ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. MARCHAND

Sur le changement de variables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 3 (1886), p. 137-188
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1886_3_3__137_0>

SUR LE

CHANGEMENT DE VARIABLES,

Par M. E. MARCHAND,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE CARCASSONNE.

On peut reprocher, à juste titre, à la formule de Taylor de ne conduire simplement au développement en série que dans quelques cas particuliers qu'il est aussi facile de traiter directement. Cela ne diminue nullement son importance, la valeur d'un formule générale consistant plutôt à montrer que tel problème est résoluble qu'à le résoudre effectivement avec le minimum de calculs algébriques ou de constructions géométriques.

L'utilité théorique de la série de Taylor est trop évidente pour qu'il soit nécessaire de s'attacher à la faire ressortir. Lagrange a montré pleinement tout le parti qu'on peut tirer du « développement d'une fonction d'une variable lorsqu'on attribue un accroissement à cette variable ». Quoique sa démonstration de la « loi générale de ce développement » soit reconnue insuffisante, il n'en est pas moins vrai que, grâce aux travaux de Cauchy et de ses successeurs, les propriétés des séries entières et l'aptitude des fonctions analytiques à se prêter à un pareil développement servent de base à la théorie moderne des fonctions. Il est inutile de rappeler que les propriétés si importantes du contact et de la courbure dans les courbes et les surfaces peuvent être considérées comme de simples applications géométriques de la série de Taylor.

Hoëné Wronski, le philosophe qui découvrait le *Principe absolu du* *savoir* et la *Loi de création* [1], appréciait en ces termes la série de Lagrange qu'il faisait rentrer comme cas particulier dans son *Problème universel* [2] : « Cette loi est pour Lagrange ce que sont le binôme de Newton et le théorème de Taylor pour leurs auteurs respectifs [3]. »

L'auteur de la *Philosophie absolue* [4] se devait à lui-même d'obtenir la loi qui embrasse toutes les autres lois des séries comme un cas très particulier de la *Loi suprême de la Science des nombres* [5], à propos de laquelle Lagrange, dans le compte rendu, conjointement avec Lacroix, du premier Mémoire présenté par Wronski à l'Institut, a signé cette décisive déclaration : « Ce qui a frappé vos Commissaires dans le Mémoire de M. Wronski, c'est qu'il tire de sa formule toutes celles que l'on connaît pour le développement des fonctions, et qu'elles n'en sont que des cas très particuliers [6]. » La loi générale des séries conduit facilement à la série de Taylor, puisque « le cas en quelque sorte primitif de la loi fondamentale des séries est celui où l'accroissement est indéfiniment petit et lorsque, par conséquent, les différences deviennent des différentielles [7] ».

Il m'a paru intéressant de constater que l'expression des coefficients de la série de Taylor obtenue dans cet ordre d'idées par Wronski, dès 1812, en laissant indéterminée la variable indépendante, n'est autre chose que la formule générale relative au changement de cette variable.

Ordinairement on se borne à indiquer le moyen de former les dérivées successives $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots$ par un calcul de proche en proche

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}, \qquad \cdots\cdot$$

---

(1) *Encyclopédie mathématique ou exposition complète de toutes les branches des Mathématiques, d'après les principes de la philosophie des Mathématiques de Hoëné Wronski*, par A. S. de Montferrier. Amyot, éditeur, t. III, p. 482.

Cet Ouvrage ayant été la cause occasionnelle de ce travail, je me bornerai dorénavant à le désigner par les abréviations suivantes : *A. S.*

(2) *A. S.*, t. III, p. 401. M. Cayley a donné une nouvelle démonstration du *Problème universel* (*Quarterly Journal*, avril 1873).

(3) *A. S.*, t. III, p. 405 (*Philosophie de l'infini*, p. 98).

(4) *A. S.*, t. III, p. 484.

(5) *A. S.*, t. III, p. 358.

(6) *A. S.*, t. III, p. 363.

(7) *A. S.*, t. III, p. 275.

Si cette marche devait être regardée comme irréprochable, il n'y aurait plus aucune raison pour préférer la formule du binôme au triangle arithmétique.

La formule de Wronski, toute compliquée qu'elle paraisse au premier abord, ne me semble donc pas devoir être rejetée, à condition qu'elle donne très aisément les résultats relatifs aux changements les plus simples. Sa longueur tient à ce que, pour avoir un déterminant, on introduit beaucoup de termes qui ne subsisteraient pas dans le développement. L'exemple bien connu de la multiplication des déterminants justifie amplement cette manière de procéder par des applications très variées et toutes remarquables, dont le nombre s'accroît de jour en jour. Je donnerai d'ailleurs, pour obtenir les coefficients numériques, une formule qui n'exige pas des calculs autres que ceux qu'on serait obligé d'effectuer pour développer la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un polynôme entier. Quant aux fonctions que l'on peut considérer comme suffisamment connues :

$$y = x^{\mu},$$
$$y = e^x, \qquad y = \mathrm{L}x,$$
$$y = \cos x, \qquad y = \operatorname{tang} x,$$
$$y = \arccos x, \qquad y = \operatorname{arc\,tang} x,$$

je ferai voir que les changements de variable indépendante auxquels elles donnent naissance conduisent à des formules qu'on peut tirer directement des méthodes générales. Je retrouverai tous les résultats connus actuellement, ainsi que certains autres qui ne me paraissent pas avoir été signalés jusqu'ici.

Ce qui précède suffit pour mettre en pleine lumière l'idée qui m'a inspiré. La route à suivre est dès lors visible. Je commencerai par rappeler dans l'historique la démonstration de la loi générale des séries de Wronski, et je ferai voir qu'elle contient aisément d'autres formules plus récentes. Ensuite je consacrerai trois Chapitres à l'application immédiate de trois méthodes générales qui se complètent l'une l'autre, en choisissant pour chacune d'elles les exemples qui paraissent lui convenir le mieux.

Les cas traités suffiront, je l'espère, pour montrer quel degré de clarté peut atteindre cette question dont la généralité est bien faite pour effrayer au début.

Historique.

1. Je copie textuellement l'article publié par M. Abel Transon dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (p. 305; 1874) sous ce titre : *Loi des séries de Wronski; sa phoronomie*.

« La démonstration que Wronski a donnée, en 1812, de sa loi des séries, dans la troisième Note annexée au *Mémoire sur la réfutation de la théorie des fonctions analytiques*, est, comme j'ai déjà eu l'occasion de le dire, extrêmement simple; mais, parce que les premiers Ouvrages de l'auteur ne se trouvent plus dans le commerce, je crois faire une chose utile en publiant ici cette démonstration.....

» L'auteur avait démontré dans sa *Philosophie des Mathématiques*, publiée en 1811, que la forme générale des séries est la suivante :

$$F(x) = A_0 + A_1\varphi(x)^{1|\xi} + A_2\varphi(x)^{2|\xi} + A_3\varphi(x)^{3|\xi} + \ldots,$$

dans laquelle le symbole

$$\varphi(x)^{m|\xi} = \varphi(x)\varphi(x+\xi)\varphi(x+2\xi)\ldots\varphi[x+(m-1)\xi],$$

et il s'agissait, dans la Note de 1812, de donner la formule du coefficient général A_μ. Ici je citerai textuellement l'auteur :

« A cet effet, rappelons que la différence régressive d'une fonc-
» tion $f(x)$ est l'excès de cette fonction sur celle qui la précède dans
» l'ordre de l'accroissement ξ de la variable, savoir

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x-\xi).$$

» L'expression d'un ordre quelconque de ces différences, toujours
» dans l'ordre régressif, est

$$\Delta^\mu f(x) = f(x) - \frac{\mu}{1}f(x-\xi)$$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}f(x-2\xi) - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}f(x-3\xi) + \ldots.$$

» Appliquant cette formule à une fonction de la forme

$$f(x) = \varphi(x)^{\omega|\xi};$$

» on a

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta^{\mu}\varphi(x)^{\omega|\xi} = \varphi(x)^{\omega|\xi} - \frac{\mu}{1}\varphi(x-\xi)^{\omega|\xi} \\ \qquad + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\varphi(x-2\xi)^{\omega|\xi} + \ldots + (-1)^{\mu}\varphi(x-\mu\xi)^{\omega|\xi}. \end{cases}$$

» D'ailleurs, puisqu'on a en général

$$\varphi(x-\lambda\xi)^{\omega|\xi} = \varphi(x-\lambda\xi)\,\varphi(x-\lambda\xi+\xi)\ldots\varphi[x-\lambda\xi+(\omega-1)\xi],$$

» λ étant un nombre quelconque, le facteur $\varphi(x)$ se trouvera contenu » dans la faculté $\varphi(x-\lambda\xi)^{\omega|\xi}$ lorsque ω sera plus grand que λ et que, » d'ailleurs, ω et λ seront des nombres entiers, ainsi que nous le sup- » poserons ici. Donc le même facteur $\varphi(x)$ sera contenu dans tous les » termes (1) de la différence $\Delta^{\mu}\varphi(x)^{\omega|\xi}$ lorsque ω sera plus grand que μ; » et, par conséquent, en donnant à x la valeur qui réduit à zéro le » facteur $\varphi(x)$, on aura, dans le cas en question, la valeur

$$(2)\qquad \Delta^{\mu}\varphi(x)^{\omega|\xi} = 0.$$

» Or la forme générale des séries est

$$(3)\qquad F(x) = A_0 + A_1\varphi(x)^{1|\xi} + \ldots.$$

» Prenant donc des deux membres de cette expression (3) les diffé- » rences des ordres régressifs 1, 2, 3, 4, ... et donnant ensuite à x la » valeur qui réduit à zéro le facteur $\varphi(x)$, nous aurons, en vertu » de (2),

$$(4)\quad \begin{cases} \Delta F(x) = A_1\Delta\varphi(x), \\ \Delta^2 F(x) = A_1\Delta^2\varphi(x) + A_2\Delta^2\varphi(x)^{2|\xi}, \\ \Delta^3 F(x) = A_1\Delta^3\varphi(x) + A_2\Delta^3\varphi(x)^{2|\xi} + A_3\Delta^3\varphi(x)^{3|\xi}, \\ \Delta^4 F(x) = A_1\Delta^4\varphi(x) + A_2\Delta^4\varphi(x)^{2|\xi} + A_3\Delta^4\varphi(x)^{3|\xi} + A_4\Delta^4\varphi(x)^{4|\xi}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

» La première de ces équations donne immédiatement $A_1 = \frac{\Delta F(x)}{\Delta\varphi(x)}$. » En second lieu, puisque, en vertu de l'équation (2), on a $\Delta\varphi(x)^{2|\xi} = 0$, » les deux premières des équations précédentes (4) sont identiques

» avec celles-ci :

$$\Delta F(x) = A_1 \Delta \varphi(x) + A_2 \Delta \varphi(x)^{2|\xi},$$
$$\Delta^2 F(x) = A_1 \Delta^2 \varphi(x) + A_2 \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi},$$

» équations qui donnent immédiatement

$$A_2 = \frac{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 F(x)]}{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi}]} \quad (^1).$$

» En troisième lieu, observant qu'en vertu de la valeur générale (2) on a

$$\Delta \varphi(x)^{2|\xi} = 0, \qquad \Delta \varphi(x)^{3|\xi} = 0, \qquad \Delta^2 \varphi(x)^{3|\xi} = 0,$$

on verra que les trois premières équations sont identiques avec celles-ci :

$$\Delta F(x) = A_1 \Delta \varphi(x) + A_2 \Delta \varphi(x)^{2|\xi} + A_3 \Delta \varphi(x)^{3|\xi},$$
$$\Delta^2 F(x) = A_1 \Delta^2 \varphi(x) + A_2 \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi} + A_3 \Delta^2 \varphi(x)^{3|\xi},$$
$$\Delta^3 F(x) = A_1 \Delta^3 \varphi(x) + A_2 \Delta^3 \varphi(x)^{2|\xi} + A_3 \Delta^3 \varphi(x)^{3|\xi},$$

» équations qui donnent encore immédiatement

$$A_3 = \frac{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi}\, \Delta^3 F(x)]}{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi}\, \Delta^3 \varphi(x)^{3|\xi}]} \quad (^2),$$

» et, procédant de la même manière, on verra, non par induction, mais
» par le principe même de la formation de ces quantités, qu'on aura,
» en général,

$$(5) \qquad A_\mu = \frac{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi} \ldots \Delta^{\mu-1} \varphi(x)^{\mu-1|\xi}\, \Delta^\mu F(x)]}{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi} \ldots \Delta^{\mu-1} \varphi(x)^{\mu-1|\xi}\, \Delta^\mu \varphi(x)^{\mu|\xi}]},$$

» μ étant un indice quelconque.

» De plus, ayant égard à la valeur de x dans cette expression du
» coefficient général A_μ et, par suite, à la valeur (2), on verra que la
» somme combinatoire formant le dénominateur de A_μ, que nous ve-

---

(1) Le symbole $[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 F(x)]$ désigne évidemment le déterminant

$$\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 F(x) - \Delta^1 F(x)\, \Delta^2 \varphi(x).$$

Il est curieux de constater ici que Wronski se sert couramment des déterminants qu'il appelle *fonctions schins* (*A. S.*, t. III, p. 423).

(2) Le numérateur et le dénominateur sont encore des déterminants connus.

» nons de déterminer, se réduit à son premier terme, c'est-à-dire
» qu'on a

$$[\Delta^1 \varphi(x) \ldots \Delta^\mu \varphi(x)^{\mu|\xi}] = \Delta^1 \varphi(x) \ldots \Delta^\mu \varphi(x)^{\mu|\xi},$$

» et c'est là l'expression algorithmique de la loi générale des séries... »

2. Il me reste maintenant à montrer que les formules

$$\Delta^\mu F(x) = A_1 \Delta^\mu \varphi(x) + \ldots + A_\mu \Delta^\mu \varphi(x)^{\mu|\xi}, \tag{4}$$

$$A_\mu = \frac{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi} \ldots \Delta^{\mu-1} \varphi(x)^{\mu-1|\xi}\, \Delta^\mu F(x)]}{[\Delta^1 \varphi(x)\, \Delta^2 \varphi(x)^{2|\xi} \ldots \Delta^{\mu-1} \varphi(x)^{\mu-1|\xi}\, \Delta^\mu \varphi(x)^{\mu|\xi}]} \tag{5}$$

comprennent, comme cas particuliers : la première, la formule générale relative à la $\mu^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction de fonction; la seconde, la formule générale relative au changement de la variable indépendante.

On peut reprocher à la démonstration de ne pas tenir compte de ce que les termes qu'on néglige comme nuls séparément, dans le second membre des équations (4), sont en nombre infini.

Le passage direct des différences finies aux différentielles serait encore très critiquable; aussi M. A.-S. de Montferrier indique-t-il dans son Ouvrage([1]) la manière d'appliquer directement la méthode de Wronski à la série de Taylor, en s'appuyant sur la règle de L'Hôpital.

J'emploierai la marche suivante pour arriver assez rapidement aux équations qui se déduiraient des équations (4) par simple substitution des différentielles aux différences, sans qu'aucune série ait à intervenir dans le calcul.

3. *Lemme*. — Désignant par x une fonction quelconque d'une variable indépendante u et représentant, pour abréger, par

$$d^m \dot{x}^p$$

la différentielle $m^{\text{ième}}$ de x^p dans laquelle on supprime, une fois le développement effectué, tous les termes qui contiennent x en facteur, on a les identités suivantes :

$$d^m \dot{x}^m = 1.2.3\ldots m(d\dot{x})^m,$$
$$d^m \dot{x}^p = 0, \quad \text{si} \quad m < p.$$

([1]) *A. S.*, t. III, p. 265 et 266.

