à la période ω, répondent à $P(y) = 0$ et à $Q(y) = 0$. C'est ce que j'ai établi ailleurs en démontrant que, si une expression différentielle linéaire est composée de plusieurs autres, le premier membre de son équation fondamentale est le produit des premiers membres des équations fondamentales relatives aux équations composantes, ces premiers membres étant écrits sous la forme habituelle.

Comme les intégrales $P(y_{m+1}), P(y_{m+2}), \ldots, P(y_{m+n+1})$ de $Q(y) = 0$ possèdent évidemment toutes le multiplicateur ε, il en est de même de $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+n+1}$ En outre, comme l'équation fondamentale $\Delta_q = 0$, de degré $n+1$, admet la seule racine ε, si cette quantité est racine de degré de multiplicité μ de $\Delta_p = 0$, on voit que ε sera racine multiple d'ordre $n+\mu+1$ de $\Delta_r = 0$, et que, par conséquent, ceux des polynômes $y_1, y_2, \ldots, y_{m+n+1}$, qui appartiennent à ce multiplicateur, sont d'un degré égal ou inférieur à $n+\mu$.

3. C'est cette association, dans un même système fondamental, de m polynômes $\mathfrak{P}(x)$ satisfaisant à $P(y) = 0$, avec $n+1$ polynômes $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+n+1}$, tels que $P(y_{m+1}), P(y_{m+2}), \ldots, P(y_{m+n+1})$ satisfassent à $Q(y) = 0$, qui montre immédiatement que l'équation proposée $P(y) = \varpi(x)$ admet toujours comme intégrale au moins un polynôme de la forme $\mathfrak{P}(x)$.

On voit d'abord qu'il existe toujours une combinaison linéaire de $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+n+1}$, et une seule, qui coïncide avec une pareille intégrale.

En effet, puisque, par construction, $\varpi(x)$ est une solution de $Q(y) = 0$, et que $P(y_{m+1}), P(y_{m+2}), \ldots, P(y_{m+n+1})$ en sont $n+1$ intégrales distinctes, il existe un groupe $l_1, l_2, \ldots, l_{n+1}$ de constantes, tel que l'on ait

$$\varpi(x) = l_1 P(y_{m+1}) + l_2 P(y_{m+2}) + \ldots + l_{n+1} P(y_{m+n+1}),$$

ce qui s'écrit

$$P(l_1 y_{m+1} + l_2 y_{m+2} + \ldots + l_{n+1} y_{m+n+1}) = \varpi(x);$$

c'est-à-dire que $l_1 y_{m+1} + l_2 y_{m+2} + \ldots + l_{n+1} y_{m+n+1}$ satisfait à

$$P(y) = \varpi(x).$$

Il n'existe aucune autre combinaison

$$l'_1 y_{m+1} + l'_2 y_{m+2} + \ldots + l_{n+1} y_{m+n+1}$$

qui soit dans le même cas; car

$$l'_1 P(y_{m+1}) + l'_2 P(y_{m+2}) + \ldots + l'_{n+1} P(y_{m+n+1})$$

serait aussi identique à $\varpi(x)$, ce qui est impossible.

Je désignerai par $\Phi(x)$ cette combinaison unique. Elle est bien de la forme $\mathfrak{P}(x)$, de multiplicateur ε,

$$\Phi(x) = \varphi_0(x) + x\varphi_1(x) + \ldots + x_\lambda \varphi^\lambda(x).$$

Quant à son degré λ, il est au plus égal à $n+\mu$, puisque, avons-nous vu, $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+n+1}$ sont au plus de degré $n+\mu$, μ désignant le nombre de fois que ε est racine de $\Delta_p = 0$. Ce degré λ n'est d'ailleurs pas inférieur à n; car l'opération P, que l'on effectue sur le polynôme $\Phi(x)$, pour le rendre identique à $\varpi(x)$, ne peut pas élever son degré. Ainsi, l'on a

$$n \leq \lambda \leq n + \mu,$$

μ étant au plus égal à m.

Mais $\Phi(x)$ ne sera pas toujours le seul polynôme, de la forme $\mathfrak{P}(x)$, qui satisfasse à l'équation proposée. Pour satisfaire à cette équation, un pareil polynôme n'a pas besoin d'être une combinaison linéaire des seules intégrales $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+n+1}$, mais bien de toutes celles des intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_{m+n+1}$ qui admettent le multiplicateur ε de $\varpi(x)$. En désignant donc par $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ les μ solutions de $P(y) = 0$ qui appartiennent à ce multiplicateur, l'expression générale du polynôme cherché sera

$$F(x) = \Phi(x) + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_\mu y_\mu,$$

les C représentant des constantes arbitraires.

