ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. APPELL

Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 3 (1886), p. 9-42

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1886_3_3__9_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR LES

FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

DE TROISIÈME ESPÈCE,

PAR M. P. APPELL,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

J'ai indiqué précédemment (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. I et II) une méthode de décomposition des fonctions doublement périodiques de troisième espèce en éléments simples. L'élément de cette décomposition est la fonction

$$\chi_\mu(x,y) = \frac{\pi}{2K}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n\pi y i}{K}} q^{\mu n(n-1)} \cot\frac{\pi}{2K}(x-y-2niK'),$$

et la formule de décomposition est la suivante. Soit $F(z)$ une fonction doublement périodique de troisième espèce vérifiant les deux relations

$$F(z+2K)=F(z), \qquad F(z+2iK')=e^{\frac{-m\pi z i}{K}}F(z),$$

où m désigne un entier positif ou négatif différent de zéro. Supposons que cette fonction $F(z)$ admette, dans un parallélogramme des périodes, les pôles simples a, b, ..., l avec les résidus respectifs A, B, ..., L. Alors, si l'entier m est *négatif*, $m = -\mu$, on a

$$F(z) = A\chi_\mu(z, a) + B\chi_\mu(z, b) + \ldots + L\chi_\mu(z, l);$$

et, si m est *positif*,

$$F(z) = -A\chi_m(a, z) - B\chi_m(b, z) - \ldots - L\chi_m(l, z) + G(z),$$

où $G(z)$ désigne une *fonction entière* vérifiant les mêmes relations que $F(z)$, à savoir

$$G(z + 2K) = G(z), \qquad G(z + 2iK') = e^{\frac{-m\pi z i}{K}} G(z).$$

Si certains pôles étaient multiples, par exemple si le pôle a était d'ordre α, la première formule de décomposition $(m < 0)$ contiendrait linéairement les fonctions

$$\chi_\mu(z, a), \quad D_a\chi_\mu(z, a), \quad \ldots, \quad D_a^{\alpha-1}\chi_\mu(z, a),$$

et la seconde $(m > 0)$, les fonctions

$$\chi_m(a, z), \quad D_a\chi_m(a, z), \quad \ldots, \quad D_a^{\alpha-1}\chi_m(a, z).$$

Je me propose de donner quelques exemples simples de la formule de décomposition dans l'un et l'autre cas, en m'attachant principalement à montrer comment, dans le deuxième cas $(m > 0)$, on peut déterminer la *partie entière* $G(z)$.

I. Je vais appliquer tout d'abord la formule de décomposition en éléments simples aux six fonctions

$$\frac{1}{H(z)H_1(z)}, \quad \frac{1}{\Theta(z)\Theta_1(z)}, \quad \frac{1}{H(z)\Theta_1(z)},$$
$$\frac{1}{H_1(z)\Theta(z)}, \quad \frac{1}{H(z)\Theta(z)}, \quad \frac{1}{H_1(z)\Theta_1(z)}$$

qui n'ont pas été développées par M. Biehler dans sa Thèse. Les développements des fonctions

$$\frac{1}{\Theta^2(z)}, \quad \frac{1}{H^2(z)}, \quad \frac{1}{\Theta_1^2(z)}, \quad \frac{1}{H_1^2(z)}$$

ont été donnés par M. Hermite et se trouvent reproduits dans mon second Mémoire (*Annales de l'École Normale*, 3e série. t. II, p. 18).

Soit

$$\varphi(z) = \frac{1}{H(z)\,H_1(z)};$$

cette fonction vérifie les deux relations

$$\varphi(z+2K) = \varphi(z),$$
$$\varphi(z+2iK') = e^{\frac{2\pi i}{K}\left(z+iK'-\frac{K}{2}\right)}\varphi(z).$$

