ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ED. DEWULF

Étude sur les surfaces gauches

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 3 (1886), p. 189-200
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1886_3_3__189_0>

ÉTUDE

SUR

LES SURFACES GAUCHES,

PAR M. ED. DEWULF,

COLONEL DU GÉNIE.

M. Mannheim vient de publier, dans le *Journal de Mathématiques* de M. C. Jordan (1886), un Mémoire d'Optique géométrique, où il fait un emploi constant et heureux d'un point remarquable, qu'il nomme *point représentatif*. J'ai, de mon côté, trouvé la notion de ce point dès l'année 1872: j'ai même rédigé, à cette époque, une étude sur ce point, que je nommais *centre perspectif;* cette étude n'a pas été publiée jusqu'ici. Je crois qu'elle peut encore offrir de l'intérêt à ceux qui s'occupent de Géométrie : c'est celle que je donne aujourd'hui; je n'y ai ajouté que l'addition qui la termine.

Comme on le verra, la marche que j'ai suivie est bien différente de celle de M. Mannheim. J'établis la notion de centre perspectif en ne me servant que des définitions de la surface gauche et du plan tangent; j'en déduis les notions de point central, de plan central et de paramètre de distribution; je démontre ensuite quelques propriétés intéressantes des centres perspectifs. Enfin, dans l'addition, je montre comment la théorie du centre perspectif conduit facilement à celles des normalies, de la courbure des surfaces et des pinceaux de rayons.

1. Une surface gauche est une surface engendrée par le mouvement d'une droite, dont deux positions successives ne sont généralement pas dans un même plan.

Soient

S une surface gauche;
A une de ses génératrices;
A′ et A″ deux positions consécutives à A de la génératrice;
μ un point quelconque de A.

La droite A est évidemment osculatrice à S, c'est-à-dire qu'elle la rencontre en plus de deux points consécutifs; le plan tangent à la surface S au point μ passera donc par A, quelle que soit la position de μ sur cette génératrice. La droite qui passe par μ et qui s'appuie sur A′ et A″, contenant trois points infiniment voisins de la surface, sera la seconde osculatrice et déterminera avec A le plan tangent en μ à S (1). Réciproquement, un plan quelconque M mené par A sera tangent à S en un point de cette génératrice, et la droite tracée dans le plan M par les points où il coupe A′ et A″ rencontrera A au point de contact μ. Il est donc évident que, le long de la génératrice A, tout point μ détermine un seul plan M tangent à S, et que tout plan M, passant par A, détermine sur cette génératrice un seul point de contact μ. La série de points μ et le faisceau de plans M forment donc deux figures projectives.

On sait que tout le système des couples d'éléments correspondants de deux figures projectives est complètement déterminé si l'on donne trois couples d'éléments correspondants. Supposons donc que l'on donne trois points μ_1, μ_2, μ_3 de la génératrice A et les plans tangents correspondants M_1, M_2, M_3.

Pour étudier la relation qui lie les points μ de A aux plans M, imaginons un plan P perpendiculaire à A. Le plan P coupera le faisceau de plans M suivant un faisceau de droites m; le faisceau m et le faisceau M sont projectifs et égaux, la division des points μ et le faisceau m sont donc projectifs, et on peut les mettre en perspective dans un plan quelconque passant par A, c'est-à-dire les placer de manière que chaque rayon m_n du faisceau m passe par le point correspondant μ_n de A.

L'angle des deux rayons m_n et $m_{n'}$ du faisceau m mesure l'angle des

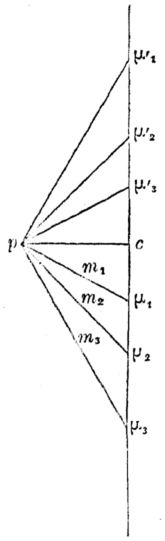
(1) Cremona, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, p. 41.

plans tangents M_n, $M_{n'}$; donc, après la mise en perspective, les rayons m forment entre eux des angles égaux aux angles que forment entre eux les plans tangents à S aux points μ, où ils coupent A.

