ED. DEWULF

Mémoire sur une transformation géométrique générale dont un cas particulier est applicable à la cinématique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 3 (1886), p. 405-431
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1886_3_3__405_0>

MÉMOIRE

SUR UNE

TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE GÉNÉRALE

DONT UN CAS PARTICULIER

EST APPLICABLE A LA CINÉMATIQUE,

PAR M. ED. DEWULF,

COLONEL DU GÉNIE.

La théorie des mouvements plans a été souvent étudiée, tant au point de vue géométrique qu'à celui de la cinématique; nous les rattachons ici aux théories de la Géométrie projective. Cette route nouvelle, si nous ne nous trompons, conduit à des conséquences qui n'ont pas encore été rencontrées. La plus digne d'intérêt est celle qui permet de construire le lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des points d'une courbe au moyen de deux cônes faciles à définir.

1. Soient deux plans superposés P et P'; désignons les points du plan P par M, ceux du plan P' par M'; enfin soit O un point fixe commun aux deux plans. Nous établissons la correspondance entre les deux plans P et P' de la manière suivante : deux points correspondants M et M' sont sur une même droite passant par le point fixe O et forment sur cette droite deux divisions projectives dont les points doubles se confondent en O. Le point M', qui correspond à un point quelconque M, sera entièrement déterminé si l'on connaît sur chaque droite issue du point O un couple de points correspondants.

Imaginons une courbe φ'_n, d'ordre n, ayant un point multiple d'ordre $n-1$ au point O; une droite quelconque issue de O coupera φ'_n en un seul point M'. Supposons que ce point M' de φ'_n corresponde au point M situé à l'infini sur la droite OM'. En d'autres termes, admettons que les points μ' de la courbe φ'_n correspondent aux points de la droite à l'infini du plan P.

Nous supposerons d'abord que les tangentes en O à la courbe φ'_n sont réelles et distinctes; les autres cas se déduiront de celui-là.

2. Considérons une droite quelconque l du plan P et cherchons le lieu géométrique des points du plan P' qui correspondent à ceux de l.

La droite l coupe φ'_n en n points, donc le lieu cherché (l') coupe la droite de l'infini en n points; c'est donc une courbe de l'ordre n. Une droite quelconque, passant par O, coupe l en un seul point, auquel correspond un seul point du plan P'; donc la courbe (l') a un point multiple de l'ordre $n - 1$ en O.

Une des tangentes o à la courbe φ'_n au point O coupe l au point lo, auquel correspond dans P' un point de la droite o infiniment voisin de O. Donc, les $n - 1$ branches de (l') qui passent au point O y sont tangentes respectivement aux $n - 1$ branches de φ'_n.

Soit o_1 une droite passant par O et infiniment voisine d'une tangente à φ'_n, elle coupera l au point M_1. Nommons M'_1 le point de P' qui correspond à M_1. Soit, en outre, μ'_1 le point infiniment voisin de O où la droite o_1 coupe φ'_n, on aura, comme l'on sait,

$$\frac{1}{OM'_1} - \frac{1}{OM_1} = \frac{1}{O\mu'_1},$$

d'où

$$OM'_1 - o\mu'_1 = - \frac{\overline{o\mu'_1}^2}{OM_1 + o\mu'_1}.$$

La différence $OM'_1 - o\mu'_1$ est donc un infiniment petit du second ordre; donc, chacune des branches de (l') qui passe par le point O y oscule une branche de φ'_n.

Ainsi :

A une droite quelconque l du plan P *correspond, sur* P', *une courbe* F'_n, *d'ordre n, ayant au point* O *un point multiple d'ordre $n - 1$ et chacune des branches de* F'_n *oscule en* O *une des branches de* φ'_n.

Nous avons vu que, dans la transformation qui nous occupe, à un point quelconque M situé sur une des tangentes en O à φ'_n correspond toujours un point infiniment voisin de O. Cette remarque nous sera fréquemment utile dans la suite.

Une droite l étant donnée, nous connaissons : 1° un point d'ordre $n-1$; 2° $2(n-1)$ points simples; c'est-à-dire $\frac{n(n+3)}{2}-2$ points de la courbe F'_n qui sont indépendants de la position particulière de l. Si nous ajoutons à ces $\frac{n(n+3)}{2}-2$ points fixes deux points qui correspondent à deux des points de l, nous voyons que la courbe F'_n est entièrement déterminée. En d'autres termes :

Au réseau des droites du plan P *correspond, dans* P', *un réseau de courbes d'ordre n. La base de ce réseau est formée par le point* O^{n-1} *d'ordre* $n-1$ *et les* $2(n-1)$ *points simples situés, deux à deux, sur les* $n-1$ *branches de* φ'_n *et infiniment voisins de* O.

La correspondance entre les deux plans est birationnelle et de l'ordre n, et les *points fondamentaux du plan* P' *sont* O^{n-1} *et les* $2(n-1)$ *points de* φ'_n *que nous venons de signaler.*

3. Considérons maintenant la droite à l'infini du plan P', et cherchons le point μ de P qui correspond au point à l'infini de P' situé sur une droite o' passant par O. On sait que $o\mu = -o\mu'$, μ' désignant, comme plus haut, le point d'intersection de o' avec φ'_n. Donc :

La courbe φ_n *qui correspond, dans le plan* P, *à la droite à l'infini de* P', *est une courbe symétrique de la courbe* φ'_n *par rapport au point* O.

Donc aussi :

Les points fondamentaux du plan P *sont* O^{n-1} *et les* $2(n-1)$ *points symétriques par rapport à* O *des points fondamentaux simples du plan* P'.

Les courbes fondamentales du plan P sont : une courbe de l'ordre $n-1$, ayant en O un point multiple de l'ordre $n-2$, passant par les $2(n-1)$ points fondamentaux simples du plan P' et les $n-1$ tangentes en O à φ_n. Les droites fondamentales du plan P' se confondent avec celles du plan P.

4. D'après la théorie générale des transformations, on sait que :

A une courbe quelconque F_m, *de l'ordre* m, *du plan* P, *correspond dans* P', *une courbe* F'_{mn} *de l'ordre* mn, *ayant en* O *un point multiple de l'ordre* $m(n-1)$ *et des points de l'ordre* m *en chacun des autres points fondamentaux de* P'.

Enfin, si la courbe F_m du plan P passe r fois au point O, la courbe correspondante de P' contiendra r fois la courbe fondamentale d'ordre $n-1$ du plan P'. Si, en outre, la courbe F_m est s fois tangente en O aux branches de φ'_n, la courbe correspondante se décomposera en r fois la courbe fondamentale d'ordre $n-1$, s droites passant par O et une courbe de l'ordre $mn - r(n-1) - s$.

5. Désignons par a une droite passant par le point O et par un des points à l'infini de φ'_n, nommons ce dernier point M'. Le point M, du plan P, situé à l'infini sur la droite a, se confond avec le point M' qui lui correspond dans P'. Les divisions projectives situées sur la droite a ont donc trois couples de points correspondants qui se confondent; donc :

Si l'on mène par le point O *des parallèles aux* n *asymptotes de la courbe* φ'_n, *ce faisceau de* n *droites formera le lieu géométrique des points doubles de la transformation.*

6. Considérons de nouveau une droite quelconque l du plan P, et nommons μ un de ses points d'intersection avec la courbe φ_n. Au point μ correspond le point à l'infini de P' situé sur la droite $O\mu$. Donc :

Si l'on joint le point O *aux* n *points d'intersection d'une droite* l *et de la courbe* φ_n, *on aura les* n *parallèles aux asymptotes de la courbe qui, dans* P', *correspond à la droite* l.