Si donc on fait, pour un moment,

$$z + iK' - \frac{K}{2} = x$$

et

$$\varphi\left(x - iK' + \frac{K}{2}\right) = \Phi(x),$$

cette fonction Φ vérifie les deux équations

$$\Phi(x+2K) = \Phi(x), \qquad \Phi(x+2iK') = e^{\frac{2\pi x i}{K}}\Phi(x);$$

de plus, elle admet, dans un parallélogramme des périodes, les deux pôles simples

$$a = iK' - \frac{K}{2}, \qquad b = iK' + \frac{K}{2}$$

avec les résidus respectifs

$$\frac{1}{\eta'\eta}, \quad -\frac{1}{\eta'\eta},$$

où

$$\eta = H_1(0), \qquad \eta' = H'(0).$$

On a donc, d'après la formule de décomposition,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\eta'\eta}\chi_2(x, a) - \frac{1}{\eta'\eta}\chi_2(x, b).$$

Par suite, en revenant à la variable z par la formule $x = z + iK' - \frac{K}{2}$ et remplaçant a et b par leurs valeurs

$$\frac{\eta'\eta}{H(z)\,H_1(z)} = \chi_2\left(z + iK' - \frac{K}{2}, iK' - \frac{K}{2}\right) - \chi_2\left(z + iK' - \frac{K}{2}, iK' + \frac{K}{2}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\eta'\eta}{\mathrm{HH}_1} = \frac{\pi}{2\mathrm{K}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{2n^2} \left[\cot \frac{\pi}{2\mathrm{K}} (z - 2ni\mathrm{K}') - \cot \frac{\pi}{2\mathrm{K}} (z - \mathrm{K} - 2ni\mathrm{K}') \right].$$

La seconde cotangente est égale à

$$-\operatorname{tang} \frac{\pi}{2\mathrm{K}} (z - 2ni\mathrm{K}');$$

on a donc enfin, en réduisant,

$$(1) \qquad \frac{\eta'\eta}{\mathrm{HH}_1} = \frac{\pi}{\mathrm{K}} \sum (-1)^n q^{2n^2} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{\mathrm{K}} (z - 2ni\mathrm{K}')}.$$

Soit maintenant

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{\Theta(z)\Theta_1(z)};$$

cette fonction satisfait aux mêmes relations fondamentales que φ; si donc on prend comme nouvelle variable la variable x liée à z par l'équation $x = z + i\mathrm{K}' - \frac{\mathrm{K}}{2}$ et si l'on pose

$$\varphi_1\left(x - i\mathrm{K}' + \frac{\mathrm{K}}{2}\right) = \Phi_1(x),$$

cette fonction $\Phi_1(x)$ vérifie les mêmes relations que Φ. De plus, cette fonction $\Phi_1(x)$ admet, dans un parallélogramme des périodes, les deux pôles d'affixes

$$\frac{\mathrm{K}}{2}, \quad -\frac{\mathrm{K}}{2}$$

avec des résidus égaux tous deux à $\frac{i\sqrt[2]{q}}{\eta'\eta}$. On a donc

$$\Phi_1(x) = \frac{i\sqrt[2]{q}}{\eta'\eta} \left[\chi_2\left(x, \frac{\mathrm{K}}{2}\right) + \chi_2\left(x, -\frac{\mathrm{K}}{2}\right) \right],$$

ou, en revenant à la variable z,

$$\frac{\eta'\eta}{\Theta(z)\Theta_1(z)} = i\sqrt[2]{q} \left[\chi_2\left(z + i\mathrm{K}' - \frac{\mathrm{K}}{2}, \frac{\mathrm{K}}{2}\right) + \chi_2\left(z + i\mathrm{K}' - \frac{\mathrm{K}}{2}, -\frac{\mathrm{K}}{2}\right) \right],$$

ce qui donne

$$\frac{\eta'\eta}{\Theta\Theta_1} = \frac{\pi i}{2\mathrm{K}} \sqrt[2]{q} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{2n(n-1)} \left\{ \cot \frac{\pi}{2\mathrm{K}} [z - (2n-1)\, i\mathrm{K}'] - \operatorname{tang} \frac{\pi}{2\mathrm{K}} [z - (2n-1)\, i\mathrm{K}'] \right\}$$

ou, en réduisant par la formule $\frac{1}{2}(\cot\alpha - \operatorname{tang}\alpha) = \cot 2\alpha$,

$$\text{(2)} \qquad \frac{\eta'\eta}{\Theta\Theta_1} = \frac{\pi i}{\mathrm{K}} \sum (-1)^n q^{\frac{(2n-1)^2}{2}} \cot \frac{\pi}{\mathrm{K}} [z - (2n-1)\, i\mathrm{K}'].$$