Pour mettre la division μ et le faisceau m en perspective, décrivons sur $\mu_1\mu_2$, dans un plan quelconque passant par A, un segment capable de l'angle m_1m_2, et sur $\mu_2\mu_3$ un segment capable de l'angle m_2m_3. Ces deux segments se couperont en un point p qui sera le centre du faisceau m mis en perspective avec A.

Ne considérons plus maintenant que la figure du plan pA. Du point p abaissons une perpendiculaire pc sur A et faisons tourner le rayon m autour de p de gauche à droite, à partir de pc, de manière à lui faire occuper successivement les positions m_1, m_2, m_3, ... (*fig.* 1) qui déter-

Fig. 1.



minent sur A les points μ_1, μ_2, μ_3, ...; les angles μ_1pc, μ_2pc, μ_3pc vont en augmentant à mesure que le point μ s'éloigne vers l'infini, et prennent toutes les valeurs de 0° à 90°. Si la rotation continue, le point μ revient de l'infini en passant par les points μ'_1, μ'_2, μ'_3, ... pour atteindre c, et les angles des plans tangents correspondants avec le plan tangent en c varient de $-$ 90° à $-$ 0°. Donc, si l'on fait abstraction des signes, les plans tangents à S en des points également éloignés de c font des angles égaux avec le plan tangent en c.

Cette symétrie justifie les noms de *point central* donné au point c par Chasles et de *plan central* donné au plan tangent en c par Bour. Nommons, en outre, *centre perspectif de* A par rapport à S le point p, et rappelons que la longueur pc a été nommée *paramètre de la génératrice* par Chasles (¹).

Il résulte de ce que nous venons de dire que :

1° *La projection du centre perspectif sur la génératrice correspondante est le point central de la génératrice;*

2° *Le plan central est normal au point à l'infini;*

3° *La tangente trigonométrique de l'angle du plan tangent à* S *en un point de* A *avec le plan central est proportionnelle à la distance de ce point au point central.*

Si l'on nomme φ l'angle de ces deux plans, p la longueur pc et l la distance au point c du point de contact, on a

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{l}{p};$$

si, par le point p, on élève une perpendiculaire à $p\mu$, elle coupera A en un point μ', le plan tangent en μ est normal en μ'. Les points μ et μ' forment une involution dont les points doubles sont imaginaires et dont le point c est le point central. La droite $p\mu'$ a été nommée la *droite auxiliaire de* μ par M. Mannheim dans son Mémoire sur les pinceaux de droites (²).

Donc : *les droites auxiliaires de tous les points d'une génératrice passent par le centre perspectif.*

Si du point central comme centre, dans un plan perpendiculaire à A et avec le paramètre de la génératrice comme rayon, nous décrivons une circonférence, ses points jouiront de cette propriété que, *de chacun d'eux, on voit un segment* $\mu_n \mu_{n'}$ *de* A *sous un angle égal à celui des plans tangents à* S *en* μ_n *et* $\mu_{n'}$.

(¹) De la Gournerie, *Géométrie descriptive*, IIe Partie, p. 144.

(²) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1872.

Dans un plan passant par la génératrice A, il y a deux centres perspectifs symétriques par rapport à A; ils correspondent à des paramètres de la génératrice de signes contraires.

2. Supposons que deux surfaces gauches S_1 et S_2 aient une génératrice commune A. A tout plan M, passant par A, correspondent un point μ de contact avec S_1 et un point ν de contact avec S_2. Les points μ et ν forment deux divisions involutives, les plans tangents aux points doubles e et l de ces divisions sont communs aux deux surfaces.

Donc : *deux surfaces gauches, qui ont une génératrice commune, sont tangentes l'une à l'autre en deux points de cette génératrice qui peuvent être réels, distincts ou coïncidents, ou imaginaires.*

3. Nous allons chercher maintenant dans quels cas ces points de contact sont réels et distincts, réels et coïncidents, ou imaginaires.