7. La construction graphique du point M' qui correspond au point quelconque M est bien connue [1]; nous l'exposerons cependant, parce

[1] Cremona, *Éléments de Géométrie projective*, p. 68.

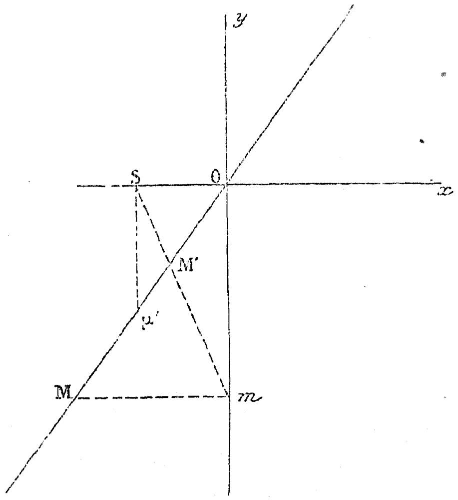
que cette construction légèrement modifiée nous conduira à un théorème remarquable.

Le problème à résoudre est celui-ci :

On donne sur une droite passant par le point O, *où sont confondus les points doubles des divisions projectives, le point* μ' *qui correspond au point à l'infini de la droite et un point quelconque* M, *il faut construire le point* M′ *qui correspond à* M.

Par le point O traçons deux droites quelconques, rectangulaires ou non, Ox et Oy. Projetons sur Oy et parallèlement à Ox tous les points

Fig. 1.

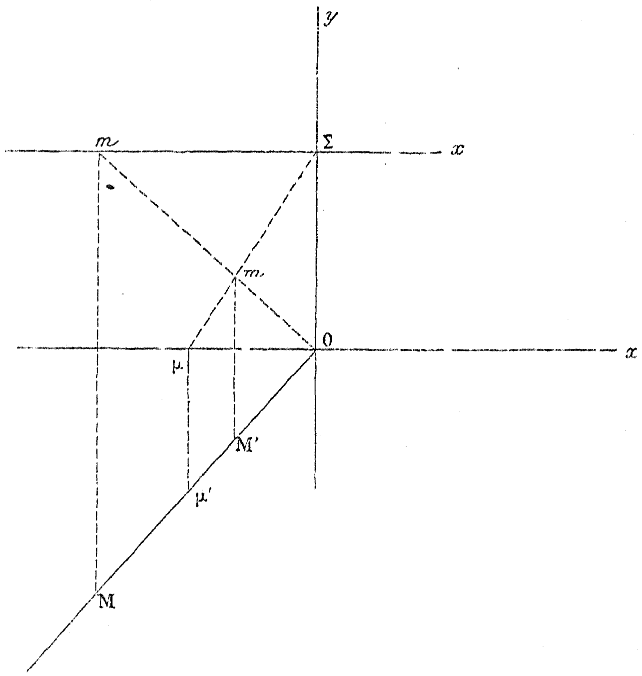


de la division M de OM et soit, par exemple, m la projection du point M. Les droites Oy et OM portent deux divisions projectives : la division m sur Oy et la division M′ sur OM. Deux points correspondants de ces divisions se confondent au point O de l'intersection de deux droites; ces divisions sont donc perspectives, et les droites qui joignent les points correspondants m et M′ concourent en un même point. Le point μ' de OM correspond au point à l'infini de Oy; traçons donc la parallèle à Oy par le point μ', elle coupera Ox au point de concours S. En joignant le point S au point m, et en prenant le point d'intersection de cette droite et de OM, on obtiendra le point M′ cherché qui correspond au point M (*fig.* 1).

Si l'on prend les droites Ox et Oy rectangulaires, on tombe ainsi, comme cas particulier d'une construction générale, sur l'élégante construction donnée par M. Mannheim dans son *Cours de Géométrie descriptive* ([1]).

8. Nous allons maintenant modifier cette construction. Traçons les axes rectangulaires Ox et Oy, et, par un point quelconque Σ

Fig. 2.



de Oy, une parallèle à Ox. Projetons les points de la division M (droite OM), sur cette parallèle $\Sigma x'$, aux points m. Projetons de même le point μ' sur Ox en μ, et traçons la droite $\Sigma\mu$. Supposons que l'on projette ainsi tous les points de la division M' (droite OM) sur $\Sigma\mu$. Les droites Σm et $\Sigma\mu$ porteront deux divisions projectives dont deux points correspondants sont unis en Σ et qui, par suite, sont perspectives. Donc, les droites qui joignent les points correspondants de Σm

([1]) MANNHEIM, *Géométrie descriptive*, p. 199; 1880.

et de $\Sigma\mu$ concourent en un même point. Or la droite qui joint le point μ à son correspondant de Ox' coupe Oy au point O. Ce point O est donc le point de concours et la droite Om coupe $\Sigma\mu$ au point m' qui correspond à m. En projetant maintenant le point m' parallèlement à Oy sur OM, nous obtiendrons, sur cette dernière droite, le point cherché M' qui correspond à M.

Supposons que la droite Ox soit la ligne de terre d'une épure de Géométrie descriptive, Σ un point de la verticale du point O et $\Sigma x'$ la trace verticale d'un plan horizontal π mené par le point Σ. Le point m est alors la projection sur le plan vertical de la projection du point M sur le plan π, et la construction que nous avons faite est celle de la projection sur le plan horizontal de l'intersection des droites de l'espace OM_π et $\Sigma\mu'$, M_π étant la projection du point M sur le plan π (*fig.* 2).

Si nous supposons que le point M soit un point quelconque de la courbe F_m (n° 4) et le point μ' un point de la courbe φ'_n, il est démontré que :

Le lieu géométrique des points M' *qui correspondent aux points* M *de la courbe* F_m *est la projection horizontale de la courbe d'intersection de deux cônes : l'un de ces cônes a pour sommet le point* Σ *et pour base la courbe* φ'_n, *l'autre a pour sommet le point* O *et pour base la projection de la courbe* F_m *sur le plan horizontal mené par le point* Σ.

9. On peut déduire de ce théorème général tous ceux que nous avons démontrés plus haut; il conduit encore à d'autres conséquences, comme nous le verrons dans la suite. Pour le moment, nous nous contenterons de signaler celle-ci : nous avons supposé que le lieu des points M est une courbe quelconque F_m; supposons maintenant que cette courbe soit de la même nature que les courbes φ'_n et φ_n, c'est-à-dire qu'elle ait, au point O, un point multiple de l'ordre $m-1$ et désignons-la par Φ_m. Le lieu géométrique des points M' qui correspondent aux points M de Φ_m est la projection horizontale de la courbe d'intersection des cônes $[\Sigma, \varphi'_n]$ et $[O, \Phi'_n]$, Φ'_n représentant la projection de Φ_n sur le plan horizontal passant par le point Σ. Il est facile de voir que :

Le lieu géométrique des points M' *ne change pas si, au lieu d'admettre* *que la courbe φ'_n porte les points μ' qui correspondent, dans le plan* P′, *aux points de la droite de l'infini du plan* P, *et que la courbe Φ_m porte les points* M, *on suppose que c'est la courbe Φ_m qui porte les points μ' et que la courbe φ'_n porte les points* M.

