ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

T.-J. STIELTJES

Recherches sur quelques séries semi-convergentes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 3 (1886), p. 201-258

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1886_3_3__201_0>

RECHERCHES

SUR

QUELQUES SÉRIES SEMI-CONVERGENTES,

PAR M. TH. STIELTJES.

INTRODUCTION.

Nous allons indiquer en quelques mots le but et les principaux résultats de ce travail qui est consacré à l'étude de quelques séries semi-convergentes, en considérant exclusivement les valeurs réelles et positives de la variable.

On rencontre souvent, en Mathématiques, des développements de la forme

$$\text{(A)} \qquad F(a) = m_0 + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \frac{m_3}{a^3} + \ldots,$$

que l'on ne pourrait continuer indéfiniment s'il s'agissait d'un calcul numérique, la série étant divergente. Néanmoins un tel développement a un sens précis et l'on doit regarder la formule (A) comme une manière symbolique d'exprimer que, pour $a = \infty$,

$$\lim F(a) = m_0,$$
$$\lim a[F(a) - m_0] = m_1,$$
$$\lim a^2\left[F(a) - m_0 - \frac{m_1}{a}\right] = m_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ce sont les développements qui présentent ce caractère que nous avons en vue. Si l'on veut se servir de la formule (A) pour évaluer

$F(a)$, on ne pourra le faire d'une manière sûre, qu'après une discussion du terme complémentaire qu'il faut ajouter à un nombre fini de termes. Mais cette discussion présente presque toujours de très grandes difficultés, si, du moins, on ne veut se contenter d'évaluations trop grossières qui auraient peu d'utilité, et c'est seulement dans quelques cas où les coefficients $m_0, m_1, m_2, \ldots$ suivent une loi simple qu'on a pu faire cette discussion.

Notamment on a trouvé, dans plusieurs cas où les coefficients sont alternativement positifs et négatifs, que la valeur exacte de $F(a)$ est comprise toujours entre la somme de n et de $n+1$ termes de la série, et l'on a introduit, précisément à l'occasion des séries qui présentent cette circonstance particulière, le nom de *série semi-convergente*. Mais, comme nous venons de l'indiquer, nous avons pris ce terme dans une acception plus générale, et nous avons étudié aussi quelques cas dans lesquels les coefficients $m_0, m_1, \ldots$ ont tous même signe.

Pour abréger, nous désignerons par série semi-convergente de *première espèce*, ou même simplement par série de première espèce, une série telle que (A), dans laquelle le signe des coefficients est alternativement positif et négatif, pour réserver le nom de série de *seconde espèce* au cas où les coefficients ont même signe.

Les cas de séries de seconde espèce qu'on a déjà traités semblent assez rares, et à la vérité nous n'en avons rencontré qu'un seul dû à M. Schlömilch et sur lequel nous reviendrons. Mais les séries de seconde espèce donnent lieu à quelques remarques générales que nous allons développer, en envisageant pour plus de précision la série suivante, que l'on rencontre dans l'étude du logarithme intégral :

$$\begin{aligned}\mathrm{li}(e^a) &= e^a\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1.2}{a^3}+\ldots+\frac{1.2\ldots(n-1)}{a^{n-1}}+\mathrm{R}_n\right]\\ &= e^a\left[\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2+\mathrm{T}_3+\ldots+\mathrm{T}_n+\mathrm{R}_n\right].\end{aligned}$$

Supposons a très grand : les termes diminuent d'abord pour croître ensuite au delà de toute limite. Soit T_n le plus petit terme, alors les termes $\mathrm{T}_{n-1}, \mathrm{T}_{n-2}, \ldots, \mathrm{T}_{n-k}$ diffèrent très peu de T_n et

$$\mathrm{R}_{n-k}=\mathrm{T}_{n-k+1}+\ldots+\mathrm{T}_n+\mathrm{R}_n.$$

On voit par là qu'au moins une des quantités R_{n-k}, R_n surpassera en valeur absolue $\frac{1}{2}k\mathrm{T}_{n-k+1}$ ou $\frac{1}{2}k\mathrm{T}_n$, et comme le nombre k peut avoir une valeur finie quelconque, il est évident qu'en cherchant dans le cas actuel une valeur approchée de R_n, il est impossible d'arriver à un résultat aussi simple que celui auquel on est arrivé pour beaucoup de séries de première espèce où le reste R_n est inférieur en valeur absolue à T_n. On voit en effet que, dans le cas actuel, R_n pourra surpasser en valeur absolue un nombre quelconque de fois T_n. Ainsi une expression approchée du reste, qui ne ferait pas connaître d'avance le signe de cette quantité, donnera toujours des limites trop étendues et qui ne permettent point de tirer tout le parti possible de la série.

Ces considérations indiquent déjà une autre manière d'envisager la question, et, dans le cas des séries de seconde espèce, nous considérons que le vrai problème à résoudre est la détermination du rang du reste R_n qui, pour la première fois, a changé de signe. Il est évident en effet que R_n varie toujours dans le même sens, en sorte que l'équation $\mathrm{R}_n = 0$ admet une seule racine. Soit n le premier nombre entier supérieur à cette racine : alors il est clair qu'on obtient pour la valeur exacte cherchée deux limites dont la différence est T_n. Il serait donc à désirer que ce changement de signe de R_n eût lieu dans le voisinage du plus petit terme, et, dans tous les cas que nous avons étudiés, nous avons toujours vu se présenter cette circonstance favorable.

Lorsqu'on réussit à résoudre l'équation transcendante

$$\mathrm{R}_n = 0,$$

dans laquelle on considère n comme une variable continue, avec une approximation telle, que l'erreur de la valeur obtenue N soit seulement une petite fraction, on peut aller plus loin et obtenir une valeur approchée dont l'erreur sera seulement une fraction assez faible de T_n. Soient en effet

$$\mathrm{N} = n + \lambda, \qquad 0 \leqq \lambda < 1\ ;$$

alors cette valeur approchée sera

$$\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + \ldots + \mathrm{T}_n + \lambda \mathrm{T}_{n+1}.$$

Surtout lorsque n est grand, on peut compter d'obtenir, en procédant ainsi, une réduction notable de l'erreur. On s'en rend compte aisément en observant que la ligne dont l'équation serait $y = R_n$ doit présenter un point d'inflexion dans le voisinage de $n = N$, parce qu'on se trouve en même temps dans le voisinage du minimum de $T_n = R_{n-1} - R_n$.

La solution approchée de l'équation $R_n = 0$ se présente toujours sous la forme

$$n = \alpha a + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_2}{a^2} + \ldots; \tag{B}$$

mais souvent il est plus commode de considérer a comme inconnue, et de calculer d'abord les coefficients β, β_0, ... du développement

$$a = \beta n + \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \ldots. \tag{C}$$

On en déduit ensuite facilement le développement (B). Ces séries (B) et (C) présentent le même caractère que la série (A); nous calculons quelques-uns des premiers coefficients : ces coefficients ne suivent aucune loi simple et leur calcul devient bientôt très pénible. Il paraît donc que nous avons réduit ainsi la discussion de la série (A) au problème beaucoup plus compliqué de discuter la série (B). Mais évidemment on ne demande qu'avec une approximation assez faible la racine de $R_n = 0$, et, comme l'exactitude de la formule (B) croît nécessairement lorsque n augmente, il suffit de se rendre compte par un calcul numérique de l'approximation de ces formules (B) et (C), en attribuant à a ou à n des valeurs beaucoup plus petites que celles pour lesquelles on se servira de la série semi-convergente donnée. L'approximation obtenue est toujours largement suffisante.

Comme nous l'avons dit, nous considérons la solution approchée de $R_n \doteq 0$ comme le problème principal à résoudre dans le cas d'une série de seconde espèce. Nous obtenons cette solution en considérant en particulier le reste R_n d'un terme T_n dans le voisinage du plus petit terme, et en développant R_n lui-même en série semi-convergente suivant les puissances descendantes de n. Dans quelques cas où l'on aurait besoin d'une exactitude exceptionnelle, on pourrait se servir de ce développement pour calculer avec une grande exactitude la valeur de R_n.

Mais, dans la plupart des cas, on n'aura pas à continuer la série jusqu'au point où R_n change de signe, car on obtiendrait ainsi une approximation beaucoup trop grande. On peut souhaiter alors de savoir quelle est à peu près l'erreur en s'arrêtant à un terme quelconque.

Très souvent les termes que l'on calcule diminuent si rapidement, que l'on peut négliger le reste; au besoin on calculerait avec une approximation plus grande qu'on n'en a besoin. Et dans le cas où l'on serait obligé de pousser le calcul si loin que les termes ne diminuent plus rapidement, alors la connaissance exacte du terme où il faut arrêter le développement permettra facilement d'évaluer approximativement les termes négligés.

Dans le cas des séries de première espèce, on a ordinairement cherché à déterminer le plus petit terme; mais on peut aussi envisager (comme on l'a déjà fait) la question d'une manière un peu différente et rétablir ainsi, jusqu'à un certain point, l'analogie avec les séries de seconde espèce.

Soit

$$T_1 - T_2 + \ldots \pm T_n \mp R_n$$

une telle série, T_1, T_2, ..., T_n, R_n étant positifs. Remarquons d'abord que la circonstance que R_n est positif entraîne déjà nécessairement que R_n est inférieur à T_n et à T_{n+1}; car la relation

$$R_{n-1} + R_n = T_n$$

montre que R_{n-1} et R_n sont inférieurs à T_n.

Maintenant, au lieu de chercher le plus petit terme, on peut se proposer de trouver le minimum de R_n, en sorte qu'on est conduit à considérer l'équation transcendante

$$\frac{dR_n}{dn} = 0,$$

qu'on pourra remplacer aussi avec approximation par $R_{n-1} = R_n$.

La valeur de n qu'on en tire diffère très peu du rang du plus petit terme, circonstance qui permet d'expliquer la remarque suivante qu'on a faite dans quelques cas particuliers. Supposons que la racine de $\frac{dR_n}{dn} = 0$ tombe entre $n - 1$ et n. Alors on aura, d'une manière approchée, $R_{n-1} = R_n$, et l'erreur sera seulement une fraction faible de R_n. On en conclut qu'on a aussi à peu près $R_n = \frac{1}{2} T_n$, en sorte que l'erreur de l'expression

$$T_1 - T_2 + \ldots \pm T_{n-1} \mp \tfrac{1}{2} T_n$$

sera seulement une petite fraction de T_n, qui est d'autant plus faible que n est plus grand. Ajoutons qu'on peut aussi, dans le cas actuel, développer R_n en série semi-convergente, suivant les puissances descendantes de n; le premier terme de ce développement montre alors qu'on a

$$\lim R_n : T_n = \tfrac{1}{2}$$

pour $n = \infty$.

Voici maintenant les séries dont nous avons fait l'étude. Nous avons peu insisté sur les séries de première espèce. Le logarithme intégral nous a fourni le premier exemple d'une série de seconde espèce. Nous considérons ensuite les transcendantes $\int_0^\infty \frac{\sin au}{1+u^2}\,du$, $\int_0^\infty \frac{u \cos au}{1+u^2}\,du$, qui donnent aussi des séries de seconde espèce. On a choisi ces intégrales, parce que le résultat auquel on est conduit nous est utile encore dans la suite.

Nous arrivons maintenant à un exemple tiré de la théorie de la fonction Γ. Après avoir rappelé en quelques mots le résultat principal des nombreuses recherches auxquelles a donné lieu l'étude de la série qui sert à calculer $\log\Gamma(a)$, nous considérons une autre série, n'ayant rien à ajouter à un sujet qui est si bien exposé dans la première Partie du travail de M. Bourguet sur les intégrales eulériennes. La considération de $\log\Gamma(ai)$ conduit à une série de seconde espèce, composée des mêmes termes que la série de Stirling dont nous faisons l'étude. Le résultat auquel nous arrivons permet de se faire une idée nette de la manière dont se comporte la fonction holomorphe $\frac{1}{\Gamma(z)}$, lorsque la variable z décrit l'axe des y.

Nous abordons ensuite l'étude des intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 z}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{dz}{da} + z = 0,$$

qui se présente dans plusieurs questions de Physique mathématique.

L'une des intégrales

$$J(a) = 1 - \frac{a^2}{2^2} + \frac{a^4}{2^2.4^2} - \frac{a^6}{2^2.4^2.6^2} + \dots$$

est holomorphe dans tout le plan. Poisson a donné une série semi-convergente pour calculer $J(a)$ dans le cas où a est très grand. Cette série a été l'objet d'un travail de M. Lipschitz (*Journal de Borchardt*, t. 56), qui en a donné le premier une théorie rigoureuse. Nous reprenons l'analyse de M. Lipschitz : une modification légère nous permet de préciser encore le résultat auquel était arrivé le savant géomètre allemand. Nous obtenons en même temps une série semi-convergente analogue, qui permet de calculer une seconde intégrale de l'équation différentielle. Toutes ces séries sont de première espèce.

Nous considérons ensuite les deux intégrales de l'équation différentielle dans le cas où l'argument est de la forme ai. On est conduit ainsi à deux séries semi-convergentes données par Riemann, qui avait rencontré ces fonctions dans une question de Physique mathématique [*Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringen* (*Œuvres*, p. 54; 1855)].

L'une de ces séries est de première espèce, et sa discussion n'offre pas de grandes difficultés; mais la fonction $J(ai)$ donne cette série de seconde espèce

$$J(ai) = e^a \sqrt{\frac{1}{2\pi a}} \left[1 + \frac{1^2}{1.8a} + \dots + \frac{1^2.3^2\dots(2n-3)^2}{1.2\dots(n-1)(8a)^{n-1}} + R_n \right].$$

Dans ce cas, la résolution approchée de l'équation $R_n = 0$ présente des difficultés que nous n'avons pu surmonter que par une analyse assez délicate.

Enfin nous étudions un cas intéressant, donné par M. Schlömilch en 1861 ; il s'agit d'une série de seconde espèce qui peut servir au calcul de la fonction

$$P(a) = \sum_1^\infty \frac{1}{e^{\frac{n}{a}} - 1},$$

et nous obtenons encore dans ce cas la solution approchée de l'équation transcendante $R_n = 0$.

Étude du logarithme intégral.

1. Le logarithme intégral fournit un exemple très simple d'une série de seconde espèce que nous allons discuter avec soin.

Nous partons de la définition

$$\operatorname{li}(a)=\int_0^a \frac{du}{\log u};$$

mais, dans le cas $a>1$ que nous avons en vue, cette définition a besoin d'être précisée de la manière suivante :

$$\operatorname{li}(a)=\operatorname*{Lim}_{\varepsilon=0}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{du}{\log u}+\int_{1+\varepsilon}^{a}\frac{du}{\log u}\right).$$

En remplaçant l'argument a par e^a et en posant ensuite $u=e^{a(1-v)}$, il vient

$$\operatorname{li}(e^a)=e^a\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{e^{-av}}{1-v}\,dv+\int_{1+\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-av}\,dv}{1-v}\right). \tag{1}$$

Nous désignons ici, comme toujours dans la suite, par ε une quantité positive et infiniment petite.