Nous allons supposer d'abord que les surfaces S_1 et S_2 ont le même plan central. Soient p_1 et p_2 les centres perspectifs de ces deux surfaces relativement à leur génératrice commune A, ces points étant pris dans le plan central commun; soit aussi O le point d'intersection de la droite $p_1 p_2$ avec A.

Prenons un point quelconque μ sur A, l'angle $p_1 \mu p_2$ est égal à $p_2 \mu c_2 - p_1 \mu c_1$ ou égal à $90^\circ - \mu p_2 c_2 - (90^\circ - \mu p_1 c_1)$, ou encore

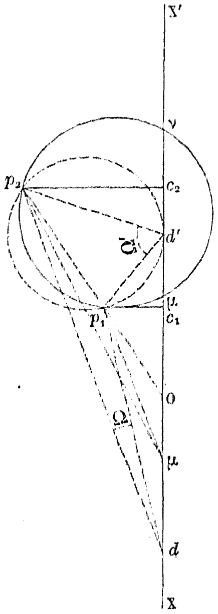
$$p_1 \mu p_2 = \mu p_1 c_1 - \mu p_2 c_2.$$

Si nous convenons de compter les angles des plans tangents, en un même point μ de A, à partir du plan tangent à S_1, l'angle $p_1 \mu p_2$ est égal et de signe contraire à celui des plans tangents (*fig.* 2) quand le point μ de A est sur OX; il est égal à cet angle, et de même signe que lui, si le point μ est sur OX′.

Par les trois points μ, p_1, p_2 faisons passer une circonférence : elle coupe la génératrice A en un second point ν, et les angles des plans tangents en μ et en ν sont égaux et de même signe. Les points μ et ν forment une involution sur A, le point O est le point central de cette involution. Soient d et d' ses points doubles (d étant sur OX, d' sur OX′); les circonférences $dp_1 p_2$, $d'p_1 p_2$ sont tangentes à A en d et d'.

Supposons maintenant que le point μ parcoure la génératrice A en partant du point à l'infini sur OX et se dirigeant vers le point à l'infini sur OX′ en passant par O. L'angle des plans tangents en μ aux deux surfaces est d'abord nul; puis il croît jusqu'à ce que μ atteigne le point d; ensuite il décroît quand μ, quittant d, se rapproche de O, où l'angle devient de nouveau nul. Quand μ continue son mouvement

Fig. 2.



sur OX′, l'angle des plans tangents change de signe, et sa grandeur absolue croît et atteint son maximum quand μ arrive en d'; puis cette grandeur absolue décroît jusqu'à ce que μ parvienne à l'infini, où elle est de nouveau nulle.

Ainsi, en valeur absolue, l'angle des plans tangents, en un même point de A, a deux maxima : l'un d'eux correspond au point d, nous le nommerons Ω; l'autre Ω' correspond au point d'. Les maxima Ω et Ω' sont de signes contraires.

Nous avons supposé jusqu'ici que les plans centraux des surfaces S_1 et S_2 se confondent en un seul; imaginons maintenant que l'on fasse tourner la surface S_2 autour de A dans le sens positif jusqu'à ce que les plans centraux fassent un angle η. L'angle du plan tangent à S_2, en un point quelconque μ avec le plan tangent en μ à S_1 est augmenté de η. Si donc nous nommons ε le nouvel angle des plans tangents, en un même point de A, à S_1 et à S_2, on aura

$$\varepsilon - \eta = p_1\mu p_2 \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon = \eta + p_1\mu p_2.$$

L'angle $p_1\mu p_2$ doit être pris avec son signe, qui est négatif quand μ se trouve sur OX et qui est positif quand μ est sur OX'. Nous pourrons donc ne considérer que les valeurs absolues de l'angle $p_1\mu p_2$, à la condition d'employer la formule

$$\varepsilon = \eta - p_1\mu p_2$$

quand μ est sur OX, et la formule

$$\varepsilon = \eta + p_1\mu p_2$$

quand μ est sur OX'.