Il suffit, pour démontrer ce théorème, de supposer que le plan π passant par Σ devienne le plan horizontal de projection, que le point Σ remplace le point O et que le point O remplace le point Σ. Les deux cônes restent les mêmes et la projection de leur courbe d'intersection est la même sur les plans horizontaux passant par O et par Σ.

Cas particuliers.

$n = 1$.

10. Si nous supposons $n = 1$, la courbe φ'_1 est une droite qui ne passe pas par le point O; φ_1 est une droite parallèle à φ'_1 placée symétriquement par rapport au point O (n° 3); le lieu géométrique des points doubles est une droite parallèle à φ'_1 passant par le point O (n° 5). Nous trouvons donc ainsi un cas particulier de la transformation homologique, celui où le centre d'homologie est un point de l'axe d'homologie. Cette transformation est bien connue; nous ne citerons qu'un des théorèmes qu'elle établit :

Si le centre d'homologie est un point de l'axe d'homologie, la transformée d'un cercle qui passe par le centre d'homologie est une conique osculée par le cercle en ce point [1].

Nous nous servirons de ce théorème dans la suite.

$n = 2, \ m = 1$.

11. Supposons $n = 2$, la transformation est biquadratique. Ce cas est particulièrement intéressant quand la courbe φ'_2 est un cercle; tous les théorèmes que nous avons démontrés deviennent alors des théorèmes de Cinématique. En effet, quand un plan P se déplace sur lui-

[1] PONCELET, *Propriétés projectives*, p. 172; 1822.

même, le point O étant le centre instantané de rotation, le centre de courbure M′ de la trajectoire d'un point M se trouve sur la droite OM; et, pour tous les points M situés sur une même droite issue de O, on a

$$\frac{1}{\overline{OM'}} - \frac{1}{\overline{OM}} = \text{const.}$$

Les points M et M′ forment donc sur cette droite deux divisions projectives dont les points doubles se confondent au point O ([1]). De plus, le lieu géométrique des points M′ qui correspondent aux points de la droite de l'infini est une circonférence de cercle qui passe par le centre instantané de rotation. Cette circonférence a reçu le nom de *circonférence des centres*.

Nous pouvons donc immédiatement énoncer les théorèmes suivants :

1° *Quand un plan se déplace sur lui-même, le lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des points d'une droite du plan mobile est une conique osculée au centre instantané par la circonférence des centres.*

2° *Le lieu géométrique des points dont les trajectoires ont leur centre de courbure à l'infini est la circonférence symétrique de la circonférence des centres par rapport au centre instantané de rotation* ([2]).

Cette circonférence a reçu le nom de *circonférence des inflexions*.

3° *Le lieu géométrique des points dont les trajectoires ont leurs centres de courbure sur une droite donnée est une conique osculée par la circonférence des inflexions au centre instantané de rotation.*

4° *Le lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des points d'une courbe* F_m, *de l'ordre m, est une courbe de l'ordre 2m ayant trois points multiples de l'ordre m situés sur la circonférence des centres et infiniment voisins du centre instantané de rotation, ou, en d'autres termes, ayant m branches qui passent au centre instantané où chacune d'elles est osculée par le cercle des centres.*

Nous n'énoncerons pas le théorème corrélatif. Nous laissons égale-

---

([1]) CHASLES, *Géométrie supérieure*, p. 109; 1880.

([2]) BRESSE, *Sur un théorème nouveau*, etc. (*Journal de l'École Polytechnique*, 1853). — MANNHEIM, *Construction des centres de courbure*, etc. (*Journal de l'École Polytechnique*, XXVII^e Cahier).

ment de côté les cas particuliers où F_m passe par le centre instantané et a, en ce point, un contact plus ou moins élevé avec la circonférence des centres; nous retrouverons ces cas plus loin.

5° *Le lieu géométrique des points du plan qui se confondent avec les centres de courbure de leurs trajectoires est formé par les deux droites imaginaires qui joignent le centre instantané aux points circulaires de l'infini* (1).

La conique lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des points d'une droite l est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que la droite l ne coupe pas, coupe ou touche la circonférence des inflexions.

12. Nous allons chercher la loi suivant laquelle varie le rayon de courbure des trajectoires des divers points d'une droite passant par le centre instantané de rotation.

Soient

M un point quelconque de la droite;
M′ le centre de courbure de sa trajectoire;
μ le point où la droite OM coupe le cercle des centres.

Nous dirons que les longueurs OM, OM′ sont positives quand elles sont portées dans le même sens que $O\mu$; le rayon de courbure sera positif si, en le parcourant depuis le centre de courbure jusqu'au point décrivant, on marche dans le sens positif.

On a

$$\frac{1}{\mathrm{OM'}} - \frac{1}{\mathrm{OM}} = \frac{1}{\mathrm{O}\mu},$$

d'où

$$\mathrm{OM} - \mathrm{OM'} = \frac{\overline{\mathrm{OM}}^2}{\mathrm{OM} + \mathrm{O}\mu}.$$

Posons

$$\mathrm{OM} = x, \qquad \mathrm{OM} - \mathrm{OM'} = y, \qquad \mathrm{O}\mu = a,$$

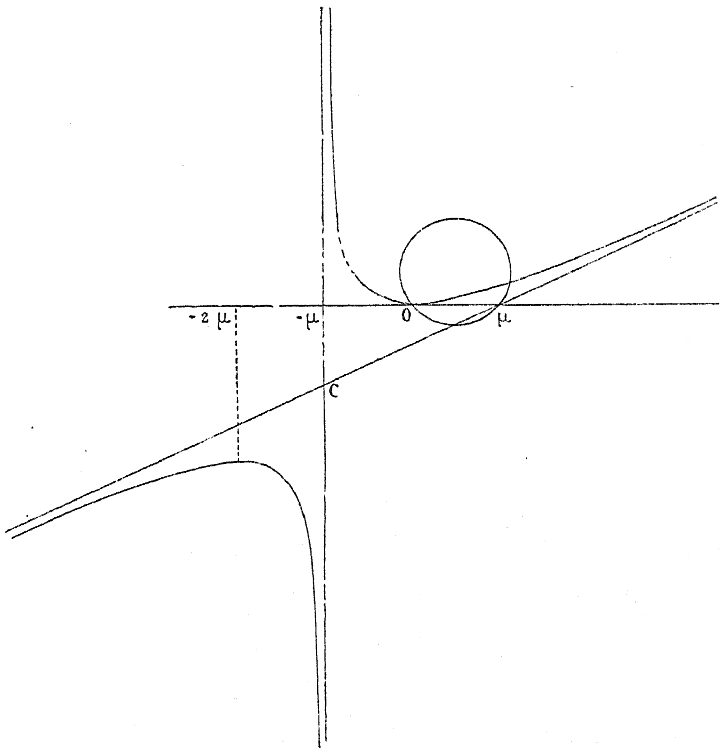
(1) Ce cas particulier du théorème du n° 5 a été démontré par M. Mannheim dans son Mémoire *Sur les surfaces trajectoires*, etc. (*Journal de Mathématiques*, 1875).

y représentera le rayon α de courbure. L'équation

$$y = \frac{x^2}{x + a}$$

représente une hyperbole dont une asymptote est perpendiculaire à $O\mu$ et coupe cette droite en un point $-\mu$ dont la distance au point O est égale à $-O\mu$; le centre, situé sur cette asymptote, a une ordonnée égale à $-2O\mu$. La seconde asymptote passe par le point μ (*fig.* 3).