Remarquons que, même en fixant les constantes C, le degré du polynôme $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_\mu y_\mu$ peut varier de 0 à $\mu - 1$. Si ε n'annule pas tous les mineurs du premier ordre dans Δ_p, ce degré est $\mu - 1$. Si ε annule tous les mineurs jusqu'à l'ordre μ exclusivement, ce degré est zéro. En tout cas, il est inférieur à μ. Or on a

$$\lambda \leq n + \mu;$$

par conséquent, si ν désigne le degré de l'expression totale $F(x)$, degré qui peut être mal déterminé, ν sera toujours égal ou inférieur à $n + \mu$, quelles que soient les valeurs particulières attribuées aux constantes arbitraires, de sorte qu'on a, comme pour λ,

$$n \leq \nu \leq n + \mu.$$

De là les conclusions suivantes :

L'équation proposée $P(y) = \varpi(x)$ *admet toujours comme intégrale un polynôme de la forme* $\mathfrak{P}(x)$, *et nécessairement de multiplicateur* ε.

Si l'équation privée du second membre n'a aucune solution du multiplicateur ε, *ce polynôme est unique et son degré est* n.

Si, au contraire, $P(y) = 0$ *a* μ *solutions fondamentales appartenant au multiplicateur* ε, *les coefficients du polynôme renferment linéairement* μ *constantes arbitraires. Il y en a donc une infinité qui répondent à la ques-*

tion; mais leurs degrés sont tous compris entre n et $n+\mu$, ou égaux à l'un de ces deux nombres.

Observons encore que, si la partie arbitraire $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_\mu y_\mu$ de $F(x)$ est d'un degré inférieur au degré λ de la partie déterminée $\Phi(x)$, le degré ν est déterminé, c'est-à-dire que tous les polynômes $F(x)$ ont le même degré, l'un des nombres n, $n+1$, ..., $n+\mu$. C'est ce qui aura lieu nécessairement si μ ne surpasse pas λ, et *a fortiori* si l'on a

$$m \leq n.$$

4. Lorsque n est nul, c'est-à-dire lorsque $\varpi(x)$ se réduit à une fonction périodique de seconde espèce, $Q(y)$ est du premier ordre et $R(y)$ d'ordre $m+1$. On a alors, en conservant les mêmes notations,

$$F(x) = \Phi(x) + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_\mu y_\mu,$$
$$\Phi(x) = l_1 y_{m+1}.$$

Si $P(y)=0$ n'a aucune intégrale appartenant au multiplicateur ε, l'équation proposée admet une solution périodique de seconde espèce, et il n'y a pas d'autre expression $\mathfrak{P}(x)$ qui satisfasse à l'équation.

Si, au contraire, $P(y)=0$ a μ intégrales fondamentales de multiplicateur ε, les constantes arbitraires apparaissent, et il existe une infinité de solutions $\mathfrak{P}(x)$, dont le degré ne peut surpasser μ. Par exemple, lorsque ε est racine simple de $\Delta_p = 0$, on a

$$F(x) = C_1 y_1 + l_1 y_{m+1}.$$

Or y_1 est une fonction périodique de seconde espèce $h(x)$; $l_1 y_{m+1}$ ou $\Phi(x)$ se réduit à $\varphi_0(x)$ ou à $\varphi_0(x) + x\varphi_1(x)$ suivant que, dans Δ_r, ε annule ou n'annule pas tous les mineurs du premier ordre. On a donc

$$F(x) = C_1 h(x) + \varphi_0(x) + x\varphi_1(x),$$

φ_1 pouvant être identiquement nul.

5. Voici une proposition qui est la généralisation d'un théorème que j'ai établi pour les équations différentielles linéaires homogènes, telles que $P(y)=0$, et qui donne souvent des indications sur la nature des coefficients d'une solution $\mathfrak{P}(x)$. De plus, elle va donner, pour le degré ν

de cette solution, une limite supérieure qui, tout en dépendant toujours uniquement de n et du premier membre $P(y)$, sera en général plus petite que $n + \mu$.

Si l'expression

$$F(x) = \psi_0(x) + x\psi_1(x) + \ldots + x^\nu \psi_\nu(x),$$

supposée de la forme $\mathfrak{P}(x)$, *est une intégrale de l'équation* $P(y) = \varpi(x)$, *ses* ν *dérivées successives, prises en considérant les coefficients* $\psi(x)$ *comme des constantes, satisfont respectivement aux* ν *équations que l'on déduit successivement de la proposée en dérivant de la même manière son second membre* $\varpi(x)$.