En employant maintenant l'identité

$$\frac{1}{1-v}=1+v+v^2+\ldots+v^{n-1}+\frac{v^n}{1-v},$$

on a évidemment

$$\int_0^{1-\varepsilon} v^k e^{-av}\,dv+\int_{1+\varepsilon}^{\infty} v^k e^{-av}\,dv=\frac{1.2\ldots k}{a^{k+1}},$$

et il vient

$$\operatorname{li}(e^a)=e^a\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1.2}{a^3}+\ldots+\frac{1.2\ldots(n-1)}{a^n}+\mathrm{R}_n\right], \tag{2}$$

$$\mathrm{R}_n=\int_0^{1-\varepsilon}\frac{v^n e^{-av}}{1-v}\,dv+\int_{1+\varepsilon}^{\infty}\frac{v^n e^{-av}}{1-v}\,dv.$$

Comme on voit, R_n est ce que Cauchy a appelé la *valeur principale* de $\int_0^\infty \frac{v^n e^{-av}}{1-v}dv$, et nous retrouverons dans la suite constamment cette forme du terme complémentaire des séries de seconde espèce. Cette forme même de R_n montre bien que R_n va toujours en diminuant lorsque n augmente.

Nous devons nous occuper maintenant de la résolution approchée de l'équation $R_n = 0$. Pour cela nous posons $a = n + \eta$,

$$R_n = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv, \tag{3}$$

et nous développons maintenant R_n en série semi-convergente suivant les puissances descendantes de n. Comme on suppose que η a une valeur finie, la supposition $a = n + \eta$ indique évidemment que nous considérons le reste d'un terme T_n dans le voisinage du plus petit terme.

Nous aurons à appliquer maintenant les méthodes données par Laplace dans la *Théorie analytique des probabilités* pour l'évaluation d'intégrales qui renferment des fonctions élevées à une très haute puissance.

2. Comme il s'agit simplement d'un développement suivant les puissances descendantes de n, nous pouvons négliger des quantités qui, par rapport à celles que l'on conserve, décroissent plus rapidement qu'aucune puissance négative de n. C'est pour cette raison que nous pouvons considérer, au lieu de R_n, l'expression

$$\int_{1-h}^{1-\varepsilon} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv + \int_{1+\varepsilon}^{1+k} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv,$$

h et k étant des quantités positives finies, d'ailleurs arbitraires; car nous verrons bientôt que les parties négligées ainsi

$$\int_0^{1-h} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv, \quad \int_{1+k}^\infty \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv$$

ne jouent aucun rôle dans le développement que nous avons en vue.

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_{1-h}^{1-\varepsilon} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v}\, dv.$$

La fonction ve^{-v} devient maximum pour $v = 1$, et nous posons

$$ve^{-v} = e^{-1-x^2}, \qquad 1 - v = t,$$
$$(1-t)\, e^t = e^{-x^2}.$$

Pour des valeurs suffisamment petites de x, on peut développer t suivant les puissances croissantes de x

$$t = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

et le premier terme est évidemment $\sqrt{2}\, x$. On pourrait exprimer a_2, a_3, … d'une manière indépendante à l'aide de la série de Lagrange; mais, comme il s'agit ici simplement de calculer quelques-uns des premiers coefficients, une relation récurrente semble bien préférable.

On trouve $t \dfrac{dt}{dx} = 2x(1-t)$, et, différentiant n fois, puis posant $x = 0$, $t = 0$, il vient

$$na_1 a_n + (n-1) a_2 a_{n-1} + (n-2) a_3 a_{n-2} + \ldots + 1\, a_n a_1 = -2 a_{n-1} \quad (n \geqq 2).$$

En partant de $a_1 = \sqrt{2}$, on en déduit a_2, a_3, … et

$$t = \quad 1 - v = \sqrt{2}\, x - \tfrac{2}{3} x^2 + \tfrac{1}{18}\sqrt{2}\, x^3 + \tfrac{2}{135} x^4$$
$$- dv = \left(\sqrt{2} - \tfrac{4}{3} x + \tfrac{1}{6}\sqrt{2}\, x^2 + \tfrac{8}{135} x^3\right) dx$$
$$-\frac{dv}{1-v} = \left(1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{2}\, x - \tfrac{1}{9} x^2 + \tfrac{1}{270}\sqrt{2}\, x^3 - \ldots\right) \frac{dx}{x}.$$

En observant encore que

$$e^{-\eta v} = e^{-\eta} e^{+\eta t} = e^{-\eta}\left[1 + \eta\sqrt{2}\, x + \left(\eta^2 - \tfrac{2}{3}\eta\right) x^2 + \left(\tfrac{1}{3}\eta^3 - \tfrac{2}{3}\eta^2 + \tfrac{1}{18}\eta\right)\sqrt{2}\, x^3 + \ldots\right]$$

il vient

$$(4) \quad \int_{1-h}^{1-\varepsilon} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v}\, dv = e^{-a} \int_{\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}}}^{\mathrm{L}} e^{-nx^2}\left[1 + \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 x^2 + \mathrm{A}_3 x^3 + \ldots\right] \frac{dx}{x},$$

$A_1, A_2, A_3, \ldots$ étant des polynômes en η. La limite supérieure L de l'intégrale au second membre dépend de la valeur de la quantité positive h. Nous choisissons maintenant h de manière que la série $1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ reste convergente dans tout l'intervalle d'intégration. De cette manière, h a une valeur positive finie tout à fait indépendante de n. En y regardant de plus près, on voit même que h est une simple constante numérique, indépendante de η aussi; car le rayon de convergence de la série $e^{\eta t} = 1 + \eta\sqrt{2}x + \ldots$ ne dépend pas de η.

3. En traitant l'intégrale $\int_{1-\varepsilon}^{1+k} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv$ d'une manière analogue, nous posons

$$ve^{-v} = e^{-1-x^2}, \qquad v - 1 = t,$$
$$(1+t)e^{-t} = e^{-x^2},$$

et nous obtenons d'abord

$$t = a_1 x - a_2 x^2 + a_3 x^3 - \ldots,$$

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ ayant les mêmes valeurs que précédemment. En achevant le calcul comme tout à l'heure, il vient

$$(5) \quad \int_{1+\varepsilon}^{1+k} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv = -e^{-a} \int_{\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}}}^{L} e^{-nx^2}[1 - A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + \ldots] \frac{dx}{x},$$

$A_1, A_2, \ldots$ ayant la même signification que dans la formule (4). La quantité k peut être choisie de manière que dans le second membre la limite supérieure de l'intégration est de nouveau L.

En réunissant les deux intégrales (4) et (5), on voit se détruire les parties qui deviennent infinies pour $\varepsilon = 0$. Après cela, on peut prendre $\varepsilon = 0$, et il vient

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{1-h}^{1-\varepsilon} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv + \int_{1+\varepsilon}^{1+k} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv \\ &\quad = 2e^{-a} \int_0^L e^{-nx^2}[A_1 + A_3 x^2 + A_5 x^4 + \ldots] dx. \end{aligned} \right.$$

On sait que l'intégrale $\int_L^\infty e^{-nx^2} x^k dx$ converge vers zéro pour $n = \infty$

plus rapidement qu'aucune puissance négative de n. La valeur approchée du second membre est donc

$$2e^{-a}\int_0^\infty e^{-nx^2}A_1\,dx = A_1 e^{-a}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

ou

$$\left(n-\frac{1}{3}\right)e^{-a}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

Il est facile de voir maintenant que les parties que nous avons négligées,

$$\int_0^{1-h}\frac{(ve^{-v})^n}{1-v}e^{-\eta v}\,dv \quad \text{et} \quad \int_{1+k}^\infty \frac{(ve^{-v})^n}{1-v}e^{-\eta v}\,dv,$$

n'ont, en effet, aucune influence sur le développement de R_n suivant les puissances descendantes de n. En effet, dans la première intégrale, la plus grande valeur de ve^{-v} est égale à Θe^{-1}, Θ étant une fraction positive, inférieure à l'unité. On en conclut

$$\int_0^{1-h}\frac{(ve^{-v})^n}{1-v}e^{-\eta v}\,dv < \frac{\Theta^n}{h}e^{-n}\int_h^1 e^{-\eta(1-u)}\,du = \frac{\Theta^n}{h}e^{-a}\int_h^1 e^{+\eta u}\,du,$$

et la fraction Θ^n décroît plus rapidement qu'aucune puissance négative de n. Quant à la deuxième intégrale, en posant $v = 1 + u$, on voit qu'elle est inférieure en valeur absolue à

$$\frac{e^{-a}}{k}\int_k^\infty (1+u)^n e^{-nu}e^{-\eta u}\,du.$$

Soit r la quantité positive supérieure à l'unité, qui satisfait à la relation

$$1 + k = e^{\frac{k}{r}};$$

alors on a évidemment

$$1 + u < e^{\frac{u}{r}} \quad \text{pour} \quad u > k$$

et, par conséquent,

$$\frac{e^{-a}}{k}\int_k^\infty (1+u)^n e^{-nu}e^{-\eta u}\,du < \frac{e^{-a}}{k}\int_k^\infty e^{-nu\left(1-\frac{1}{r}\right)-\eta u}\,du.$$

Le facteur qui multiplie e^{-a} décroît encore plus rapidement que toute puissance négative de n, et, ainsi, l'équation (6) fournit le développement cherché

$$R_n = e^{-a}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\left(A_1 + \frac{1}{2}A_3\frac{1}{n} + \frac{1.3}{2.2}A_5\frac{1}{n^2} + \ldots\right)$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} R_n = e^{-a}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\Big[\eta - \frac{1}{3} &+ \left(\frac{1}{6}\eta^3 - \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{12}\eta + \frac{1}{540}\right)\frac{1}{n} \\ &+ \left(\frac{1}{40}\eta^5 - \frac{5}{24}\eta^4 + \frac{25}{72}\eta^3 - \frac{1}{24}\eta^2 + \frac{1}{288}\eta + \frac{25}{6048}\right)\frac{1}{n^2} + \ldots \end{aligned}\right.$$

On en conclut que la valeur de η, qui donne $R_n = 0$, est susceptible d'un développement

$$\eta = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \ldots,$$

dont on détermine les coefficients en substituant dans l'expression précédente et en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de $\frac{1}{n}$. Nous avons posé $a = n + \eta$, et la racine de l'équation $R_n = 0$ est donc égale à

$$a = n + \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta^2}{n^2} + \ldots, \tag{8}$$

$$\beta_0 = +\frac{1}{3},$$

$$\beta_1 = +\frac{8}{405},$$

$$\beta_2 = -\frac{184}{25515};$$

d'où l'on déduit encore

$$n = a - \frac{1}{3} - \frac{8}{405a} + \frac{16}{25515a^2} - \ldots. \tag{9}$$

4. Pour juger de l'approximation avec laquelle nous avons résolu ainsi l'équation $R_n = 0$, nous mettons en regard l'une de l'autre la valeur approchée donnée par la formule (8) pour $n = 1$, 2 avec la

valeur exacte, calculée à l'aide du développement

$$\mathrm{li}(e^a) = \mathfrak{C} + \log a + \frac{a}{1.1!} + \frac{a^2}{2.2!} + \frac{a^3}{3.3!} + \ldots.$$

n.	Valeur exacte.	Valeur approximative.	Erreur.
1.............	1,3472	1,3459	0,0013
2.............	2,34155	2,34141	0,00014

On voit que l'approximation obtenue est beaucoup plus grande que cela n'était nécessaire.

En nommant toujours N la valeur approchée de la racine de $R_n = 0$, nous résumons ainsi le résultat obtenu :

$$\mathrm{li}(e^a) = e^a \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots + \frac{1.2\ldots(n-1)}{a^n} + R_n \right],$$

$$N = a - \frac{1}{3} - \frac{8}{405a} + \frac{16}{25515a^2}.$$

Ordre d'approximation............... $e^{-a}\sqrt{\dfrac{2\pi}{a}}$.

Nous avons ajouté comme ordre d'approximation une valeur approchée du premier terme qui donnerait une valeur trop grande. C'est donc en même temps la limite de l'approximation que peut donner la série semi-convergente, dans le cas où l'on n'a pas recours au calcul approché de R_n. En multipliant par e^a, on voit qu'on obtient $\mathrm{li}(e^a)$ avec une erreur de l'ordre $\sqrt{\dfrac{2\pi}{a}}$.

Soit, par exemple,

$$e^a = 10000000000,$$
$$a = 23,025851\ldots,$$
$$N = 22,692.$$

On doit donc prendre vingt-deux termes de la série et ajouter encore le terme suivant multiplié par $\lambda = 0,692$, d'après le procédé que nous avons indiqué dans l'Introduction. On trouve ainsi

$$\mathrm{li}(10000000000) = 455055614,2227 + 0,5246\lambda = 455055614,585.$$

En prenant

$$n = 23, \qquad \eta = 0,02585\ldots,$$

on obtiendra une exactitude un peu plus grande en calculant R_{23} par la formule (7); nous obtenons ainsi la valeur exacte

$$\mathrm{li}(10000000000) = 455055614,5866.$$

Remarquons que l'emploi de la série semi-convergente présente ici un avantage réel sur l'emploi de la série convergente

$$\mathfrak{C} + \log a + \frac{a}{1.1!} + \frac{a^2}{2.2!} + \frac{a^3}{3.3!} + \ldots;$$

car, en calculant vingt-trois termes de cette série, on est seulement arrivé au plus grand terme, et il faudrait pousser beaucoup plus loin le calcul pour obtenir l'approximation donnée par la série semi-convergente.