Fig. 3.



L'inspection de cette figure montre que, si le point M parcourt Ox, à partir de l'origine O et dans le sens positif, le rayon de courbure va constamment en augmentant. Si, au contraire, le point M se dirige, à partir de O, dans le sens opposé à $O\mu$, le rayon de courbure, conservant le même signe que précédemment, augmente d'abord lentement, puis de plus en plus rapidement, et atteint une longueur infinie quand

$OM = -O\mu$, c'est-à-dire quand M traverse le cercle des inflexions. Le rayon de courbure change alors de signe; sa valeur absolue décroît d'abord très rapidement à partir de l'infini, puis moins rapidement jusqu'à ce qu'elle atteigne un minimum, quand $OM = -2O\mu$; à partir de ce point, la valeur absolue du rayon de courbure augmente de nouveau jusqu'à ce qu'elle atteigne l'infini.

Le rayon de courbure a donc deux maxima et deux minima : les maxima correspondent aux positions du point M à l'infini et sur le cercle des inflexions; les deux minima correspondent au centre instantané et à la position du point M sur le cercle qui a pour rayon le diamètre du cercle des inflexions, et pour centre le point de ce dernier cercle qui est diamétralement opposé au centre instantané de rotation. Ce cercle est connu sous le nom de *cercle de roulement*. Nous avons ainsi démontré une propriété, nouvelle peut-être, des points de ce cercle. Nous pouvons l'énoncer ainsi :

Un point quelconque du cercle de roulement décrit une trajectoire dont le rayon de courbure est un minimum, si on le compare à ceux des trajectoires des autres points situés sur la même droite issue du centre instantané de rotation.

On peut résumer la marche du point M, celle du point M′ correspondant et celle du rayon de courbure dans le Tableau suivant :

OM.	$O\mu'$.	Rayon de courbure.
$+\infty$ à $+O$	$+O\mu$ à $+O$	$+\infty$ à $+O$
$-O$ à $-O\mu$	$-O$ à $-\infty$	$-O$ à $+\infty$
$-O\mu$ à $-2O\mu$	$+\infty$ à $+2O\mu$	$-\infty$ à $-4O\mu$
$-2O\mu$ à $-\infty$	$+2O\mu$ à $+O\mu$	$-4O\mu$ à $-\infty$

13. M. Rivals a démontré, en 1853, que les centres de courbure des éléments simultanément décrits par les divers points d'une droite se trouvent sur une courbe du second degré [Mémoire de Bresse, *Sur un théorème nouveau*, etc. (*Journal de l'École Polytechnique*, 1853)]. MM. Gilbert et Mannheim, simultanément, ont démontré le même théorème, en ajoutant que la conique est tangente au cercle des centres [Gilbert, *Recherches sur les propriétés géométriques des mouvements plans* (*Académie royale de Bruxelles*, 1867); et Mannheim, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVII^e Cahier].

Enfin, M. Schell, dans sa *Theorie der Bewegung und der Kräfte*, p. 166, 1879, énonce encore le même théorème sans le préciser davantage.

Nous ne croyons pas que personne eût remarqué que la conique est osculée par le cercle des centres au centre instantané de rotation, lorsque nous avons fait connaître cette propriété (*Comptes rendus*, p. 1092, mai 1881).

Quoi qu'il en soit, nous désignerons à l'avenir sous le nom de *conique de Rivals* d'une droite le lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des divers points de cette droite : nous adoptons cette dénomination pour abréger le discours.

14. Nous savons que, pour trouver la conique de Rivals d'une droite donnée l, il suffit de considérer un cône ayant son sommet en un point quelconque Σ de la verticale du centre instantané de rotation O (le plan qui se déplace est supposé horizontal), de projeter la droite l suivant l' sur le plan horizontal passant par Σ, et de prendre la projection horizontale C_2 de l'intersection du cône et du plan Ol'.

La trace horizontale du plan Ol' est la parallèle à la droite l tracée par O : nommons l_1 cette parallèle. Elle coupe le cercle des centres en un point O′ qui appartient à la conique C_2, OO′ est la corde commune à C_2 et à son cercle osculateur en O. Nommons C'_2 la conique d'intersection du cône et du plan $l'O$.

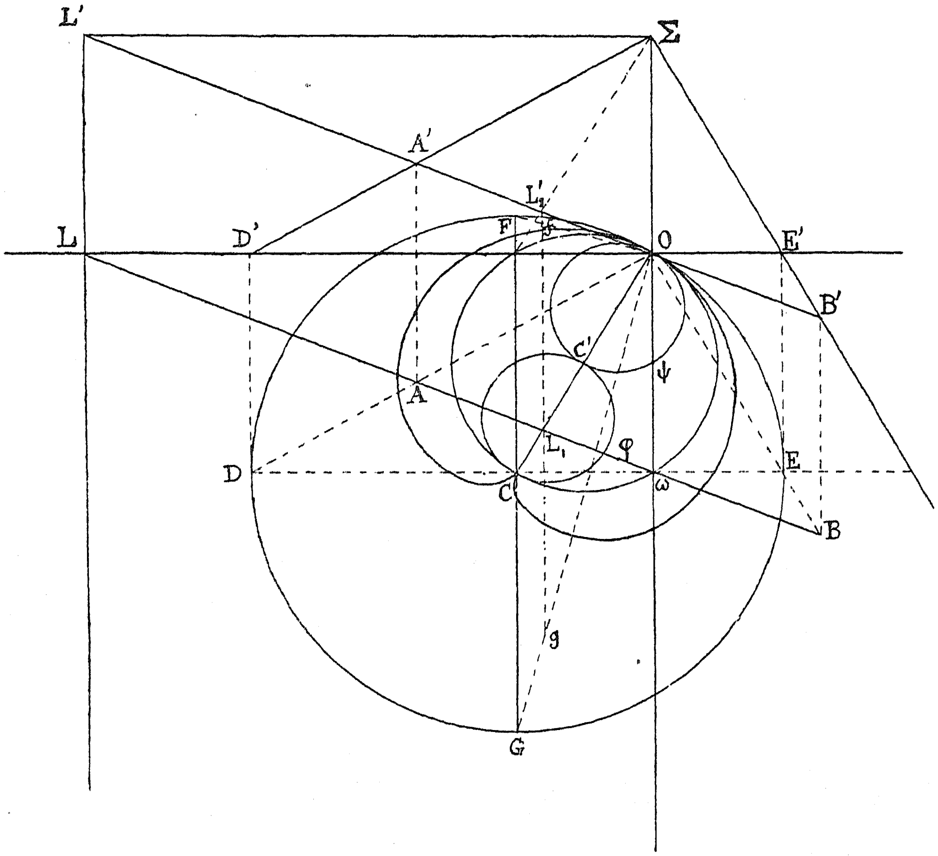
Le diamètre conjugué à l' passe par le milieu de OO′; les tangentes aux extrémités de ce diamètre sont parallèles à OO′: elles sont donc les intersections avec le plan Ol' des plans tangents au cône dont les traces sont parallèles à l. De là résulte la construction indiquée (*fig.* 4). Ce diamètre se projette sur le plan vertical suivant A′B′, et, sur le plan horizontal, suivant AB. Il est situé dans le plan ΣDE, sa trace verticale est donc le point L′; par suite, le diamètre de la conique de Rivals conjugué à OO′ s'obtient en joignant le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur l au milieu de OO′, et le centre de cette conique est le point φ, milieu de AB.