En effet, on sait que

$$d^m z^p = ((dz + dz + \ldots + dz))^m \equiv \sum \frac{P_m}{P_\alpha P_\beta \ldots} d^\alpha z \, d^\beta z \ldots,$$
$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = m,$$

α, β, ..., étant des entiers positifs qui peuvent s'annuler.

Dans le cas actuel,

$$d^m \dot{x}^m = \sum \frac{P_m}{P_\alpha P_\beta \ldots} d^\alpha \dot{x} \, d^\beta \dot{x} \ldots.$$

avec ceci en plus que, dans le calcul développé, il faut faire

$$d^0 \dot{x} \equiv \dot{x} = 0.$$

Ce résultat s'obtiendra encore en ne prenant que les solutions de

$$\alpha + \beta + \ldots = m,$$

pour lesquelles aucun des entiers positifs du premier membre ne sera nul.

Aucun des entiers positifs α, β, ... ne doit être nul et la somme doit être m; il est clair que tous seront égaux à 1. On n'aura que le terme correspondant à $\alpha = \beta = \ldots = 1$, c'est-à-dire

$$d^m \dot{x}^m = 1.2 \ldots m (dx)^m.$$

Je suppose maintenant qu'on ait à calculer

$$d^m \dot{x}^p \quad (m < p);$$

le nombre des entiers positifs α, β, ... étant plus grand que m, il y en aura toujours au moins $p - m$ nuls, d'où

$$d^m \dot{x}^p = 0 \quad (m < p).$$

4. *Dérivées d'une fonction de fonction.* — Je remarque d'abord qu'on n'a pas besoin de connaître la formule générale qui donne la dérivée $m^{\text{ième}}$ d'une fonction de fonction

$$y = f(u), \qquad u = \varphi(x)$$

pour être sûr que $\dfrac{d^m y}{dx^m}$ est un polynôme entier sans terme constant, soit par rapport aux m premières dérivées de u par rapport à x, soit par rapport aux dérivées $f^{(1)}(u), f^{(2)}(u), \ldots, f^{(m)}(u)$.

Supposant la loi vraie pour l'indice m, on a

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \mathrm{F}(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(m)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(m)})$$

F étant un polynôme entier. Le théorème des fonctions composées donne

$$\frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} = \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial f^{(1)}} f^{(2)} + \ldots + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial f^{(m)}} f^{(m+1)}\right) u^{(1)} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u^{(1)}} u^{(2)} + \ldots.$$

La loi s'étend à l'indice $m+1$; comme elle est vraie pour $m = 1$, elle est générale. Donc $\frac{d^m y}{dx^m}$ est un polynôme entier sans terme constant en $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(m)}$, les coefficients étant des polynômes entiers en $u^{(1)}$, $u^{(2)}, \ldots, u^{(m)}$.

Cela posé, si j'écris, pour abréger,

$$\mathrm{F}(x) \equiv y, \qquad \mathrm{F}^{(p)}(a) = 1.2\ldots p \mathrm{A}_p,$$

la formule préliminaire de Taylor peut s'écrire

$$y = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1(x-a) + \ldots + \mathrm{A}_m(x-a)^m + \mathrm{P},$$

$\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_m$ étant des nombres.

Supposant que y soit une fonction continue, ainsi que ses m premières dérivées, et que la $(m+1)^{\text{ième}}$ existe, dans l'intervalle de a à x, je prendrai pour définition de la fonction $\mathrm{P} \equiv \Phi(x)$, dans ce même intervalle, l'équation

$$\Phi(x) \equiv y - \mathrm{A}_0 - \mathrm{A}_1(x-a) - \ldots - \mathrm{A}_m(x-a)^m.$$

On démontrerait sans peine que $\Phi(x)$ et ses m premières dérivées par rapport à x sont continues et que la $(m+1)^{\text{ième}}$ dérivée existe dans l'intervalle de a à x.

Il est évident que, si l'on prend x comme variable indépendante, on a

$$\Phi(a) = \Phi^{(1)}(a) = \ldots = \Phi^{(m)}(a) = 0.$$

Si x n'est plus variable indépendante, $\Phi(x)$ est une fonction de fonction et, d'après la remarque par laquelle j'ai débuté, ses m premières dérivées par rapport à la variable indépendante sont fonction entière, sans terme constant, de $\Phi^{(1)}(x), \ldots, \Phi^{(m)}(x)$, les coefficients ne pouvant devenir infinis, puisqu'ils sont entiers en $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$. Il en résulte que, puisque

$$\Phi'(a) = \ldots = \Phi^{(m)}(a) = 0,$$

les m premières dérivées sont nulles, quelle que soit la variable indépendante; par suite, les m premières différentielles sont aussi nulles. On a donc les équations

$$(4\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} dy - A_1\ d(x \dot{-} a) \quad - \ldots - A_m\, d(x \dot{-} a)^m \ = 0, \\ d^2y - A_1\, d^2(x \dot{-} a) \quad - \ldots - A_m\, d^2(x \dot{-} a)^m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ d^m y - A_1\, d^m(x \dot{-} a) - \ldots - A_m\, d^m(x \dot{-} a)^m = 0, \end{array}\right.$$

le point placé au-dessus de $x - a$ indiquant qu'on donnera à x la valeur a pour laquelle $x - a = 0$. D'après le lemme, on pourrait se borner à poser

$$(4\ ter)\quad \left\{\begin{array}{l} d\,F(x) \quad = A_1\, d(x \dot{-} a), \\ d^2F(x) \quad = A_1\, d^2(x \dot{-} a) + A_2\, d^2(x \dot{-} a)^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ d^m\,F(x) = A_1\, d^m(x \dot{-} a) + \ldots + A_m\, d^m(x \dot{-} a)^m. \end{array}\right.$$

Ces équations se trouvent démontrées en considérant x, soit comme variable indépendante, soit comme fonction d'une variable indépendante. Comme on est habitué à désigner presque toujours par x la variable indépendante, il peut être commode d'écrire ainsi la dernière des équations (4 *bis*),

$$d^m y = A_1\, d^m(u - u_0) + \ldots + A_m\, d^m(u - u_0)^m,$$

$$A_p = \frac{1}{1.2\ldots p}\left(\frac{d^p y}{du^p}\right)_{u_0},$$

à condition de remplacer u par u_0 dans le développement de $d^m(u - u_0)^p$.

Prenant les dérivées par rapport à la variable indépendante x, au lieu des différentielles, et supposant

$$y = f(u), \qquad u = \varphi(x),$$

ce qui donne

$$A_p = \frac{1}{1.2\ldots p} f^{(p)}(u_0),$$

il vient

$$y = f(u), \qquad u = \varphi(x),$$

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^m y}{dx^m} &= [u \dot{-} u_0]^{(m)} f^{(1)}(u_0) + \frac{1}{1.2}[(u \dot{-} u_0)^2]^{(m)} f^{(2)}(u_0) + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{1.2\ldots m}[(u \dot{-} u_0)^m]^{(m)} f^{(m)}(u_0), \end{aligned} \right.$$

le point placé au-dessus de $u - u_0$ signifiant toujours qu'on doit remplacer $u^{(0)} \equiv u$ par u_0 dans le développement, ce qui équivaut à faire $u - u_0 = 0$.

Il me paraît superflu de rien ajouter pour prouver qu'en développant par la formule du binôme $(u - u_0)^p$, avant de prendre sa $m^{\text{ième}}$ dérivée, et remarquant que, dès lors, on peut sans ambiguïté remplacer u_0, qui est une valeur particulière mais quelconque par u, on retrouve la formule relative à la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction de fonction, telle que la donne M. Hermite à la page 62 de son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique :*

« $$y = f(u), \qquad u = \varphi(x),$$

$$(B) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= 1.2\ldots n \left[A_1 f'(u) + \frac{A_2}{1.2} f''(u) + \ldots \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_i}{1.2\ldots i} f^{(i)}(u) + \ldots + \frac{A_n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(u) \right], \\ A_i &= \frac{1}{1.2\ldots n}\left[(u^i)^{(n)} - \frac{i}{1}(u^{i-1})^{(n)} u + \frac{i(i-1)}{1.2}(u^{i-2})^{(n)} u^2 - \ldots \right], \end{aligned} \right.$$

le dernier terme de la quantité entre parenthèses étant

$$(-1)^{i-1}(u)^{(n)} u^{i-1}. \text{ »}$$

5. *Remarque.* — L'hypothèse consistant à faire $u = u_0$ dans le développement supposé effectué de $[(u - u_0)^p]^{(m)}$ que je représente, d'après Wronski, par un point

$$[(u \dot{-} u_0)^p]^{(m)},$$

revient tout simplement à développer $[u^p]^{(m)}$ et à ne conserver, dans ce développement, que les termes qui ne contiennent pas u en facteur.

En effet, d'après le théorème sur lequel je me suis déjà appuyé pour démontrer le lemme, on a, d'une part,

$$[(u-u_0)^p]^{(m)} = (((u-u_0)+(u-u_0)+\ldots+(u-u_0)))^m$$
$$= \sum \frac{P_m}{P_\alpha P_\beta \ldots}[u-u_0]^{(\alpha)}[u-u_0]^{(\beta)}\ldots,$$
$$\alpha+\beta+\ldots = m;$$

on a, d'autre part,

$$(u^p)^{(m)} = ((u+u+\ldots+u))^m = \sum \frac{P_m}{P_\alpha P_\beta \ldots} u^{(\alpha)} u^{(\beta)}\ldots;$$

or, la dérivée d'une différence étant la différence des dérivées des facteurs, on a

$$(u-u_0)^{(\alpha)} = u^{(\alpha)},$$

sauf pour $\alpha = 0$.

Comme on doit faire $u = u_0$ dans le premier développement, tout terme qui contiendra $(u-u_0)^0$ sera nul; si donc on supprime du second développement le terme correspondant $u^0 \equiv u$, on retrouvera identiquement les mêmes termes.

On peut donc écrire les formules obtenues précédemment

$$(4\,bis) \quad d^m y = A_1 d^m (x \dot{-} a) + A_2 d^m (x \dot{-} a)^2 + \ldots + A_m d^m (x \dot{-} a)^m,$$

$$(A) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = [u \dot{-} u_0]^{(m)} \frac{dy}{du} + \frac{1}{1.2}[(u \dot{-} u_0)^2]^{(m)} \frac{d^2 y}{du^2} + \ldots,$$

sous une nouvelle forme abrégée plus courte, quoique identique au fond,

$$d^m y = A_1 d^m \dot{x} + \ldots + A_m d^m \dot{x}^m,$$

$$(C) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = [\dot{u}]^{(m)} \frac{dy}{du} + \frac{1}{1.2}[\dot{u}^2]^{(m)} \frac{d^2 y}{du^2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots m}[\dot{u}^m]^{(m)} \frac{d^m y}{du^m},$$

« le point placé sur x ou sur u indiquant la valeur zéro qu'il faut donner à cette variable (¹) » après avoir, bien entendu, effectué le développement.

(¹) *A. S.*, t. III, p. 266.

6. *Changement de la variable indépendante.* — Les équations

$$(4\,bis)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1\,d(x \dot{-} a) \quad + \ldots + A_m\,d(x \dot{-} a)^m \quad = dy, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_1\,d^m(x \dot{-} a) + \ldots + A_m\,d^m(x \dot{-} a)^m = d^m y \end{array}\right.$$

déterminent les inconnues $A_1, A_2, \ldots, A_m$; on a donc, en remarquant que

$$A_m = \frac{1}{1.2\ldots m}\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)_{x=a},$$

la formule

$$\frac{1}{1.2.3\ldots m}\,\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} d(x \dot{-} a) & d(x \dot{-} a)^2 & \ldots & d(x \dot{-} a)^{m-1} & dy \\ d^2(x \dot{-} a) & d^2(x \dot{-} a)^2 & \ldots & d^2(x \dot{-} a)^{m-1} & d^2 y \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d^m(x \dot{-} a) & d^m(x \dot{-} a)^2 & \ldots & d^m(x \dot{-} a)^{m-1} & d^m y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d(x \dot{-} a) & d(x \dot{-} a)^2 & \ldots & d(x \dot{-} a)^{m-1} & d(x \dot{-} a)^m \\ d^2(x \dot{-} a) & d^2(x \dot{-} a)^2 & \ldots & d^2(x \dot{-} a)^{m-1} & d^2(x \dot{-} a)^m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d^m(x \dot{-} a) & d^m(x \dot{-} a)^2 & \ldots & d^m(x \dot{-} a)^{m-1} & d^m(x \dot{-} a)^m \end{vmatrix}}.$$

D'après le lemme (n° 3)

$$d^p(x \dot{-} a)^q = 0 \qquad \text{si} \qquad p < q,$$

il en résulte que, si l'on considère le dénominateur, tous les éléments situés au-dessus de la diagonale principale s'annulent; le déterminant se réduit donc à sa diagonale principale

$$d(x \dot{-} a)\, d^2(x \dot{-} a)^2 \ldots d^m(x \dot{-} a)^m.$$

D'après le même lemme, ceci devient

$$1.d(x - a).1.2.[d(x - a)]^2 \ldots (1.2.3\ldots m)\,[d(x - a)]^m;$$

or $d(x - a) \equiv dx$: il vient

$$1.1.2.1.2.3\ldots 1.2\ldots m\,(dx)^{1+2+3+\ldots+m}.$$

Quant au numérateur, on peut aisément le transformer de manière à remplacer $d^p(x \dot{-} a)^q$ par $d^p x^q$.

En effet, ce numérateur peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} dx & dx^2 - 2a\,dx & dx^3 - 3a\,dx^2 + 3a^2\,dx & \cdots \\ d^2x & d^2x^2 - 2a\,d^2x & d^2x^3 - 3a\,d^2x^2 + 3a^2\,d^2x & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d^mx & d^mx^2 - 2a\,d^mx & d^mx^3 - 3a\,d^mx^2 + 3a^2\,d^mx & \cdots \end{vmatrix}.$$

Il est visible que l'on ajoutera aux éléments de la seconde colonne les éléments correspondants de la première multipliés par $2a$; on multipliera ensuite les éléments de la première colonne par $-3a^2$, ceux de la deuxième déjà modifiée par $3a$, et l'on ajoutera à la troisième colonne, etc.

On obtient donc

$$\text{(D)}\qquad \frac{1}{1.2\ldots m}\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} dx & dx^2 & \cdots & dx^{m-1} & dy \\ d^2x & d^2x^2 & \cdots & d^2x^{m-1} & d^2y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d^mx & d^mx^2 & \cdots & d^mx^{m-1} & d^my \end{vmatrix}}{1.1.2.1.2.3\ldots(1.2\ldots m)\,(dx)^{1+2+3+\ldots+m}}.$$

Il faut faire $x = a$ dans le résultat; mais, comme a est une valeur quelconque, rien n'empêche de conserver x. L'analogie avec la formule (5) est évidente. On peut d'ailleurs employer les notations de Wronski, qui désigne les déterminants sous le nom de *fonctions schins* et les représente par conséquent par la lettre hébraïque ש,

$$\frac{1}{1^{\mu|1}}\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = \frac{ש(d^1x\, d^2x^2 \ldots d^{\mu-1}x^{\mu-1}\, d^\mu y)}{(1^{1|1}.1^{2|1}.1^{3|1}\ldots 1^{\mu-1|1}.1^{\mu|1})\,(dx)^{1+2+\ldots+\mu}} \quad (^1).$$

7. *Remarque*. — Si l'on veut faire disparaître un assez grand nombre de termes du déterminant (D), on peut employer la simplification indiquée pour les formules (4 *ter*) dans la Remarque du n° 5,

$$\text{(E)}\qquad \frac{1}{1.2\ldots m}\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} d\dot{x} & 0 & 0 & \cdots & 0 & dy \\ d^2\dot{x} & d^2\dot{x}^2 & 0 & \cdots & 0 & d^2y \\ \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ d^m\dot{x} & d^m\dot{x}^2 & d^m\dot{x}^3 & \cdots & d^m\dot{x}^{m-1} & d^my \end{vmatrix}}{1.1.2.1.2.3\ldots(1.2\ldots m)\,(dx)^{1+2+\ldots+m}}.$$

(1) *A. S.*, t. III, p. 381.