5. La méthode qui nous a permis de résoudre par approximation l'équation transcendante $R_n = 0$ nous sera encore très utile dans la suite; mais nous ne pouvons passer sous silence que dans le cas actuel on peut donner une autre forme très simple au terme complémentaire R_n. Cette nouvelle forme va nous donner aussi une autre méthode pour calculer les coefficients du développement

$$a = n + \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \ldots.$$

On a, en supposant $0 < b < a$,

$$\mathrm{li}(e^a) = \mathrm{li}(e^b) + \int_b^a \frac{e^u}{u}\,du,$$

et une intégration par parties donne

$$\mathrm{li}(e^a) = e^a\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots + \frac{1.2\ldots(n-1)}{a^n} + R_n\right],$$

$$R_n = 1.2.3\ldots n.e^{-a}\int_{a_n}^a \frac{e^u}{u^{n+1}}\,du, \tag{10}$$

a_n étant une constante qu'il faut encore déterminer. Mais il est évident que a_n n'est autre chose que la valeur de a qui annule R_n, et que nous savons calculer avec une grande approximation par la formule (8)

$$a_n = n + \frac{1}{3} + \frac{8}{405n} - \frac{184}{25515n^2} + \cdots. \tag{11}$$

La relation

$$R_{n-1} = T_n + R_n$$

revient maintenant à

$$\int_{a_{n-1}}^{a} \frac{e^u}{u^n} du = \frac{e^a}{a^n} + n \int_{a_n}^{a} \frac{e^u}{u^{n+1}} du;$$

d'où, pour $a = a_n$,

$$\int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{e^u}{u^n} du = \frac{e^{a_n}}{a_n^n}.$$

En posant $u = n + v$, il vient, après une légère réduction,

$$(12) \qquad \int_q^p \frac{e^v\,dv}{\left(1+\frac{v}{n}\right)^n} = \frac{e^p}{\left(1+\frac{p}{n}\right)^n},$$

en écrivant

$$(13) \qquad \begin{cases} p = a_n \quad - n = \beta_0 \qquad + \dfrac{\beta_1}{n} + \dfrac{\beta_2}{n^2} + \dfrac{\beta_3}{n^3} + \ldots, \\ q = a_{n-1} - n = \beta_0 - 1 + \dfrac{\beta_1}{n} + \dfrac{\beta_1+\beta_2}{n^2} + \dfrac{\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3}{n^3} + \ldots. \end{cases}$$

En développant maintenant les deux membres de (12) suivant les puissances descendantes de n, on obtient d'abord

$$\frac{e^v}{\left(1+\frac{v}{n}\right)^n} = 1 + \frac{1}{2}v^2\frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{8}v^4\right)\frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{4}v^4 - \frac{1}{6}v^5 + \frac{1}{48}v^6\right)\frac{1}{n^3} + \ldots,$$

puis

$$p - q + \frac{1}{6}(p^3 - q^3)\frac{1}{n} + \ldots = 1 + \frac{1}{2}p^2\frac{1}{n} + \ldots.$$

En substituant pour p et q leurs valeurs (13), on obtient d'abord, par identification du coefficient de $\frac{1}{n}$ dans les deux membres,

$$\tfrac{1}{6}[\beta_0^3 - (\beta_0 - 1)^3] = \tfrac{1}{2}\beta_0^2 \qquad \text{ou} \qquad \beta_0 = +\tfrac{1}{3}.$$

La comparaison des coefficients de $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$, $\cdots$ permet ensuite de calculer sans ambiguïté par des équations linéaires les coefficients β_1,

$\beta_2, \ldots$. Nous avons retrouvé de cette manière les valeurs déjà données de β_1 et β_2.

6. La considération de la fonction $\mathrm{li}(a)$, pour une valeur de l'argument inférieure à l'unité, conduit à une série de première espèce. On a

$$\mathrm{li}(e^{-a}) = -\int_a^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du = -e^{-a}\int_0^\infty \frac{e^{-av}\,dv}{1+v},$$

et l'on obtient, par une intégration par parties ou par le développement de $\frac{1}{1+v}$,

$$(14)\qquad \mathrm{li}(e^{-a}) = -e^{-a}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1.2}{a^3} - \ldots \pm \frac{1.2\ldots(n-1)}{a^n} \mp \mathrm{R}_n\right],$$

$$\mathrm{R}_n = 1.2.3\ldots n e^a \int_a^\infty \frac{e^{-u}\,du}{u^{n+1}} = \int_0^\infty \frac{v^n e^{-av}\,dv}{1+v}.$$

Cette série ne donne lieu à aucune remarque particulière; en posant $a = n + \eta$, on peut développer R_n suivant les puissances descendantes de n, à l'aide des méthodes de Laplace que nous avons déjà appliquées dans le cas de $\mathrm{li}(e^a)$; on trouve

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{R}_n = e^{-a}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\,\Bigg[\frac{1}{2} &+ \left(\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{4}\eta - \frac{1}{12}\right)\frac{1}{n} \\ &+ \left(\frac{1}{16}\eta^4 - \frac{7}{24}\eta^3 + \frac{1}{12}\eta^2 + \frac{1}{24}\eta + \frac{13}{576}\right)\frac{1}{n^2} + \ldots\Bigg].\end{aligned}\right.$$

Ce développement présente la plus grande analogie avec la formule (7); dans les deux cas, $e^{-a}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ est la valeur asymptotique du terme T_n; mais ici R_n ne s'évanouit pas pour une valeur finie de η, et le premier terme $\frac{1}{2}$ de la série se retrouve généralement dans le cas d'une série de première espèce.

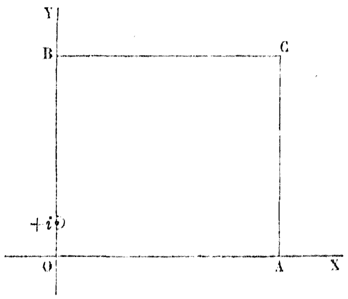
On déduirait sans peine de cette expression de R_n la solution approchée de $\frac{d\mathrm{R}_n}{dn} = 0$. Le résultat est

$$a = n + \frac{1}{6n} + \ldots \qquad \text{ou} \qquad n = a - \frac{1}{6a} - \ldots.$$

Étude des intégrales $\int_0^\infty \frac{\sin au}{1+u^2}\,du$, $\int_0^\infty \frac{u \cos au}{1+u^2}\,du$.

7. Considérons l'intégrale $\int \frac{e^{aui}}{1+u^2}\,du$. Au lieu d'intégrer le long de l'axe des X, de O vers A (*fig.* 1), on pourra effectuer l'intégration en suivant le chemin OBCA, en ayant soin d'éviter le point i en le laissant

Fig. 1.



à gauche, ce qu'on pourra faire en décrivant autour de ce point un demi-cercle dont nous supposons le rayon ε infiniment petit. Cette partie de l'intégrale s'évalue à

$$\left(\frac{e^{aui}}{u+i}\right)_{u=i} \times \int \frac{du}{u-i} = \frac{e^{-a}}{2i} \times \pi i = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

Les intégrales le long de BC et CA tendent évidemment vers zéro lorsque A et B s'éloignent indéfiniment, en sorte qu'on obtient

$$\int_0^\infty \frac{e^{aui}\,du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a} + \int_0^{1-\varepsilon} \frac{ie^{-av}\,dv}{1-v^2} + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{ie^{-av}\,dv}{1-v^2};$$

donc

$$(16) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin au\,du}{1+u^2} = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{e^{-av}\,dv}{1-v^2} + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{e^{-av}\,dv}{1-v^2}.$$

On trouve d'une manière semblable, ou en prenant la dérivée de (16) par rapport à a,

$$(17) \qquad -\int_0^\infty \frac{u \cos au \, du}{1+u^2} = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{v e^{-av} \, dv}{1-v^2} + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{v e^{-av} \, dv}{1-v^2}.$$

En employant dans le second membre de ces formules l'identité

$$\frac{1}{1-v^2} = 1 + v^2 + \ldots + v^{2n-2} + \frac{v^{2n}}{1-v^2},$$

il vient

$$(18) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin au}{1+u^2} du = \frac{1}{a} + \frac{1.2}{a^3} + \ldots + \frac{1.2\ldots(2n-2)}{a^{2n-1}} + R_n,$$

$$R_n = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{v^{2n} e^{-av}}{1-v^2} dv + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{v^{2n} e^{-av}}{1-v^2} dv;$$

$$(19) \qquad -\int_0^\infty \frac{u \cos au}{1+u^2} du = \frac{1}{a^2} + \frac{1.2.3}{a^4} + \ldots + \frac{1.2\ldots(2n-1)}{a^{2n}} + R_n,$$

$$R_n = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{v^{2n+1} e^{-av}}{1-v^2} dv + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{v^{2n+1} e^{-av}}{1-v^2} dv.$$

Nous devons maintenant obtenir d'abord le développement du terme complémentaire suivant les puissances descendantes de n.

8. Pour embrasser en même temps les deux cas, nous posons

$$S_m = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{v^m e^{-av}}{1-v^2} dv + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{v^m e^{-av}}{1-v^2} dv,$$

et $a = m + \eta$.

La méthode à suivre ne se distingue en rien de celle que nous avons déjà développée à l'occasion du logarithme intégral, et il suffira donc d'indiquer brièvement les calculs.

Dans la première intégrale

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{(v e^{-v})^m}{1-v^2} e^{-\eta v} dv,$$

nous posons

$$v e^{-v} = e^{-1-x^2}, \qquad 1 - v = \sqrt{2}\, x + \ldots,$$

et l'on obtient

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{(ve^{-v})^m}{1-v^2} e^{-\eta v}\, dv = \tfrac{1}{2} e^{-a} \int_{\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-mx^2}(1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots)\frac{dx}{x},$$

A_1, A_2 étant des polynômes en η.

Dans la seconde intégrale

$$\int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{(ve^{-v})^m}{1-v^2} e^{-\eta v}\, dv,$$

nous posons

$$ve^{-v} = e^{-1-x^2}, \qquad v - 1 = \sqrt{2}\,x + \ldots$$

et l'on obtient

$$\int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{(ve^{-v})^m}{1-v^2} e^{-\eta v}\, dv = -\frac{1}{2} e^{-a} \int_{\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-mx^2}(1 - A_1 x + A_2 x^2 - \ldots)\frac{dx}{x}.$$

Le développement de S_m se trouve maintenant à l'aide de

$$S_m = e^{-a} \int_0^{\infty} e^{-mx^2}(A_1 + A_3 x^2 + A_5 x^4 + \ldots)\, dx,$$

$$S_m = \frac{1}{2} e^{-a} \sqrt{\frac{\pi}{m}} \left(A_1 + \frac{1}{2} A_3 \frac{1}{m} + \frac{1.3}{2.2} A_5 \frac{1}{m^2} + \ldots \right)$$

ou bien

$$\left\{ \begin{aligned} S_m = e^{-a}\sqrt{\frac{\pi}{2m}} \Bigg[& \eta + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\eta^3 - \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{6}\eta - \frac{11}{135} \right)\frac{1}{m} \\ & + \left(\frac{1}{40}\eta^5 - \frac{7}{48}\eta^4 + \frac{1}{18}\eta^3 + \frac{1}{24}\eta^2 + \frac{13}{288}\eta + \frac{323}{12096} \right)\frac{1}{m^2} \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

On en conclut $S_m = 0$ pour $\eta = \beta_0 + \dfrac{\beta_1}{m} + \dfrac{\beta_2}{m^2}$ ou

$$a = m - \frac{1}{6} + \frac{199}{3240\, m} - \frac{6409}{408240\, m^2}. \tag{21}$$

9. Dans le cas de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin au}{1+u^2}\, du,$$

la résolution approchée de $R_n = 0$ est donc donnée par les développements

$$a = 2n - \frac{1}{6} + \frac{199}{6480\,n} - \frac{6409}{1632960\,n^2}, \tag{22}$$

$$n = \frac{1}{2}a + \frac{1}{12} - \frac{199}{6480\,a} + \cdots. \tag{23}$$

Pour $n = 1$, on aurait, d'après (22), la racine de $\int_0^\infty \frac{\sin au}{1+u^2}\,du = \frac{1}{a}$ approximativement égale à $1,86012$. Pour calculer la valeur exacte, nous observons qu'on déduit de la formule (16), en remplaçant $\frac{1}{1-v^2}$ par $\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-v} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+v}$,

$$\int_0^\infty \frac{\sin au}{1+u^2}\,du = \tfrac{1}{2}\,e^{-a}\,\mathrm{li}(e^a) - \tfrac{1}{2}\,e^a\,\mathrm{li}(e^{-a}),$$

en sorte que l'équation à résoudre par approximation est

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} = \frac{1}{2}e^{-a}&\left(\mathfrak{C} + \log a + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2.2!} + \frac{a^3}{3.3!} + \ldots\right) \\ - \frac{1}{2}e^{a}&\left(\mathfrak{C} + \log a - \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2.2!} - \frac{a^3}{3.3!} + \ldots\right). \end{aligned}$$

On trouve $a = 1,85986$ et l'erreur de notre formule approchée dans ce cas extrême $0,00026$.

10. En remplaçant, dans la formule (21), m par $2n+1$, on trouve que, dans le cas de l'intégrale

$$-\int_0^\infty \frac{u\cos au}{1+u^2}\,du,$$

la résolution approchée de $R_n = 0$ est donnée par les formules

$$a = 2n + \frac{5}{6} + \frac{199}{3240(2n+1)} - \frac{6409}{408240(2n+1)^2}, \tag{24}$$

$$n = \frac{1}{2}a - \frac{5}{12} - \frac{199}{6480\,a} - \cdots. \tag{25}$$

Ces formules donnent une approximation largement suffisante; en prenant $n = 0$ dans (24), on aurait 0,87905 comme valeur approchée de la racine de l'équation transcendante

$$\int_0^\infty \frac{u \cos au}{1+u^2}\,du = -\tfrac{1}{2}e^{-a}\operatorname{li}(e^a) - \tfrac{1}{2}e^a \operatorname{li}(e^{-a}) = 0.$$

La valeur exacte est 0,87964.

Développement en série semi-convergente de $\log\Gamma(ai)$.

11. Avant d'aborder le développement de $\log\Gamma(ai)$, nous croyons utile de résumer ici le résultat auquel on est arrivé par l'étude du développement de $\log\Gamma(a)$, en renvoyant d'ailleurs pour les démonstrations au travail de M. Bourguet.