Employons, en effet, la caractéristique ∂ pour représenter ces dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^\nu F}{\partial x^\nu}, \frac{\partial \varpi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2}, \ldots$.

Puisque $F(x)$ satisfait à $P(y) = \varpi(x)$, $F(x + k\omega)$, quel que soit le nombre entier k, satisfera à

$$P(y) = \varpi(x + k\omega),$$

c'est-à-dire à

$$P(y) = \varepsilon^k\left[\varpi + \frac{k\omega}{1}\frac{\partial\varpi}{\partial x} + \frac{(k\omega)^2}{1.2}\frac{\partial^2\varpi}{\partial x^2} + \ldots + \frac{(k\omega)^n}{1.2\ldots n}\frac{\partial^n\varpi}{\partial x^n}\right].$$

Or on a

$$F(x + k\omega) = \varepsilon^k\left[F + \frac{k\omega}{1}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{(k\omega)^2}{1.2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \ldots + \frac{(k\omega)^\nu}{1.2\ldots\nu}\frac{\partial^\nu F}{\partial x^\nu}\right].$$

En identifiant, il vient

$$\begin{aligned} P(F) + \frac{k\omega}{1}P\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{(k\omega)^2}{1.2}P\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) + \ldots + \frac{(k\omega)^\nu}{1.2\ldots\nu}P\left(\frac{\partial^\nu F}{\partial x^\nu}\right) \\ = \varpi + \frac{k\omega}{1}\frac{\partial\varpi}{\partial x} + \frac{(k\omega)^2}{1.2}\frac{\partial^2\varpi}{\partial x^2} + \ldots + \frac{(k\omega)^n}{1.2\ldots n}\frac{\partial^n\varpi}{\partial x^n}. \end{aligned}$$

Comme cette identité a lieu pour une infinité de valeurs de $k\omega$, on en conclut

$$P\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial\varpi}{\partial x}, \qquad P\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2\varpi}{\partial x^2}, \qquad \ldots.$$

Nous avons vu que le degré ν de la solution $F(x)$ ne peut être inférieur à n. Cela résulte d'ailleurs de l'identité précédente. Deux cas peuvent donc se présenter : $\nu = n$ ou $\nu > n$.

Lorsque ν est égal à n, on aura

$$P\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial \varpi}{\partial x}, \quad P\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2}), \quad \ldots, \quad P\left(\frac{\partial^n F}{\partial x^n}\right) = \frac{\partial^n \varpi}{\partial x^n}.$$

Mais, lorsque ν sera supérieur à n, on aura, outre ces égalités, les suivantes

$$P\left(\frac{\partial^{n+1} F}{\partial x^{n+1}}\right) = 0, \quad P\left(\frac{\partial^{n+2} F}{\partial x^{n+2}}\right) = 0, \quad \ldots, \quad P\left(\frac{\partial^{\nu} F}{\partial x^{\nu}}\right) = 0,$$

qui montrent que les $\nu - n$ dernières dérivées de $F(x)$, prises comme on l'a dit, satisfont à l'équation privée du second membre $P(y) = 0$.

Une solution de l'équation complète peut ainsi faire connaître des intégrales de l'équation privée du second membre. Il peut même arriver qu'elle les fasse connaître toutes. Inversement, lorsque ν est supérieur à n, la connaissance des intégrales de $P(y) = 0$ entraîne celle de certains coefficients dans le polynôme $F(x)$. Ainsi, si nous nous reportons au cas examiné au n° 4, où n était nul en même temps que ε annulait Δ_p sans annuler tous les mineurs du premier ordre dans Δ_r, on avait trouvé

$$F(x) = C_1 h(x) + \varphi_0(x) + x\,\varphi_1(x).$$

Par suite de notre théorème, $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \varphi_1(x)$ est une intégrale de $P(y) = 0$. Elle est alors nécessairement de la forme

$$\varphi_1(x) = l\,h(x),$$

l étant une constante déterminée; d'où

$$F(x) = \varphi_0(x) + (lx + C_1)\,h(x).$$

6. On vient de voir que, si la solution $F(x)$ est d'un degré ν supérieur à n, les dérivées $\dfrac{\partial^{n+1} F}{\partial x^{n+1}}, \dfrac{\partial^{n+2} F}{\partial x^{n+2}}, \ldots, \dfrac{\partial^{\nu} F}{\partial x^{\nu}}$ sont des intégrales de $P(y) = 0$. Or soit $x^{\mu'-1}$ la plus haute puissance de x qui figure explicitement dans les polynômes $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$, de multiplicateur ε, qui satisfont à $P(y) = 0$, auquel cas μ' est au plus égal à μ. Comme la