Ajoutons que le centre φ est le milieu du segment AB intercepté sur la droite Lω par les côtés de l'angle droit DOE.

Cherchons maintenant quel est le lieu géométrique des centres des coniques de Rivals qui correspondent à des droites parallèles.

Quand la droite l se déplace parallèlement à elle-même, le diamètre $L\omega$ tourne autour du point fixe ω et les extrémités du diamètre AB sont toujours marquées par les côtés de l'angle droit DOE. Donc :

Fig. 4.



1° *Le lieu géométrique des centres des coniques de Rivals qui correspondent à un système de droites parallèles est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles à* OD *et* OE. Cette hyperbole équilatère passe par les points O et C centre du cercle des centres.

2° *Les axes des coniques de Rivals qui correspondent à un système de droites parallèles sont tous parallèles entre eux et aux asymptotes de l'hyperbole équilatère, lieu géométrique de leurs centres.*

On peut dire encore que le lieu des points φ est engendré de la manière suivante : si l'on trace par le point O une parallèle à ωL, cette droite sera la conjuguée harmonique de $\omega\varphi$, par rapport aux côtés de l'angle droit OD et OE. Pour tracer $O\varphi$, il faut donc d'abord tracer par le point O une parallèle à OL, puis prendre sa conjuguée harmonique par rapport à OD et OE; le rayon $O\varphi$ du faisceau O correspondra aussi projectivement au rayon $\omega\varphi$ du faisceau ω. Cette construction montre que l'hyperbole équilatère passe au point ω. Sa tangente en O est la conjuguée harmonique de $O\omega$ par rapport à OD et OE : c'est donc la tangente en O à la circonférence des centres. La tangente en ω est parallèle à la tangente en O. Ainsi, le lieu du point φ est tangent en O et en ω à toutes les coniques de Rivals, et en O au cercle des centres.

Le cercle osculateur de l'hyperbole équilatère au centre instantané est le cercle décrit sur le rayon du cercle des inflexions, car C et O sont des points de cette courbe et CO est sa normale en O. Donc :

3° *Les hyperboles équilatères, lieux des centres des coniques de Rivals qui correspondent à un système quelconque de droites parallèles, ont toutes le même cercle osculateur au cercle instantané de rotation.*

Le cercle osculateur à l'hyperbole équilatère en ω est symétrique du cercle osculateur en O. Donc :

4° *Le cercle osculateur en ω à l'hyperbole équilatère qui correspond à la direction l a pour diamètre constant CO', et, quand la direction l varie, son centre décrit un cercle concentrique au cercle des centres et de rayon moitié moindre.*

Les tangentes à l'hyperbole équilatère, qui correspond à la direction l, aux points O et ω, sont parallèles, comme nous venons de le voir; ωO est donc un diamètre de cette courbe, et le milieu ψ de ωO est son centre. Donc :

5° *Quand la direction de l varie, le centre de l'hyperbole équilatère qui correspond à chaque direction parcourt la circonférence tangente au cercle des centres au centre instantané de rotation et dont le diamètre est égal à la moitié du rayon du cercle des centres* (1).

---

(1) Les théorèmes 1° et 5° du n° 14 sont dus à M. Gilbert (*loco citato*).

15. Passons maintenant aux coniques C'_2 situées sur le cône et dont les projections sont les coniques de Rivals.

Considérons la conique déterminée par le plan $O'OL'$; son centre φ_1 se trouve au milieu du segment (AA'), (BB') de la droite qui joint le point ω au point L'. Quand la droite l' se déplace parallèlement à elle-même, la droite $\omega L'$ tourne autour du point ω dans le plan ΣDE et le centre de la conique C'_2 est toujours le milieu du segment intercepté sur cette droite par les côtés de l'angle $D\Sigma E$. Donc :

Le lieu géométrique des centres des coniques C'_2 dont les projections sont les coniques de Rivals qui correspondent à un système de droites parallèles est une hyperbole.

Les asymptotes de cette hyperbole sont parallèles aux droites ΣD, ΣE, et la courbe passe aux points Σ, ω et C Cette hyperbole est aussi le lieu géométrique des intersections des rayons correspondants des deux faisceaux ω et Σ; le faisceau ω est formé des rayons L', le faisceau Σ des droites conjuguées harmoniques des parallèles menées par Σ aux droites $\omega L'$ par rapport aux droites fixes ΣD, ΣE; d'où il résulte que les tangentes en Σ et en ω à l'hyperbole sont parallèles : le milieu de la droite $\Sigma\omega$ est donc le centre de cette courbe. Donc :

Le centre de l'hyperbole qui correspond à une direction l décrit le cercle d'intersection du plan horizontal passant par le milieu de ΣO avec le cône qui a pour sommet Σ et pour base le cercle dont le diamètre est le rayon du cercle des centres qui passe au centre instantané de rotation, quand cette direction varie.

Désignons ce cercle par (ψ_1). Les asymptotes de l'hyperbole lieu géométrique des centres des coniques C'_2 qui ont pour projections les coniques de Rivals correspondant à un système de droites parallèles à l sont les parallèles menées par ψ_1 aux droites ΣD et ΣE. Le plan de ces parallèles est le plan ΣDE; donc les traces des asymptotes sont sur une droite qui passe toujours par le point C. Si, par le point ψ_1, on mène une parallèle à ΣC, la trace de cette droite sera au milieu des points C et ω (*fig.* 4) et le lieu géométrique de ces traces sera la circonférence passant par le point C et décrite sur la moitié du rayon CO comme diamètre. Enfin, on obtiendra les traces des asymptotes en portant sur la droite Cb, de part et d'autre du point b, une longueur égale à $\frac{CO}{2}$. Donc :

Le lieu géométrique des traces des asymptotes des hyperboles C'_2 qui correspondent à des systèmes de droites parallèles est la cardioïde du cercle décrit sur CC' comme diamètre.

Les asymptotes elles-mêmes sont sur un conoïde qui a pour directrices la cardioïde et le cercle situé dans un plan horizontal équidistant de Σ et de O et qui a pour projection le cercle décrit sur $C'O$ comme diamètre et pour cône directeur le cône dont le sommet est au point Σ, et dont la base est le cercle des centres.

Ce conoïde est tangent au cône directeur le long de la génératrice ΣC; le cercle (ψ_1) est une courbe double et la droite ΣC une arête de rebroussement.