Le premier travail rigoureux sur ce sujet, qui est dû à Cauchy, a son point de départ dans cette formule à laquelle Binet était déjà arrivé,

$$(26)\quad \log\Gamma(a) = (a-\tfrac{1}{2})\log a - a + \tfrac{1}{2}\log 2\pi + \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-au}}{u}\,du.$$

Pour obtenir le terme complémentaire sous forme finie, il est plus avantageux de partir de l'expression

$$(27)\quad \log\Gamma(a) = (a-\tfrac{1}{2})\log a - a + \tfrac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi a u}}\right),$$

et l'on trouve

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi a u}}\right) \\ &\quad = \frac{B_1}{1.2a} - \frac{B_2}{3.4a^3} + \ldots \pm \frac{B_n}{2n-1.2na^{2n-1}} \mp R_n, \\ &\qquad R_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{u^{2n}}{1+u^2}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi a u}}\right)du. \end{aligned}\right.$$

M. Bourguet trouve que l'indice du plus petit terme est le premier nombre entier supérieur à $\pi a + \frac{1}{4} + \frac{1}{32\pi a}$, et il donne comme racine approchée de $R_n - R_{n-1} = 0$ l'expression

$$\pi a + \frac{3}{4} - \frac{3}{32\pi a}.$$

On conclut de ce qui précède que le reste du plus petit terme est, à fort peu près, égal à la moitié de ce terme. En posant $\pi a = n + \eta$, on peut développer R_n suivant les puissances descendantes de n. Comme nous aurons à exposer plus loin un calcul analogue dans le cas du terme complémentaire d'une série de seconde espèce, nous nous bornerons à donner ici le résultat suivant :

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} R_n = \frac{e^{-2\pi a}}{\sqrt{n\pi}} \Big[& \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{5}{48}\right)\frac{1}{n} \\ & + \left(\frac{1}{4}\eta^4 - \frac{1}{3}\eta^3 - \frac{17}{48}\eta^2 - \frac{1}{8}\eta + \frac{61}{2304}\right)\frac{1}{n^2} + \ldots \Big]. \end{aligned} \right.$$

On peut en déduire encore sans difficulté la résolution approchée de l'équation $\frac{dR_n}{dn} = 0$; nous trouvons

$$\pi a = n - \frac{1}{4} + \frac{13}{96 n} \quad \text{ou} \quad n = \pi a + \frac{1}{4} - \frac{13}{96 \pi a}.$$

12. Nous allons nous occuper maintenant du développement de $\log \Gamma(ai)$. Observons d'abord que, d'après la définition de la fonction Γ adoptée par Gauss, on a

$$\Gamma(ai) = \operatorname{Lim} \frac{e^{ai \log n}}{ai(1+ai)\left(1+\frac{ai}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{ai}{n}\right)}, \qquad (n = \infty).$$

En se rappelant la loi de multiplication de deux nombres complexes, on en conclut qu'en posant

$$(30)\qquad \Gamma(ai) = R e^{\Theta i},$$

on aura

$$R = 1 : \sqrt{a^2(1+a^2)\left(1+\frac{a^2}{4}\right)\left(1+\frac{a^2}{9}\right)\cdots},$$

c'est-à-dire

$$(31)\qquad R = \sqrt{\frac{2\pi}{a(e^{\pi a} - e^{-\pi a})}}$$

et puis

$$(32)\quad \Theta = \operatorname{Lim}\left(a \log n \mp \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} a - \operatorname{arc\,tang}\frac{a}{2} - \ldots - \operatorname{arc\,tang}\frac{a}{n}\right) \quad (n = \infty).$$

Il faut prendre le signe supérieur ou inférieur selon que a est positif ou négatif, et les arcs doivent être pris entre les limites $\pm\frac{\pi}{2}$. Dans la suite nous supposerons toujours que a est positif.

Comme l'on a

$$\log\Gamma(ai) = \log R + \Theta i,$$

on voit que nous aurons à nous occuper seulement du développement de la partie imaginaire Θ. On pourrait, dans cette recherche, partir de l'expression (32); mais il est beaucoup plus simple, comme nous le verrons, de se servir de la formule de Binet

$$\log\Gamma(a) = (a-\tfrac{1}{2})\log a - a + \tfrac{1}{2}\log 2\pi + \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-au}}{u}\,du.$$

13. En établissant cette formule, on a en vue ordinairement seulement les valeurs réelles de a. On voit cependant facilement que rien n'empêche d'attribuer à a une valeur imaginaire quelconque, à la condition toutefois que la partie réelle de a soit positive. Les logarithmes qui entrent dans la formule ont une détermination unique par la condition même que la variable ne doit jamais franchir l'axe des y.

Cependant, comme nous voulons changer a en ai, quantité dont la partie réelle est nulle, il est nécessaire de justifier cette opération.

Évidemment, cette application de la formule de Binet sera justifiée si nous faisons voir :

1° Que l'intégrale

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-aui}}{u}\,du$$

a un sens;

2° Que cette intégrale est la limite vers laquelle tend

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-bu-aui}}{u}\,du$$

lorsque la quantité positive b décroît indéfiniment.

Le premier point est à peu près évident, car la fonction

$$\left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{u} = \sum^\infty \frac{2}{u^2+4n^2\pi^2},$$

qui entre dans les intégrales

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\right)\frac{\cos au}{u}\,du, \quad \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\right)\frac{\sin au}{u}\,du,$$

est positive et décroissante; elle devient infiniment petite pour $u = \infty$.

Le second point à établir revient à montrer que les intégrales

$$M = \int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u}(1 - e^{-bu})\cos au\,du,$$

$$N = \int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u}(1 - e^{-bu})\sin au\,du,$$

où nous avons posé

$$\varphi(u) = \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2},$$

convergent vers zéro en même temps que b.

Nous remarquons que les fonctions $\varphi(u)$ et $\frac{\varphi(u)}{u}$ sont toujours finies, et décomposons M en trois parties

$$M_1 = \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{u}(1 - e^{-bu})\cos au\,du,$$

$$M_2 = \int_1^{\sqrt{\frac{1}{b}}} \frac{\varphi(u)}{u}(1 - e^{-bu})\cos au\,du,$$

$$M_3 = \int_{\sqrt{\frac{1}{b}}}^\infty \frac{\varphi(u)}{u}(1 - e^{-bu})\cos au\,du.$$

On a évidemment

$$|M_1| < (1 - e^{-b})\int_0^1 \frac{\varphi(u)}{u}\,du,$$

donc

$$\lim M_1 = 0 \qquad \text{pour } b = 0.$$

Ensuite

$$|M_2| < \int_1^{\sqrt{\frac{1}{b}}} \frac{\varphi(u)}{u}(1 - e^{-bu})\,du < \left(1 - e^{-\sqrt{b}}\right)\int_1^{\sqrt{\frac{1}{b}}} \frac{\varphi(u)}{u}\,du,$$

$$|M_2| < \left(1 - e^{-\sqrt{b}}\right)\varphi(\xi)\log\sqrt{\frac{1}{b}},$$

ξ désignant une valeur entre 1 et $\sqrt{\frac{1}{b}}$. On en conclut

$$\lim M_2 = 0.$$

Quant à M_3, en appliquant le second théorème de la moyenne,

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = f(a)\int_a^\eta \psi(x)\,dx + f(b)\int_\eta^b \psi(x)\,dx,$$

où la fonction $f(x)$ doit varier toujours dans le même sens,

$$M_3 = \left(1 - e^{-\sqrt{b}}\right)\int_{\sqrt{\frac{1}{b}}}^{\eta} \frac{\varphi(u)}{u}\cos au\,du + \int_\eta^\infty \frac{\varphi(u)}{u}\cos au\,du.$$

Mais l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u}\cos au\,du$ ayant un sens, les deux intégrales qui figurent au second membre convergent vers zéro et $\lim M_3 = 0$.

On conclut de tout ce qui précède $\lim M = 0$, et la même démonstration s'applique à l'intégrale N; donc aussi $\lim N = 0$.

D'après cela, il est permis de changer a en ai dans la formule de Binet, et nous obtenons ainsi

$$\log R = \tfrac{1}{2}\log 2\pi - \tfrac{1}{2}\log a - \tfrac{1}{2}\pi a + \int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u}\cos au\,du, \tag{33}$$

$$\Theta = a\log a - a - \frac{\pi}{4} - \int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u}\sin au\,du. \tag{34}$$

14. Nous avons à transformer d'abord les intégrales qui figurent dans les seconds membres. Soit

$$V = \int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u} e^{aui}\,du,$$

en substituant $\sum_1^\infty \frac{2u}{u^2 + 4n^2\pi^2}$ au lieu de $\varphi(u)$, nous trouvons

$$V = \sum_1^\infty \int_0^\infty \frac{2e^{aui}\,du}{u^2 + 4n^2\pi^2} = \sum_1^\infty \frac{1}{n\pi}\int_0^\infty \frac{e^{2\pi naui}}{1+u^2}\,du.$$

Nous avons vu déjà (n° 7) qu'il est permis de remplacer, dans l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{2\pi n a u i}}{1+u^2}\,du,$$

l'intégration le long de l'axe des x, par une intégration le long de l'axe des y, en évitant par un petit demi-cercle de rayon ε le point i. On obtient ainsi

$$\frac{\pi}{2}e^{-2an\pi} + i\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{e^{-2\pi n a v}\,dv}{1-v^2} + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{e^{-2\pi n a v}\,dv}{1-v^2}\right)$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} V = {} & \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a}} \\ & + i\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dv}{1-v^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a v}} + \frac{1}{\pi}\int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{dv}{1-v^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a v}}\right); \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u}\cos au\,du = \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a}}, \tag{35}$$

$$\left\{\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u}\sin au\,du = {} & \frac{1}{\pi}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dv}{1-v^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a v}} \\ & + \frac{1}{\pi}\int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{dv}{1-v^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a v}}. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

En portant la valeur (35) dans la formule (33), on retombe sur la valeur finie de R déjà donnée [formule (31)].

15. En employant dans le second membre de la formule (36) l'identité

$$\frac{1}{1-v^2} = 1 + v^2 + \ldots + v^{2n-2} + \frac{v^{2n}}{1-v^2},$$

on trouve, en ayant égard à la formule

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty v^{2k-2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a v}}\,dv = \frac{B_k}{(2k-1)2ka^{2k-1}} \tag{37}$$

(qu'on obtient en développant en série le logarithme),

$$(38)\quad \int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u}\sin au\,du = \frac{B_1}{1.2.a} + \frac{B_2}{3.4.a^3} + \ldots + \frac{B_n}{(2n-1)2na^{2n-1}} + R_n,$$

$$R_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{v^{2n}\,dv}{1-v^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a v}} + \frac{1}{\pi}\int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{v^{2n}\,dv}{1-v^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a v}}.$$

C'est la série semi-convergente que nous avions en vue; le terme complémentaire se présente sous la forme de la valeur principale de

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{v^{2n}\,dv}{1-v^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a v}}.$$

Il est intéressant de rapprocher de cette formule la forme du terme complémentaire dans le cas de la série de Stirling [formule (28)].

La série étant de seconde espèce, il nous reste à déterminer approximativement la racine de l'équation $R_n = 0$. Pour cela, nous développons d'abord R_n suivant les puissances descendantes de n.

16. Le premier terme du développement de $\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a v}}$ étant $e^{-2\pi a v}$, nous considérons d'abord au lieu de R_n

$$\pi S_n = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{v^{2n}e^{-2\pi a v}}{1-v^2}\,dv + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{v^{2n}e^{-2\pi a v}}{1-v^2}\,dv$$

ou, en posant $\pi a = n + \eta$,

$$\pi S_n = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{(ve^{-v})^{2n}}{1-v^2}e^{-2\eta v}\,dv + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{(ve^{-v})^{2n}}{1-v^2}e^{-2\eta v}\,dv.$$

Le développement de S_n n'est plus à trouver, nous pouvons l'écrire aussitôt d'après le résultat que nous avons obtenu dans le n° 8. En conservant seulement le terme principal, il vient

$$S_n = \left(\eta + \frac{1}{12}\right)e^{-2\pi a}\sqrt{\frac{1}{n\pi}}.$$

Nous avons à évaluer maintenant l'erreur qu'on commet en prenant S_n au lieu de R_n. Pour cela, nous développons en série le logarithme;

le $k+1^{\text{ième}}$ terme donne lieu à cette partie de R_n

$$\frac{1}{\pi(k+1)}\,\text{v. p.}\int_0^\infty \frac{v^{2n}\,e^{-2\pi a(k+1)v}}{1-v^2}\,dv.$$

En développant

$$\frac{1}{1-v^2} = 1 + v^2 + \ldots + v^{2nk-2} + \frac{v^{2nk}}{1-v^2},$$

on trouve

$$\frac{1}{\pi(k+1)}\left[\frac{\Gamma(2n+1)}{A^{2n+1}} + \frac{\Gamma(2n+3)}{A^{2n+3}} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{\Gamma(2nk+2n-1)}{A^{2nk+2n-1}} + \text{v. p.}\int_0^\infty \frac{v^{2n(k+1)}\,e^{-Av}}{1-v^2}\,dv\right],$$

en écrivant, pour abréger,

$$2\pi a(k+1) = A.$$

Les termes diminuent d'abord et l'intégrale est de l'ordre du dernier terme. C'est ce qui résulte, en effet, de la discussion que nous avons faite de la série semi-convergente pour $\int_0^\infty \frac{\sin au}{1+u^2}du$ (n° 8). La quantité à évaluer est donc positive, mais n'atteindra pas nk fois le premier terme ou

$$\frac{nk}{\pi(k+1)}\,\frac{\Gamma(2n+1)}{A^{2n+1}}.$$

En remplaçant $\Gamma(2n+1)$ par sa valeur asymptotique

$$2\sqrt{n\pi}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n},$$

on trouve, à cause de $\pi a = n + \eta$,

$$\frac{nk}{\pi(k+1)^{2n+2}}\,\frac{\sqrt{n\pi}}{\pi a}\left[\frac{n}{e(n+\eta)}\right]^{2n}$$

ou, si nous remplaçons πa par n, $\left(\frac{n}{n+\eta}\right)^{2n}$ par $e^{-2\eta}$,

$$\frac{nk}{(k+1)^{2n+2}}\,e^{-2\pi a}\sqrt{\frac{1}{n\pi}} < \frac{n}{(k+1)^{2n+1}}\,e^{-2\pi a}\sqrt{\frac{1}{n\pi}}.$$

La somme des termes négligés ne surpasse donc pas

$$e^{-2\pi a}\sqrt{\frac{1}{n\pi}} \times n\left(\frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{4^{2n+1}} + \ldots\right)$$

ou

$$\frac{n}{2^{2n+1}}\,\mathrm{T}.e^{-2\pi a}\sqrt{\frac{1}{n\pi}},$$

T étant une fonction qui converge vers 1 pour $n = \infty$.

On voit que le facteur qui multiplie $e^{-2\pi a}\sqrt{\frac{1}{n\pi}}$ décroît plus rapidement qu'aucune puissance négative de n; d'où l'on conclut que, pour développer R_n, suivant les puissances décroissantes de n, on doit s'en tenir à S_n, les parties négligées n'ayant aucune influence sur ce développement. A l'aide du n° 8, nous obtenons maintenant

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} R_n = e^{-2\pi a}\sqrt{\frac{1}{n\pi}}\Big[&\left(\eta + \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{3}\eta^3 - \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{12}\eta - \frac{11}{540}\right)\frac{1}{n} \\ &+ \left(\frac{1}{10}\eta^5 - \frac{7}{24}\eta^4 + \frac{1}{18}\eta^3 + \frac{1}{48}\eta^2 + \frac{13}{1152}\eta + \frac{323}{96768}\right)\frac{1}{n^2} + \ldots\end{aligned}\right.$$

On en conclut la solution approchée de l'équation $R_n = 0$ par l'une ou l'autre des formules

$$(40)\qquad \pi a = n - \frac{1}{12} + \frac{199}{12960\,n} - \frac{6409}{3265920\,n^2} + \cdots,$$

$$(41)\qquad n = \pi a + \frac{1}{12} - \frac{199}{12960\,\pi a} + \cdots.$$

La série étant composée des mêmes termes que ceux de la série de Stirling, l'indice du plus petit terme sera encore, d'après M. Bourguet, le premier nombre entier supérieur à $\pi a + \frac{1}{4} + \frac{1}{32\pi a}$. On voit donc que le changement de signe de R_n s'opère dans le voisinage du plus petit terme, comme cela arrivait aussi dans les autres séries de seconde espèce que nous avons étudiées.