Supposons que μ parte du point à l'infini sur OX et se dirige vers O. L'angle ε, d'abord égal à η, décroît et atteint son minimum quand μ est en d, où l'angle devient $\eta - \Omega$; puis cet angle croît et devient de nouveau η quand μ est en O. Au delà, ε croît d'une manière continue jusqu'à $\eta + \Omega'$, puis décroît jusqu'à η. Donc :

Si $\eta < \Omega$, il y a deux points sur OX où l'angle ε est nul.

Si $\eta = \Omega$, ces deux points se confondent en un seul.

Si $\eta > \Omega$, les points de contact n'existent plus.

Pour construire les points de contact, il suffit de tracer sur p_1p_2 un segment capable de l'angle $-\eta$: ses points d'intersection avec la génératrice A donnent les deux points de contact.

Il est important de remarquer que nous avons supposé les centres perspectifs situés d'un même côté de A, ou, ce qui revient au même, que les paramètres de A par rapport à S_1 et à S_2 sont de même signe, ou encore que les plans tangents à S_1 et à S_2 en un même point μ de A tournent dans le même sens quand μ se déplace. Dans le cas contraire, il est très facile de voir que les points de contact des surfaces sont toujours réels. On peut énoncer les théorèmes suivants :

Si deux surfaces gauches S_1 *et* S_2, *ayant une génératrice commune* A, *sont telles que leurs plans tangents, en un même point* μ *de* A, *tournent en* *sens contraire quand le point* μ *se déplace, elles se touchent toujours en deux points réels de* A.

Si leurs plans tangents en un point μ *tournent dans le même sens quand* μ *se déplace, ces deux surfaces se touchent en deux points réels et distincts si* $\eta < \Omega$; *en deux points réels et coïncidents, si* $\eta = \Omega$; *en deux points imaginaires, si* $\eta > \Omega$ *dans le cas où l'angle* η *de leurs plans centraux est positif. Dans le cas où* η *est négatif, les points de contact sont réels, distincts ou coïncidents, ou imaginaires, selon que l'on a*

$$\eta < \Omega', \qquad \eta = \Omega', \qquad \eta > \Omega'.$$

Rappelons que Ω est le plus grand angle négatif des plans tangents à S_1 et S_2 aux mêmes points de A et que Ω' est leur plus grand angle positif, quand les plans centraux font un angle nul.

Si l'on veut trouver les points où les plans tangents aux surfaces en des points de A font un angle à φ, il suffit de décrire sur $p_1 p_2$ un segment capable de l'angle $\varphi - \eta$.

4. Si l'on fait tourner l'une des surfaces, S_2 par exemple, autour de A, les points de contact se déplacent et forment une involution qui a précisément pour points doubles les points de contact qui correspondent à $\eta = \Omega$.

5. Nommons e et l les points de contact, sur A, des deux surfaces gauches S_1 et S_2 (*fig.* 3)

$$p_1 e p_2 = p_1 l p_2 = \eta;$$

donc :

La distance qui sépare les centres perspectifs des deux surfaces gauches S_1 *et* S_2, *qui ont une génératrice commune, est vue des points de* A *où les surfaces sont tangentes l'une à l'autre sous un angle égal à l'angle des plans centraux des surfaces.*

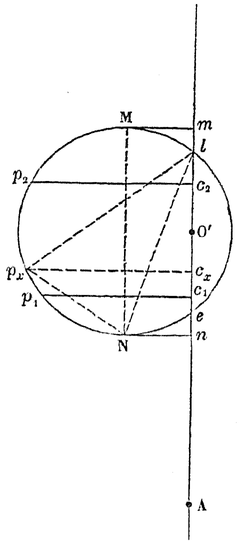
6. On voit aussi que :

La distance qui sépare les points de contact de deux surfaces gauches sur leur génératrice commune est vue des centres perspectifs des deux surfaces sous un angle égal à celui des plans tangents aux deux points de contact des surfaces.