16. Considérons encore le cône dont le sommet est le point Σ et dont la base est le cercle des centres, la droite l et sa projection l' sur le plan horizontal passant par le point Σ.

Joignons deux points A et B de la conique C_2 de Rivals au point O, ces deux droites couperont le cercle des centres aux points A_1 et B_1. D'autre part, joignons les points A et B au sommet du cône, ces deux génératrices couperont la conique C'_2 située dans le plan Ol' aux points A' et B' dont les projections sur le plan horizontal sont A et B. Les droites AB et $A'B'$ concourent sur la trace horizontale du plan Ol', les droites AB et A_1B_1 concourent aussi sur cette trace; donc les trois droites AB, A_1B_1 et $A'B'$ concourent au même point de la trace du plan Ol. Donc, les droites qui joignent des points correspondants de la conique de Rivals et du cercle des centres concourent sur la parallèle à la droite l menée par le centre instantané. Donc :

La conique de Rivals d'une droite l et le cercle des centres sont deux courbes homologiques; le centre d'homologie est le centre instantané de rotation et l'axe d'homologie est la parallèle à la droite l menée par le centre instantané de rotation.

D'après le théorème du n° 10, le cercle des centres est le cercle osculateur de la conique au centre instantané.

Les tangentes aux points correspondants concourent sur l'axe d'homologie. La droite donnée l et la parallèle à l, symétrique de cette droite par rapport au centre d'homologie, sont les droites-limites. La conique peut donc être tracée exactement.

Puisque la droite donnée est la droite-limite de la figure de la conique, les points d'intersection de cette droite et de cette conique correspondent aux points d'intersection de la droite de l'infini et du cercle des centres. Donc :

La droite l est toujours une sécante idéale de la conique de Rivals correspondante, et les extrémités de la corde idéale sont sur les droites isotropes issues du centre instantané de rotation; le point milieu réel de la corde idéale est le pied de la perpendiculaire abaissée sur la droite du centre instantané.

Ce théorème peut s'énoncer en d'autres termes :

Le lieu géométrique des points du plan qui se confondent avec les centres de courbure de leurs trajectoires se compose des droites isotropes du centre instantané.

C'est sous cette forme que nous avons déjà trouvé ce théorème.

17. Nous allons maintenant déterminer le pôle de la droite l par rapport à la conique de Rivals de cette droite (*fig.* 4).

Le plan polaire de la droite ΣC, C étant le centre du cercle des centres, par rapport au cône $[\Sigma, C]$, est évidemment le plan horizontal passant par Σ. Le plan sécant Ol' coupe le cône suivant la conique C_2', dont C_2 est la projection orthogonale, la droite ΣC au point L_1', le plan polaire de cette droite suivant la droite l'. Le point L_1' est le pôle de l' par rapport à C_2'.

La projection orthogonale L_1 du point L_1' est le pôle de la droite l par rapport à C_2. Nous savons que la droite qui joint le point ω, milieu de OO', au pied P de la perpendiculaire abaissée de O sur l est le diamètre conjugué de l par rapport à C_2; le point L_1 est sur cette droite. Il est aussi sur OC, projection de ΣC. Donc :

Le lieu géométrique des pôles de toutes les droites du plan par rapport aux coniques de Rivals correspondantes est la droite qui joint le centre instantané de rotation au centre du cercle des centres.

Imaginons maintenant un dièdre rectangle dont l'arête coïncide avec ΣO. Les traces des faces du dièdre sur le plan horizontal coupent le cercle des centres en deux points m et n, et la droite mn passe par le centre du cercle; donc les plans Σmn passent par la droite ΣC quand le dièdre tourne autour de ΣO. Les plans ΣOm, ΣOn couperont le plan Ol' suivant deux droites OM' et ON' qui rencontrent la conique C'_2 en M' et N', et la corde $M'N'$ passe toujours par le point $L'_1 L_1$. Les projections OM et ON de OM' et ON' sur le plan horizontal seront rectangulaires et les droites MN, cordes de l'arc sous-tendu dans C_2 par l'angle droit MON, passent toujours par le pôle L_1 de la droite l. Donc :

Le pôle d'une droite l par rapport à la conique de Rivals correspondante est aussi le point de concours des hypoténuses des triangles rectangles inscrits dans la conique qui ont leur sommet au centre instantané.

18. Soit un plan horizontal quelconque π, il coupe le cône $[\Sigma C]$ suivant une circonférence qui se projette sur le plan horizontal de projection suivant un cercle tangent à C_2 au point O; il coupe le plan Ol' suivant une droite parallèle à OO' et la projection de cette droite sera la corde commune à C_2 et au cercle tangent à C_2 en O dont il vient d'être question. De là un théorème bien connu. Si nous supposons que le plan π passe par le sommet du cône, il coupera le plan Ol' suivant la droite l'. Donc :

La droite l est la sécante idéale commune à la conique de Rivals qui lui correspond et au cercle infiniment petit représenté par le centre instantané de rotation.

19. Revenons au pôle L_1 de la droite l par rapport à C_2. Ce point L_1 se trouve sur le diamètre $LA\omega B$, l'angle AOB est droit : les axes de C_2 sont donc les parallèles à OA et OB tracées par le centre φ. Nommons K et R les points d'intersection avec les axes de la normale OC à C_2, a et b les axes de cette conique; on sait que l'on a

$$\frac{OK}{OR} = \frac{b^2}{a^2},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\varphi L_1}{\varphi A} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Ce résultat est indépendant du rayon de courbure en O et, par suite, de la position du point O; il démontre que :

Le lieu géométrique des pôles L_1, *par rapport à une conique* C_2, *des sécantes idéales communes à cette conique et à chacun de ses points considéré comme cercle infiniment petit, est une conique* Γ_2 *homothétique de la conique* C_2; *le centre d'homothétie est le centre de* C_2 *et le rapport d'homothétie est* $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, *a et b étant les axes de* C_2.

C'est, sous une autre forme, un théorème énoncé par Steiner (*Gesammelte Werke*, t. II, p. 432).

Les cordes communes l à la conique C_2 et à chacun de ses points considéré comme cercle infiniment petit étant les polaires du point L_1 par rapport à C_2, il en résulte que :

L'enveloppe des cordes communes à une conique C_2 *et à chacun de ses points, considéré comme cercle infiniment petit, est une conique* Γ'_2, *polaire réciproque de* Γ_2 *par rapport à* C_2.

De plus :

La conique Γ'_2, *polaire réciproque de* F_2 *par rapport à* C_2, *est une courbe homothétique de* C_2; *le centre d'homothétie est le centre de* C_2, *le rapport d'homothétie est* $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

En effet,

$$\overline{\varphi A}^2 = \varphi L_1 . \varphi L \qquad \text{ou} \qquad \frac{\varphi L}{\varphi A} = \frac{\varphi A}{\varphi L_1}.$$

La corde fg de C_2 parallèle à la droite l et passant par le point L_1 a ses extrémités sur les droites OF et OG; FG étant le diamètre du cercle des centres parallèle à l.