Si l'on applique la règle de Laplace, qui donne le développement d'un déterminant suivant des éléments des $(p-1)$ premières lignes, on obtient, en appliquant le lemme du n° 3, après des réductions faciles [1],

$$\frac{1}{1.2\ldots m}\,\frac{d^m y}{dx^m}=\sum_{p=1}^{p=m}\frac{\pm d^p y\begin{vmatrix} d^{p+1}\dot{x}^p & d^{p+1}\dot{x}^{p+1} & \ldots & 0\\ d^{p+2}\dot{x}^p & d^{p+2}\dot{x}^{p+1} & \ldots & 0\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & 0\\ d^m\dot{x}^p & d^m\dot{x}^{p+1} & \ldots & d^m\dot{x}^{m-1}\end{vmatrix}}{(1.2\ldots p)(1.2\ldots\overline{p+1})\ldots(1.2\ldots m)(dx)^{p+(p+1)\ldots+m}}.$$

Ce résultat a l'inconvénient, dans les exemples théoriques, de contenir l'hypothèse indiquée par $\dot{x}$; dans le développement explicite, il donnerait encore lieu à de nombreuses réductions. Je me borne à le signaler.

8. On voit que les formules (D) et (E), dues à Wronski, sont une conséquence immédiate de la formule relative à la dérivée d'ordre quelconque d'une fonction de fonction. Si la démonstration qui a été donnée de cette formule ne convient pas, il suffira de la remplacer par toute autre que l'on préférera.

Par exemple, on pourra partir du résultat (B) indiqué par M. Hermite dans son *Cours d'Analyse*. Le point de départ est, comme pour Wronski, la série de Taylor. J'ai déjà déduit (n° 4) cette expression (B) d'une autre expression équivalente, mais exprimée par une notation plus concise (A); cette forme (A) a plus spécialement servi pour exprimer d'une manière facile à retenir la formule du changement de variable. Je vais établir, en quelques mots, que, si l'on prenait (B) comme point de départ, on arriverait immédiatement à (A).

On suppose démontré que [2]

$$\text{« } y=f(u), \qquad u=\varphi(x);$$

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^n y}{dx^n}=1.2\ldots n\,[\mathrm{A}_1 f^{(1)}(u)+\ldots+\mathrm{A}_n f^{(n)}(u)],\\ &\mathrm{A}_i=\frac{1}{1.2\ldots n}\left[(u^i)^{(n)}-\frac{i}{1}(u^{i-1})^{(n)}u+\ldots+(-1)^{i-1}i(u)^{(n)}u^{i-1}\right]. \text{ »}\end{aligned}\right.$$

---

(1) *A. S.*, t. III, p. 427.

(2) *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, par M. Ch. Hermite, p. 62.

En vertu de ce théorème évident que la dérivée $i^{\text{ième}}$ d'une somme est la somme des dérivées $i^{\text{ièmes}}$ des différents termes, on a

$$\left[(u^i)^{(n)} - \frac{i}{1} u_0 (u^{i-1})^{(n)} + \ldots + (-1)^{i-1} \frac{i}{1} u_0^{i-1} (u)^{(n)}\right]$$
$$\equiv \left[u^i - \frac{i}{1} u_0 u^{i-1} + \ldots + (-1)^{i-1} \frac{i}{1} u_0^{i-1} u\right]^{(n)}$$
$$\equiv [(u-u_0)^i - u_0^i]^{(n)} \equiv [(u-u_0)^i]^{(n)},$$

et par suite, en remplaçant n par m,

$$(\text{A}) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^m y}{dx^m} &= [u \dot{-} u_0]^{(m)} \frac{dy}{du} \\ &+ \frac{1}{1.2} [(u \dot{-} u_0)^2]^{(m)} \frac{d^2 y}{du^2} + \ldots + \frac{1}{1.2.\ldots m} [(u \dot{-} u_0)^m]^{(m)} \frac{d^m y}{du^m}. \end{aligned} \right.$$

J'ai d'ailleurs montré, dans une remarque 5, que cette formule pouvait encore être écrite d'une manière plus condensée, bien qu'identique au fond :

$$(\text{C}) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = (\dot{u})^{(m)} \frac{dy}{du} + \frac{1}{1.2} (\dot{u}^2)^{(m)} \frac{d^2 y}{du^2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots m} (\dot{u}^m)^{(m)} \frac{d^m y}{du^m}.$$

9. Les formes (A), (B), (C) me paraissent faciles à retenir. C'est ce qui me les a fait adopter dans ce travail. Elles indiquent, sous leur forme abrégée, un développement facile à rendre explicite et qui d'ailleurs est déjà connu.

Le coefficient de $\frac{d^p y}{du^p}$ est $\frac{1}{1.2\ldots p} (\dot{u}^p)^{(m)}$. Développant, on tombe immédiatement sur le résultat indiqué par M. Bertrand [1] :

$$(\text{F}) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \sum 1.2\ldots m \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^{h_1}}{1.2\ldots h_1} \frac{\left(\frac{\frac{d^2 u}{dx^2}}{1.2}\right)^{h_2}}{1.2\ldots h_2} \cdots \frac{\left(\frac{\frac{d^\alpha u}{dx^\alpha}}{1.2\ldots\alpha}\right)^{h_\alpha}}{1.2\ldots h_\alpha} \frac{d^p y}{du^p};$$

$h_1, h_2, \ldots, h_\alpha$ étant des entiers positifs, tels que

$$h_1 + 2h_2 + \ldots + \alpha h_\alpha = m,$$
$$h_1 + h_2 + \ldots + h_\alpha = p.$$

---

(1) *Traité de Calcul différentiel*, par M. J. Bertrand, p. 309.

En effet, $(u^p)^{(m)}$ se déduit de $(u_1 u_2 \ldots u_p)^{(m)}$; par suite de l'hypothèse représentée par $\dot{u}$, il n'y a à considérer que les termes contenant les p quantités $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Soit donc un terme à coefficient

$$\frac{P_m}{P_1^{h_1} P_2^{h_2} \ldots P_\alpha^{h_\alpha}},$$

contenant h_1 premières puissances, h_2 secondes puissances, ..., h_α puissances α, de telle sorte que

$$\begin{aligned} h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \ldots + \alpha h_\alpha &= m, \\ h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_\alpha &= p. \end{aligned}$$

Il est nécessaire de remarquer que des termes qui sont distincts si l'on conserve les indices deviennent égaux si on les supprime; ce sont ceux qui se déduiraient du premier en permutant entre elles les h_1 quantités élevées à la première puissance, ainsi que les h_2 élevées à la deuxième puissance, ... Si donc on supprime les indices, le même terme est répété autant de fois qu'on peut former de permutations différentes avec les h_1 objets du premier groupe considérés comme pouvant être pris dans un ordre quelconque, avec les h_2 objets du second groupe pris abstraction faite de leur ordre, ... Un même terme est alors répété autant de fois qu'il y a de permutations avec répétition de p objets, h_1 étant égaux entre eux, h_2 autres égaux entre eux, ..., c'est-à-dire

$$\frac{P_p}{P_{h_1} P_{h_2} \ldots P_{h_\alpha}}.$$

Si donc on ne veut prendre chaque terme qu'une seule fois, il faudra multiplier son coefficient par ce nombre, ce qui donnera

$$\frac{P_m}{P_1^{h_1} \ldots P_\alpha^{h_\alpha}} \frac{P_p}{P_{h_1} P_{h_2} \ldots P_{h_\alpha}}.$$

Nous avons ici le développement de $(\dot{u}^p)^{(m)}$; or il ne s'agit dans (F) que de celui de $\frac{1}{P_p}(\dot{u}^p)^{(m)}$. On a donc

$$P_m \frac{\left(\frac{u^{(1)}}{P_1}\right)^{h_1}}{P_{h_1}} \frac{\left(\frac{u^{(2)}}{P_2}\right)^{h_2}}{P_{h_2}} \cdots,$$

comme il s'agissait de l'établir en partant directement des formules fondamentales.

10. La *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, de Wronski, fut « l'occasion d'une polémique très ardente », à la suite de laquelle « un silence convenu ou tacite s'établit autour du réformateur (¹) ». Les formules que je viens de rappeler n'attirèrent pas l'attention des savants. Depuis, quelques auteurs ont retrouvé, par des méthodes particulières, la dérivée $m^{\text{ième}}$ d'une fonction de fonction, sans que l'antériorité de Wronski, dont le Mémoire date de 1812, me paraisse contestable.

Je pourrais donc me borner à passer aux applications que j'ai cru devoir faire pour montrer que les notations employées par Wronski dès le début sont assez claires pour conduire directement à tous les résultats particuliers obtenus jusqu'à présent par des procédés élégants, mais variables d'un exemple à l'autre.

Je citerai cependant, pour compléter ce court historique, trois travaux remarquables, faits chacun à un point de vue différent.

11. Dans les *Nouvelles Annales* de M. Terquem (t. IX et XI) se trouve un article intitulé : *Sur la différentiation des fonctions de fonctions. Séries de Burmann, de Lagrange, de Wronski*, par M. A..., ancien élève de l'École Polytechnique. Cet article est assez intéressant pour que M. Combescure l'ait jugé digne de figurer en note dans sa traduction de la *Théorie des déterminants*, par M. Brioschi.

Les notations initiales sont les suivantes :

$$(\mathrm{F})\quad \begin{cases} z = \mathrm{F}(y), \qquad y = \varphi(x), \\ \dfrac{d^n z}{dx^n} = \mathrm{A}_1 \mathrm{F}'(y) + \mathrm{A}_2 \mathrm{F}''(y) + \ldots + \mathrm{A}_n \mathrm{F}^{(n)}(y), \\ \mathrm{A}_m = 1.2\ldots n \sum \dfrac{\left[\dfrac{\varphi'(x)}{1}\right]^{m_1}}{1.2\ldots m_1} \dfrac{\left[\dfrac{\varphi''(x)}{1.2}\right]^{m_2}}{1.2\ldots m_2} \cdots \dfrac{\left[\dfrac{\varphi^{(n)}(x)}{1.2\ldots n}\right]^{m_n}}{1.2\ldots m_n}, \end{cases}$$

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ étant des nombres entiers et positifs (y compris zéro),

(¹) *A. S.*, t. III, p. 482.

qui doivent satisfaire aux équations

$$m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n = n, \qquad m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m.$$

On reconnaît aussitôt la formule (F) déjà établie (nº 9).

Ensuite l'auteur, en vue du but spécial qu'il s'est proposé, ainsi que l'indique le titre, donne au résultat la forme suivante :

$$\text{(G)} \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \theta, \\ \dfrac{d^n z}{dx^n} = \dfrac{n}{1} F'(y) \dfrac{d^{n-1}(\theta)_0}{dh^{n-1}} + \dfrac{n(n-1)}{1.2} F''(y) \dfrac{d^{n-2}(\theta^2)_0}{dh^{n-2}} \\ \qquad + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} F'''(y) \dfrac{d^{n-3}(\theta^3)_0}{dh^{n-3}} + \ldots \end{cases}$$

(le zéro indiquant qu'on doit faire $h = 0$ après les différentiations).

Je vais montrer qu'on passe facilement de cette forme (G) à la forme (A) indiquée plus haut. Pour revenir aux notations que j'ai employées jusqu'ici, j'écris

$$\text{(G)} \begin{cases} y = f(u), \qquad u = \varphi(x) \\ \text{ou encore} \\ u = \varphi(x_0 + x), \qquad u_0 = \varphi(x_0) \\ (x_0 \text{ étant la valeur initiale arbitraire}), \\ \dfrac{u - u_0}{x} = \theta, \\ \dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{n}{1} \dfrac{d^{n-1}(\dot\theta)}{dx^{n-1}} \dfrac{dy}{du} + \dfrac{n(n-1)}{1.2} \dfrac{d^{n-2}(\dot\theta^2)}{dx^{n-2}} \dfrac{d^2 y}{du^2} + \ldots. \end{cases}$$

Or on a, par la formule de Maclaurin,

$$(u - u_0)^p = (u \dot{-} u_0)^p + \frac{x}{1}[(u \dot{-} u_0)^p]^{(1)} + \ldots + \frac{x^p}{1.2\ldots p}[(u \dot{-} u_0)^p]^{(p)} + \ldots.$$

D'après le lemme du nº 3, les p premiers termes du second membre s'annulent; il reste

$$(u - u_0)^p = \frac{x^p}{1.2\ldots p}[(u - u_0)^p]^{(p)} + \frac{x^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)}[(u - u_0)^p]^{(p+1)} + \ldots.$$

par suite

$$\theta^p \equiv \frac{(u-u_0)^p}{x^p} = \frac{1}{1.2\ldots p}[(u \dot{-} u_0)^p]^{(p)} + \frac{x}{1.2\ldots(p+1)}[(u \dot{-} u_0)^p]^{(p+1)} + \ldots,$$

$$(\theta^p)^{(n-p)} = \frac{1.2\ldots(n-p)}{1.2\ldots n}[(u \dot{-} u_0)^p]^{(n)} + \beta x + \gamma x^2 + \ldots;$$

d'où, en faisant $x = 0$,

$$(\dot{\theta}^p)^{(n-p)} = \frac{1.2\ldots(n-p)}{1.2\ldots n}[(u \dot{-} u_0)^p]^{(n)}.$$

Alors le coefficient de $\frac{d^p y}{du^p}$ dans (G) étant

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}(\dot{\theta}^p)^{(n-p)}$$

peut encore s'écrire, après réductions faciles,

$$\frac{1}{1.2\ldots p}[(u \dot{-} u_0)^p]^{(n)} \equiv \frac{1}{1.2\ldots p}(\dot{u}^p)^{(n)},$$

ce qu'il s'agissait d'établir.

L'auteur termine son article par la démonstration du résultat suivant :

$$« \ \theta = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

$$\frac{1}{n!}\,\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}[\theta^{-n}\,\mathrm{F}'(x+h)]_{h=0} = \frac{[\Sigma \pm \mathrm{D}^1\varphi(x)\,\mathrm{D}^2\varphi(x)^2\ldots\mathrm{D}^{n-1}\varphi(x)^{n-1}\,\mathrm{D}^n\,\mathrm{F}(x)]}{1!\,2!\,3!\ldots n!\,[\mathrm{D}\,\varphi(x)]^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

Ce beau théorème est dû à M. Wronski (*Philosophie de la Technie*, 2e Section, p. 110). »

Il semble donc que l'auteur se soit tout simplement proposé d'obtenir par une démonstration suivie un théorème déduit par l'inventeur de deux résultats obtenus d'une manière indépendante, comme cas particuliers de formules beaucoup plus générales.