On peut arriver plus rapidement à cette formule (2) en remarquant que si l'on fait, pour un instant,

$$\mathrm{K} = 2\mathrm{K}_1, \qquad q = \sqrt[2]{q_1},$$

la fonction $\Phi_1(x)$ vérifie les deux relations

$$\Phi_1(x + 2\mathrm{K}_1) = \Phi_1(x), \qquad \Phi_1(x + 2i\mathrm{K}') = e^{\frac{\pi x i}{\mathrm{K}_1}} \Phi_1(x)$$

et admet, dans le parallélogramme des périodes $2\mathrm{K}_1$ et $2i\mathrm{K}'$, un seul pôle simple

$$x = -\mathrm{K}_1$$

de résidu $\frac{i\sqrt{q}}{\eta'\eta}$. On a donc

$$\frac{\eta'\eta}{\Theta\Theta_1} = i\sqrt{q}\, \chi_1(x, -\mathrm{K}_1) = i\sqrt{q}\, \chi_1(z + i\mathrm{K}' - \mathrm{K}_1, -\mathrm{K}_1),$$

la fonction χ_1 étant formée avec les périodes $2\mathrm{K}_1$ et $2i\mathrm{K}'$,

$$\chi_1(x, a) = \frac{\pi}{2\mathrm{K}_1} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{n\pi a i}{\mathrm{K}_1}} q_1^{n(n-1)} \cot \frac{\pi}{2\mathrm{K}_1} (x - a - 2ni\mathrm{K}');$$

en remplaçant a par $-\mathrm{K}_1$ et x par $z + i\mathrm{K}' - \mathrm{K}_1$, on retrouve la formule (2).

Passons maintenant aux deux fonctions

$$\frac{1}{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)}, \quad \frac{1}{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta(z)}.$$

En posant

$$f(z) = e^{-\frac{\pi z i}{2\mathrm{K}}} \frac{1}{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)},$$

on a

$$f(z+2K)=f(z), \qquad f(z+2iK')=e^{\frac{2\pi i}{K}\left(z-\frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}\right)}f(z);$$

si donc l'on fait

$$z-\frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}=x, \qquad f(z)=f_1(x),$$

cette fonction $f_1(x)$ vérifiera les deux relations

$$f_1(x+2K)=f_1(x), \qquad f_1(x+2iK')=e^{\frac{2\pi x i}{K}}f_1(x),$$

et admettra, dans un parallélogramme des périodes $2K$ et $2iK'$, les deux pôles simples

$$x=-\frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}, \qquad x=\frac{K}{2}-\frac{iK'}{2}$$

avec les résidus

$$\frac{1}{\eta'\theta_1}, \quad \frac{q}{\eta'\theta_1},$$

en posant

$$\theta_1=\Theta_1(0).$$

Donc

$$f_1(x)=\frac{1}{\eta'\theta_1}\chi_2\left(x, \frac{-K+iK'}{2}\right)+\frac{q}{\eta'\theta_1}\chi_2\left(x, \frac{K-iK'}{2}\right).$$

Revenant à la variable z par la formule

$$x=z-\frac{K}{2}+\frac{iK'}{2},$$

on a

$$\frac{\eta'\theta_1}{H\Theta_1}=e^{\frac{\pi z i}{2K}}\chi_2\left(z-\frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}, \frac{-K+iK'}{2}\right)+qe^{\frac{\pi z i}{2K}}\chi_2\left(z-\frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}, \frac{K-iK'}{2}\right).$$

Les deux fonctions χ_2 qui figurent dans cette formule sont

$$\chi_2\left(z-\frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}, \frac{-K+iK'}{2}\right)=\frac{\pi}{2K}\sum(-1)^n q^{2n^2-n}\cot\frac{\pi}{2K}(z-2niK'),$$

$$\chi_2\left(z-\frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}, \frac{K-iK'}{2}\right)=\frac{\pi}{2K}\sum(-1)^n q^{2n^2-3n}\cot\frac{\pi}{2K}[z-K-(2n-1)iK'].$$