17. Pour avoir une idée de l'approximation avec laquelle nous avons résolu l'équation $R_n = 0$, nous avons pris $n = 3$ dans la formule (40),

ce qui fournit cette valeur approchée de a, qui est un peu inférieure à l'unité $a = 0{,}9300$. (En prenant $n = 1, 2$, on serait conduit évidemment à des valeurs de a beaucoup trop petites pour songer à appliquer la série semi-convergente.) Pour résoudre l'équation $R_3 = 0$ rigoureusement, il nous faut un moyen de calculer Θ avec exactitude. Pour cela, nous remarquons que la série bien connue

$$\log\Gamma(x) = -\log x - \mathfrak{C}x + \tfrac{1}{2}S_2x^2 - \tfrac{1}{3}S_3x^3 + \tfrac{1}{4}S_4x^4 - \ldots$$

donne, en remplaçant x par ai,

$$\Theta = -\frac{\pi}{2} - \mathfrak{C}a + \tfrac{1}{3}S_3a^3 - \tfrac{1}{5}S_5a^5 + \tfrac{1}{7}S_7a^7 - \ldots.$$

Pour augmenter la convergence, nous écrirons

$$\begin{aligned}\Theta = &-\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} a + (1-\mathfrak{C})a \\ &+ \tfrac{1}{3}(S_3 - 1)a^3 - \tfrac{1}{5}(S_5 - 1)a^5 + \tfrac{1}{7}(S_7 - 1)a^7 - \ldots.\end{aligned}$$

L'équation à résoudre étant

$$\Theta = a\log a - a - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{12a} - \frac{1}{360a^3} - \frac{1}{1260a^5},$$

nous trouvons que la racine est comprise entre $0{,}9276$ et $0{,}9277$. L'approximation est très suffisante; même pour $a = 1$, la formule (41) donne la racine de $R_n = 0$ par rapport à n, avec une erreur inférieure à $0{,}01$.

Nous résumons ici le résultat que nous avons obtenu :

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} &\Gamma(ai) = Re^{\Theta i},\\ &R = \sqrt{\frac{2\pi}{a(e^{\pi a} - e^{-\pi a})}},\\ &\Theta = a\log a - a - \frac{\pi}{4} - \frac{B_1}{1.2a} - \frac{B_2}{3.4a^3} - \ldots - \frac{B_n}{(2n-1)2na^{2n-1}} - R_n.\\ &N = \pi a + \frac{1}{12} - \frac{199}{12960\pi a};\\ &\text{Ordre d'approximation}\ldots\ldots \quad \frac{e^{-2\pi a}}{\pi\sqrt{a}}.\end{aligned}\right.$$

Pour $a = 1$, $N = 3{,}22$; en appliquant le procédé indiqué dans l'introduction, il vient

$$\Theta = -1,872303 - 0,000595\lambda.$$

On obtient deux limites en prenant $\lambda = 0$, $\lambda = 1$; la valeur $\lambda = 0,22$ donne une valeur plus approchée

$$-1,872434.$$

La valeur exacte est

$$\Theta = -1,87243\,66472\,6243\ldots,$$
$$\Theta = -107^\circ 16' 57'',782.$$

18. Supposons que la variable z décrive la partie positive de l'axe imaginaire, alors nous pouvons indiquer comment se comporte la fonction holomorphe $\frac{1}{\Gamma(z)}$. En effet, ayant $\frac{1}{\Gamma(ai)} = \frac{1}{R}e^{-\Theta i}$, $\frac{1}{R}$ et $-\Theta$ sont les coordonnées polaires du point qui représente $\frac{1}{\Gamma(ai)}$, et nous voyons que ce point décrit une spirale, le rayon vecteur se mouvant dans le sens négatif et croissant rapidement. L'angle de la courbe et du rayon vecteur, dont la tangente est à peu près égale à $\frac{2}{\pi}\log a$, tend vers 90°. Nous avons dressé la petite Table suivante pour faire connaître la forme de la courbe dans le voisinage de l'origine :

a.	$-\Theta$.	$\frac{1}{R}$.	a.	$-\Theta$.	$\frac{1}{R}$.
	° ′			° ′	
0...........	90. 0,0	0	2,0........	82.34,3	13,056
0,2.........	96.26,1	0,207	2,2........	73.51,1	18,747
0,4.........	101.52,1	0,453	2,4........	64. 7,6	26,808
0,6.........	105.37,6	0,784	2,6........	53.28,4	38,202
0,8.........	107.25,9	1,250	2,8........	41.57,7	54,277
1,0.........	107.17,0	1,917	3,0........	29.38,8	76,919
1,2.........	105.19,0	2,877	3,2........	16.35,0	108,765
1,4.........	101.42,3	4,256	3,4........	2.48,9	153,493
1,6.........	96.37,0	6,230	3,6........	− 11.37,0	216,241
1,8.........	90.11,7	9,047	3,8........	− 26.40,7	304,170
2,0.........	82.34,3	13,056	4,0........	− 42.20,2	427,271

L'angle $-\Theta$ commence à croître de 90° jusqu'à un certain maximum, dont voici la détermination :

$$a = 0,88382, \qquad -\Theta = 107^\circ 36' 1'', \qquad \frac{1}{R} = 1,5003.$$

Après avoir dépassé ce maximum, l'angle $-\Theta$ décroît constamment.

19. D'après ce qui précède, il est permis de changer a en ai dans la série de Stirling; en arrêtant la série à son plus petit terme, l'erreur est du même ordre que ce terme. L'examen des conditions sous lesquelles on peut se servir de cette série pour des valeurs imaginaires quelconques de la variable se présente naturellement, mais nous ne l'aborderons pas. Nous rappelons seulement que, dans le Tome 56 du *Journal de Crelle*, M. Lipschitz est arrivé au résultat suivant :

$$\log\Gamma(z) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + (z - \tfrac{1}{2})\log z - z + \frac{B_1}{1.2.z} - \ldots \pm \frac{B_n}{(2n-1)2nz^{2n-1}} \mp R_n;$$

$$z = a + bi, \qquad R_n = \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\,\frac{\varepsilon + \varepsilon' i}{a^{2n+1}},$$

ε et ε' restant compris dans les limites ± 1. On suppose de plus que la partie réelle de z, a est positive.

Comme on le voit, cette limitation de R_n devient complètement illusoire lorsqu'on fait tendre a vers zéro; mais M. Lipschitz n'avait pas à s'occuper du cas $a = 0$, et la limitation du reste auquel il s'est arrêté suffisait pleinement pour le but qu'il s'était proposé, qui était tout autre que celui de vouloir déterminer avec exactitude quels services cette série pourrait rendre pour l'évaluation de $\log\Gamma(z)$.

Étude des intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{d^2z}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{dz}{da} + z = 0.$$

20. Nous rassemblons ici quelques-unes des formes principales sous lesquelles on est arrivé à présenter les intégrales de cette équation différentielle. On trouve d'abord cette intégrale, qui est holomorphe dans tout le plan,

$$\text{(43)} \qquad J(a) = 1 - \frac{a^2}{2^2} + \frac{a^4}{2^2.4^2} - \frac{a^6}{2^2.4^2.6^2} + \ldots$$

ou

$$\text{(44)} \qquad J(a) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\cos au\,du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Une autre intégrale est de la forme

$$J(a)\log(a)+R(a),$$

$R(a)$ étant holomorphe dans tout le plan, et, intégrant l'équation différentielle par des séries, on trouve cette seconde intégrale

$$\left(1-\frac{a^2}{2^2}+\frac{a^4}{2^2.4^2}+\ldots\right)\log a+\frac{a^2}{2^2}-\frac{a^4}{2^2.4^2}(1+\tfrac{1}{2})+\frac{a^6}{2^2.4^2.6^2}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})-\ldots.$$

En désignant par $\psi(x)$ la dérivée de $\log\Gamma(x)$, l'intégrale générale est donc

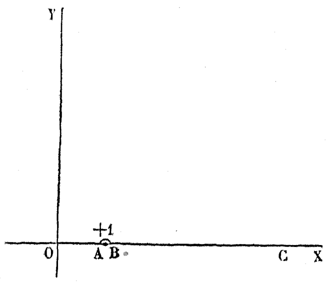
$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} &A\sum_0^\infty(-1)^n\frac{a^{2n}}{2^2.4^2\ldots(2n)^2}\\ &+B\sum_0^\infty(-1)^n\frac{a^{2n}}{2^2.4^2\ldots(2n)^2}[\log a-\psi(n+1)+\psi(1)];\end{aligned}\right.$$

mais la seconde intégrale dont nous nous occuperons est celle-ci :

$$(46)\qquad K(a)=\frac{2}{\pi}\int_1^\infty\frac{\cos au}{\sqrt{u^2-1}}\,du.$$

Cette définition n'a un sens que lorsque a est réel. Pour opérer la continuation de cette fonction pour des valeurs imaginaires de l'argument, nous considérons, en supposant a réel et positif, l'intégrale $\int\frac{e^{aui}}{\sqrt{u^2-1}}du$. On peut remplacer le chemin d'intégration OABC (*fig.* 2)

Fig. 2.



par une intégration suivant la partie positive de l'axe des y, transformation analogue à celle dont nous nous sommes servi dans le n° 7.

En supposant $\sqrt{u^2-1} = +i$ à l'origine, on obtient

$$\int_0^\infty \frac{e^{-av}}{\sqrt{1+v^2}}\,dv = \frac{1}{i}\int_0^1 \frac{e^{aui}\,du}{\sqrt{1-u^2}} + \int_1^\infty \frac{e^{aui}\,du}{\sqrt{u^2-1}},$$

et la comparaison des parties réelles et imaginaires conduit à ces formules

$$K(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-au}}{\sqrt{1+u^2}}\,du - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\sin au}{\sqrt{1-u^2}}\,du, \tag{47}$$

$$J(a) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\sin au}{\sqrt{u^2-1}}\,du. \tag{48}$$

La relation (47) permet de continuer la fonction $K(a)$ dans toute la moitié du plan où la partie réelle de la variable est positive. On vérifie aussi directement que les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{e^{-au}}{\sqrt{1+u^2}}\,du, \quad \int_0^1 \frac{\sin au}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

satisfont l'une et l'autre à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 z}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{dz}{da} + z = \frac{1}{a}$$

et que, par conséquent, $K(a)$ est bien une intégrale de l'équation différentielle proposée.

En supposant toujours a réel et positif, nous tirons de l'équation (47)

$$K(ai) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-aui}\,du}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\sin aui}{\sqrt{1-u^2}}\,du. \tag{49}$$

Pour simplifier, nous remarquons que l'on peut, dans l'intégrale $\int \frac{e^{aui}\,du}{\sqrt{1+u^2}}$, remplacer le chemin d'intégration OA par OBCD (*fig.* 3).

On obtient ainsi

$$\int_0^\infty \frac{e^{aui}\,du}{\sqrt{1+u^2}} = i\int_0^1 \frac{e^{-au}\,du}{\sqrt{1-u^2}} + \int_1^\infty \frac{e^{-au}\,du}{\sqrt{u^2-1}}.$$

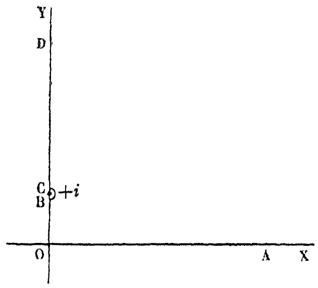
En changeant i en $-i$ et substituant dans (49), il vient

$$K(ai) = -\frac{i}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{au}+e^{-au}}{\sqrt{1-u^2}}\,du + \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{e^{-au}\,du}{\sqrt{u^2-1}},$$

c'est-à-dire

$$K(ai) = -i\,J(ai) + \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{e^{-au}\,du}{\sqrt{u^2-1}}. \tag{50}$$

Fig. 3.



21. Nous nous arrêtons un instant à la détermination des valeurs qu'il faut attribuer dans l'expression de l'intégrale générale (45) à A et à B pour retrouver la fonction $K(a)$. Cette détermination de A et B a été donnée par M. H. Weber dans le Tome 75 du *Journal de Borchardt*. On peut l'effectuer aussi très simplement ainsi qu'il suit.

D'après la définition, on a

$$\frac{\pi}{2}K(a) = \int_a^\infty \frac{\cos v\,dv}{\sqrt{v^2-a^2}} = \int_a^1 \frac{\cos v\,dv}{\sqrt{v^2-a^2}} + \int_1^\infty \frac{\cos v\,dv}{\sqrt{v^2-a^2}}$$

et

$$\int_a^1 \frac{\cos v\,dv}{\sqrt{v^2-a^2}} = \int_a^1 \frac{dv}{\sqrt{v^2-a^2}} - \int_a^1 \frac{1-\cos v}{\sqrt{v^2-a^2}}\,dv$$

$$= \log\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right) - \int_a^1 \frac{1-\cos v}{\sqrt{v^2-a^2}}\,dv,$$

$$\frac{\pi}{2}K(a) + \log a = \log(1+\sqrt{1-a^2}) - \int_a^1 \frac{1-\cos v}{\sqrt{v^2-a^2}}\,dv + \int_1^\infty \frac{\cos v\,dv}{\sqrt{v^2-a^2}};$$

donc

$$\operatorname{Lim}\left[\frac{\pi}{2}K(a)+\log a\right]_{a=0} = \log 2 - \int_0^1 \frac{1-\cos v}{v}\,dv + \int_1^\infty \frac{\cos v\,dv}{v};$$

Le second membre est égal à $\log 2 - \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}$ désignant toujours la constante eulérienne. En effet, $\int_0^\infty v^{p-1} \cos v \, dv = \Gamma(p) \cos \frac{p\pi}{2}$ ou

$$\int_0^1 v^{p-1}(1 - \cos v)\, dv - \int_1^\infty v^{p-1} \cos v \, dv = \frac{1 - \Gamma(p+1) \cos \frac{p\pi}{2}}{p}.$$

On en conclut pour $p = 0$, à cause de $\Gamma(p+1) = 1 - \mathfrak{C}p + \ldots$,

$$\int_0^1 \frac{1 - \cos v}{v}\, dv - \int_1^\infty \frac{\cos v}{v}\, dv = \mathfrak{C}.$$

La relation

$$\text{(51)} \qquad \operatorname{Lim}\left[\frac{\pi}{2} \mathrm{K}(a) + \log a\right]_{a=0} = \log 2 - \mathfrak{C}$$

donne sur-le-champ la détermination des constantes A et B, et il vient, en se rappelant que $\psi(1) = -\mathfrak{C}$,

$$\text{(52)} \qquad \frac{\pi}{2} \mathrm{K}(a) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n a^{2n}}{2^2.4^2\ldots(2n)^2}\left[\log \frac{2}{a} + \psi(n+1)\right].$$

En changeant a en ai, il faut remplacer $\log a$ par $\log a + \frac{\pi}{2} i$, et la comparaison avec (50) conduit au développement

$$\text{(53)} \qquad \int_1^\infty \frac{e^{-au}\, du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \sum_0^\infty \frac{a^{2n}}{2^2.4^2\ldots(2n)^2}\left[\log \frac{2}{a} + \psi(n+1)\right],$$

donné par Riemann, de l'une des intégrales de l'équation

$$\frac{d^2 z}{da^2} + \frac{1}{a} \frac{dz}{da} - z = 0,$$

dont $\mathrm{J}(ai)$ est une autre intégrale.