J'ai déjà indiqué que c'est comme déduction de la « Loi suprême ou universelle de l'Algorithmie » que Wronski présente sa loi fondamentale des séries du n° 1, qui conduit immédiatement, comme on l'a vu plus haut, à

$$\frac{1}{m!}\,\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\Sigma \pm (d^1x\,d^2x^2\ldots d^{m-1}x^{m-1}\,d^m y)}{1!\,2!\,3!\ldots m!\,(dx)^{1+2+3+\ldots+m}}.$$

Passant ensuite de la *génération technique systématique* [1] à la *comparaison technique* [2], le philosophe résout le *problème universel*, dont la formule s'établirait rapidement par les méthodes employées en Calcul différentiel pour en établir « le cas le plus particulier », la série de Lagrange. Or, étant donnée une fonction quelconque

$$y = f(x) = F(u), \qquad x = \varphi(u),$$

si je pose $\dfrac{x - x_0}{u - u_0} = \theta$, d'où

$$u = u_0 + (x - x_0)\theta^{-1},$$

j'ai, en appliquant la loi de Lagrange et en remarquant que, $\Phi(x)$ étant une fonction quelconque de x,

$$\left[\frac{d^m \Phi(x)}{dx^m}\right]_{x=x_0} \equiv \left[\frac{d^m \Phi(x_0 + h)}{dh^m}\right]_{h=0} \equiv \left[\frac{d^m \Phi(x)}{d(x - x_0)^m}\right]_{x=x_0},$$

l'égalité qui suit :

$$\left[\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right]_{x=x_0} = \left\{\frac{d^{m-1}}{du^{m-1}}\left[\theta^{-m}\frac{d\,F(u)}{du}\right]\right\}_{u=u_0}.$$

Posant $u = u_0 + h$ et appliquant de nouveau la remarque qui vient d'être faite, on trouve, en supprimant les indices de u_0 et x_0 qui sont inutiles (u_0 et x_0 étant des valeurs initiales quelconques),

$$\text{(H)} \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \left\{\frac{d^{m-1}}{dh^{m-1}}\left[\theta^{-m} F'(u + h)\right]\right\}_{h=0}.$$

Égalant les deux valeurs ainsi trouvées pour $\dfrac{d^m y}{dx^m}$, on obtient, avec des notations très peu différentes, le théorème énoncé plus haut.

Il est donc visible que, contrairement à l'auteur de l'article que je viens d'analyser, j'ai conservé à part les deux résultats qu'il cherche à relier l'un à l'autre.

J'ai déjà montré l'utilité de la formule

$$\text{(D)} \qquad \frac{1}{m!}\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\Sigma \pm (d'x\, d^2x^2 \ldots d^m y)}{1! \ldots m!\,(dx)^{1+2+\ldots+m}}.$$

---

(1) *A. S.*, t. III, p. 358-391.

(2) *A. S.*, t. III, p. 391-429.

Je retrouverai, dans le Chapitre III, la formule

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{d^{m-1}}{dh^{m-1}}\left[\theta^{-m}\,\mathrm{F}'(u \dotplus h)\right]$$

sous la forme

$$\text{(H)}\qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{d^{m-1}}{dh^{m-1}}\left[\left(x' + \frac{h}{1.2}x'' + \ldots\right)^{-m}\left(y' + \frac{h}{1}y'' + \ldots\right)\right]_{h=0};$$

on verra alors tout le parti que je tire de cette formule très simple au point de vue du développement explicite de la formule générale du changement de la variable indépendante.

12. Au moment d'achever cette nouvelle rédaction, je trouve, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* deux articles par M. E. Cesaro, intitulés : *Dérivées de fonctions de fonctions* (janvier 1885); *Note sur le calcul isobarique* (février 1885).

Il n'y a donc pas à s'étonner que la formule (F) soit présentée sous cette forme :

« *Formule générale :*

$$(9)\qquad \frac{1}{p!}\frac{d^p y}{dx^p} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left[\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu y}{du^\nu}\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{\nu}\left(\frac{1}{r!}\frac{d^r u}{dx^r}\right)\right].$$

Pour expliquer le sens de cette formule, rappelons d'abord que, ayant toutes les solutions entières et positives de l'équation

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_m = p,$$

on appelle *algorithme isobarique* d'une fonction $f(r)$ et l'on désigne par $\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m} f(r)$ la somme de tous les produits analogues à

$$f(r_1)\,f(r_2)\ldots f(r_m). \text{ »}$$

Cette formule est si peu différente de la formule (F) indiquée plus haut (n° 9), que je crois pouvoir me dispenser d'insister sur ce point.

Le rapprochement que l'on constate ici entre la formule relative aux dérivées d'une fonction de fonction (n° 4) et le calcul isobarique est confirmé par ces paroles de M. E. Cesaro (p. 49) :

« La relation (9) comprend comme cas très particulier, pour différentes formes de la fonction φ, toutes les formules contenues dans notre article *Algorithme isobarique* et démontrées par une autre voie dans le *Journal de Battaglini.* »

La démonstration de l'auteur, qui « ne suppose aucunement que les fonctions considérées soient développables par la formule de Taylor », est très simple; avec les notations que j'ai adoptées, elle s'établit ainsi.

Supposons qu'on ait démontré la formule vraie pour l'indice m et qu'on veuille l'étendre à l'indice $(m+1)$. On sait que

$$(\text{C})\quad \frac{d^m y}{dx^m} = \ldots + \frac{1}{1.2\ldots(p-1)}(\dot{u}^{p-1})^{(m)}\frac{d^{p-1}y}{du^{p-1}} + \frac{1}{1.2\ldots p}(\dot{u}^p)^{(m)}\frac{d^p y}{du^p} + \ldots$$

Prenant les dérivées des deux membres par rapport à x, il suffit d'établir que le coefficient de $\frac{d^p y}{du^p}$ deviendra

$$\frac{1}{1.2\ldots p}(\dot{u}^p)^{(m+1)}.$$

Pour faire le calcul, supprimons partiellement (là où l'on aura à effectuer le développement) l'hypothèse indiquée par le point placé au-dessus de $\dot{u}$. Le terme en $\frac{d^p y}{du^p}$ proviendra de

$$\frac{1}{1.2\ldots(p-1)}(\dot{u}^{p-1})^{(m)}\frac{d\left(\frac{d^{p-1}y}{du^{p-1}}\right)}{du}\frac{du}{dx} + \frac{1}{1.2\ldots p}\frac{d[(u^p)^{(m)}-\ldots]}{dx}\frac{d^p y}{du^p};$$

d'où

$$\frac{1}{p!}\left[p(\dot{u}^{p-1})^{(m)}u' + (\dot{u}^p)^{(m+1)} - \frac{p}{1}(\dot{u}^{p-1})^{(m)}u' - \frac{p}{1}(\dot{u}^{p-1})^{(m+1)}\dot{u} - \ldots\right]\frac{d^p y}{du^p}.$$

Supprimant tous les termes qui contiennent $\dot{u}$ en facteur, puisque $\dot{u} = 0$ et que ces termes sont en nombre fini, le cofficient de $\frac{d^p y}{du^p}$ est

$$\frac{1}{p!}[p(\dot{u}^{p-1})^{(m)}u' + (\dot{u}^p)^{(m+1)} - p(\dot{u}^{p-1})^{(m)}u'] \equiv \frac{1}{p!}(\dot{u}^p)^{(m+1)}.$$

On voit qu'ici la même question est traitée avec des notations sensiblement différentes de celles indiquées plus haut. Mon but, qui est d'appliquer des formules où l'on soit guidé par l'habitude qu'on a des procédés ordinaires des Calculs différentiel et intégral, s'éloigne notablement de celui de M. E. Cesaro qui s'occupe plus spécialement de développer les méthodes et les applications du calcul isobarique.

L'importance de ce nouveau calcul est nettement définie par l'auteur, qui indique en même temps les sources principales auxquelles on peut recourir dans cette étude. La question est exposée mieux que je ne pourrais le faire.

Je me bornerai à quelques réflexions qui me paraissent à leur vraie place dans un travail destiné à rendre pratiques des formules de Wronski. Le terme *algorithme isobarique* fait songer à ces phrases par lesquelles M. de Montferrier termine la première page de son *Encyclopédie :*

« Nous devons faire observer ici que le nom d'*Algorithmie* a été donné par Wronski à la Science générale des nombres. Avant les travaux de ce savant, on n'avait point désigné par un nom collectif les diverses branches de cette Science qu'il a, le premier, ramenées à une unité synthétique. Le nom d'*Algorithmie* provient d'*algorithme*, qui signifie *calcul.* »

« Il est curieux, remarque M. E. Cesaro, de constater que tous les inventeurs, en agissant les uns à l'insu des autres, ont été d'accord dans le choix de l'algorithme isobarique composé comme base du calcul des partitions... On sait d'ailleurs que le même algorithme, précédemment étudié par Wronski, sous le nom de *fonction aleph,* a été l'objet des recherches de beaucoup de géomètres. »

13. Dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* de décembre 1881 se trouve le compte rendu suivant d'un article publié dans l'*American Journal of Mathematics pure and applied* (t. III, 1879) :

« *Glashan* (*J.-C.*). — Sur le changement de la variable indépendante (190-191).

« Soient

$$u = f(y), \qquad x = \varphi(y)$$

et

$$x_n = \frac{1}{n!} D_y^n x, \qquad u_n = \frac{1}{n!} D_y^n u.$$

Si l'on désigne par S_m^n la somme des termes de poids m dans le développement de

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)^n,$$

on aura (d'après Cauchy)

$$u_n = S_n^1 D_x u + S_n^2 \frac{D_x^n u}{2!} + \ldots + S_n^n \frac{D_x^n u}{n!}.$$

Quant aux valeurs de

$$D_x u, \quad \frac{1}{2!} D_x^2 u, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n!} D_x^n u,$$

on aura

$$D_x u = \frac{u_1}{x_1}, \qquad \frac{1}{2!} D_x^2 u = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_2 \end{vmatrix}}{x_1 x_1^2},$$

$$\text{(E)} \qquad \frac{1}{n!} D_x^n u = \frac{\begin{vmatrix} S_1^1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & u_1 \\ S_2^1 & S_2^2 & 0 & \ldots & 0 & u_2 \\ S_3^1 & S_3^2 & S_3^3 & \ldots & 0 & u_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{n-1}^1 & S_{n-1}^2 & S_{n-1}^3 & \ldots & S_{n-1}^{n-1} & u_{n-1} \\ S_n^1 & S_n^2 & S_n^3 & \ldots & S_n^{n-1} & u_n \end{vmatrix}}{x_1 x_1^2 x_1^3 \ldots x_1^{n-1} x_1^n}. \text{»}$$

On reconnaît ici, à part les notations, la formule (E) démontrée plus haut (n° 7). La formule de Cauchy, qui a servi de point de départ, n'est autre chose que la formule (C).

Au risque de rendre les résultats moins intelligibles, on arrive à la formule qui contient le plus de zéros; et, au lieu de la notation $(x^p)^{(m)}$, qui rappelle l'énoncé du problème, on prend la notation isobarique S_m^p qui ne me paraît pas faire image comme la première. D'ailleurs, sans m'occuper plus longtemps de comparer les différentes formes sous lesquelles ont pu se présenter les résultats précédents, je me bornerai à remarquer combien est claire et concise la forme adoptée par Wronski et reproduite par M. A.-S. de Montferrier,

$$\frac{1}{1^{m|1}} \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\mathfrak{w}(d^1 x\, d^2 x^2 \ldots d^{m-1} x^{m-1}\, d^m y)}{(1^{1|1}\, 1^{2|1} \ldots 1^{m|1})\,(dx)^{\frac{m(m+1)}{2}}}.$$

Exposition.

14. La discussion détaillée que je viens de faire rappelle qu'il existe des formules très générales. Mais on peut être tenté d'admettre que des formules par trop générales cessent de devenir pratiques. C'est cette idée que je désire combattre.

Dans le Chapitre I, je montrerai que la formule générale (D) du changement de variable peut résoudre simplement certaines questions, malgré son apparente complication.

La formule qui donne la dérivée d'une fonction de fonction est relativement courte. On s'explique alors pourquoi (étant donné qu'on a une fonction de x et qu'on veut introduire une nouvelle variable indépendante u), il est souvent commode d'imaginer d'abord que la fonction ait été exprimée en fonction de u et de remplacer ensuite u par sa valeur en fonction de x. Le Chapitre II sera consacré au développement des conséquences de cette idée.

Enfin le troisième et dernier Chapitre sera destiné à montrer l'avantage qu'il peut y avoir à se servir, dans certains cas, des intégrales définies prises entre limites imaginaires.

15. J'ai cherché à obtenir des résultats faciles à écrire, non seulement pour quelques cas particuliers bien connus

$$y = f(x), \qquad x = e^u, \qquad x = \mathrm{L}\,u, \qquad x = u^{-1}, \qquad x = u^{\frac{1}{2}},$$

mais aussi pour toutes les fonctions élémentaires d'un usage courant

$$x = u^\mu, \qquad x = \cos u, \qquad x = \operatorname{tang} u, \qquad x = \operatorname{arc}\cos u, \qquad x = \operatorname{arc}\operatorname{tang} u.$$

L'expression, soit symbolique, soit effective, de $\frac{d^m y}{dx^m}$ en fonction de $x', x'', \ldots; y', y'', \ldots$ se présente comme simple application de la formule du binôme. Le développement des coordonnées x et y d'une courbe plane suivant les puissances croissantes de l'arc (le rayon de courbure étant une fonction supposée connue de cet arc) s'obtient avec la plus grande facilité et me paraît suffire pour établir l'utilité géométrique des formules générales.

Il est inutile d'insister davantage. Je passe aux applications.

CHAPITRE I.

16. J'ai démontré les formules

$$
(\mathrm{D}) \quad \frac{1}{1.2\ldots m}\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} (x)^{(1)} & (x^2)^{(1)} & \ldots & (x^{m-1})^{(1)} & y^{(1)} \\ (x)^{(2)} & (x^2)^{(2)} & \ldots & (x^{m-1})^{(2)} & y^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x)^{(m)} & (x^2)^{(m)} & \ldots & (x^{m-1})^{(m)} & y^{(m)} \end{vmatrix}}{1.1.2.1.2.3\ldots(1.2\ldots m)\,[(x)^{(1)}]^{1+2+3+\ldots+m}},
$$

$$
(\mathrm{E}) \quad \frac{1}{1.2\ldots m}\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} (\dot{x})^{(1)} & 0 & 0 & \ldots & 0 & y^{(1)} \\ (\dot{x})^{(2)} & (\dot{x}^2)^{(2)} & 0 & \ldots & 0 & y^{(2)} \\ \ldots & \ldots & . & \ldots & . & \ldots \\ (\dot{x})^{(m)} & (\dot{x}^2)^{(m)} & (\dot{x}^3)^{(m)} & \ldots & (\dot{x}^{m-1})^{(m)} & y^{(m)} \end{vmatrix}}{1.1.2.1.2.3\ldots(1.2\ldots m)\,(x^{(1)})^{1+2+\ldots+m}}.
$$

On est tenté de croire que ces expressions générales constituent deux théorèmes très intéressants, mais inapplicables; il suffirait d'un seul exemple pour prouver le contraire. J'en donnerai deux, et je ferai observer que le premier me fournit une remarque très curieuse.

C'est précisément en traitant par une méthode très ingénieuse ce changement de variable, défini par

$$y = f(x), \qquad x = e^u,$$

que M. Bertrand, dans son *Traité* classique *de Calcul différentiel et intégral*, insiste sur cette idée très importante que souvent les méthodes trop générales donneraient lieu à des calculs prolixes, là où des procédés particuliers conduisent rapidement au résultat. Les théorèmes connus semblaient donc impuissants à résoudre une question presque nécessaire.

Cet état d'infériorité de la théorie algébrique n'était qu'apparent. La formule (D) de Wronski, malheureusement laissée dans l'oubli, était capable de donner la solution avec autant de facilité que si elle eût été créée dans ce seul but.