Dans l'expression ci-dessus de $\frac{\eta'\theta_1}{H\Theta_1}$, on pourra faire disparaître les exponentielles qui multiplient ces deux fonctions χ_2 en appliquant l'identité

$$e^{\alpha i}\cot\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} + ie^{\alpha i},$$

dans laquelle on fait successivement

$$\alpha = \frac{\pi}{2K}(z - 2niK'),$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2K}[z - K - (2n-1)iK'].$$

Chaque terme de la série se transforme ainsi en une cosécante augmentée d'une exponentielle; dans la somme, la partie provenant de l'exponentielle est

$$e^{\frac{\pi z i}{2K}}\sum(-1)^n(q^{2n^2-n} + q^{2n^2-3n+1}),$$

c'est-à-dire *zéro*, puisque les termes qui correspondent à des valeurs de n, dont la somme est 1, sont égaux et de signes contraires; il ne subsiste donc que la série des cosécantes, et l'on a

$$(3)\quad \frac{\eta'\theta_1}{H\Theta_1} = \frac{\pi}{2K}\sum(-1)^n\left\{\frac{q^{2n^2}}{\sin\frac{\pi}{2K}(z-2niK')} - \frac{iq^{\frac{(2n-1)^2}{2}}}{\cos\frac{\pi}{2K}[z-(2n-1)iK']}\right\}.$$

Si, dans cette formule, on change z en $z + K$, on obtient immédiatement le développement de

$$\frac{1}{H_1(z)\Theta(z)};$$

on a ainsi

$$(4)\quad \frac{\eta'\theta_1}{H_1\Theta} = \frac{\pi}{2K}\sum(-1)^n\left\{\frac{q^{2n^2}}{\cos\frac{\pi}{2K}(z-2niK')} + \frac{iq^{\frac{(2n-1)^2}{2}}}{\sin\frac{\pi}{2K}[z-(2n-1)iK']}\right\}.$$

Dans ce qui précède, pour obtenir une fonction $f(z)$ admettant la période $2K$, nous avons dû multiplier

$$\frac{1}{H(z)\Theta_1(z)}$$

par l'exponentielle $e^{-\frac{\pi z i}{2K}}$ que nous avons de nouveau fait disparaître pour arriver à la formule (3). On peut, dans tous les exemples analogues, éviter cette double transformation de la façon suivante.

Soit une fonction $\mathcal{F}(z)$ qui vérifie deux équations de la forme

$$\mathcal{F}(z+2K) = -\mathcal{F}(z), \qquad \mathcal{F}(z+2iK') = e^{-\frac{m\pi z i}{K}}\mathcal{F}(z),$$

où m est un entier différent de zéro. Considérons la fonction

$$\omega_\mu(x, a) = \frac{\pi}{2K}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n \pi a i}{K}} q^{\mu n^2} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(x-a-2niK')},$$

qui, pour le cas de $\mu = 1$, a déjà été employée par M. Hermite [1] et dont j'ai indiqué précédemment [2] la liaison avec la fonction χ_μ. Si la fonction $\mathcal{F}(z)$ admet dans un parallélogramme des périodes les pôles simples $a, b, \ldots, l$ avec les résidus $A, B, \ldots, L$, et si l'entier m est *négatif*, $m = -\mu$, on pourra l'écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(z) = {} & A\omega_\mu(z-iK', a-iK') \\ & + B\omega_\mu(z-iK', b-iK') + \ldots + L\omega_\mu(z-iK', l-iK').\end{aligned}$$

Pour démontrer cette nouvelle formule de décomposition, il suffit de vérifier, comme on l'a fait dans mon premier Mémoire [3] pour une question analogue, que la fonction de x

$$\mathcal{F}(x)\,\omega_\mu(z-iK', x-iK')$$

admet les périodes $2K$ et $2iK'$. Alors, comme cette fonction de x a pour pôles, dans un parallélogramme élémentaire, les points

$$x = z, \qquad x = a, \qquad x = b, \qquad \ldots, \qquad x = l,$$

avec les résidus

$$-\mathcal{F}(z), \quad A\omega_\mu(z-iK', a-iK'), \quad B\omega_\mu(z-iK', b-iK'), \quad \ldots,$$

en écrivant que la somme de ces résidus est nulle, on obtient immédiatement la formule à démontrer.