7. Il résulte de ce dernier théorème que :

Toutes les surfaces gauches qui ont une génératrice commune A, *et qui sont tangentes en deux points fixes e et l de* A *à l'une d'elles* S_1, *ont leurs centres perspectifs sur la circonférence qui passe par les points e et l et par le centre perspectif* p_1 *de* A *par rapport à* S_1.

Fig. 3.



8. Désignons une quelconque de ces surfaces par S^{el} et menons à la circonférence des centres perspectifs elp_1 les tangentes Mm et Nn perpendiculaires à A et coupant cette droite en m et n.

Les points centraux de A *par rapport à toutes les surfaces* S^{el} *seront compris entre les points m et n, qui sont toujours réels.*

9. L'angle MeN mesure l'angle des plans centraux des surfaces S^{el} qui ont m et n pour points centraux; donc :

Les plans centraux des surfaces S^{el} *qui ont les points limites m et n pour points centraux sont rectangulaires.*

10. Nommons $2d$ la distance des points limites des points centraux des surfaces S^{el} et traçons le diamètre lp_n de la circonférence des centres perspectifs; le triangle elp_n donne

$$el = 2d \sin\varepsilon;$$

donc :

La distance qui sépare les points de contact communs sur A_1 *à toutes les surfaces* S^{el} *est égale à la distance des points limites des points centraux de ces surfaces multipliée par le sinus de l'angle des plans tangents communs.*

On a donc toujours $el < mn$.

11. On voit aussi que :

Parmi les surfaces S^{el}, *celles qui ont le plus grand paramètre pour la génératrice* A *ont leur point central en* O' *à égale distance des points e et l.*

12. *Parmi les surfaces* S^{el}, *celles qui ont le même paramètre pour* A *ont leurs points centraux à égale distance de* O'.

13. Considérons toujours un système de surfaces gauches S^{el} (*fig.* 3) ayant une génératrice commune A et toutes tangentes entre elles aux points fixes e et l de A; leurs points centraux ont pour points limites m et n. Supposons que l'on veuille trouver le point central c_x des surfaces S^{el}_x dont le plan central fait un angle η avec le plan central correspondant au point limite m.

Prenons sur A un point B comme origine, et posons

$$Bc_x = x, \qquad Bm = l_1 \qquad \text{et} \qquad Bn = l_2.$$

Le centre perspectif correspondant à c_x sera sur la circonférence des centres perspectifs, en p_x, sur la perpendiculaire élevée en c_x à A. Nous savons que

$$\eta = p_x l M = p_x N M;$$

le triangle $p_x NM$ donne $MN = \frac{p_x N}{\cos\eta}$, mais $p_x N = \frac{c_x n}{\cos\eta}$, donc

$$MN = \frac{c_x n}{\cos^2\eta}.$$

Remplaçons MN par $l_2 - l_1$, $c_x n$ par $l_2 - x$, nous aurons

$$l_2 - l_1 = \frac{l_2 - x}{\cos^2\eta}, \qquad \text{d'où} \qquad x = l_2 \sin^2\eta + l_1 \cos^2\eta.$$

Cette relation est semblable à celle qui lie les plus courtes distances d'un rayon aux rayons infiniment voisins d'un pinceau et qui est due à Hamilton.

Cette analogie n'est pas la seule que l'on remarque entre les théorèmes démontrés dans cette étude et ceux que donne la théorie des pinceaux de rayons (¹). Nous nous proposons de revenir sur ce sujet.

Addition. — Nous avons vu (I) que le point central de la génératrice A d'une surface gauche S est la projection, sur cette génératrice, de son centre perspectif, et que le plan tangent à S au point central c est le plan central. Les plans tangents à S en des points de A également éloignés de c sont également inclinés sur le plan central. Il résulte de là que *le point central de* A *est aussi le pied de la plus courte distance entre* A *et la génératrice infiniment voisine* A'.