17. *Premier exemple.* — Il s'agit de démontrer que, si l'on substitue

à x une nouvelle variable indépendante, définie par l'équation

$$x = e^u,$$

on obtient un résultat qui peut s'écrire sous cette forme symbolique,

$$\text{« } x^n \frac{d^n y}{dx^n} = \left[\frac{d}{du} - (n-1)\right]\left[\frac{d}{du} - (n-2)\right]\cdots\left[\frac{d}{du} - 1\right]\frac{dy}{du} \text{ »}$$

(*Traité de Calcul différentiel*, par J. Bertrand, 169-171).

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} (x)^{(1)} & (x^2)^{(1)} & \cdots & (x^{n-1})^{(1)} & y^{(1)} \\ (x)^{(2)} & (x^2)^{(2)} & \cdots & (x^{n-1})^{(2)} & y^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x)^{(n)} & (x^2)^{(n)} & \cdots & (x^{n-1})^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}$$

devient ici

$$\begin{vmatrix} e^u & 2e^{2u} & \cdots & (n-1)\,e^{(n-1)u} & y^{(1)} \\ e^u & 2^2 e^{2u} & \cdots & (n-1)^2 e^{(n-1)u} & y^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^u & 2^n e^{2u} & \cdots & (n-1)^n e^{(n-1)u} & y^{(n)} \end{vmatrix}.$$

On peut mettre e^u en facteur dans la première colonne, e^{2u} dans la deuxième, etc. Remarquant d'ailleurs que le déterminant est une fonction linéaire des éléments de la dernière colonne $y^{(1)} = \frac{dy}{du}$, $y^{(2)} = \frac{d^2y}{du^2}, \ldots$, et qu'on peut sans danger écrire symboliquement $\frac{dy}{du}$, $\left(\frac{dy}{du}\right)^2, \ldots$, à condition de remplacer, dans le résultat final, $\left(\frac{dy}{du}\right)^\alpha$ par $\frac{d^\alpha y}{du^\alpha}$, il vient

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(e^u)^{1+2+\ldots+(n-1)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & (n-1) & \frac{dy}{du} \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & (n-1)^2 & \left(\frac{dy}{du}\right)^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1^n & 2^n & 3^n & \cdots & (n-1)^n & \left(\frac{dy}{du}\right)^n \end{vmatrix}}{1.1.2.1.2.3\ldots(1.2\ldots n)\,[e^u]^{1+2+\ldots+(n-1)+n}}.$$

Le numérateur est un déterminant de Vandermonde; il est égal à

$$1.1.2.1.2.3\ldots1.2\ldots(n-1)\left[\frac{dy}{du} - (n-1)\right]\cdots\left[\frac{dy}{du} - 1\right]\frac{dy}{du}.$$

Alors, par des réductions évidentes, on obtient [en remplaçant $(e^u)^n$ par x^n et faisant passer ce terme dans le premier membre]

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = \left[\frac{d}{du} - (n-1)\right]\left[\frac{d}{du} - (n-2)\right]\cdots\left[\frac{d}{du} - 1\right]\frac{dy}{du}.$$

18. *Deuxième exemple :*

$$x = u^\mu,$$

μ étant un exposant quelconque, positif ou négatif.

On a, par la formule (D),

$$\frac{1}{1.2\ldots m}\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} \mu u^{\mu-1} & 2\mu u^{2\mu-1} & \ldots & (m-1)\mu u^{(m-1)\mu-1} & \dfrac{dy}{du} \\ \mu(\mu-1)u^{\mu-2} & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix}}{1.1.2\ldots1.2\ldots m(\mu u^{\mu-1})^{1+2+\ldots+m}}.$$

Si l'on multiplie par u les éléments de la première ligne du déterminant, par u^2 ceux de la deuxième, etc., ce qui revient à multiplier le déterminant par $u^{1+2+\ldots+m}$, on peut mettre u^μ en facteur dans la première colonne, $u^{2\mu}$ en facteur dans la deuxième, etc.

Après réductions évidentes, il vient

$$\frac{1}{1.2\ldots m}\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} \mu & 2\mu & \ldots & u\dfrac{dy}{du} \\ \mu(\mu-1) & 2\mu(2\mu-1) & \ldots & u^2\dfrac{d^2y}{du^2} \\ \mu(\mu-1)(\mu-2) & 2\mu(2\mu-1)(2\mu-2) & \ldots & u^3\dfrac{d^3y}{du^3} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix}}{1.1.2\ldots1.2\ldots m\,\mu^{1+2+\ldots+m}\,u^{\mu m}}.$$

Le résultat est donc de la forme

$$\frac{d^m y}{dx^m} = c_0 u^{m-m\mu}\frac{d^m y}{du^m} + c_1 u^{m-1-m\mu}\frac{d^{m-1}y}{du^{m-1}} + \ldots$$

ou encore

$$x^m\frac{d^m y}{dx^m} = c_0 u^m \frac{d^m y}{du^m} + c_1 u^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{du^{m-1}} + \ldots,$$

$c_0, c_1, \ldots$ étant des coefficients numériques.

Ces coefficients s'expriment en fonction de certains déterminants dont la loi de formation est très simple; si on les retrouve plus tard sous forme développée, on aura par cela même le développement de ces déterminants.

19. Quoique le déterminant (E) contienne un grand nombre de zéros, son développement direct paraît impraticable; c'est pourquoi j'ai cru bien faire de m'adresser à la théorie des intégrales définies prises entre des limites imaginaires (Chap. III) pour obtenir avec la plus grande facilité le développement explicite, sans terme inutile, de $\frac{d^m y}{dx^m}$ en fonction de $x', x'', \ldots, x^{(m)}, y', y'', \ldots, y^{(m)}$.

J'avais achevé tous les calculs de ce Chapitre III, quand l'étude attentive du travail déjà analysé plus haut (n° 11), et intitulé : *Sur la différentiation des fonctions de fonctions, Séries de Burmann, de Lagrange, de Wronski*, par M. A... », m'a signalé un rapprochement inattendu entre des méthodes en apparence si différentes. L'auteur, comme je l'ai dit, termine ainsi :

$$\text{« } \theta = \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h},$$

$$\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}[\theta^{-n}F'(x+h)] = \frac{\Sigma[\pm D^1\varphi(x)\,D^2\varphi(x)^2\ldots D^{n-1}\varphi(x)^{n-1}\,D^n F(x)]}{1!\,2!\ldots n!\,[D\,\varphi(x)]^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

» Ce beau théorème est dû à M. Wronski (*Philosophie de la Technie*, Section II, p. 110). »

Ce qui n'est pour l'auteur qu'un beau théorème devient pour nous une marche à suivre pour arriver au développement, sans terme inutile, du déterminant (D) de Wronski.

20. Il est facile de comprendre quelle doit être la démonstration à adopter.

On commence par remplacer dans le déterminant les quantités $\varphi(x)$, $\varphi(x)^2, \ldots$ par $\theta, \theta^2, \ldots$ au moyen de la formule établie plus haut (11)

$$(\dot\theta^p)^{(n-p)} = \frac{1.2\ldots(n-p)}{1.2\ldots n}\{\varphi[(\dot x)]^p\}^{(n)}.$$

On remarque ensuite que de

$$(\mathrm{H}) \qquad \frac{1}{n!}\frac{d^n\mathrm{F}(x)}{d\varphi(x)^n} = \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}[\theta^{-n}\mathrm{F}'(x+h)]_{h=0}$$

on déduit, en observant que

$$\frac{d^m\mathrm{F}(x)}{dx^m} = \frac{d^m\mathrm{F}(x+h)_0}{dh^m},$$

le développement

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n\mathrm{F}(x)}{d\varphi(x)^n} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}}\mathrm{F}'(x) + \frac{n-1}{1}\frac{d^{n-2}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-2}}\mathrm{F}''(x) + \ldots\right].$$

On est donc amené à multiplier les éléments de la dernière colonne du déterminant, qui sont $\mathrm{F}'(x)$, $\mathrm{F}''(x)$, ..., respectivement par $\frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}}$, $\frac{n-1}{1}\frac{d^{n-2}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-2}}$, ...

Je renvoie, pour le détail du calcul, à l'article de M. A..., d'où il est tiré.

21. Si j'avais trouvé au début cette formule (H) dans Wronski, au lieu de ne la reconnaître qu'après des applications multipliées, je n'en aurais très probablement rien su tirer. J'en donnerai pour preuve cet extrait de l'*Encyclopédie mathématique ou Exposition complète de toutes les branches des Mathématiques d'après les principes de la Philosophie des Mathématiques de Hoëné Wronski,* par A.-S. de Montferrier (t. III, p. 416-417-418).

« Or, lorsqu'on donne à la variable x une valeur quelconque a déterminée par la relation $\varphi(x) = 0$, les premiers membres ... sont les coefficients A_0, A_1, A_2, ... de la série primitive

$$(52) \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1\varphi(x) + \mathrm{A}_2\varphi(x)^2 + \ldots.$$

Ainsi ces coefficients auront pour expression générale, dans ce même cas de $\varphi(a) = 0$,

$$(\mathrm{H}) \qquad (51) \quad \mathrm{A}_\mu = \frac{1}{1^{\mu|1}}\left(\frac{d^{\mu-1}[\dot{\Theta}^{-\mu}\mathrm{F}(x+\dot{z})^{(1)}]}{dz^{\mu-1}}\right);$$

mais, pour rendre cette expression indépendante de la variable z, qu'on doit faire égale à zéro après les différentiations, il suffit d'observer qu'en donnant à la variable x la valeur a et à la variable z la valeur zéro ou $x - a$, on a évidemment

$$\frac{d^\rho \Theta^n}{dz^\rho} = \left(\frac{d^\rho \left(\frac{\varphi(x+z) - \varphi(x)}{z} \right)^n}{dz^\rho} \right) = \left(\frac{d^\rho \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x} \right)^n}{dx^\rho} \right).$$

Ainsi, dans le cas de $\varphi(a) = 0$, qui est celui des valeurs des coefficients de la série (51), l'expression se réduit définitivement à

$$\text{(H)} \qquad (54) \quad A_\mu = \frac{1}{1^{\mu|1}} \left\{ \frac{d^{\mu-1}\left(\left(\frac{x-a}{\varphi(x)} \right)^\mu \frac{d\,F(x)}{dx} \right)}{dx^{\mu-1}} \right\}_{x=a},$$

en indiquant par l'indice $(x = a)$ qu'il faut faire $x = a$, après les différentiations....

» Nous ferons observer que cette construction (54) des coefficients de la série primitive (52) présente déjà une anticipation sur le développement définitif, que donne la loi de Wronski

$$\text{(E)} \qquad (47) \quad A_\mu = \frac{\text{Ʊ}[d^1 \varphi(\dot{x})\, d^2 \varphi(\dot{x})^2\, d^3 \varphi(\dot{x})^3 \ldots d^{\mu-1} \varphi(\dot{x})^{\mu-1}\, d^\mu F(\dot{x})]}{\text{Ʊ}[d^1 \varphi(\dot{x})\, d^2 \varphi(\dot{x})^2\, d^3 \varphi(\dot{x})^3 \ldots d^{\mu-1} \varphi(\dot{x})^{\mu-1}\, d^\mu \varphi(\dot{x})^\mu]}$$

des expressions initiales

$$(50) \qquad \left(\frac{d^\mu F(x)}{dy^\mu} \right) = \left(\frac{d^{\mu-1}[\dot{\Theta}^{-\mu} F(x+z)^{(1)}]}{dz^{\mu-1}} \right),$$

car on obtient immédiatement une génération relative de ces coefficients (50) en développant le coefficient général ci-dessus par la loi

$$(19) \qquad d^m(Fx\, fx) = Fx\, d^m f(x) + m\, dFx\, d^{m-1} fx + \ldots,$$

qui est la loi fondamentale du Calcul différentiel. On a, en effet,

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} A_\mu &= \frac{1}{1^{\mu|1}} \frac{d^{\mu-1}\left[\left(\frac{x-a}{\varphi(x)} \right)^\mu \frac{d\,F(x)}{dx} \right]}{dx^{\mu-1}} \\ &= \frac{1}{1^{\mu|1}} \left\{ \frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu} \left(\frac{x-a}{\varphi(x)} \right)^\mu + \frac{\mu-1}{1} \frac{d^{\mu-1} F(x)}{dx^{\mu-1}} \frac{d\left(\frac{x-a}{\varphi(x)} \right)^\mu}{dx} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2} \frac{d^{\mu-2} F(x)}{dx^{\mu-2}} \frac{d^2\left(\frac{x-a}{\varphi(x)} \right)^\mu}{dx^2} + \ldots \right\}; \end{aligned} \right.$$

mais ce développement dépend d'une fonction auxiliaire $\frac{x-a}{\varphi(x)}$, de sorte que, pour arriver à la génération absolue du coefficient général A_μ, c'est-à-dire pour n'avoir plus dans ce développement (55) que les derniers termes ou les vrais éléments de la génération en question, il faudrait encore développer les différentielles

$$d\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^\mu, \quad d^2\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^\mu, \quad d^3\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^\mu, \quad \ldots;$$

et, ce qui n'est pas le moindre inconvénient, comme, en faisant $x=a$, après les différentiations, on obtient des valeurs indéterminées $\frac{0}{0}$, il serait encore nécessaire, par des différentiations réitérées des numérateurs et des dénominateurs, d'arriver enfin aux derniers termes ou aux éléments $d\varphi(x)$, $d^2\varphi(x)$, $d^3\varphi(x)$, ..., dont la loi n'apparaît nullement au milieu de toutes ces opérations. Il n'en est pas ainsi de l'expression (47) ou (19); elle donne immédiatement les éléments de la construction des coefficients en question et présente ainsi la génération absolue de ces coefficients. A la vérité, il entre encore dans cette construction les différentielles des puissances de la fonction $\varphi(x)$ et non les différentielles immédiates $d\varphi(x)$, $d^2\varphi(x)$, $d^3\varphi(x)$, ...; mais la loi qui donne les différentielles $d^\mu\varphi x^m$, moyennant les différentielles élémentaires $d\varphi x$, $d^2\varphi x$, $d^3\varphi x$, ..., n'est qu'une extension ou plutôt une transformation de la loi fondamentale (nº 19). »

CHAPITRE II.

22. La formule qui donne la dérivée $m^{\text{ième}}$ d'une fonction de fonction étant relativement simple, il y aura souvent avantage à se ramener à cette formule. Je rappelle d'abord quelques-unes des formes dont elle est susceptible :

$$y=f(u), \qquad u=\varphi(x),$$

$$\text{(C)} \quad \frac{d^m y}{dx^m}=(\dot{u})^{(m)}\frac{dy}{du}+\frac{1}{1.2}(\dot{u}^2)^{(m)}\frac{d^2y}{du^2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots m}(\dot{u}^m)^{(m)}\frac{d^my}{du^m},$$

$$\text{(A)} \quad \frac{d^m y}{dx^m}=[u-\dot{u}_0]^{(m)}\frac{dy}{du}+\frac{[(u-\dot{u}_0)^2]^{(m)}}{1.2}\frac{d^2y}{du^2}+\ldots+\frac{[(u-\dot{u}_0)^m]^{(m)}}{1.2\ldots m}\frac{d^my}{du^m},$$

$$
(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^m y}{dx^m} = \mathrm{A}_1 \frac{dy}{du} + \frac{\mathrm{A}_2}{1.2} \frac{d^2 y}{du^2} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_m}{1.2\ldots m} \frac{d^m y}{du^m}, \\ & \mathrm{A}_p = (u^p)^{(m)} - \frac{p}{1} (u^{p-1})^{(m)} u + \ldots + (-1)^{p-1} p (u)^{(m)} u^{p-1}; \end{aligned} \right.
$$

$$
(\mathrm{F}) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^m y}{dx^m} = 1.2\ldots m \sum \frac{(u^{(1)})}{1.2\ldots h_1} \frac{\left[\frac{u^{(2)}}{1.2}\right]}{1.2\ldots h_2} \cdots \frac{\left[\frac{u^{(p)}}{1.2\ldots p}\right]}{1.2\ldots h_p} \frac{d^p y}{du^p}, \\ & h_1 + 2h_2 + \ldots + \alpha h_\alpha = m, \qquad h_1 + h_2 + \ldots + h_\alpha = p. \end{aligned} \right.
$$

Les applications étant assez nombreuses pour mériter un classement, je diviserai ce Chapitre en trois Parties.