première des dérivées en question est du degré $\nu - n - 1$, il faut que l'on ait

$$\nu - n - 1 \leq \mu' - 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \nu \leq n + \mu';$$

d'où une nouvelle limite supérieure du degré ν, plus basse en général que la précédente et qui est, comme la première, directement en rapport avec $P(y)$.

Le degré est toujours compris entre les nombres n et $n + \mu'$, ou égal à l'un d'eux.

Par exemple, si ε annule tous les mineurs de Δ_p jusqu'à l'ordre μ exclusivement, on aura $\mu' = 1$ et, par conséquent, le degré ν sera égal à n ou à $n + 1$.

7. Lorsque les coefficients $\varpi_0(x), \varpi_1(x), \ldots, \varpi_n(x)$ de $\varpi(x)$, ou au moins l'un d'eux, sont variables, et que ceux du premier membre $P(y)$ sont des constantes, on peut considérer ces derniers comme périodiques de première espèce, de même période ω que $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n$. On est donc, dans le cas étudié, sous la condition d'uniformité imposée toujours aux intégrales de $R(y) = 0$.

Ici, l'on connaît immédiatement les racines de l'équation fondamentale $\Delta_p = 0$; car leurs logarithmes, divisés par ω, sont les racines de l'équation algébrique

$$f(\rho) = \rho^m + p_1 \rho^{m-1} + p_2 \rho^{m-2} + \ldots + p_{m-1} \rho + p_m = 0.$$

Le nombre μ' est en outre bien facile à obtenir. L'équation $\Delta_p = 0$ ayant μ solutions égales à ε, $f(\rho) = 0$ a μ racines égales à $\frac{\log \varepsilon}{\omega}$; mais, à cause des valeurs multiples de $\log \varepsilon$, ces μ racines ne sont pas nécessairement égales entre elles : elles peuvent différer de multiples entiers de $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}$; *$\mu'$ représente le nombre de celles qui sont en plus grand nombre égales entre elles*. Si, en effet, ρ_1 est leur valeur commune et s ce nombre, $x^{s-1} e^{\rho_1 x}$ est celle des intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ qui renferme x explicitement avec le plus haut exposant, de sorte que s coïncide avec μ'.

Si, en particulier, l'équation $f(\rho) = 0$ a toutes ses racines inégales, μ' sera égal à l'unité.

Considérons, par exemple, l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 y = \cos\beta x,$$

pour laquelle on a $\varepsilon = 1$, $\omega = \frac{2\pi}{\beta}$. Les racines de $f(\rho) = 0$ sont $\pm\alpha\sqrt{-1}$; par suite, celles de $\Delta_p = 0$ sont $e^{\pm\frac{2\pi\alpha\sqrt{-1}}{\beta}}$.

Si donc α n'est ni nul, ni un multiple entier de β, l'équation admet une solution périodique, de période $\frac{2\pi}{\beta}$. Si α, n'étant pas nul, est un multiple $k\beta$ de β, comme alors μ' est l'unité, ν sera égal à zéro ou à 1. Enfin, si α est nul, μ' est égal à 2, et ν peut être 0 ou 1 ou 2. C'est ce qui se vérifie, puisque, dans le premier cas, on a

$$F(x) = \frac{\cos\beta x}{\alpha^2 - \beta^2};$$

dans le second,

$$F(x) = C_1 \cos k\beta x + C_2 \sin k\beta x + \frac{\cos\beta x}{(k^2 - 1)\beta^2}$$

ou

$$F(x) = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x + \frac{x \sin\beta x}{2\beta},$$

suivant que k est différent de l'unité ou égal à l'unité; et enfin, dans le troisième,

$$F(x) = C_1 x + C_2 - \frac{\cos\beta x}{\beta^2}$$

ou

$$F(x) = C_1 x + C_2 + \frac{x^2}{2},$$

suivant que β est différent de zéro ou nul.

Voici encore une remarque qui se rapporte au cas actuel et qui est souvent utile.