Le triangle FCO est isoscèle; donc le triangle fL_1O l'est aussi. Donc

$$OL_1 = L_1 f = \frac{fg}{2}.$$

Si l'on désigne par O et L_1 deux points correspondants des coniques C_2 et Γ_2, et si du point L_1, comme centre, avec L_1O comme rayon, on décrit une circonférence, elle passera aux points f et g. Donc :

Si, par le point L_1 *de la conique* Γ_2, *on trace une tangente à cette* *conique, cette tangente interceptera sur la conique* C_2 *une corde, et si sur cette corde, prise comme diamètre, on décrit une circonférence, elle sera tangente à la conique* C_2 *au point* O *qui correspond à* L_1.

Ces deux derniers théorèmes sont dus à Steiner (*loco citato*).

$$n = 2, \quad m = 2.$$

20. Nous continuerons à supposer que φ'_n est un cercle. L'application des théorèmes généraux ne présente aucune difficulté; nous nous contenterons d'examiner quelques-uns des cas où la courbe F_2 est elle-même un cercle.

Remarquons d'abord que, le cercle F_2 passant aux points circulaires de l'infini, la courbe F′ passe aussi par ces points. La courbe F′ est, en général, du quatrième ordre, elle a toujours deux asymptotes imaginaires; les deux autres sont réelles et distinctes, réelles et coïncidentes, ou imaginaires suivant que F_2 coupera, touchera ou ne coupera pas le cercle des inflexions. La courbe F′ a trois points doubles sur le cercle des centres, infiniment voisins de O, qui sera donc un nœud d'osculation (¹). Mais deux de ces points sont imaginaires si F_2 ne coupe pas la tangente en O au cercle des centres, le point double restant est alors un point isolé.

Si F_2 passe par le centre instantané et y est tangent au cercle des centres, la courbe F′ est aussi un cercle, tangent également au cercle des centres; mais F_2 et F_2 sont situés de part et d'autre de la tangente en O au cercle des centres.

Si F_2 *est le cercle de roulement,* F'_2 *est le cercle symétrique par rapport à* O.

Si la courbe F_2 passe par le centre instantané, mais sans être tangente au cercle des centres, F′ est la projection horizontale de la courbe d'intersection de deux cônes; la génératrice verticale ΣO leur est commune, donc la courbe F'_3 qui passe par les points circulaires de l'infini est une strophoïde dont le point double est au point O.

Cette strophoïde est osculée, en O, par le cercle des centres φ'_2, et, comme la projection horizontale de l'intersection des deux cônes reste

(¹) SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven*, p. 263.

la même quand on considère φ'_2 comme le cercle mobile et F_2 comme le cercle des centres (n° 9), le cercle F_2 est aussi un cercle osculateur en O de la strophoïde. Ainsi :

Quand un cercle F_2, *qui passe par le centre instantané de rotation, se déplace, le lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires de ses divers points est une strophoïde dont le point double est au centre instantané. Les cercles osculateurs au point double sont le cercle* F_2 *et le cercle des centres* φ'_2.

Il résulte de ce théorème que :

Si l'on trace une transversale par le point double O *d'une strophoïde, et si l'on nomme* M, m, m' *ses points d'intersection avec la courbe et avec ses deux cercles osculateurs en* O, *on a*

$$\frac{1}{\text{OM}} = \frac{1}{\text{O}m} + \frac{1}{\text{O}m'}.$$

La construction de la tangente en un point de la strophoïde et celle de son asymptote réelle n'offrent aucune difficulté.

Si le cercle F_2 coupe orthogonalement le cercle φ'_2, la strophoïde devient une focale de Quetelet, et l'on voit facilement que le foyer de la courbe est le point milieu de la corde commune à F_2 et à φ'_2. De là ce théorème :

Dans la focale de Quetelet, le foyer et les centres des cercles osculateurs de la courbe au point double sont situés sur une même droite perpendiculaire à celle qui joint le foyer au point double.

La correspondance qui existe entre le plan fixe et le plan mobile donne immédiatement des théorèmes qu'il serait quelquefois assez difficile d'établir directement.

Ainsi, aux théorèmes : Par un point donné P, on ne peut mener que deux tangentes au cercle; si le point P parcourt une droite, sa polaire tourne autour d'un point, correspondent ces théorèmes :

Par un point P *du plan d'une strophoïde, on ne peut tracer que deux coniques osculatrices de l'une des branches* b *de cette courbe en son point double et qui lui sont tangentes en un autre point.*

Nommons M et N les points de contact de ces deux coniques avec la strophoïde.

La conique osculatrice de la branche b de la strophoïde en son point double O, *qui est déterminée par les points* M *et* N, *pivote autour d'un point* P′ *quand le point* P *parcourt une conique quelconque osculatrice de la branche b de la strophoïde au point* O.

A une droite du plan de la strophoïde correspond une conique osculatrice du cercle des inflexions au point O; de plus, la strophoïde est de la quatrième classe; donc :

Étant donnés deux cercles F_2 *et* f_2 *qui se coupent au point* O, *on ne peut tracer que quatre coniques osculatrices de* f_2 *en* O *et tangentes à* F_2.

Une strophoïde n'a qu'un seul point d'inflexion réel; donc :

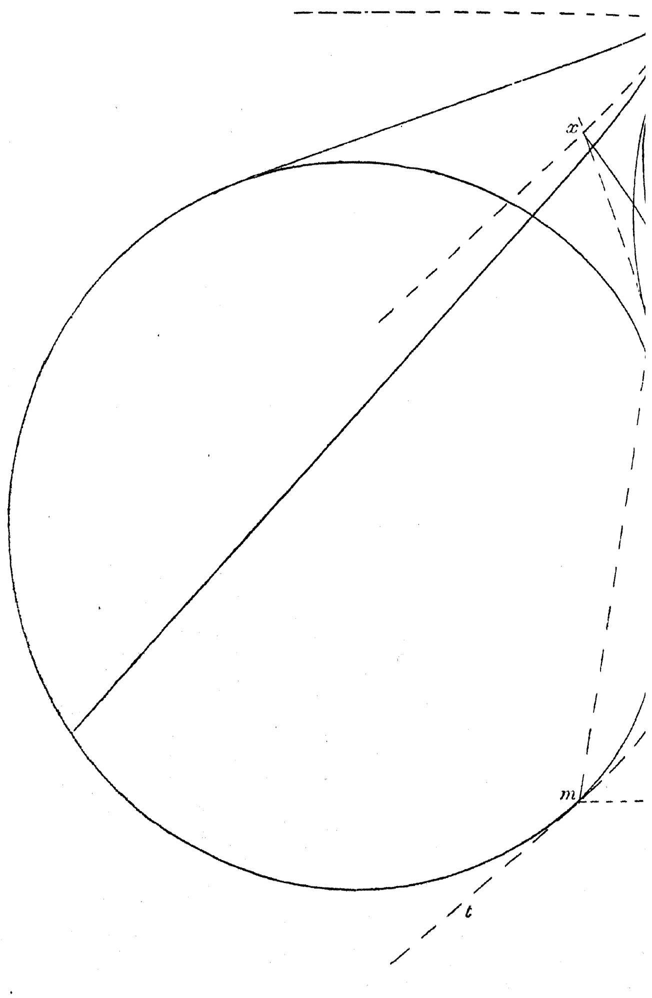
Étant donnés deux cercles F_2 *et* f_2 *qui se coupent au point* O, *il n'y a qu'une seule conique réelle osculatrice de* f_2 *en* O *et osculatrice de* F_2.