Dans la première, j'utiliserai les formules pour plusieurs des fonctions élémentaires. Il deviendra évident que l'on ne peut être arrêté dans cette voie que si l'on a affaire à des fonctions dont les propriétés ne sont pas assez connues actuellement pour donner lieu à certaines transformations de calcul nécessaires dans tout problème.

Dans la deuxième Partie, je me bornerai à un seul exemple géométrique très simple et très important relatif aux courbes planes. J'indiquerais bien des formules pour le cas des courbes gauches, mais elles ne me paraissent pas encore arrivées à un degré de simplicité suffisant pour que je les transcrive.

Enfin, la dernière Partie sera destinée à montrer combien il est facile de généraliser la formule à deux points de vue différents.

PREMIÈRE PARTIE.

23. *Premier exemple :*

$$
x = \mathrm{L}\, u, \quad \text{c'est-à-dire} \quad u = e^x.
$$

D'après la formule (B), on a

$$
\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} [(u - u_0)^p]^{(n)} \frac{1}{p!} \frac{d^p y}{du^p},
$$

$$
[(u - u_0)^p]^{(n)} = \left[(u^p)^{(n)} - \frac{p}{1} (u^{p-1})^{(n)} u + \ldots + (-1)^{p-1} p u^{(n)} u^{p-1} \right];
$$

or

$$
u = e^x, \qquad (u^p)^{(n)} \equiv (e^{px})^{(n)} \equiv p^n e^{px}.
$$

On a, par suite,

$$[(u-u_0)^p]^{(n)} = e^{px}\left[p^n - \frac{p}{1}(p-1)^n + \ldots + (-1)^{p-1}p\,1^n\right];$$

d'où le résultat connu

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 1^n u \frac{dy}{du} + \frac{1}{1.2}\left[2^n - \frac{2}{1}1^n\right]u^2\frac{d^2y}{du^2} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots p}\left[p^n - \frac{p}{1}(p-1)^n + \ldots + (-1)^{p-1}p\,1^n\right]u^p\frac{d^py}{du^p} + \ldots.$$

Avec la notation des différences, ce résultat prend une expression très simple,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\Delta^p 0^n}{1.2\ldots p} u^p \frac{d^p y}{du^p}$$

(*Recueil complémentaire d'Exercices sur le Calcul infinitésimal*, par M. Tisserand).

22. *Deuxième exemple :*

$$u = x^\mu, \qquad x = u^{\frac{1}{\mu}}.$$

Nous avons déjà prouvé que le résultat était de la forme (n° 18)

$$x^m \frac{d^m y}{dx^m} = c_0 u^m \frac{d^m y}{du^m} + c_1 u^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{du^{m-1}} + \ldots.$$

Il serait facile de vérifier ce résultat; je me bornerai à chercher de nouvelles expressions des coefficients c.

Sachant que, dans le coefficient de $\frac{d^p y}{du^p}$, qui est $\frac{1}{1.2\ldots p}[(u-u_0)^p]^{(m)}$, on peut mettre en facteur $u_0^{p-\frac{m}{\mu}}$, il suffira, pour avoir le coefficient numérique, de remplacer u_0 par 1. On a une première forme du résultat

$$x^m \frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{p=1}^{p=m} [(x^\mu - 1)^p]^{(m)}_{x=1} \frac{u^p \frac{d^p y}{du^p}}{1.2\ldots p}.$$

J'appliquerai cette forme du résultat à l'exemple très simple

Le coefficient de $u^{m-k}\dfrac{d^{m-k}y}{du^{m-k}}$ est égal à

$$\frac{1}{1.2\ldots(m-k)}\left[(x^2-1)^{m-k}\right]^{(m)}_{x=1}.$$

Or $x^2-1=(x+1)(x-1)$ et pour $x=1$, le facteur $x-1$ s'annulant, on a évidemment

$$\begin{aligned}
\left[(x^2-1)^{m-k}\right]^{(m)}_1 &\equiv \left[(x+1)^{m-k}(x-1)^{m-k}\right]^{(m)}_1 \\
&= \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k} \\
&\quad\times (m-k)(m-k-1)\ldots 1.(m-k)\ldots(m-k-k+1)\,2^{m-k-k} \\
&= \frac{m(m-1)\ldots(m-2k+1)}{1.2\ldots k}\,2^{m-2k}.1.2\ldots(m-k).
\end{aligned}$$

Les premiers termes de la formule manquant, on peut l'écrire, en renversant l'ordre des termes,

$$y=f(u),\qquad u=x^2,$$

$$\begin{aligned}
« \quad \frac{d^n y}{dx^n} &= (2x)^n f^{(n)}(u) + n(n-1)(2x)^{n-2}f^{(n-1)}(u) \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4}f^{(n-2)}(u)+\ldots \\
&\quad + \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{1.2\ldots k}(2x)^{n-2k}f^{(n-k)}(u)+\ldots. \quad »
\end{aligned}$$

(*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, par M. Hermite, p. 61.)

On peut encore transformer ainsi la formule qui précède :

$$\begin{aligned}
\left[(x^\mu-1)^p\right]^{(m)} &\equiv \left(x^{\mu p}-\frac{p}{1}x^{\mu(p-1)}+\ldots\right)^{(m)} \\
&\equiv \mu p(\mu p-1)\ldots(\mu p-m+1) \\
&\quad - \frac{p}{1}\mu(p-1)[\mu(p-1)-1]\ldots[\mu(p-1)-m+1]+\ldots.
\end{aligned}$$

Adoptant les relations de Wronski, indiquées au début (n° 1)

$$\varphi(x)^{m|\xi}=\varphi(x)\,\varphi(x+\xi)\ldots\varphi[x+(m-1)\xi],$$
$$\Delta_\xi f(x)=f(x)-f(x-\xi),$$

il vient

$$(\mu p)^{m|-1}-\frac{p}{1}[\mu(p-1)]^{m|-1}+\ldots\equiv\Delta^p_\mu(\mu p)^{m|-1},$$

en remarquant, bien entendu, que les différences sont prises pour l'accroissement μ de la variable (μp). Si l'on fait attention à cette particularité, on peut écrire

$$x^m \frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{\Delta^p (\mu p)^{m|-1}}{1^{p|1}} u^p \frac{d^p y}{du^p}.$$

Le cas le plus élémentaire est celui où l'égalité existe entre l'accroissement μ des différences et l'accroissement -1 de la factorielle $(\mu p)^{m|-1}$. Utilisant alors cette formule très facile à vérifier

$$\Delta_\xi^\mu (a+x)^{m|\xi} = m^{\mu|-1} \xi^\mu (a+x)^{m-\mu|\xi} \quad (^1),$$

on a ce résultat simple :

$$u = x^{-1}, \qquad x = u^{-1},$$

$$x^m \frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{m^{p|-1}(-1)^p(-p)^{m-p|-1}}{1^{p|1}} u^p \frac{d^p y}{du^p}.$$

Pour développer cette formule, il suffit de voir que

$$(-p)^{m-p|-1} = (-1)^{m-p} p^{m-p|1},$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} = (-1)^m \sum_{p=1}^{p=m} \frac{m^{p|-1} p^{m-p|1}}{1^{p|1}} \frac{1}{x^{m+p}} \frac{d^p y}{du^p} \quad (^2).$$

Ce résultat n'est qu'un cas particulier de la transformation linéaire la plus générale, pour laquelle on obtient sans peine ce résultat :

$$u = \frac{ax+b}{a'x+b'} \qquad y = f(u),$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \mathrm{P}_n \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{n-p} \frac{1}{\mathrm{P}_p} \frac{p(p+1)\ldots(n-1)}{1.2\ldots(n-p)} \frac{(ab'-ba')^p a'^{n-p}}{(a'x+b')^{n+p}} f^{(p)}(u).$$

Pour appliquer numériquement cette formule, il faut remarquer que $\frac{p(p+1)\ldots(n-1)}{1.2\ldots(n-n)}$ n'a plus de sens pour $p = n$, mais qu'il suffit de rem-

---

(1) *A. S.*, t. III, p. 274.

(2) *Voir* ce résultat dans le *Cours de l'École Polytechnique*, par M. Hermite, p. 61.

placer cette expression par 1 pour que la formule s'applique de $p=1$ à $p=n$, sans exception.

Je terminerai par une remarque qui me permettra d'utiliser la forme

$$\text{(C)} \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{p=1}^{p=m} (u^p)^{(m)} \frac{d^p y}{du^p}.$$

Cette forme se développe, comme on sait, par

$$(u^p)^{(m)} = \sum \frac{P_m}{P_\alpha \ldots P_\lambda} u^{(\alpha)} u^{(\beta)} \ldots u^{(\lambda)},$$
$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = m.$$

Pour obtenir la formule (F) nous sommes partis de $(u_1 u_2 \ldots u_p)^{(m)}$ et nous avons été obligés (n° 9), ne voulant prendre chaque terme qu'une fois, de corriger le résultat dans le cas où l'on aurait par exemple $\alpha = \beta$. Ici, comme il ne s'agit que d'une application, et qu'il importe peu que l'on écrive plusieurs fois le même terme, pourvu que le résultat final soit exact, je n'aurai pas à tenir compte de cette correction; il suffira de partir du développement supposé effectué de $(u_1 u_2 \ldots u_p)^{(m)}$ et de faire ensuite $u_1 = u_2 = \ldots = u_p$.

Cela posé, je considère le cas particulier où μ est un nombre entier positif plus petit que m. Si $p > \mu$, il faudra supprimer dans le développement de $(u^p)^{(m)}$ non seulement les termes qui contiennent $u^0 \equiv u$, mais aussi ceux qui contiennent $u^{(q)}$, $q > \mu$.

Pour ne prendre que les termes $u_1^{(\alpha)} u_2^{(\beta)} \ldots u_p^{(\lambda)}$ qui contiennent $u_1, u_2, \ldots, u_p$ au moins à la puissance 1, je remarque que tous ces termes sont divisibles par $u_1 u_2 \ldots u_p$. Il reste alors

$$u_1^{\alpha-1} u_2^{\beta-1} \ldots u_p^{\lambda-1} \equiv u_1^{\alpha'} u_2^{\beta'} \ldots u_p^{\lambda'},$$
$$\alpha' + \beta' + \ldots + \lambda' = n - p.$$

Il vient alors un polynôme homogène de degré $n-p$ en $u_1, u_2, \ldots u_p$ dans lequel, d'après la nature de la question, il ne faut prendre que les termes qui ne sont pas divisibles par des puissances données des variables $u_1^\mu, u_2^\mu, \ldots, u_p^\mu$. On sait que, dans la théorie de l'élimination, on est amené à compter le nombre de ces termes et à le désigner par une notation spéciale

$$\Delta_\mu \ldots \Delta_\mu \Delta_\mu \mathrm{N}(p, n-p).$$

(*Cours d'Algèbre supérieure*, par J.-A. Serret, 4e édition, t. I, p. 68.)

25. *Troisième exemple :*

$$u = \sin x, \qquad x = \arc\sin u.$$

Si je pars de l'expression développée de

$$\frac{1}{1.2\ldots p}(u^p)^{(m)},$$

comme on a

$$u' = \cos x, \qquad u'' = -\sin x, \qquad u^{(\alpha)} = \sin\left(x + \alpha\frac{\pi}{2}\right),$$

on voit que, si l'on écrit

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \sum \mathrm{A}_p \frac{d^p y}{du^p},$$

$$\mathrm{A}_p = \sum 1.2\ldots m \frac{(\cos x)^{h_1}}{1.2\ldots h_1} \frac{\left(\frac{-\sin x}{1.2}\right)^{h_2}}{1.2\ldots h_2} \frac{\left(\frac{-\cos x}{1.2.3}\right)^{h_3}}{1.2\ldots h_3} \cdots \frac{\left(\frac{\sin\left(x+\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{1.2\ldots\alpha}\right)^{h_\alpha}}{1.2\ldots h_\alpha},$$

$$h_1 + 2h_2 + \ldots + \alpha h_\alpha = m, \qquad h_1 + h_2 + \ldots + h_\alpha = p,$$

et par suite

$$h_2 + 2h_3 + \ldots + (\alpha - 1)h_\alpha = m - p,$$

Chaque terme étant de la forme $\mathrm{C}\cos^\beta x \sin^{p-\beta} x$, le coefficient de $\frac{d^p y}{du^p}$ est forcément de la forme

$$a_0 \cos^p x + a_1 \cos^{p-1} x \sin x + \ldots + a_p \sin^p x.$$

On verra plus loin que ce coefficient peut aussi s'exprimer en fonction de $\sin qn$ et de $\cos qn$.

26. *Quatrième exemple :*

$$x = \operatorname{arc\,cot} u, \qquad u = \cot x.$$

On sait que, si l'on désigne par C, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$, ..., $\mathcal{A}_n$ certains coefficients numériques, on a

$$\cot^{n+1} x = \mathrm{C} + \mathcal{A} \cot x + \mathcal{A}_1 \frac{d \cot x}{dx} + \ldots + \mathcal{A}_n \frac{d^n \cot x}{dx^n}.$$

(*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, par M. Hermite, p. 337, 338).