---

(1) Voir *Collectanea mathematica in memoriam Dominici Chelini*, p. 4.
(2) *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. II, p. 33.
(3) *Ibid.*, t. I, p. 151, n° 8.

Soit, par exemple,

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{1}{\mathrm{H}\left(z - i\mathrm{K}' + \frac{\mathrm{K}}{2}\right)\Theta_1\left(z - i\mathrm{K}' + \frac{\mathrm{K}}{2}\right)};$$

cette fonction vérifie les deux relations

$$\mathfrak{F}(z + 2\mathrm{K}) = -\mathfrak{F}(z), \qquad \mathfrak{F}(z + 2i\mathrm{K}') = e^{\frac{2\pi z i}{\mathrm{K}}}\mathfrak{F}(z);$$

elle admet, dans un parallélogramme élémentaire, les deux pôles simples

$$a = i\mathrm{K}' - \frac{\mathrm{K}}{2}, \qquad b = \frac{\mathrm{K}}{2}$$

avec les résidus

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\eta'\theta_1}, \qquad \mathrm{B} = \frac{i\sqrt{q}}{\eta'\theta_1}.$$

Donc

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{1}{\eta'\theta_1}\omega_2\left(z - i\mathrm{K}', \ -\frac{\mathrm{K}}{2}\right) + \frac{i\sqrt{q}}{\eta'\theta_1}\omega_2\left(z - i\mathrm{K}', \ \frac{\mathrm{K}}{2} - i\mathrm{K}'\right).$$

Changeant z en $z + i\mathrm{K}' - \frac{\mathrm{K}}{2}$, on obtient

$$\frac{\eta'\theta_1}{\mathrm{H}(z)\Theta_1(z)} = \omega_2\left(z - \frac{\mathrm{K}}{2}, \ -\frac{\mathrm{K}}{2}\right) + i\sqrt{q}\,\omega_2\left(z - \frac{\mathrm{K}}{2}, \ \frac{\mathrm{K}}{2} - i\mathrm{K}'\right),$$

ce qui, d'après l'expression de $\omega_2(z, a)$, est la formule (3).

Soit enfin

$$\psi(z) = \frac{1}{\mathrm{H}(z)\Theta(z)}.$$

Cette fonction ψ vérifie les deux relations

$$\psi(z + 2\mathrm{K}) = -\psi(z), \qquad \psi(z + 2i\mathrm{K}') = e^{\frac{2\pi i}{\mathrm{K}}(z + i\mathrm{K}')}\psi(z).$$

Si donc on prend pour nouvelle variable

$$z + i\mathrm{K}' = x,$$

et si l'on fait

$$\psi(z) = \psi_1(x),$$

on aura

$$\psi_1(x+2\mathrm{K})=-\psi_1(x), \qquad \psi_1(x+2i\mathrm{K}')=e^{\frac{2\pi x i}{\mathrm{K}}}\psi_1(x).$$

Comme cette fonction $\psi_1(x)$ admet les deux pôles simples

$$a=i\mathrm{K}', \qquad b=2i\mathrm{K}',$$

avec les résidus

$$\mathrm{A}=\frac{1}{\eta'\theta}, \qquad \mathrm{B}=-\frac{\sqrt{q}}{\eta'\theta},$$

où $\theta=\Theta(0)$, on aura

$$\psi_1(x)=\mathrm{A}\omega_2(x-i\mathrm{K}', a-i\mathrm{K}')+\mathrm{B}\omega_2(x-i\mathrm{K}', b-i\mathrm{K}'),$$

c'est-à-dire en revenant à la variable z par la formule $x=z+i\mathrm{K}'$ et remplaçant a, b, A et B par leurs valeurs

$$\frac{\eta'\theta}{\mathrm{H}(z)\Theta(z)}=\omega_2(z,0)-\sqrt{q}\,\omega_2(z,i\mathrm{K}'),$$

c'est-à-dire

$$(5)\qquad \frac{\eta'\theta}{\mathrm{H}\Theta}=\frac{\pi}{2\mathrm{K}}\sum\left\{\frac{q^{2n^2}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z-2ni\mathrm{K}')}-\frac{q^{\frac{(2n-1)^2}{2}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}[z-(2n-1)i\mathrm{K}']}\right\};$$

d'où l'on conclut immédiatement, en changeant z en $z+\mathrm{K}$,

$$(6)\qquad \frac{\eta'\theta}{\mathrm{H}_1\Theta_1}=\frac{\pi}{2\mathrm{K}}\sum\left\{\frac{q^{2n^2}}{\cos\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z-2ni\mathrm{K}')}-\frac{q^{\frac{(2n-1)^2}{2}}}{\cos\frac{\pi}{2\mathrm{K}}[z-(2n-1)i\mathrm{K}']}\right\}.$$