22. On peut changer en intégrales définies les séries (52), (53). En prenant la dérivée par rapport à b de la relation connue

$$2\int^1 u^{2a-1}(1 - u^2)^{b-1}\, du = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

il vient, en posant ensuite $a = n + \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$,

$$2\int_0^1 u^{2n} \frac{\log(1-u^2)}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)} \pi[\psi(\tfrac{1}{2}) - \psi(n+1)]$$

et

$$2\int_0^1 \frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\pi;$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\pi\left[\log\frac{2}{a} + \psi(n+1)\right]\\ = 2\int_0^1 \frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}\left[\psi(\tfrac{1}{2}) + \log\frac{2}{a} - \log(1-u^2)\right] du.\end{aligned}$$

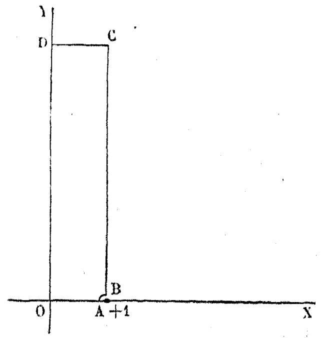
En substituant cette valeur de $\log\frac{2}{a} + \psi(n+1)$ dans les formules (52), (53), il vient, après une légère réduction, si l'on observe que $\psi(\frac{1}{2}) = -\mathfrak{C} - \log 4$,

$$(54)\qquad \frac{\pi^2}{2}\mathrm{K}(a) = \int_{-1}^{+1} \frac{\cos au}{\sqrt{1-u^2}}[-\mathfrak{C} - \log 2a(1-u^2)]\, du,$$

$$(55)\qquad \pi\int_1^\infty \frac{e^{-au}\,du}{\sqrt{u^2-1}} = \int_{-1}^{+1} \frac{e^{au}}{\sqrt{1-u^2}}[-\mathfrak{C} - \log 2a(1-u^2)]\, du.$$

23. Nous abordons maintenant le développement en série semi-con-

Fig. 4.



vergente de $\mathrm{J}(a)$ et de $\mathrm{K}(a)$. Considérons l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{aui}\,du}{\sqrt{1-u^2}}$ dont la partie réelle est $\frac{\pi}{2}\mathrm{J}(a)$. En intégrant sur le contour fermé OABCDO (*fig.* 4), l'intégrale est nulle. Il est évident aussi que l'intégrale étendue sur CD converge vers zéro lorsque C et D s'éloignent indéfiniment. On voit donc que l'intégrale de O vers A est égale à la différence des intégrales sur OD et BC, en supposant que C et D s'éloignent indéfiniment. L'intégrale sur OD s'obtient en posant $u = iv$, celle sur BC en posant $u = 1 + iv$. En ayant soin de donner le signe convenable au radical $\sqrt{1-u^2}$ dans le point B, il vient

$$\int_0^1 \frac{e^{aui}\,du}{\sqrt{1-u^2}} = i\int_0^\infty \frac{e^{-av}\,dv}{\sqrt{1+v^2}} + e^{\left(a-\frac{\pi}{4}\right)i}\int_0^\infty \frac{v^{-\frac{1}{2}}e^{-av}\,dv}{\sqrt{2+iv}}$$

ou bien, en faisant attention à la formule (47),

$$e^{\left(a-\frac{\pi}{4}\right)i}\int_0^\infty \frac{v^{-\frac{1}{2}}e^{-av}\,dv}{\sqrt{2+iv}} = \frac{\pi}{2}[\mathrm{J}(a) - i\mathrm{K}(a)]. \tag{56}$$

On en conclut les expressions suivantes de $\mathrm{J}(a)$, $\mathrm{K}(a)$ où nous avons posé encore $av = u$

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{J}(a) = {} & \frac{\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)}{\pi\sqrt{2a}}\int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{iu}{2a}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{iu}{2a}}}\right)du \\ & - i\frac{\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)}{\pi\sqrt{2a}}\int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{iu}{2a}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{iu}{2a}}}\right)du, \end{aligned}\right.$$

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{K}(a) = {} & -\frac{\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)}{\pi\sqrt{2a}}\int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{iu}{2a}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{iu}{2a}}}\right)du \\ & - i\frac{\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)}{\pi\sqrt{2a}}\int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{iu}{2a}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{iu}{2a}}}\right)du. \end{aligned}\right.$$

M. Lipschitz développe maintenant les fonctions réelles

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{iu}{2a}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{iu}{2a}}}, \quad -i\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{iu}{2a}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{iu}{2a}}}\right)$$

à l'aide de la formule

$$\mathfrak{F}(u) = \mathfrak{F}(0) + u\mathfrak{F}'(0) + \ldots + \frac{u^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\mathfrak{F}^{(n-1)}(0) + \frac{u^n}{1.2\ldots n}\mathfrak{F}^{(n)}(\lambda u),$$

λ désignant une fraction positive. Il obtient ainsi

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{iu}{2a}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{iu}{2a}}}\right)du \\ &\quad = 2\sqrt{\pi}\left[1 - \frac{1^2.3^2}{1.2.(8a)^2} + \ldots \pm \frac{1^2.3^2\ldots(4n-5)^2}{1.2\ldots(2n-2)(8a)^{2n-2}} \mp \mathrm{R}_n\right], \end{aligned}\right.$$

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} &-i\int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{iu}{2a}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{iu}{2a}}}\right)du \\ &\quad = 2\sqrt{\pi}\left[\frac{1^2}{1.8a} - \frac{1^2.3^2.5^2}{1.2.3.(8a)^3} + \ldots \pm \frac{1^2.3^2\ldots(4n-3)^2}{1.2\ldots(2n-1)(8a)^{2n-1}} \mp \mathrm{R}'_n\right]. \end{aligned}\right.$$

On voit qu'on obtient ainsi en même temps le développement de $\mathrm{J}(a)$ et de $\mathrm{K}(a)$. Quant au terme complémentaire R_n, la méthode adoptée par M. Lipschitz lui permet d'établir que la valeur absolue de R_n est inférieure à T_{n+1}. De même, R'_n est inférieur en valeur absolue à T'_{n+1}. On peut resserrer un peu ces limitations, et faire voir que R_n et R'_n sont positifs, ce qui entraîne déjà que R_n est inférieur à T_n et à T_{n+1}, R'_n à T'_n et à T'_{n+1}. En effet, on a

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{1-\frac{iu}{2a}\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{iu}{2a}}},\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{1+\frac{iu}{2a}\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{iu}{2a}}};$$

d'où l'on conclut

$$(61)\quad \int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{iu}{2a}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{iu}{2a}}}\right)du = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^\infty\frac{e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\,du}{1+\frac{u^2}{4a^2}\sin^4\varphi},$$

$$(62)\quad -i\int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{iu}{2a}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{iu}{2a}}}\right)du = \frac{2}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^\infty\frac{e^{-u}u^{\frac{1}{2}}\sin^2\varphi\,du}{1+\frac{u^2}{4a^2}\sin^4\varphi}.$$

En employant l'identité

$$\frac{1}{1+\frac{u^2}{4a^2}\sin^4\varphi} = 1 - \frac{u^2}{4a^2}\sin^4\varphi + \ldots \pm \left(\frac{u}{2a}\right)^{2n-2}\sin^{4n-4}\varphi \mp \frac{\left(\frac{u}{2a}\right)^{2n}\sin^{4n}\varphi}{1+\frac{u^2}{4a^2}\sin^4\varphi},$$

on retrouve les séries semi-convergentes déjà données, mais avec ces expressions des termes complémentaires

$$(63)\qquad R_n = \frac{1}{2^{2n-1}a^{2n}\sqrt{\pi^3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty \frac{e^{-u}u^{2n-\frac{1}{2}}\sin^{4n}\varphi}{1+\frac{u^2}{4a^2}\sin^4\varphi}\,du,$$

$$(64)\qquad R'_n = \frac{1}{2^{2n}a^{2n+1}\sqrt{\pi^3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty \frac{e^{-u}u^{2n+\frac{1}{2}}\sin^{4n+2}\varphi}{1+\frac{u^2}{4a^2}\sin^4\varphi}\,du.$$

24. Lorsque a est grand, l'indice du plus petit terme dans chacune des séries semi-convergentes (59), (60) est à peu près égal à a. En posant $a = n + \eta$, on peut développer R_n et R'_n suivant les puissances descendantes de n. Pour faciliter un peu les calculs nous remplaçons u par $2au$, $\cot^2\varphi$ par φ, en sorte qu'il vient

$$R_n = \sqrt{\frac{2a}{\pi^3}}\int_0^\infty\int_0^\infty \left(\frac{ue^{-u}}{1+\varphi}\right)^{2n} \frac{e^{-2\eta u}}{1+\varphi+\frac{u^2}{1+\varphi}}\,\frac{du\,d\varphi}{\sqrt{u\varphi}},$$

$$R'_n = \sqrt{\frac{2a}{\pi^3}}\int_0^\infty\int_0^\infty \left(\frac{ue^{-u}}{1+\varphi}\right)^{2n} \frac{e^{-2\eta u}}{(1+\varphi)^2+u^2}\sqrt{\frac{u}{\varphi}}\,du\,d\varphi.$$

Lorsque n est grand, ce sont seulement les parties dans le voisinage de $u=1$, $\varphi=0$ qui ont une influence appréciable, et quand il s'agit d'un développement suivant les puissances descendantes de n, on peut borner l'intégration au voisinage de ce point $u=1$, $\varphi=0$. Considérons R_n et partageons l'intégrale en deux parties. Dans la première, u variera de 0 à 1; dans la seconde, de 1 à ∞.

Dans la première partie, on posera

$$ue^{-u} = e^{-1-x^2}, \qquad 1-u = \sqrt{2}\,x - \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{1}{18}\sqrt{2}\,x^3 - \ldots, \qquad 1+\varphi = e^{y^2},$$

et l'on trouve un résultat de la forme

$$\sqrt{\frac{2a}{\pi^3}}\int\int e^{-2a}e^{-2n(x^2+y^2)}(\Sigma a_{r,s}x^r y^s)\,dx\,dy.$$

les coefficients $a_{r,s}$ étant des polynômes en η, et $a_{r,s}=0$ lorsque s est impair.

Dans la seconde partie, on posera

$$ue^{-u}=e^{-1-x^2},\qquad u-1=x\sqrt{2}+\ldots,$$
$$1+v=e^{y^2},$$

et l'on trouve cette seconde partie égale à

$$\sqrt{\frac{2a}{\pi^3}}\int\int e^{-2a}e^{-2n(x^2+y^2)}[\Sigma(-1)^r a_{r,s}x^r y^s]\,dx\,dy.$$

La réunion des deux parties conduit à l'expression

$$2e^{-2a}\sqrt{\frac{2a}{\pi^3}}\int\int e^{-2n(x^2+y^2)}[\Sigma a_{2r,2s}x^{2r}y^{2s}]\,dx\,dy,$$

et le développement de R_n, suivant les puissances descendantes de n, est

$$R_n=e^{-2a}\sqrt{\frac{a}{2\pi}}\left(\frac{a_{0,0}}{2n}+\frac{a_{0,2}+a_{2,0}}{8n^2}+\ldots\right).$$

En nous bornant aux deux premiers termes, nous avons obtenu

$$R_n=e^{-2a}\sqrt{\frac{a}{\pi n^2}}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\eta^2+\frac{1}{4}\eta+\frac{1}{12}\right)\frac{1}{n}\cdots\right], \tag{65}$$

et, par des calculs tout à fait semblables,

$$R'_n=e^{-2a}\sqrt{\frac{a}{\pi n^2}}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\eta^2-\frac{1}{4}\eta-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{n}\cdots\right]. \tag{66}$$

Dans les deux cas, le reste du plus petit terme est à peu près égal à la moitié de ce terme.

25. Considérons maintenant les fonctions $J(ai)$, $K(ai)$. La première conduit à une série semi-convergente de seconde espèce, dont nous

nous occuperons plus tard. Quant à $K(ai)$, à cause de

$$K(ai) = -iJ(ai) + \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{e^{-au}\,du}{\sqrt{u^2-1}},$$

on voit que nous avons à nous occuper, en ce moment, seulement de la partie réelle

$$\mathfrak{R} = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{e^{-au}\,du}{\sqrt{u^2-1}}.$$

En posant $u = 1 + \frac{v}{a}$, on trouve

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\pi}e^{-a}\sqrt{\frac{2}{a}}\int_0^\infty \frac{e^{-v}v^{-\frac{1}{2}}\,dv}{\sqrt{1+\frac{v}{2a}}}$$

ou bien

$$\mathfrak{R} = \frac{2}{\pi^2}e^{-a}\sqrt{\frac{2}{a}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^\infty \frac{e^{-v}v^{-\frac{1}{2}}\,dv}{1+\frac{v}{2a}\sin^2 u}. \tag{67}$$

On en déduit, par le développement,

$$\frac{1}{1+\frac{v}{2a}\sin^2 u} = 1 - \frac{v}{2a}\sin^2 u + \ldots \pm \left(\frac{v}{2a}\right)^{n-1}\sin^{2n-2}u \mp \frac{\left(\frac{v}{2a}\right)^n \sin^{2n}u}{1+\frac{v}{2a}\sin^2 u},$$

$$\mathfrak{R} = e^{-a}\sqrt{\frac{2}{\pi a}}\left[1 - \frac{1^2}{1.8a} + \frac{1^2.3^2}{1.2.(8a)^2} - \ldots \pm \frac{1^2.3^2\ldots(2n-3)^2}{1.2\ldots(n-1)(8a)^{n-1}} \mp R_n\right], \tag{68}$$

$$R_n = \frac{1}{2^{n-1}a^n\sqrt{\pi^3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^\infty \frac{e^{-v}v^{n-\frac{1}{2}}\sin^{2n}u\,dv}{1+\frac{v}{2a}\sin^2 u}.$$

Ce développement semi-convergent a été donné par Riemann. L'indice du plus petit terme est à peu près égal à $2a$, en posant $2a = n + \eta$, nous trouvons

$$R_n = e^{-2a}\sqrt{\frac{4a}{\pi n^2}}\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{24}\right)\frac{1}{n} + \ldots\right]. \tag{69}$$

26. Nous devons nous occuper maintenant de la fonction

$$J(ai) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-av}\,dv}{\sqrt{1-v^2}}.$$

En posant $v = -1 + 2u$, il vient

$$(70) \qquad J(ai) = \frac{e^a}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-2au}\,du}{\sqrt{u(1-u)}}.$$

Le développement de $\frac{1}{\sqrt{1-u}}$, suivant les puissances ascendantes de u, conduit sans aucune difficulté à cette série semi-convergente

$$J(ai) = e^a \sqrt{\frac{1}{2\pi a}} \left[1 + \frac{1^2}{1.8a} + \frac{1^2.3^2}{1.2.(8a)^2} + \dots \right],$$

donnée par Riemann, mais on n'obtient point ainsi une expression simple du terme complémentaire.