Inversement on peut résoudre par rapport à $\frac{d \cot x}{dx}, \ldots, \frac{d^n \cot x}{dx^n}$ les équations du premier degré

$$\frac{d \cot x}{dx} = -1 - \cot^2 x,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \cot x}{dx^2} = \cot x - \cot^3 x,$$

$$\frac{1}{6} \frac{d^3 \cot x}{dx^3} - \frac{d \cot x}{dx} = \tfrac{4}{3} - \cot^4 x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathcal{A}_n \frac{d^n \cot x}{dx^n} + \ldots + \mathcal{A}_1 \frac{d \cot x}{dx} = -\mathrm{C} - \mathcal{A} \cot x + \cot^{n+1} x.$$

Le dénominateur commun est une constante ; par suite, le numérateur ne contient x que dans sa dernière colonne. Développant suivant les éléments de cette colonne et ordonnant, on aura

$$\frac{d^n \cot n}{dx^n} = a_0 \cot^{n+1} x + a_1 \cot^n x + \ldots + a_n \cot x + a_{n+1}.$$

Or

$$(u^p)^{(n)} = \sum \frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{P}_\alpha \ldots \mathrm{P}_\lambda} u^{(\alpha)} \ldots u^{(\lambda)} \qquad (\alpha + \ldots + \lambda = n),$$

$$u^{(\alpha)} = a_0 \cot^{\alpha+1} x + a_1 \cot^\alpha x + \ldots \equiv a_0 u^{\alpha+1} + a_1 u^\alpha + \ldots.$$

Pour former $(u^p)^{(n)}$, on aurait à multiplier des polynômes entiers de degrés $\alpha + 1$, $\beta + 1$, ..., $\lambda + 1$; il viendra un polynôme de degré $\alpha + 1 + \beta + 1 + \ldots = n + p$. Le résultat rentrera dans ce type simple

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} (\mathrm{B}_0 u^{n+p} + \mathrm{B}_1 u^{n+p-1} + \ldots + \mathrm{B}_{n+p}) \frac{d^p y}{du^p}.$$

27. *Cinquième exemple :*

$$u = \lambda(x), \qquad x = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Je m'appuierai sur le résultat suivant :

$$« \frac{k^{2n}\lambda^{2n+1}(z)}{2n+1} = \frac{a_n}{1}\lambda(z) + \frac{a_{n-1}^{(3)}}{1.2.3}\lambda''(z) + \ldots$$
$$+ \frac{a_1^{(2n-1)}}{1.2\ldots(2n-1)}\lambda^{(2n-2)}(z) + \frac{1}{1.2\ldots(2n+1)}\lambda^{(2n)}(z) \text{ (1) ».}$$

Cette formule permet de déterminer les dérivées d'indices pairs de u en fonction de u, $u^3\ldots$ au moyen des équations du premier degré

$$\begin{aligned} u^{(2n)} + A_1 u^{(2n-2)} + \ldots + A_{n-1}u^{(2)} &= Bu + Cu^{2n+1}, \\ u^{(2n-2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots &= B'u + C'u^{2n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On tire de là, en remarquant que le dénominateur des inconnues est égal à 1 et que le numérateur ne contient qu'une seule colonne où entre l'inconnue u, colonne par rapport aux éléments de laquelle on développera,

$$u^{(2n)} = u(d_0 + d_1u^2 + \ldots + d_nu^{2n}).$$

Pour les dérivées d'indices impairs, je prends la dérivée de la formule qui a servi de point de départ

$$k^{2n}\lambda^{2n}(z)\lambda'(z) = \frac{a_n}{1}\lambda'(z) + \frac{a_{n-1}^{(3)}}{1.2.3}\lambda'''(z) + \ldots + \frac{1}{1\ldots(2n+1)}\lambda^{(2n+1)}(z).$$

On peut regarder $\lambda'(x)$ ou u' comme une quantité connue, puisque

$$\lambda'(x) = \mu(x)\nu(x) = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)},$$

et alors on a

$$\begin{aligned} u^{(2n+1)} + A_1u^{(2n-1)} + \ldots + A_{n-1}u^{(3)} &= u'(B + Cu^{2n}), \\ u^{(2n-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots &= u'(B' + C'u^{2n-2}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

d'où

$$u^{(2n+1)} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}\,(e_0 + e_1u^2 + \ldots + e_nu^{2n}).$$

---

(1) *Théorie des fonctions elliptiques*, par MM. Briot et Bouquet, 2e édition, n° 285, p. 464.

Revenant maintenant au calcul,

$$(\dot{u}^p)^{(m)} = \sum \frac{P_m}{P_\alpha \ldots P_\lambda} u^{(\alpha)} \ldots u^{(\lambda)}, \qquad \alpha + \beta + \ldots + \lambda = m.$$

Si m est pair, un nombre pair de quantités α, β, ..., λ est impair d'après la relation $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = m$; donc, pas de radical. Si m est impair, un nombre impair des quantités α, β, ..., λ est impair; on a donc le radical en facteur.

Si maintenant, m étant pair, p est aussi pair, le nombre des quantités α, ... impaires étant pair, il en reste un nombre pair qui sont paires, puisqu'elles doivent être en nombre p, d'après la convention indiquée par $\dot{u}$. On n'a que u^2 comme inconnue.

En résumé, on a les types suivants :

$$m = 2\mu \ldots\ldots \quad (h_0 + h_1 u^2 + \ldots + h u^{m+2p}) \frac{d^{2p} y}{du^{2p}}$$

$$(k_0 + h_1 u^2 + \ldots + k u^{m+2p}) u \frac{d^{2p+1} y}{du^{2p+1}},$$

$$m = 2\mu + 1 \ldots \quad \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}\,(h_0 + h_1 u^2 + \ldots + h u^{m+2p-3}) u \frac{d^{2p} y}{du^{2p}}$$

$$\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}\,(k_0 + k_1 u^2 + \ldots + k u^{m+2p-1}) \frac{d^{2p+1} y}{du^{2p+1}}.$$

DEUXIÈME PARTIE.

28. Je désignerai les coordonnées d'une courbe plane quelconque par

$$x = \varphi(s), \qquad y = \psi(s),$$

s étant l'arc compté à partir d'une certaine origine. Appelant ω l'inverse du rayon de courbure et u l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'axe des x, on sait que

$$\frac{dx}{ds} \equiv \varphi'(s) = \cos u, \qquad \frac{du}{ds} = \omega.$$

Le développement de x et de y de la courbe suivant les puissances croissantes de l'arc exige la connaissance des coefficients

$$M = \left(\frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}}\right)_0, \qquad N = \left(\frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}}\right)_0.$$

On sait, d'ailleurs, qu'il s'agit d'exprimer ces coefficients en fonction de ω, $\frac{d\omega}{ds}$, ...

Je rappellerai aussi que l'on a, si $u = 0$ pour $s = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}} &= \quad M\cos u + N\sin u, \\ \frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}} &= -M\sin u + N\cos u. \end{aligned}$$

Je calculerai, par exemple, $\frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}}$. Le résultat relatif à y s'en déduit immédiatement.

La formule (C) donne immédiatement

$$\frac{d^n(\cos u)}{ds^n} = (\dot u)^{(n)}\frac{d\cos u}{du} + \frac{1}{1.2}(\dot u^2)^{(n)}\frac{d^2\cos u}{du^2} + \ldots$$

ou bien encore, puisque $\cos u = \frac{dx}{ds}$,

$$\frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}} = -(\dot u)^{(n)}\sin u - \frac{(\dot u^2)^{(n)}}{1.2}\cos u + \frac{(\dot u^3)^{(n)}}{1.2.3}\sin u + \frac{(\dot u^4)^{(n)}}{1.2.3.4}\cos u - \ldots.$$

Alors, en désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ q entiers positifs non nuls, on a

$$\left.\begin{aligned} (\dot u^q)^{(n)} &= \sum \frac{P_n}{P_{\lambda_1}P_{\lambda_2}\ldots P_{\lambda_q}} u_1^{(\lambda_1)}u_2^{(\lambda_2)}\ldots u_q^{(\lambda_q)} \\ &= \sum \frac{P_n}{P_{\lambda_1}P_{\lambda_2}\ldots P_{\lambda_q}} \omega^{(\lambda_1-1)}\omega^{(\lambda_2-1)}\ldots\omega^{(\lambda_q-1)} \end{aligned}\right\} \quad \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_q = n.$$

Si l'on veut écrire séparément M et N,

$$\begin{aligned} M &= \frac{-(\dot u^2)^{(n)}}{1.2} + \frac{(\dot u^4)^{(n)}}{1.2.3.4} - \frac{(\dot u^6)^{(n)}}{1.2.3.4.5.6} + \ldots, \\ N &= \frac{-(\dot u)^{(n)}}{1} + \frac{(\dot u^3)^{(n)}}{1.2.3} - \frac{(\dot u^5)^{(n)}}{1.2.3.4.5} + \ldots. \end{aligned}$$

Application numérique. — Je prendrai, par exemple,

$$\frac{d^5 x}{ds^5} = -(\dot{u})^{(4)} \sin u - \frac{(\dot{u}^2)^{(4)}}{1.2} \cos u + \frac{(\dot{u}^3)^{(4)}}{1.2.3} \sin u + \frac{(\dot{u}^4)^{(4)}}{1.2.3.4} \cos u.$$

Pour $(u^2)^{(4)}$, on a à résoudre en nombres entiers $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$, ce qui donne (la valeur o n'étant pas admissible), soit $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, soit $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, soit $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. J'écrirai donc, pour abréger,

$$(\dot{u}^2)^{(4)} = [4 u_1^1 u_2^3 + 4 u_1^3 u_2^1 + 6 u_1^2 u_2^2] = 8 u' u''' + 6(u'')^2,$$

$$(\dot{u}^3)^{(4)} = \frac{P_4}{P_2} [u_1 u_2 u_3^2 + u_2 u_3 u_1^2 + u_3 u_1 u_2^2] = (1.2.3)^2 (u')^2 u'',$$

$$(\dot{u}^4)^{(4)} = 1.2.3.4 (u')^4,$$

d'après le lemme du n° 3. Il en résulte donc, en introduisant, au lieu de u, l'inverse du rayon de courbure $\omega = u'$,

$$\frac{d^5 x}{ds^5} = [-4\omega\omega'' - 3\omega'^2 + \omega^4] \cos u + [-\omega''' + 6\omega^2\omega'] \sin u,$$

$$\frac{d^5 y}{ds^5} = -[-4\omega\omega'' - 3\omega'^2 + \omega^4] \sin u + [-\omega''' + 6\omega^2\omega'] \cos u.$$

29. Si l'on considère maintenant un point mobile, qui décrive la courbe plane, les projections de l'accélération d'ordre n sur les axes seront

$$\frac{d^n x}{dt^n} = G \cos u + H \sin u,$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -G \sin u + H \cos u,$$

G et H étant des fonctions de ω, ω', ... et de $v = \frac{ds}{dt}$, v', ...

On a d'abord

$$\frac{d^n x}{dt^n} = (\dot{s})^{(n)} \frac{dx}{ds} + \frac{1}{1.2} (\dot{s}^2)^{(n)} \frac{d^2 x}{ds^2} + \ldots + \frac{1}{1.2 \ldots n} (\dot{s}^n)^{(n)} \frac{d^n x}{ds^n}.$$

Si l'on tient compte des valeurs obtenues dans le paragraphe précédent pour $\frac{dx}{ds}$, $\frac{d^2 x}{ds^2}$, ...,

$$\frac{d^n x}{dt^n} = (\dot{s})^{(n)} \cos u + \ldots + \frac{(\dot{s}^p)^{(n)}}{1.2 \ldots p} \left[-(\dot{u})^{(p-1)} \sin u - \frac{(\dot{u}^2)^{(p-1)}}{1.2} \cos u + \ldots \right] + \ldots$$

ou encore

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \left\{ (\dot{s})^{(n)} - \frac{(\dot{s}^3)^{(n)}}{1.2.3}\left[\frac{(\dot{u}^2)^{(2)}}{1.2}\right] - \frac{(\dot{s}^4)^{(n)}}{1.2.3.4}\left[\frac{(\dot{u}^2)^{(3)}}{1.2}\right] - \frac{(\dot{s}^5)^{(n)}}{1.2.3.4.5}\left[\frac{(\dot{u}^2)^{(4)}}{1.2} - \frac{(\dot{u}^4)^{(4)}}{1.2.3.4}\right]\cdots\right\} \cos u$$
$$+ \left\{ - \frac{(\dot{s}^2)^{(n)}}{1.2}(\dot{u}^1)^{(1)} - \frac{(\dot{s}^3)^{(n)}}{1.2.3}\frac{(\dot{u}^1)^{(2)}}{1} - \frac{(\dot{s}^4)^{(n)}}{1.2.3.4}\left[\frac{(\dot{u}^1)^{(3)}}{1} - \frac{(\dot{u}^3)^{(3)}}{1.2.3}\right]\cdots\right\} \sin u.$$

Je n'écris pas les derniers termes de la parenthèse $(\dot{s}^p)^{(n)}$, ... parce qu'il peut se présenter deux cas différents, ce qui compliquerait l'écriture de la formule générale. Dans un exemple particulier il ne peut y avoir aucune difficulté. On s'arrêtera quand on sera conduit à écrire $(\dot{s}^{n+1})^{(n)}$. Dans la parenthèse qui multiplie $(\dot{s}^p)^{(n)}$, savoir

$$\frac{(\dot{u}^2)^{(p-1)}}{1.2} - \frac{(\dot{u}^4)^{(p-1)}}{1.2.3.4} + \cdots$$

ou bien

$$\frac{(\dot{u}^1)^{(p-1)}}{1} - \frac{(\dot{u}^3)^{(p-1)}}{1.2.3} + \cdots,$$

on s'arrêtera aussi quand on sera conduit à écrire

$$(\dot{u}^{p-1+q})^{(p-1)} \equiv 0.$$

Application numérique. — On veut obtenir

$$\frac{d^4 x}{dt^4} = \mathrm{G}\cos u + \mathrm{H}\sin u, \qquad \frac{d^4 y}{dt^4} = -\mathrm{G}\sin u + \mathrm{H}\cos u.$$

La formule se réduit à

$$\frac{d^4 x}{dt^4} = \left[(\dot{s})^{(4)} - \frac{(\dot{s}^3)^{(4)}}{1.2.3}\frac{(\dot{u}^2)^{(2)}}{1.2} - \frac{(\dot{s}^4)^{(4)}}{1.2.3.4}\frac{(\dot{u}^2)^{(3)}}{1.2}\right]\cos u$$
$$- \left\{\frac{(\dot{s}^2)^{(4)}}{1.2}\frac{(\dot{u}^1)^{(1)}}{1} + \frac{(\dot{s}^3)^{(4)}}{1.2.3}\frac{(\dot{u}^1)^{(2)}}{1} + \frac{(\dot{s}^4)^{(4)}}{1.2.3.4}\left[\frac{(\dot{u}^1)^{(3)}}{1} - \frac{(\dot{u}^3)^{(3)}}{1.2.3}\right]\right\}\sin u.$$

D'après des calculs déjà faits (28),

$$(\dot{s})^{(4)} = \frac{d^3 v}{dt^3}, \qquad (\dot{s}^2)^{(4)} = 8v\frac{d^2 v}{dt^2} + 6\left(\frac{dv}{dt}\right)^2,$$
$$(\dot{s}^3)^{(4)} = 36 v^2 \frac{dv}{dt}, \qquad (\dot{s}^4)^{(4)} = 1.2.3.4.v^4,$$
$$(\dot{u}^2)^{(2)} = 1.2.\omega^2, \qquad (\dot{u}^2)^{(3)} = 6\omega\omega', \qquad (\dot{u}^3)^{(3)} = 1.2.3.\omega^3;$$

par conséquent,

$$G = \frac{d^3 v}{dt^3} - 6v^2 \frac{dv}{dt}\omega^2 - 3v^4\omega\omega',$$

$$-H = \left[4v\frac{d^2 v}{dt^2} + 3\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right]\omega + 6v^2\frac{dv}{dt}\omega' + v^4(\omega'' - \omega^3).$$

TROISIÈME PARTIE.