Lorsque $\varpi(x)$, étant périodique, de période ω, est décomposable en i parties séparément périodiques, mais dont les périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i$ soient toutes des sous-multiples de ω, si aucun multiple de $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega_1}$, de $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega_2}$, ..., de $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega_i}$ n'est racine de $f(\rho)$, l'équation $P(y) = \varpi(x)$ admet toujours une intégrale périodique, de période ω.

Considérons, en effet, l'équation obtenue en égalant $P(y)$ à l'une des parties, de période ω_j. Puisque $f(\rho)$ n'a pour racine aucun multiple de $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega_j}$, cette équation possède une intégrale périodique, de période ω_j, qui admet aussi la période ω, vu que ω_j en est un sous-multiple. Toutes les équations pareilles obtenues en donnant à j les valeurs $1, 2, 3, \ldots, i$ ont donc une solution de période ω. Leur somme, qui est une intégrale de $P(y) = \varpi(x)$, est par conséquent dans le même cas.

8. Supposons enfin que, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ étant encore constants, le second membre soit de la forme

$$e^{\alpha x}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n),$$

les a et α désignant des constantes déterminées.

On aura

$$Q(y) = \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - \frac{n+1}{1}\alpha\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{(n+1)n}{1.2}\alpha^2\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + (-\alpha)^{n+1}y;$$

$P(y)$ et $Q(y)$ étant tous les deux à coefficients constants, $R(y)$ est aussi à coefficients constants, de sorte que l'intégrale générale de $R(y) = 0$ est d'elle-même uniforme.

On peut regarder les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_m$ comme périodiques de période arbitraire ω, et les coefficients $\varpi_0, \varpi_1, \ldots, \varpi_n$ comme périodiques, de seconde espèce de la même période ω, le multiplicateur étant $e^{\alpha\omega}$.

L'équation

$$f(\rho) = \rho^m + p_1\rho^{m-1} + p_2\rho^{m-2} + \ldots + p_{m-1}\rho + p_m = 0$$

et l'équation analogue pour $Q(y)$, savoir

$$(\rho - \alpha)^{n+1} = 0,$$

ont respectivement pour racines les logarithmes, divisés par ω, des racines des équations fondamentales $\Delta_p = 0$ et $\Delta_q = 0$. L'équation

$$f(\rho)(\rho - \alpha)^{n+1} = 0$$

a donc pour solutions les logarithmes, divisés par ω, des racines de $\Delta_r = 0$.

Pour que l'équation fondamentale $\Delta_p = 0$ ait μ racines égales à $e^{\alpha\omega}$, il faut et il suffit que μ racines de $f(\rho) = 0$ soient égales à α, ou au moins que leurs différences avec α soient des multiples de $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}$. Or, ω étant arbitraire, on peut toujours supposer qu'aucune des différences en question n'est un de ces multiples. La condition est donc que μ racines soient égales à α, et le nombre μ' est par suite égal à μ.

Cette condition étant remplie, l'équation

$$f(\rho)(\rho - \alpha)^{n+1} = 0$$

possède alors $n + 1 + \mu$ racines égales à α, de sorte que $R(y) = 0$ admet les $n + 1 + \mu$ intégrales

$$e^{\alpha x}, \quad x e^{\alpha x}, \quad x^2 e^{\alpha x}, \quad \ldots, \quad x^{n+\mu} e^{\alpha x},$$

dont les μ premières appartiennent évidemment à $P(y) = 0$.

Il résulte de là que la combinaison linéaire désignée au n° 3 par $\Phi(x)$ est ici

$$\Phi(x) = e^{\alpha x} x^{\mu}(l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \ldots + l_n x^n),$$

les l étant des constantes déterminées. Actuellement, son degré λ est toujours égal à $n + \mu$, c'est-à-dire que l_n n'est jamais nul. En effet, d'après la proposition du n° 5, il faut que $\frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n}$ satisfasse à

$$P(y) = 1.2.3\ldots n a_n e^{\alpha x}.$$

Or cela ne pourrait avoir lieu si λ était égal à $n + \mu - i$, i n'étant pas nul ; car alors la dérivée $\frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n}$ appartiendrait au degré $\mu - i$, et, comme elle est un agrégat additif de termes de la forme

$$C x^j e^{\alpha x},$$

elle annulerait $P(y)$.

Quant à l'expression générale de l'intégrale $\mathfrak{F}(x)$, elle est

$$F(x) = \Phi(x) + e^{\alpha x}(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{\mu-1} x^{\mu-1}).$$

Elle est, par conséquent, de même nature que le second membre $\varpi(x)$.