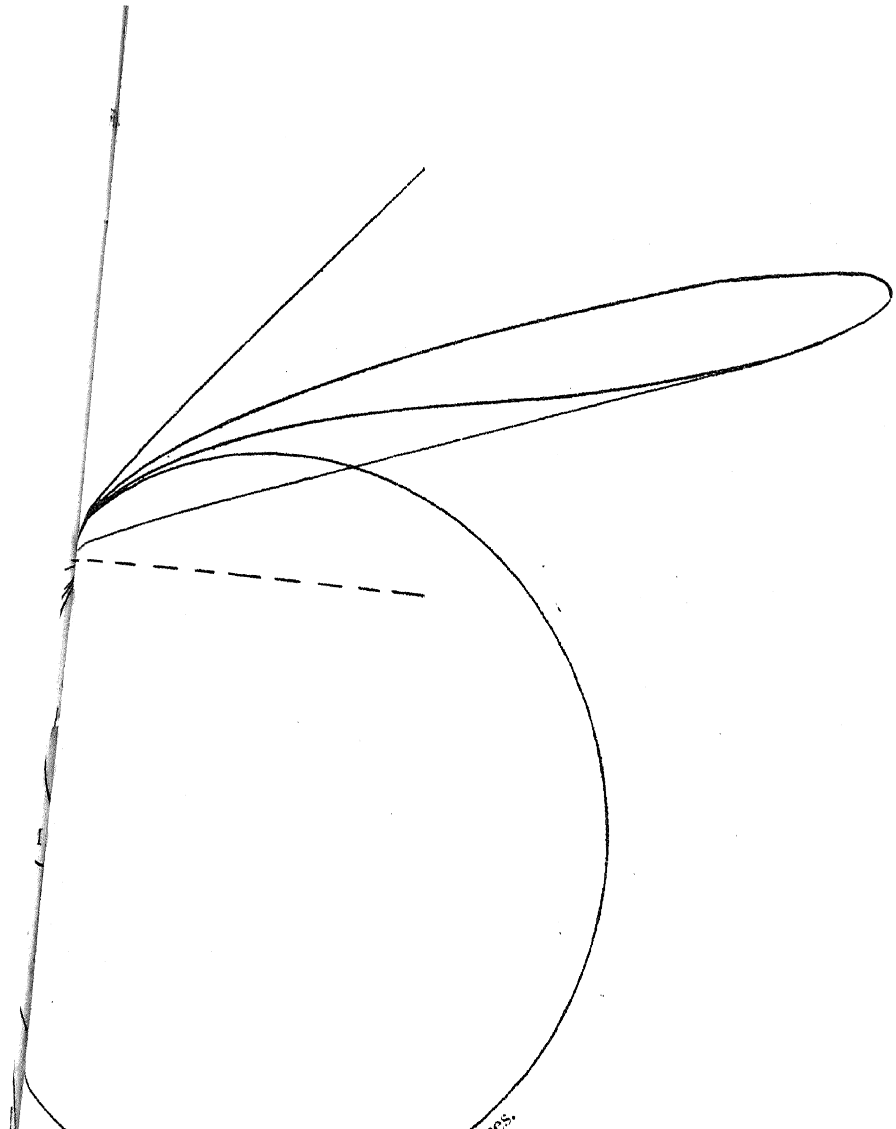
Supposons maintenant que le cercle F_2 ne passe pas au centre instantané de rotation O; la courbe F_4 correspondante aura un nœud d'osculation en O sur le cercle des centres; ce nœud sera réel si F_2 coupe la tangente en O au cercle des centres. C'est le cas qui est représenté dans la *fig.* 5.

On peut tracer la tangente en un point M de cette courbe en prenant la projection horizontale de l'intersection des plans tangents au cône $[\Sigma\varphi'_2]$ le long de la génératrice Σm et au cône $[OF'_2]$ le long de la génératrice Om.

Cette même construction peut être expliquée sans avoir recours aux cônes. Le point infiniment voisin de m sur la conique donnée F_2 (conique ou cercle) appartient, comme le point m, à la tangente t en m à la conique. Donc, le point infiniment voisin de M sur la quartique appartient, comme le point M, à la conique qui correspond à la tangente t. En d'autres termes, la tangente en M à la quartique est la tangente en ce même point M à la conique qui correspond à la tangente t. Or cette dernière conique est la transformée homologique du cercle des centres, l'axe d'homologie passant par O et étant parallèle à t.

Traçons donc, par O, cette parallèle à t; soit x son point d'intersec-


x
m
t


Cercle des centres.

tion avec la tangente en m' au cercle des centres, la droite Mx sera la tangente à la quartique.

Cette construction montre que la quartique est inscrite à l'angle dont le sommet est au point O et dont les côtés sont tangents à F_2, ce qui est, d'ailleurs, évident *a priori*.

La quartique F_4 est de la sixième classe, elle a quatre tangentes doubles et six points d'inflexion. Donc :

Si l'on donne un cercle f_2, un point O sur ce cercle et un cercle F_2 qui ne passe pas par le point O, on peut énoncer les théorèmes suivants :

Par un point quelconque on peut tracer six coniques osculatrices de f_2 au point O *et tangentes à* F_2.

Il y a quatre coniques osculatrices de f_2 au point O *et doublement tangentes à* F_2.

Il y a six coniques osculatrices de f_2 au point O *et osculatrices de* F_2.

Nous citerons encore le théorème suivant qui résulte immédiatement de la correspondance entre les deux plans.

Le point de contact des tangentes à un faisceau de cercles déterminé par les points A et B, issues d'un même point P, sont sur un même cercle. Donc :

Si l'on donne un faisceau de quartiques passant par les points circulaires de l'infini et par les points A′ *et* B′ *et ayant le même nœud d'osculation, les points de contact des coniques osculatrices de ce nœud et passant par un point* P′ *avec les diverses quartiques sont sur une même quartique passant par les points circulaires de l'infini, ayant le même nœud d'osculation, mais ne passant pas par les points* A′ *et* B′.

21. Reprenons les courbes générales F_m et F'_{mn} du n° 5. Ces courbes sont évidemment du même genre. De plus, le nombre des points d'inflexion de la courbe F'_{mn}, égal à celui des courbes F'_n (qui correspondent aux deux droites du plan P) qui osculent F_m, est donné par l'expression

$$3m(m+n-3)-3\sigma-12\tau-6(d-t)-8\beta,$$

où d est le nombre des points doubles de F_m, β le nombre de ses points de rebroussement, σ le nombre des points de la base du réseau de courbes F'_n qui se confondent avec des points simples de F_m, et τ le nombre des points de la base du même réseau qui se confondent avec les points doubles de F_m. Cette formule est empruntée à un Mémoire de M. Brill (1).

Si l'on applique cette formule au cas de la Cinématique, il en résulte que :

Le nombre des points d'inflexion du lieu géométrique F'_{2m} des centres de courbure des trajectoires des points d'une courbe F_m est

$$3[m(m-1)-\sigma-2\tau-2d]-8\beta.$$

(1) Brill, *Mathematische Annalen*, t. III, 1871.

FIN DU TOME III DE LA IIIe SÉRIE.