30. La formule générale relative aux fonctions de fonctions est

$$y = f(u), \qquad u = \varphi(x),$$

$$\text{(C)} \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = (\dot{u})^{(m)}\frac{dy}{du} + \frac{1}{1.2}(\dot{u}^2)^{(m)}\frac{d^2 y}{du^2} + \ldots.$$

Une première manière de la généraliser consiste à examiner le cas où

$$y = \chi(u), \qquad u = \varphi(v), \qquad v = \psi(x).$$

La méthode, déjà indiquée dans les articles signalés plus haut de M. A., ancien élève de l'École Polytechnique, n° 11, et de M. E. Cesaro, n° 12, consiste à remarquer que la formule (C) donne successivement

$$\frac{d^m y}{dx^m} = (\dot{v})^m\frac{dy}{dv} + \frac{(\dot{v}^2)^{(m)}}{1.2}\frac{d^2 y}{dv^2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots m}(\dot{v}^m)^{(m)}\frac{d^m y}{dv^m},$$

$$\frac{d^p y}{dv^p} = (\dot{u})^{(p)}\frac{dy}{du} + \frac{(\dot{u}^2)^{(p)}}{1.2}\frac{d^2 y}{du^2} + \ldots + \frac{(\dot{u}^p)^{(p)}}{1.2\ldots p}\frac{d^p y}{du^p}.$$

On obtient donc, en remplaçant dans l'expression de $\frac{d^m y}{dx^m}$ les dérivées $\frac{dy}{dv}, \frac{d^2 y}{d^2 v}, \cdots$ par leurs valeurs,

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{p=1}^{p=m} A_p \frac{d^p y}{du^p},$$

$$A_p = \frac{(\dot{v}^p)^{(m)}}{1.2\ldots p}\frac{(\dot{u}^p)^{(p)}}{1.2\ldots p} + \frac{(\dot{v}^{p+1})^{(m)}}{1.2\ldots(p+1)}\frac{(\dot{u}^p)^{(p+1)}}{1.2\ldots p} + \frac{(\dot{v}^{p+2})^{(m)}}{1.2\ldots(p+2)}\frac{(\dot{u}^p)^{(p+2)}}{1.2\ldots p} + \ldots$$

Si l'on pose

$$\frac{(\dot{u}^p)^{(k)}}{1.2\ldots p} = \Phi_{k,p}, \quad \frac{(\dot{v}^p)^{(k)}}{1.2\ldots p} = \Psi_{k,p},$$

on obtient

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{p=1}^{p=m} (\Phi_{p,p}\Psi_{m,p} + \Phi_{p+1,p}\Psi_{m,p+1} + \ldots)\frac{d^p y}{du^p}.$$

On retrouve ainsi un résultat très peu différent de celui que M. E. Cesaro déduit de ses formules isobariques (*Nouvelles Annales*, p. 62, février 1885).

31. Le cas le plus simple est celui où l'on a

$$y = u, \qquad u = \varphi(v), \qquad v = \psi(x).$$

Il ne s'agit alors, comme précédemment (n° 28), que d'un changement de la fonction y, la variable indépendante x étant conservée. J'examinerai seulement ce cas très simple

$$y = u^{-1}, \qquad u = \varphi(x);$$

on a

$$\text{(C)} \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = (\dot{u})^{(m)}\frac{dy}{du} + \frac{(\dot{u}^2)^{(m)}}{1.2}\frac{d^2 y}{du^2} + \ldots + \frac{(\dot{u}^m)^{(m)}}{1.2\ldots m}\frac{d^m y}{du^m},$$

d'où

$$(u^{-1})^{(m)} = -\frac{(\dot{u})^{(m)}}{u^2} + \frac{(\dot{u}^2)^{(m)}}{u^3} + \ldots + (-1)^m\frac{(\dot{u}^m)^{(m)}}{u^{m+1}}.$$

J'appliquerai cette formule au cas $m = 4$, qui n'exigera aucun calcul nouveau. On a trouvé (n° 28)

$$(\dot{u}^2)^{(4)} = 8u'u''' + 6(u'')^2, \qquad (\dot{u}^3)^{(4)} = 36(u')^2 u'', \qquad (\dot{u}^4)^{(4)} = 24(u')^4,$$

$$(u^{-1})^{(4)} = -\frac{u^{\text{IV}}}{u^2} + \frac{8u'''u' + 6(u'')^2}{u^3} - 36\frac{(u')^2 u''}{u^4} + 24\frac{(u')^4}{u^5}.$$

Ayant fait ici le calcul avec la convention $\dot{u}$, je crois utile de remarquer qu'il est facile de s'en dispenser dans le problème actuel,

$$(u^{-1})^{(m)} = \frac{-(\dot{u})^{(m)}u^{m-1} + (\dot{u}^2)^{(m)}u^{m-2} + \ldots + (-1)^m(\dot{u}^m)^{(m)}}{u^{m+1}}.$$

Or, d'après cette remarque, très importante et sur laquelle j'ai déjà insisté, que le but est seulement de supprimer les termes en u, on a

$$(u^p)^{(m)} \equiv [(u - u_0)^p]^{(m)} \equiv (u^p)^{(m)} - \frac{p}{1}(u^{p-1})^{(m)} u + \frac{p(p-1)}{1.2}(u^{p-2})^{(m)} u^2 - \ldots.$$

Le numérateur de $(u^{-1})^{(m)}$ peut alors s'écrire

$$\begin{aligned}
&-(u)^{(m)} u^{m-1} + [(u^2)^{(m)} - 2(u)^m u] u^{m-2} \\
&\quad - [(u^3)^{(m)} - 3(u^2)^{(m)} u + 3(u)^{(m)} u^2] u^{m-3} + \ldots \\
&\quad + (-1)^m [(u^m)^{(m)} - \frac{m}{1}(u^{m-1})^{(m)} u + \ldots + (-1)^{m-1} \frac{m}{1}(u)^{(m)} u^{m-1}].
\end{aligned}$$

Les quantités $(u)^{(m)}$, $(u^2)^{(m)}$, ... ayant pour coefficients les sommes des coefficients de la formule du binôme, il vient

$$(u^{-1})^{(m)} = -\frac{m(m+1)}{1.2}\frac{u^{(m)}}{u^2} + \frac{(m-1)m(m+1)}{1.2.3}\frac{(u^2)^{(m)}}{u^3} \ldots.$$

Cette formule, contenant un plus grand nombre de termes que la précédente, qui disparaîtraient dans les réductions, peut donner des calculs plus longs dans un exemple numérique. Dans un exemple théorique, elle sera souvent plus avantageuse, l'hypothèse u étant difficile à réaliser *a priori*. Je me bornerai à un seul exemple pour justifier ce point de vue.

32. *Exemple :*

$$y = \text{séc}\,x \equiv (\cos x)^{-1}.$$

On a d'abord

$$\frac{d^m \text{séc}\,x}{dx^m} = -\frac{m(m+1)}{1.2}\frac{(\cos x)^{(m)}}{\cos^2 x} + \frac{(m-1)m(m+1)}{1.2.3}\frac{(\cos^2 x)^{(m)}}{\cos^3 x} - \ldots.$$

Il semble difficile de donner l'expression algébrique du second membre en fonction seulement de $\sin x$ et de $\cos x$. On a, en effet, à exprimer

$$(\cos^p x)^{(m)}.$$

Je rappellerai la formule

$$2^{p-1}\cos^p x = \cos px + \frac{p}{1}\cos(p-2)x + \ldots.$$

Elle permet de remplacer $\cos^p x$ en fonction de $\cos px$, $\cos(p-2)x$, ..., ce qui permet de trouver l'expression algébrique de la dérivée $m^{\text{ième}}$. On pourrait ensuite revenir des cosinus des multiples de l'arc au sinus et au cosinus de l'arc lui-même.

Je n'insisterai pas sur ce calcul, me bornant à remarquer qu'il conduirait à la solution d'une autre question plus importante :

$$\begin{aligned}\frac{d^m \tang x}{dx^m} &\equiv \frac{d^m}{dx^m}[\sin x \cos x^{-1}] \\ &= \frac{d^m \sin x}{dx^m}\cos x^{-1} + \frac{m}{1}\frac{d^{m-1}\sin x}{dx^{m-1}}\frac{d(\cos x^{-1})}{dx} + \ldots.\end{aligned}$$

33. La formule de Maclaurin, qui a servi de fondement à toutes les formules précédentes, s'étend si facilement au cas de plusieurs variables indépendantes, que je crois inutile de démontrer qu'elle donnerait (4)

$$z = f(u, v), \qquad u = \psi(x, y), \qquad v = \theta(x, y),$$

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d^m z}{dx^p\, dy^q} &= (\dot{u})^{(m)}\frac{dz}{du} + (\dot{v})^{(m)}\frac{dz}{du} \\ &\quad + \frac{1}{1.2}\left[(\dot{u^2})^{(m)}\frac{d^2 z}{du^2} + 2(\dot{u}\dot{v})^{(m)}\frac{d^2 z}{du\, dv} + (\dot{v^2})^{(m)}\frac{d^2 z}{dv^2}\right] + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{1.2\ldots m}\left[(\dot{u^m})^{(m)}\frac{d^m z}{du^m} + \frac{m}{1}(\dot{u}^{m-1}\dot{v})^{(m)}\frac{d^m z}{du^{m-1}\, dv} + \ldots\right],\end{aligned}\right.$$

le symbole $(\dot{u}^\alpha \dot{v}^\beta)^{(m)}$ signifiant qu'on forme

$$\frac{d^m u^\alpha v^\beta}{dx^p\, dy^q}$$

et qu'on supprime dans le développement tous les termes qui contiennent $u^0 \equiv u$, $v^0 \equiv v$.

D'après les explications données au début, il suffit d'écrire, en permutant u et x, v et y,

$$\frac{d^m z}{du^p\, dv^q} = (\dot{x})^{(m)}\frac{dz}{dx} + (\dot{y})^{(m)}\frac{dz}{dy} + \ldots.$$

et de donner successivement à p et q toutes les valeurs entières et positives (zéro non excepté), telles que $p+q=m$, $p+q=m-1$, ..., $p+q=1$ pour avoir un nombre d'équations du premier degré suffisant pour donner, sous forme de quotient de déterminants, l'expression de $\frac{d^m z}{dx^p\, dy^q}$ en fonction de $(\dot{x}^\alpha \dot{y}^\beta)^q$ et de $\frac{d^q z}{du^\alpha\, dv^\beta}$.

Je n'écrirai pas, à cause de sa longueur, cette formule qui se déduit presque immédiatement des déterminants (D) et (E) du Chapitre I. J'observerai, cependant, que la méthode suivie dès le début a l'avantage de s'appliquer sans modification au cas de plusieurs variables.

34. *Exemple.* — Pour montrer que la formule (C) généralisée n'est pas inapplicable, je retrouverai, en m'appuyant sur elle, un résultat connu

$$z = \varphi(xy) \left\{ \begin{array}{l} x' = \alpha x + \beta y, \\ y' = \gamma x + \delta y, \end{array} \right.$$

$$\text{« } \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 z}{dx'^2}\alpha^2 + 2\frac{d^2 z}{dx'\, dy'}\alpha\gamma + \frac{d^2 z}{dy'^2}\gamma^2,$$

$$\frac{d^2 z}{dx\, dy} = \frac{d^2 z}{dx'^2}\alpha\beta + \frac{d^2 z}{dx'\, dy'}(\alpha\delta + \beta\gamma) + \frac{d^2 z}{dy'^2}\gamma\delta,$$

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{d^2 z}{dx'^2}\beta^2 + 2\frac{d^2 z}{dx'\, dy'}\beta\delta + \frac{d^2 z}{dy'^2}\delta^2$$

» (*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* par M. Hermite, p. 87). »

Je rappelle d'abord la formule

$$\frac{d^m z}{dx^p\, dy^q} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \frac{1}{1.2\ldots\lambda}\left[(\dot{u}^\lambda)^{(m)}\frac{d^\lambda z}{du^\lambda} + \frac{\lambda}{1}(\dot{u}^{\lambda-1}\dot{v})^{(m)}\frac{d^\lambda z}{du^{\lambda-1}\, dv}\cdots\right],$$

dans laquelle

$$(\dot{u}^\mu \dot{v}^{\lambda-\mu})^{(m)} = \frac{d^m(\dot{u}^\mu \dot{v}^{\lambda-\mu})}{dx^p\, dy^q}.$$

Or ici, comme $u = \alpha x + \beta y$, $v = \gamma x + \delta y$,

$$(u)^{(2)} = (v)^{(2)} = (u)^{(3)} = (v)^{(3)} = \ldots = 0;$$

on ne peut prendre que l'hypothèse $\lambda = m$. Comme les seules dérivées qui interviennent, u'_x, u'_y, v'_x, v'_y, sont des constantes, on réalisera très simplement l'hypothèse $\dot{u}$, $\dot{v}$ en faisant $x = y = 0$ dans le résultat, ou encore en ne considérant que le terme en $x^p y^q$.

Il suffit donc de prendre dans chaque produit $u^\mu v^{m-\mu}$ le coefficient de $x^p y^q$ que l'on multipliera par $1.2\ldots p.1.2\ldots q$.

On a

$$u^\mu = \alpha^\mu x^\mu + \frac{\mu}{1}\alpha^{\mu-1}\beta x^{\mu-1} y + \ldots,$$

$$v^{m-\mu} = \gamma^{m-\mu} x^{m-\mu} + \frac{m-\mu}{1}\gamma^{m-\mu-1}\delta x^{m-\mu-1} y + \ldots.$$

Il est bon toutefois de remarquer que la première formule est illusoire pour $\mu = 0$, la deuxième pour $\mu = m$. Si l'on veut obtenir pour les coefficients du binôme une expression qui subsiste même dans ces deux cas particuliers, il n'y a qu'à adopter les conventions énoncées par M. Serret dans son *Algèbre supérieure* (4^e^ édition, n° 66)

$$\text{« } N(n,m) = \frac{1.2\ldots(n+m)}{1.2\ldots n.1.2\ldots m},$$

$$N(0,m) = 1,$$

$$N(n,0) = 1,$$

$$N(0,0) = 1. \text{ »}$$

On obtient

$$u^\mu v^{m-\mu} = \sum x^p y^q \left\{ \alpha^\mu \frac{(m-\mu)\ldots[m-\mu-(m-p-1)]}{1.2\ldots(m-p)}\gamma^{p-\mu}\delta^{m-p} + \frac{\mu}{1}\alpha^{\mu-1}\beta\frac{(m-\mu)\ldots[m-\mu-(m-p-2)]}{1.2\ldots(m-p-1)}\gamma^{p-\mu+1}\delta^{m-p-1} + \ldots \right\}.$$

Remarquons que, si $\mu > p$, le premier terme de la parenthèse n'existe pas. On le reconnaîtra dans une application particulière en convenant de supprimer tous les termes où l'une des lettres α, β, γ, δ aurait un exposant négatif; ici l'on aurait, si $p > \mu$, $\gamma^{-(\mu-p)}$, et l'on n'écrirait pas ce terme.

En résumé, il vient

$$\frac{d^m z}{dx^p\,dy^q} = \alpha^p\beta^q\frac{d^m z}{du^m} + \gamma^p\delta^q\frac{d^m z}{dv^m} + \sum_{\mu=1}^{\mu=m-1}\frac{1.2\ldots p.1.2\ldots q}{1.2\ldots\mu.1.2\ldots(m-\mu)}\left[\alpha^\mu\gamma^{p-\mu}\delta^{m-p}\frac{(m-\mu)\ldots(p+1-\mu)}{1.2\ldots(m-p)} + \ldots\right]\frac{d^m z}{du^\mu\,dv^{m-\mu}}.$$

Si l'on prend le cas particulier de

$$m = 2,$$

c'est-à-dire

$$p + q = 2, \qquad \mu = 1,$$

on a d'abord, pour $p = 2$, $q = 0$,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \alpha^2 \beta^0 \frac{d^2 z}{du^2} + \gamma^2 \delta^0 \frac{d^2 z}{dv^2} + \frac{1 \cdot 2}{1} [\alpha\gamma + 0] \frac{d^2 z}{du\, dv},$$

et ensuite, pour $p = 1$, $q = 1$,

$$\frac{d^2 z}{dx\, dy} = \alpha\beta \frac{d^2 z}{du^2} + \gamma\delta \frac{d^2 z}{dv^2} + \frac{1}{1} [\alpha\delta + \beta\gamma] \frac{d^2 z}{du\, dv}.$$

Il est, je crois, inutile d'insister pour prouver qu'on retrouve très simplement le cas particulier indiqué, après avoir résolu préalablement la question générale dont il dépend.

(*A suivre.*)