Pour nous débarrasser du radical $\sqrt{1-u}$, nous observons que

$$\int_0^\infty \frac{v^{-\frac{1}{2}}\,dv}{v+1-u} = \frac{\pi}{\sqrt{1-u}},$$

en sorte qu'il vient

$$(71) \qquad J(ai) = \frac{e^a}{\pi^2} \int_0^\infty v^{-\frac{1}{2}}\,dv \int_0^1 \frac{u^{-\frac{1}{2}} e^{-2au}\,du}{1-u+v}.$$

L'intégration dans le second membre s'étend sur la bande infinie VOAB (*fig.* 5) de largeur OA $= 1$, et l'intégration, par rapport à u, ne s'étend que jusqu'à $u = 1$. Afin de franchir cette limite et de pouvoir étendre l'intégration sur une bande VOCD d'une largeur arbitraire OC $=$ L, nous observons que

$$\int_0^{k^2-\varepsilon} \frac{v^{-\frac{1}{2}}\,dv}{v-k^2} + \int_{k^2+\varepsilon}^\infty \frac{v^{-\frac{1}{2}}\,dv}{v-k^2} = \frac{2}{k} \log\left(\frac{k+\sqrt{k^2+\varepsilon}}{k+\sqrt{k^2-\varepsilon}} \right),$$

donc

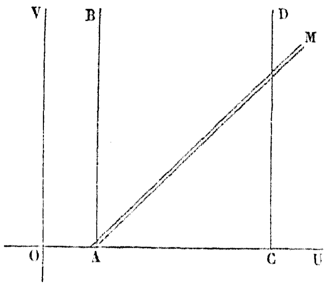
$$(72) \qquad \text{v. p.} \int_0^\infty \frac{v^{-\frac{1}{2}}\,dv}{v-k^2} = 0.$$

Si donc nous excluons du champ d'intégration la bande infiniment étroite limitée par les deux droites parallèles

$$1 - u + v = \pm \varepsilon,$$

nous pourrons étendre dans (71) l'intégration sur la bande de largeur L, VOCD; car, en intégrant d'abord par rapport à v, l'équa-

Fig. 5.



tion (72) montre que les parties qu'on ajoute ainsi se détruisent. En faisant croître L indéfiniment, nous écrivons sommairement

$$(73) \qquad J(ai) = \frac{e^a}{\pi^2}\,\text{v. p.}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-2au}}{1-u+v}\,\frac{du\,dv}{\sqrt{uv}},$$

le sens précis qu'il faut attacher à cette formule résultant des explications qui précèdent.

27. En employant maintenant l'identité

$$\frac{1}{1-u+v} = \frac{1}{1+v} + \frac{u}{(1+v)^2} + \ldots + \frac{u^{n-1}}{(1+v)^n} + \frac{u^n}{(1+v)^n(1-u+v)},$$

on a évidemment

$$\text{v. p.}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{u^k e^{-2au}}{(1+v)^{k+1}}\,\frac{du\,dv}{\sqrt{uv}} = \int_0^\infty \frac{v^{-\frac{1}{2}}\,dv}{(1+v)^{k+1}} \int_0^\infty u^{k-\frac{1}{2}} e^{-2au}\,du$$
$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)}\,\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{(2a)^{k+\frac{1}{2}}},$$

et il vient

$$(74)\qquad J(ai) = e^a \sqrt{\frac{1}{2a\pi}} \left[1 + \frac{1^2}{1.8a} + \frac{1^2.3^2}{1.2.(8a)^2} + \ldots + \frac{1^2.3^2\ldots(2n-3)^2}{1.2\ldots(n-1)(8a)^{n-1}} + R, \right.$$

$$(75)\qquad R_n = \sqrt{\frac{2a}{\pi^3}}\ \text{v. p.} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{u^n e^{-2au}}{(1+v)^n(1-u+v)} \frac{du\,dv}{\sqrt{uv}}.$$

C'est cette expression du terme complémentaire, sous forme d'intégrale double singulière, qui va nous permettre de résoudre avec approximation l'équation transcendante $R_n = 0$.

28. Nous posons $2a = n + \eta$ et nous développons R_n suivant les puissances descendantes de n. L'intégrale

$$\text{v. p.} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{ue^{-u}}{1+v}\right)^n \frac{e^{-\eta u}}{1-u+v} \frac{du\,dv}{\sqrt{uv}}$$

se décompose naturellement en deux parties P et Q, que nous allons considérer séparément.

Dans la première partie P, qui est positive, on a

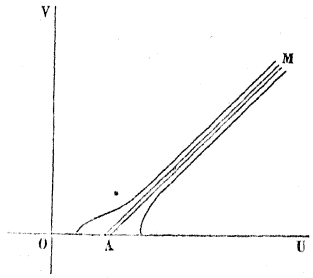
$$1 - u + v \geqq \varepsilon;$$

dans la seconde partie négative Q,

$$1 - u + v \leqq -\varepsilon.$$

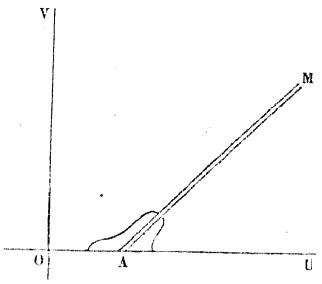
La fonction $\frac{ue^{-u}}{1+v}$ devient maximum pour $u = 1$, $v = 0$, et l'on ob-

Fig. 6.



tient la partie principale de P en intégrant seulement sur cette partie du champ d'intégration qui forme le voisinage du point A. Toutefois, à cause de la ligne de discontinuité AM, il faut y ajouter une bande le long de cette ligne AM. Il en est de même évidemment pour la partie Q, et il faudrait donc évaluer P et Q en étendant l'intégration sur l'aire indiquée dans la *fig.* 6; mais, au lieu de cela, nous intégrons d'abord seulement sur une aire dont la forme est indiquée dans la *fig.* 7.

Fig. 7.



Nous négligeons donc de continuer indéfiniment la bande le long de la ligne de discontinuité. Nous verrons plus tard que ce procédé est légitime.

29. L'évaluation de l'intégrale P, étendue sur l'aire indiquée, s'obtient par un changement de variables.

Nous définissons d'abord une fonction $\varphi(x)$ pour des valeurs positives de x par les relations

$$te^{-t} = e^{-1-x^2}, \qquad 1 - t = \varphi(x),$$

en supposant que t varie de 0 à 1. La fonction $\varphi(x)$ est positive et constamment croissante, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) = 1$. Pour des valeurs suffisamment petites de x, on peut développer $\varphi(x)$ suivant les puissances ascendantes des x; nous avons déjà trouvé (n° 2)

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\,x - \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{1}{18}\sqrt{2}\,x^3 + \tfrac{2}{135}x^4 + \ldots.$$

Nous introduisons maintenant, dans l'intégrale P, les nouvelles variables x, y, en posant

$$\frac{ue^{-u}}{1+v} = e^{-1-x^2-y^2},$$
$$1 - u + v = \varphi(x).$$

On voit d'abord que le long de AM (*fig.* 7) x est constant et infiniment petit, tandis que y varie de o à ∞. Ensuite, d'après la définition de $\varphi(x)$, on voit que, pour $v=0$, on a aussi $y=0$, et, le long de OA, x varie de ∞ à o. Nous avons donc seulement à nous occuper de cette partie de l'intégrale qui correspond à de petites valeurs de x et de y; mais, pour des valeurs suffisamment petites de x et de y, on peut développer u et v suivant les puissances croissantes de x et de y; ces développements ne contiennent évidemment que les puissances paires de y. En éliminant v, on a

$$ue^{-u}=[u+\varphi(x)]e^{-1-x^2-y^2}.$$

Le premier terme du développement de u étant 1, on a

$$u=1+\alpha x+\beta x^2+\gamma y^2+\delta x^3+\varepsilon xy^2+\ldots,$$

et l'on détermine sans difficulté les coefficients α, β, γ, ... par la méthode des coefficients indéterminés. Le développement de v se trouve ensuite à l'aide de la relation $v=u-1+\varphi(x)$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
u &= 1-\sqrt{2}\,x+\tfrac{2}{3}x^2+y^2-\tfrac{1}{18}\sqrt{2}\,x^3+\sqrt{2}\,xy^2-\ldots,\\
v &= y^2\left[1+\sqrt{2}\,x+\tfrac{10}{3}x^2+\tfrac{97}{18}\sqrt{2}\,x^3-\sqrt{2}\,xy^2+\ldots\right].
\end{aligned}$$

Il importe surtout de remarquer que tous les termes de v sont divisibles par y^2, car nous avons observé déjà que v et y s'annulent en même temps. On conclut des développements précédents

$$\begin{aligned}
\sqrt{u} &= 1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,x+\tfrac{1}{12}x^2+\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{72}\sqrt{2}\,x^3+\tfrac{3}{4}\sqrt{2}\,xy^2+\ldots,\\
\sqrt{v} &= y\left[1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,x+\tfrac{17}{12}x^2+\tfrac{143}{72}\sqrt{2}\,x^3-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,xy^2+\ldots\right].
\end{aligned}$$

A cause de $u=v+1-\varphi(x)$, on a

$$\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dx}-\frac{d\varphi}{dx},$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{dv}{dy}$$

et

$$\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}=\frac{dv}{dy}\frac{d\varphi}{dx},$$

en sorte qu'il vient

$$\int\int\left(\frac{ue^{-u}}{1+v}\right)^n \frac{e^{-\eta u}}{1-u+v}\,\frac{du\,dv}{\sqrt{uv}} = 2e^{-2a}\int\int e^{-n(x^2+y^2)}\,\mathrm{T}\,dx\,dy,$$

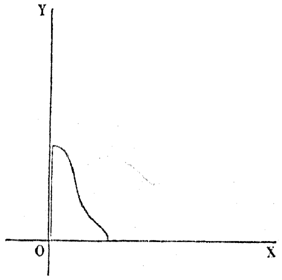
$$\mathrm{T} = e^{\eta[\varphi(x)-v]}\,\frac{d}{dx}\log\varphi(x)\,\frac{d}{dy}(\sqrt{v})\,\frac{1}{\sqrt{u}}$$

et, par le développement de T,

$$(76)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int\int\left(\frac{ue^{-u}}{1+v}\right)^n \frac{e^{-\eta u}}{1-u+v}\,\frac{du\,dv}{\sqrt{uv}} \\ &\quad = e^{-2a}\int\int e^{-n(x^2+y^2)}\,\frac{1}{x}\,[\Sigma a_{rs}x^r y^s]\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

L'intégration s'étend de $x = \varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}}$ et de $y = 0$ jusqu'à certaines valeurs positives de x et de y, que nous pouvons déterminer maintenant par la condition que la série $\Sigma a_{rs}x^r y^s$ soit absolument convergente. Il

Fig. 8.



n'est pas même nécessaire d'étendre le champ d'intégration aussi loin que possible, et il reste un grand arbitraire dans cette détermination. La seule chose essentielle à remarquer, c'est que cette détermination ne dépend en aucune façon de n. Les coefficients a_{rs} sont des polynômes en η et $a_{rs} = 0$ lorsque s est impair (*fig.* 8).

30. En traitant d'une manière analogue l'intégrale Q, nous définissons d'abord une fonction $\varphi_1(x)$ pour les valeurs positives de l'argu-

ment en posant

$$te^{-t} = e^{-1-x^2}, \qquad t - 1 = \varphi_1(x).$$

t variant de 1 à ∞. Puis nous posons

$$\frac{ue^{-u}}{1+v} = e^{-1-x^2-y^2},$$

$$1 - u + v = -\varphi_1(x).$$

Le long de AM (*fig.* 7) x est positif infiniment petit, y varie de o à ∞. Le long de AU, $y = 0$ et x varie de o à ∞.

En achevant le calcul comme tout à l'heure, il vient

$$(77) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int\int \left(\frac{ue^{-u}}{1+v}\right)^n \frac{e^{-\eta u}}{1-u+v} \frac{du\,dv}{\sqrt{uv}} \\ &= -e^{-2a} \int\int e^{-n(x^2+y^2)} \frac{1}{x} [\Sigma(-1)^r a_{r,s} x^r y^s]\,dx\,dy. \end{aligned} \right.$$

L'intégration s'étend encore de $x = \varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}}$, $y = 0$ jusqu'à certaines valeurs positives de x et de y. Nous pouvons maintenant, dans les formules (76) et (77), étendre l'intégration jusqu'aux mêmes limites supérieures de x et de y. En réunissant les intégrales, les parties qui deviennent infinies pour $\varepsilon = 0$ disparaissent, et il vient

$$\begin{aligned} \text{v. p.} &\int\int \left(\frac{ue^{-u}}{1+v}\right)^n \frac{e^{-\eta u}}{1-u+v} \frac{du\,dv}{\sqrt{uv}} \\ &= 2e^{-2a} \int\int e^{-n(x^2+y^2)} [\Sigma a_{2r+1,2s} x^{2r} y^{2s}]\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Dans le second membre, l'intégrale

$$\int\int e^{-n(x^2+y^2)} x^{2r} y^{2s}\,dx\,dy$$

ne diffère de

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-n(x^2+y^2)} x^{2r} y^{2s}\,dx\,dy$$

que par une quantité qui converge vers zéro plus rapidement qu'aucune puissance négative de n, et nous obtenons enfin le développement cherché

$$(78)\quad \text{v. p.}\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{ue^{-u}}{1+v}\right)^n\frac{e^{-\eta u}}{1-u+v}\,\frac{du\,dv}{\sqrt{uv}}=\frac{\pi}{2n}e^{-2a}\left(a_{1,0}+\frac{a_{3,0}+a_{1,2}}{2n}+\ldots\right).$$

Nous n'avons pas intégré, il est vrai, le long de toute la ligne de discontinuité; mais, comme le résultat auquel nous arrivons reste le même en changeant dans une certaine mesure les limites supérieures de x et de y, on voit par là même que les parties un peu éloignées de A de la ligne de discontinuité n'ajoutent à l'intégrale que des parties qu'on doit négliger tant qu'il ne s'agit que d'un développement suivant les puissances descendantes de n.