Jamais ici μ ne peut surpasser λ, de sorte que (n° 3) le degré ν de $F(x)$ est parfaitement déterminé, quelles que soient les constantes arbitraires C, et toujours égal à $n + \mu$.

En résumé, on voit que, *si* α *annule les dérivées de* $f(\rho)$ *jusqu'à l'ordre* μ *exclusivement, l'intégrale* $F(x)$ *est le produit de* $e^{\alpha x}$ *par un polynôme à coefficients constants, de degré* $n + \mu$, *où les* μ *coefficients de* $x^{\mu-1}$, $x^{\mu-2}$, ... *sont arbitraires*. On sait bien d'ailleurs comment s'obtiennent les autres coefficients.

APPLICATION.

9. Dans l'étude des forces centrales, on suppose souvent que la force ne dépend pas uniquement de la distance du mobile au centre d'action. Jacobi a signalé une loi particulière où la force est exprimée par le rapport

$$\frac{f(\theta)}{r^2},$$

r désignant la distance au centre, pris pour pôle, et θ l'angle polaire. M. Darboux en a déduit une proposition intéressante, consignée dans la Note XI du *Cours de Mécanique* de Despeyrous.

Je vais, à l'aide des considérations qui précèdent, étudier la forme que présente la trajectoire lorsque la fonction $f(\theta)$ remplit certaines conditions.

On sait que, si C est la constante des aires et si l'on pose

$$\frac{C^2}{r} = z,$$

cette ligne peut être obtenue par l'intégration de l'équation linéaire

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = f(\theta). \tag{1}$$

Conformément à mes notations, j'appellerai $R(z)$ le résultat de la substitution de $\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z$ dans l'expression $\frac{dz}{d\theta} - \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} z$.

Supposons que, pour un état initial déterminé, l'équation de la trajectoire soit

$$z = \varphi(\theta),$$

$\varphi(\theta)$ étant uniforme avec le seul point singulier essentiel $x=\infty$. L'équation (1) montre qu'alors $f(\theta)$ est dans le même cas, et il en est de même de l'intégrale générale de $R(z)=0$. Supposons qu'en outre $\varphi(\theta)$ soit périodique, de période 2π; $f(\theta)$ admettra aussi la période 2π.

Observons que, pour tout autre état initial, la trajectoire aura pour équation

$$z = C_1 \cos\theta + C_2 \sin\theta + \varphi(\theta),$$

et par conséquent possédera les propriétés attribuées à la première.

Réciproquement, $f(\theta)$ et l'intégrale de $R(z)=0$ étant uniformes, sans autre singularité essentielle que l'infini, si l'on suppose que $f(\theta)$ soit périodique, de période 2π, la valeur de r en fonction de θ admettra-t-elle aussi cette période ?

Pour répondre, il suffit de remarquer que l'équation (1) est de celles qui ont été examinées au n° 7. L'équation en ρ est ici

$$\rho^2 + 1 = 0.$$

Ses racines étant toutes deux de la forme $k\sqrt{-1}$, μ est égal à 2; mais, ces racines étant inégales, μ' est l'unité. L'expression du polynôme désigné par F, et qui coïncide ici avec l'intégrale générale de l'équation (1), sera donc du degré zéro ou du premier degré en θ. Comme, dans le second cas, le coefficient de θ doit satisfaire à l'équation privée du second membre, on voit que l'équation générale de la trajectoire est toujours

$$\frac{C^2}{r} = C_1 \cos\theta + C_2 \sin\theta + \varphi(\theta) + \theta(a\cos\theta + b\sin\theta),$$

où $\varphi(\theta)$ est périodique, de période 2π, où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires, et a et b deux constantes déterminées qui peuvent être nulles.

Les égalités

$$a=0, \qquad b=0$$

expriment précisément que r est périodique.

Par conséquent, la loi considérée $\frac{f(\theta)}{r^2}$, $f(\theta)$ remplissant les conditions indiquées, ne conduit pas toujours à une valeur périodique de r. Elle peut donner naissance à deux catégories de trajectoires, suivant la nature de $f(\theta)$, mais quel que soit l'état initial.

Dans l'une, il n'existe sur chaque rayon vecteur qu'un seul point de la courbe, de sorte que, si ce rayon fait un tour complet dans un temps fini, à chaque révolution, le mobile reprendra le même chemin.