Telles sont les six formules que nous voulions obtenir. Comme l'on a

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\eta'=\eta\theta\theta_1,$$

on peut les écrire de la façon suivante, en désignant par μ un entier qui prend toutes les valeurs *paires* de $-\infty$ à $+\infty$ et par ν un entier qui prend toutes les valeurs *impaires* de $-\infty$ à $+\infty$:

$$\frac{\eta^2 \theta\theta_1}{\mathrm{HH}_1} = 2\sum i^\mu q^{\frac{\mu^2}{2}} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{\mathrm{K}}(z+\mu i\mathrm{K}')},$$

$$\frac{\eta^2 \theta\theta_1}{\Theta\Theta_1} = 2\sum i^\nu q^{\frac{\nu^2}{2}} \cot\frac{\pi}{\mathrm{K}}(z+\nu i\mathrm{K}'),$$

$$\frac{\eta\theta\theta_1^2}{\mathrm{H}\Theta_1} = \sum\left[\frac{i^\mu q^{\frac{\mu^2}{2}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z+\mu i\mathrm{K}')} - \frac{i^\nu q^{\frac{\nu^2}{2}}}{\cos\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z+\nu i\mathrm{K}')}\right],$$

$$\frac{\eta\theta\theta_1^2}{\mathrm{H}_1\Theta} = \sum\left[\frac{i^\mu q^{\frac{\mu^2}{2}}}{\cos\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z+\mu i\mathrm{K}')} + \frac{i^\nu q^{\frac{\nu^2}{2}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z+\nu i\mathrm{K}')}\right],$$

$$\frac{\eta\theta^2\theta_1}{\mathrm{H}\Theta} = \sum\left[\frac{q^{\frac{\mu^2}{2}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z+\mu i\mathrm{K}')} - \frac{q^{\frac{\nu^2}{2}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z+\nu i\mathrm{K}')}\right],$$

$$\frac{\eta\theta^2\theta_1}{\mathrm{H}_1\Theta_1} = \sum\left[\frac{q^{\frac{\mu^2}{2}}}{\cos\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z+\mu i\mathrm{K}')} - \frac{q^{\frac{\nu^2}{2}}}{\cos\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z+\nu i\mathrm{K}')}\right].$$

2. Pour faire une autre application de la formule de décomposition, considérons la fonction [1]

$$\psi_m(z,\alpha) = e^{\frac{m\pi(z-\alpha)i}{2\mathrm{K}}} \frac{\mathrm{H}'(0)}{\mathrm{H}(z-\alpha)} \frac{\mathrm{H}(z-a_1)\mathrm{H}(z-a_2)\ldots\mathrm{H}(z-a_m)\mathrm{H}(z+s-\alpha-m\mathrm{K})}{\mathrm{H}(\alpha-a_1)\mathrm{H}(\alpha-a_2)\ldots\mathrm{H}(\alpha-a_m)\mathrm{H}(s-m\mathrm{K})},$$

où m désigne un entier positif, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ des constantes et s la somme

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_m.$$

Cette fonction, considérée comme fonction de α, vérifie les deux relations

$$\psi_m(z, \alpha+2\mathrm{K}) = \psi_m(z,\alpha),$$

$$\psi_m(z, \alpha+2i\mathrm{K}') = e^{\frac{m\pi\alpha i}{\mathrm{K}}}\psi_m(z,\alpha);$$

(1) Voir *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. I, p. 141.