31. En exécutant les calculs que nous venons de décrire, nous avons trouvé

$$(79)\qquad R_n=e^{-2a}\sqrt{\frac{4a}{\pi n^2}}\left[\eta+\tfrac{2}{3}+\left(\tfrac{1}{6}\eta^3-\tfrac{1}{2}\eta^2-\tfrac{1}{2}\eta-\tfrac{179}{540}\right)\frac{1}{n}+\ldots\right],$$

et de là nous concluons la résolution approchée de l'équation $R_n=0$ par l'une ou l'autre des formules

$$(80)\qquad 2a=n-\tfrac{2}{3}+\frac{437}{1620\,n},$$

$$(81)\qquad n=2a+\tfrac{2}{3}-\frac{437}{3240\,a}.$$

Pour avoir une idée de l'approximation obtenue, nous avons calculé la racine de l'équation

$$1+\frac{a^2}{2^2}+\frac{a^4}{2^2.4^2}+\ldots=e^a\sqrt{\frac{1}{2\pi a}}\left[1+\frac{1^2}{1.8a}+\ldots+\frac{1^2.3^2\ldots(2n-3)^2}{1.2\ldots(n-1)(8a)^{n-1}}\right]$$

pour $n=1, 2, 3, 4$.

Voici les résultats :

n.	Racine de $R_n=0$.	Valeur approximative d'après (80).	Erreur.
1................	0,2579	0,3015	— 0,0436
2................	0,7190	0,7341	— 0,0151
3................	1,2038	1,2116	— 0,0078
4................	1,6955	1,7004	— 0,0049

Pour de plus grandes valeurs de n, l'erreur diminue encore, et les formules (80), (81) suffisent pleinement à notre but.

Riemann, en donnant la série semi-convergente, écrivait

$$J(ai) = e^a \sqrt{\frac{1}{2\pi a}} \sum_{n<2a+1} \frac{[1.3\ldots(2n-1)]^2}{1.2\ldots n(8a)^n},$$

et il ajoutait qu'on ne peut calculer ainsi $J(ai)$ qu'en négligeant des parties de l'ordre e^{-2a} vis-à-vis de l'unité. Le résultat auquel nous sommes arrivé confirme et précise ces indications.

Étude de la fonction $P(a) = \sum_1^\infty \frac{1}{e^{\frac{n}{a}} - 1}$.

32. Nous allons étudier maintenant à notre point de vue le développement en série semi-convergente donné en 1861 par M. Schlömilch de la fonction

$$P(a) = \sum_1^\infty \frac{1}{e^{\frac{n}{a}} - 1}$$

(*Zeitschrift für Mathem. und Physik*, t. VI).

En suivant d'abord l'analyse de M. Schlömilch, nous partirons de ces formules

$$\int_0^\infty \frac{\sin mu}{e^{2\pi u} - 1}\, du = \tfrac{1}{4} + \frac{1}{2(e^m - 1)} - \frac{1}{2m}, \tag{82}$$

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos mu}{e^{2\pi u} - 1}\, \frac{du}{u} = \tfrac{1}{4}m + \tfrac{1}{2}\log(1 - e^{-m}) - \tfrac{1}{2}\log m, \tag{83}$$

dont la première se trouve dans les *Exercices de Calcul intégral* de Legendre (t. II, p. 189). On peut l'obtenir sans difficulté à l'aide du développement

$$\frac{1}{e^{2\pi u} - 1} = \sum_1^\infty e^{-2\pi n u}.$$

La formule (83) se déduit de (82) par une intégration par rapport à m.

En remplaçant m par $\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \ldots, \frac{2n}{a}$, on déduit de (82)

$$\sum_{1}^{2n} \frac{1}{e^{\frac{r}{a}}-1} = a\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-n$$
$$+\int_{0}^{\infty} \frac{du}{e^{2\pi u}-1}\, 2\left(\sin\frac{u}{a}+\sin\frac{2u}{a}+\ldots+\sin\frac{2nu}{a}\right)$$

et

$$2\left(\sin\frac{u}{a}+\ldots+\sin\frac{2nu}{a}\right) = \sin\frac{2nu}{a}+\left(1-\cos\frac{2nu}{a}\right)\cot\frac{u}{2a}.$$

En ajoutant à cette équation celle-ci, qui est une conséquence de (83),

$$0 = -a\log 2n+n+a\log a+a\log\left(1-e^{-\frac{2n}{a}}\right)-2a\int_{0}^{\infty} \frac{1-\cos\frac{2nu}{a}}{e^{2\pi u}-1}\,\frac{du}{u},$$

on obtient

$$\sum_{1}^{2n} \frac{1}{e^{\frac{r}{a}}-1} = a\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}-\log 2n\right)+a\log a+a\log\left(1-e^{-\frac{2n}{a}}\right)$$
$$+\int_{0}^{\infty} \frac{du}{e^{2\pi u}-1}\sin\frac{2nu}{a}-\int_{0}^{\infty}\left(\frac{2a}{u}-\cot\frac{u}{2a}\right)\frac{1-\cos\frac{2nu}{a}}{e^{2\pi u}-1}\,du.$$

En faisant croître indéfiniment n, l'intégrale

$$\int_{0}^{\infty} \frac{du}{e^{2\pi u}-1}\sin\frac{2nu}{a}$$

converge vers $\frac{1}{4}$, et l'on obtient ou

$$J_n = a\int_0^\infty \left(\frac{2}{u} - \cot\frac{u}{2}\right)\frac{1-\cos 2nu}{e^{2\pi a u}-1}\,du \tag{85}$$

C'est en développant $\frac{2}{u} - \cot\frac{u}{2}$, suivant les puissances croissantes de u, que M. Schlömilch a d'abord obtenu cette série semi-convergente remarquable

$$J_\infty = \frac{B_1^2}{2.2!\,a} + \frac{B_2^2}{4.4!\,a^3} + \ldots + \frac{B_n^2}{2n.(2n)!\,a^{2n-1}} + R_n. \tag{86}$$

Mais il s'est glissé une erreur dans cette analyse, et le résultat obtenu par M. Schlömilch, que R_n ne surpasserait jamais en valeur absolue $\frac{\pi}{2}T_{n+1}$, est nécessairement inexacte d'après les remarques que nous avons développées dans l'Introduction.

Dans le Tome II de son *Cours d'Analyse*, M. Schlömich est revenu sur cette série, en la rattachant cette fois à la formule sommatoire de Maclaurin, il arrive à ce résultat que la valeur absolue de R_n ne peut surpasser

$$\frac{B_n B_{n+1}}{1.2\ldots(2n)}\,\frac{1}{a^{2n}}\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{4\pi^2 a^2}\right) = \frac{2nB_{n+1}}{B_n}\,\frac{1}{a}\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{4\pi^2 a^2}\right)T_n.$$

33. Pour discuter cette série à notre point de vue, nous nous servirons de cette formule

$$J_\infty = \text{v. p.}\int_0^\infty \frac{4av\,dv}{1-v^2}\,P\left(\frac{1}{4\pi^2 av}\right). \tag{87}$$

Nous devons indiquer d'abord comment on peut passer de la formule (85) à la formule (87).

A cause de

$$\frac{2}{u} - \cot\frac{u}{2} = \sum_1^\infty \frac{4u}{4\pi^2 r^2 - u^2},$$

on obtient d'abord

$$J_n = \sum\int_0^\infty \frac{4au\,du}{4\pi^2 r^2 - u^2}\;\frac{1-\cos 2nu}{e^{2\pi a u}-1}$$

ou

$$(88)\qquad J_n = \sum \int_0^\infty \frac{4av\,dv}{1-v^2}\,\frac{1-\cos 4\pi nrv}{e^{4\pi^2 rav}-1}.$$

Maintenant on a

$$\int_0^\infty \frac{4av\,dv}{1-v^2}\,\frac{1-\cos 4\pi nrv}{e^{4\pi^2 rav}-1} = \int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^\infty + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon},$$

et, si nous posons pour abréger $4\pi r = b$, $4\pi^2 ra = c$,

$$\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \frac{4av\,dv}{1-v^2}\,\frac{1-\cos nbv}{e^{cv}-1}$$
$$= \int_0^\varepsilon 4a\frac{du}{u}(1-\cos nbu)\left[\frac{1-u}{2-u}\,\frac{1}{e^{c(1-u)}-1} - \frac{1+u}{2+u}\,\frac{1}{e^{c(1+u)}-1}\right].$$

La fonction $\dfrac{4a}{u}\left[\dfrac{1-u}{2-u}\,\dfrac{1}{e^{c(1-u)}-1} - \dfrac{1+u}{2+u}\,\dfrac{1}{e^{c(1+u)}-1}\right]$ est finie et continue dans le voisinage de $u = 0$, et, en appelant M sa valeur pour une certaine valeur de u comprise entre 0 et ε, nous avons

$$\int_0^\infty \frac{4av}{1-v^2}\,\frac{1-\cos 4\pi nrv}{e^{4\pi^2 rav}-1}\,dv = \int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^\infty + \mathrm{M}\left(\varepsilon - \frac{\sin 4\pi nr\varepsilon}{4\pi nr}\right).$$

En faisant croître n indéfiniment, les intégrales

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{4av\,dv}{1-v^2}\,\frac{\cos 4\pi nrv}{e^{4\pi^2 rav}-1} + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{4av\,dv}{1-v^2}\,\frac{\cos 4\pi nrv}{e^{4\pi^2 rav}-1}$$

convergent vers zéro; donc

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \int_0^\infty \frac{4av\,dv}{1-v^2}\,\frac{1-\cos 4\pi nrv}{e^{4\pi^2 rav}-1}$$
$$= \int_0^{1-\varepsilon} \frac{4av\,dv}{1-v^2}\,\frac{1}{e^{4\pi^2 rav}-1} + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{4av\,dv}{1-v^2}\,\frac{1}{e^{4\pi^2 rav}-1} + \mathrm{M}\varepsilon,$$

et, en faisant tendre vers zéro ε,

$$\lim_{n=\infty}\int_0^\infty \frac{4av\,dv}{1-v^2}\,\frac{1-\cos 4\pi nrv}{e^{4\pi^2 rav}-1}\,dv = \text{v. p.}\int_0^\infty \frac{4av\,dv}{1-v^2}\,\frac{1}{e^{4\pi^2 rav}-1}.$$

L'équation (88) conduit donc à cette expression de J_∞,

$$J_\infty = \text{v. p.}\int_0^\infty \frac{4av\,dv}{1-v^2}\left(\sum\frac{1}{e^{4\pi^2 rav}-1}\right) = \text{v. p.}\int_0^\infty \frac{4av\,dv}{1-v^2}\,P\left(\frac{1}{4\pi^2 av}\right).$$

34. En faisant usage maintenant, dans la formule (87), de l'identité

$$\frac{1}{1-v^2} = 1 + v^2 + v^4 + \ldots + v^{2n-2} + \frac{v^{2n}}{1-v^2},$$

nous retrouvons la série semi-convergente (86) avec cette expression du terme complémentaire

$$(89)\qquad R_n = \text{v. p.}\int_0^\infty \frac{4av^{2n+1}\,dv}{1-v^2}\,P\left(\frac{1}{4\pi^2 av}\right).$$

En effet, on trouve

$$(90)\qquad \int_0^\infty v^{2k-1}\,P\left(\frac{1}{4\pi^2 av}\right)dv = \frac{1}{4}\,\frac{B_k^2}{2k(2k)!}\,\frac{1}{a^{2k}},$$

en substituant pour la fonction P la série qui sert de définition et en faisant usage de la relation connue

$$(91)\qquad \int_0^\infty \frac{v^{2k-1}\,dv}{e^{2m\pi v}-1} = \frac{B_k}{4k}\,\frac{1}{m^{2k}}.$$

35. L'expression du terme complémentaire que nous venons d'obtenir donne facilement la résolution approchée de $R_n = 0$. On a

$$P\left(\frac{1}{4\pi^2 av}\right) = e^{-4\pi^2 av} + 2e^{-8\pi^2 av} + \ldots = \Sigma f(n)\,e^{-4n\pi^2 av},$$

$f(n)$ désignant le nombre des diviseurs de n. Mais, quand il s'agit de développer la racine de $R_n = 0$, suivant les puissances descendantes de n, on ne doit retenir que le premier terme $e^{-4\pi^2 a v}$. Après les explications du n° 16, où se présentait un cas analogue à l'occasion du développement de $\log\Gamma(ai)$, il ne semble pas nécessaire d'insister plus longtemps sur ce point, car cela reviendrait à répéter à peu près ce que nous avons dit là. La résolution approchée de

$$\text{v. p.}\int_0^\infty \frac{v^{2n+1}e^{-4\pi^2 a v}\,dv}{1-v^2} = 0$$

se déduit aussitôt du résultat du n° 8, par un simple changement de lettres, et il vient

$$4\pi^2 a = 2n + \frac{5}{6} + \frac{199}{3240(2n+1)}, \tag{92}$$

$$n = 2\pi^2 a - \frac{5}{12} - \frac{199}{25920\pi^2 a}, \tag{93}$$

et la valeur approchée de R_n, en posant $2\pi^2 a = n + \eta$,

$$R_n = 8ae^{-4\pi^2 a}\sqrt{\frac{\pi}{4n+2}}\left(\eta - \frac{5}{12}\right). \tag{94}$$

On peut, du reste, négliger le petit terme $\frac{199}{25920\pi^2 a}$ dans (93), et prendre ainsi simplement $2\pi^2 a - \frac{5}{12}$ pour valeur approchée de la racine de $R_n = 0$.

36. Les expressions précédentes montrent l'extrême approximation que la série semi-convergente permet d'obtenir. L'ordre d'approximation est $e^{-4\pi^2 a}\sqrt{\frac{8a}{\pi}}$, et déjà, pour $a = 1$, l'erreur ne porterait que sur la dix-septième décimale. Aussi nous prenons pour exemple cette valeur beaucoup plus petite $a = \frac{1}{4}$. On trouve $N = 4,52$: il faut donc prendre quatre termes et ajouter encore le cinquième terme, multiplié par une fraction λ approximativement égale à 0,52. On obtient ainsi

$$P\left(\tfrac{1}{4}\right) = 0,0190210 - 0,0000415\lambda,$$

et, pour $\lambda = 0{,}52$,

$$P(\tfrac{1}{4}) = 0{,}0189994;$$

la valeur exacte est

$$0{,}0189992.$$

L'approximation avec laquelle nous avons résolu l'équation $R_n = 0$ ne laisse rien à désirer.