Dans l'autre, un rayon vecteur donné (θ) *rencontre la trajectoire en un nombre infini de points, mais de telle façon que les points où il coupe la courbe inverse sont équidistants, la distance constante étant*

$$\pm 2\pi(a\cos\theta + b\sin\theta).$$

On va préciser les conditions auxquelles doit satisfaire $f(\theta)$, pour que la trajectoire appartienne à l'une ou à l'autre de ces catégories, dans le cas où $f(\theta)$ est une fonction rationnelle de $\sin\theta$ et de $\cos\theta$, ce qui est le type des fonctions périodiques.

10. Supposons d'abord que $f(\theta)$ soit une fonction entière du sinus et du cosinus.

On sait que, si A, B, A_k, B_k et G désignent des constantes, et K un nombre entier supérieur à l'unité et fini, une pareille fonction se met sous la forme

$$A\cos\theta + B\sin\theta + G + \sum_k (A_k\cos k\theta + B_k\sin k\theta)$$

et d'une seule manière.

Pour obtenir une solution de l'équation (1), il suffit de trouver une intégrale de chacune des équations

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = A\cos\theta + B\sin\theta, \tag{2}$$

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = G + \sum_k (A_k\cos k\theta + B_k\sin k\theta), \tag{3}$$

et de les ajouter.

Or on satisfait à l'équation (2) en posant

$$z = \frac{\theta}{2}(A\sin\theta - B\cos\theta).$$

Quant à l'équation (3), son second membre admet la période 2π; mais il est composé de parties séparément périodiques, dont les périodes $\frac{2\pi}{k}$ sont toutes des sous-multiples de 2π; en outre, aucun multiple de $k\sqrt{-1}$ n'annule ρ^2+1. Nous sommes donc assurés, par la remarque qui termine le n° 7, que l'équation (3) possède une solution périodique, de période 2π. Au surplus, on connaît bien cette solution, qui peut s'écrire

$$z = G + \sum_k \frac{A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta}{1-k^2}.$$

L'intégrale générale de l'équation (1) est donc

$$z = C_1 \cos\theta + C_2 \sin\theta + G + \sum_k \frac{A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta}{1-k^2} + \frac{\theta}{2}(A \sin\theta - B\cos\theta).$$

On voit qu'elle est uniforme, c'est-à-dire que la condition d'uniformité imposée à l'intégrale générale de $R(z)=0$ est ici remplie d'elle-même. Mais on aperçoit en outre l'origine du terme en θ. On a

$$a = -B, \qquad b = +A.$$

Par conséquent :

Parmi les forces centrales $\frac{f(\theta)}{r^2}$, $f(\theta)$ *désignant une fonction entière de* $\sin\theta$ *et de* $\cos\theta$, *celles qui se composent de la forme newtonienne* $\frac{G}{r^2}$ *et de forces centrales, telles que* $\frac{A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta}{r^2}$, *k étant un entier supérieur à l'unité, produisent la première catégorie de trajectoires; toutes les autres, qui s'obtiennent par l'adjonction d'une force* $\frac{A\cos\theta + B\sin\theta}{r^2}$, *donnent naissance à la seconde.*

Par exemple, si $f(\theta)$ est du second degré en $\sin\theta$ et $\cos\theta$, pour être dans le premier cas, il sera nécessaire et suffisant que, pour deux positions symétriques du mobile (par rapport au centre d'action), la force prenne la même valeur.

On voit, en particulier, que, *parmi les lois*

$$\frac{A\cos\theta + B\sin\theta + G}{r^2},$$

la loi de la nature est la seule qui puisse, à chaque révolution, ramener le mobile dans les mêmes positions.

11. Supposons enfin que $f(\theta)$ soit une fonction rationnelle de $\sin\theta$ et de $\cos\theta$.

Une telle fonction se décompose toujours de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
f(\theta) = \mathrm{H}(\theta) &+ \mathrm{A}_0 \cot\frac{\theta-\alpha}{2} + \mathrm{A}_1 \frac{d\cot\frac{\theta-\alpha}{2}}{d\theta} + \ldots + \mathrm{A}_m \frac{d^m \cot\frac{\theta-\alpha}{2}}{d\theta^m} \\
&+ \mathrm{B}_0 \cot\frac{\theta-\beta}{2} + \mathrm{B}_1 \frac{d\cot\frac{\theta-\beta}{2}}{d\theta} + \ldots + \mathrm{B}_n \frac{d^n \cot\frac{\theta-\beta}{2}}{d\theta^n} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \mathrm{L}_0 \cot\frac{\theta-\lambda}{2} + \mathrm{L}_1 \frac{d\cot\frac{\theta-\lambda}{2}}{d\theta} + \ldots + \mathrm{L}_p \frac{d^p \cot\frac{\theta-\lambda}{2}}{d\theta^p},
\end{aligned}$$

$\mathrm{H}(\theta)$ représentant une fonction entière de $\sin\theta$ et de $\cos\theta$, qui peut être regardée comme la partie entière de $f(\theta)$, α, β, ... λ, les A, les B, ..., les L étant des constantes.