Nous avons vu aussi (7) que les surfaces gauches S, ayant une génératrice commune A, qui sont tangentes entre elles aux points fixes e et l de A, ont leurs centres perspectifs sur une circonférence passant par les points e et l. Les surfaces dont les centres perspectifs sont aux points e et l ont leur paramètre nul et, par suite, ont même plan tangent en tous les points de A. Cela veut dire que la génératrice infiniment voisine de A coupe cette génératrice, et le point d'intersection est le point central.

Cela posé, soient une surface quelconque Σ, a un de ses points. Par le point a traçons une courbe quelconque sur Σ; la surface engendrée par les normales à Σ aux points de cette courbe est généralement une surface gauche qui a reçu le nom de *normalie*. Et, si l'on trace sur Σ des courbes passant par le point a, les normalies dont ces courbes sont les directrices sont des surfaces gauches S, qui ont une génératrice commune, la normale A à Σ au point a.

Pour étudier ces surfaces, imaginons une quadrique Q osculatrice à Σ en a, les normalies couperont Q suivant des courbes osculées en a par leurs directrices, et la normale à Σ au point infiniment voisin de a d'une des directrices sera aussi normale à la quadrique Q.

La droite polaire, par rapport à Q, d'une droite quelconque A passant par a est située dans le plan tangent à Q en a; c'est la droite d'intersection des plans tangents à Q aux deux points où A coupe cette quadrique.

Prenons deux points quelconques a et a' sur Q, la droite polaire

---

(¹) *Voir* ma traduction de la *Théorie générale des systèmes de rayons rectilignes*, par M. Kummer, insérée aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIX, XX, et t. I, 2ᵉ série.

de aa', par rapport à Q, sera l'intersection des plans tangents à Q en a et en a'; et, si les normales à Q en a et a' se coupent, la droite polaire de aa' sera perpendiculaire à aa'; et, réciproquement, si la droite polaire de aa' est perpendiculaire à cette droite, les normales à Q en a et a' se rencontrent.

Supposons maintenant que les points a et a' soient des points infiniment voisins de Q, la droite aa' sera une tangente à Q et à Σ en a. Si nous imaginons que le point a' infiniment voisin de a se déplace sur la surface Σ, la droite aa' sera toujours tangente à Σ en a, et à chacune des positions de la droite aa' correspondra une droite polaire située dans le même plan tangent en a. Réciproquement, à une droite tracée dans le plan tangent en a, considérée comme droite polaire, correspondra une seule droite aa'. Ces couples de droites formeront donc deux faisceaux en involution ayant même centre a.

Nous savons que ces faisceaux involutifs ont toujours deux rayons correspondants rectangulaires. Les normales à Σ aux points infiniment voisins de a, déterminés par ces deux directions rectangulaires, couperont donc la normale A en deux points e et l. Les courbes tracées sur Σ tangentiellement à ces directions donnent donc des normalies qui sont tangentes entre elles aux deux points e et l. Ces points sont les centres perspectifs des plans tangents rectangulaires et *toutes les normalies qui ont la droite* A *pour génératrice commune ont leurs centres perspectifs sur la circonférence décrite sur el comme diamètre* ([1]). Donc :

Les normalies qui ont pour directrices les courbes tracées, à partir d'un point a, sur une surface quelconque Σ, sont tangentes entre elles aux points e et l de la normale en a à Σ, et leurs plans tangents en ces points sont rectangulaires.

Ces théorèmes donnent l'explication des analogies signalées plus haut et montrent toute l'importance de la théorie des centres perspectifs dans l'étude des surfaces et des pinceaux de rayons.

([1]) Si l'on veut construire le centre perspectif des normalies dont les directrices sont tangentes à une droite aX, faisant un angle φ avec la trace du plan tangent en e sur le plan tangent à Σ en a, il suffit de décrire sur ae un segment capable de l'angle φ. Son intersection avec la circonférence el donnera le point cherché.