Considérons l'équation

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = \mathrm{A}_0 \cot\frac{\theta-\alpha}{2} + \mathrm{A}_1 \frac{d\cot\frac{\theta-\alpha}{2}}{d\theta} + \ldots + \mathrm{A}_m \frac{d^m \cot\frac{\theta-\alpha}{2}}{d\theta^m}. \tag{4}$$

On reconnaît aisément qu'elle est satisfaite en posant

$$\begin{aligned}
z = \mathcal{A}_0 \cot\frac{\theta-\alpha}{2} &+ \mathcal{A}_1 \frac{d\cot\frac{\theta-\alpha}{2}}{d\theta} + \ldots + \mathcal{A}_{m-2} \frac{d^{m-2} \cot\frac{\theta-\alpha}{2}}{d\theta^{m-2}} \\
&+ \mathcal{A}_{m-1} \left[2\sin(\theta-\alpha) \log\sin\frac{\theta-\alpha}{2} - \theta\cos(\theta-\alpha) \right] \\
&+ \mathcal{A}_m \left[2\cos(\theta-\alpha) \log\sin\frac{\theta-\alpha}{2} + \theta\sin(\theta-\alpha) + 1 \right],
\end{aligned}$$

où $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$, ... $\mathcal{A}_m$ sont des constantes déterminées et où l'on a

$$\mathcal{A}_{m-1} = \Sigma \mathrm{A}_{4i} - \Sigma \mathrm{A}_{4i+2}, \qquad \mathcal{A}_m = \Sigma \mathrm{A}_{4i+1} - \Sigma \mathrm{A}_{4i+3} \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

En égalant $\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z$ aux groupes pareils en β, ... λ, on a des équations qui admettront des intégrales analogues. En ajoutant toutes ces solutions avec une intégrale de

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = \mathrm{H}(\theta), \tag{5}$$

on en conclut une intégrale de l'équation (1). On voit donc, puisque toute solution de (5) est uniforme (n° 11), que, pour que notre solution de (1) soit uniforme, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{array}{ll}
\Sigma \mathrm{A}_{4i} = \Sigma \mathrm{A}_{4i+2}, & \Sigma \mathrm{A}_{4i+1} = \Sigma \mathrm{A}_{4i+3}, \\
\Sigma \mathrm{B}_{4i} = \Sigma \mathrm{B}_{4i+2}, & \Sigma \mathrm{B}_{4i+1} = \Sigma \mathrm{B}_{4i+3}, \\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\
\Sigma \mathrm{L}_{4i} = \Sigma \mathrm{L}_{4i+2}, & \Sigma \mathrm{L}_{4i+1} = \Sigma \mathrm{L}_{4i+3}.
\end{array}$$

Supposons remplies ces conditions, qui équivalent à la condition d'uniformité imposée aux intégrales de $\mathrm{R}(z) = 0$.

Les termes logarithmiques disparaissent alors dans les solutions des équations telles que (4). Mais j'observe que les termes en θ, non périodiques, disparaissent en même temps; d'où il résulte que les termes du premier degré en θ, dans l'intégrale générale de l'équation (1), proviendront uniquement de la partie entière $\mathrm{H}(\theta)$ du second membre. Et par suite :

Si $f(\theta)$ *désigne une fonction rationnelle de* $\sin\theta$ *et de* $\cos\theta$, *telle que les intégrales de* $\mathrm{R}(z) = 0$ *soient uniformes, la force centrale* $\frac{f(\theta)}{r^2}$ *produira une trajectoire appartenant à la première ou à la seconde catégorie, suivant que la partie entière* $\frac{\mathrm{H}(\theta)}{r^2}$ *sera dans le premier cas ou dans le second.*

Il ne s'est agi, dans ce travail, que de fonctions simplement périodiques. Mais il est clair que les mêmes choses peuvent se répéter d'une manière entièrement analogue pour une équation linéaire dont le premier membre serait à coefficients doublement périodiques, tandis que le second affecterait la forme d'un polynôme aux deux variables x et $\mathrm{Z}(x)$, ayant pour coefficients des fonctions doublement périodiques de seconde espèce.