de plus, elle admet, dans un parallélogramme des périodes, les pôles simples

$$\alpha = z, \quad \alpha = a_1, \quad \alpha = a_2, \quad \ldots, \quad \alpha = a_m$$

avec les résidus

$$-1, \quad G_1(z), \quad G_2(z), \quad \ldots, \quad G_m(z),$$

où l'on appelle $G_\nu(z)$ la fonction entière de z,

$$G_\nu(z) = e^{\frac{m\pi(z-a_\nu)i}{2K}} \frac{H(z-a_1)\ldots H(z-a_{\nu-1})H(z-a_{\nu+1})\ldots H(z-a_m)H(z+s-a_\nu-mK)}{H(a_\nu-a_1)\ldots H(a_\nu-a_{\nu-1})H(a_\nu-a_{\nu+1})\ldots H(a_\nu-a_m)H(s-mK)}.$$

On a donc, d'après la formule de décomposition appliquée à $\psi_m(z, \alpha)$ considérée comme fonction de α,

$$(7) \quad \begin{cases} \psi_m(z, \alpha) = -\chi_m(\alpha, z) + G_1(z)\chi_m(\alpha, a_1) \\ \qquad + G_2(z)\chi_m(\alpha, a_2) + \ldots + G_m(z)\chi_m(\alpha, a_m). \end{cases}$$

On retrouverait cette même formule en décomposant la fonction $\psi_m(z, \alpha)$ considérée comme fonction de z en un élément simple $-\chi_m(\alpha, z)$ et en une partie entière en z.

En supposant, par exemple, $m = 1$ et écrivant a au lieu de a_1, la formule précédente donne

$$\begin{aligned} \psi_1(z, \alpha) &= e^{\frac{\pi(z-\alpha)i}{2K}} \frac{H'(0)}{H(z-\alpha)} \frac{H(z-a)H(z+a-\alpha-K)}{H(\alpha-a)H(a-K)} \\ &= -\chi_1(\alpha, z) + e^{\frac{\pi(z-a)i}{2K}} \frac{H(z-K)}{H(a-K)}\chi_1(\alpha, a). \end{aligned}$$

Voici une conséquence intéressante de cette relation. Faisons-y

$$\alpha = z + a + K;$$

alors le premier membre s'annule, et il reste une équation qui peut s'écrire

$$e^{\frac{\pi a i}{2K}} H_1(a)\chi_1(z+a+K, z) = e^{\frac{\pi z i}{2K}} H_1(z)\chi_1(a+z+K, a),$$

ou encore

$$e^{\frac{\pi a i}{2K}} H_1(a)\varpi(z, a) = e^{\frac{\pi z i}{2K}} H_1(z)\varpi(a, z),$$

en posant

$$\varpi(z, a) = \chi_1(z+a+K, z),$$

formule qui donne la permutation de l'argument et du paramètre dans la fonction $\varpi(z, a)$. Cette formule est, à la différence des notations près, identique à celle que M. Hermite a établie, dans les *Collectanea mathematica*, et qu'il écrit

$$\frac{\Phi(x, \omega)}{\mathrm{H}(\omega)} = i \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2} e^{\frac{n i \pi x}{\mathrm{K}}}}{\operatorname{tang} \frac{\pi}{2\mathrm{K}} (\omega - 2 n i \mathrm{K}')}.$$

On obtiendrait une formule analogue relative à la fonction χ_m en faisant, dans l'équation (7),

$$\alpha = z + s - m\mathrm{K}$$

et remarquant qu'alors le premier membre $\psi_m(z, \alpha)$ devient nul identiquement.

3. Les applications qui précèdent sont relatives à des fonctions de troisième espèce qui, mises sous la forme du quotient de deux produits de fonctions Θ, contiennent plus de fonctions Θ au dénominateur qu'au numérateur.

Envisageons maintenant une fonction uniforme $\mathrm{F}(z)$ vérifiant les deux relations

$$\mathrm{F}(z + 2\mathrm{K}) = \mathrm{F}(z), \qquad \mathrm{F}(z + 2i\mathrm{K}') = e^{-\frac{m\pi z i}{\mathrm{K}}} \mathrm{F}(z),$$

où m est un entier *positif*. Alors, en supposant que cette fonction n'ait que des pôles à distance finie, on pourra la mettre sous la forme d'un quotient de produits de fonctions Θ, dans lequel il y aura m fonctions Θ de plus au numérateur qu'au dénominateur. Si l'on appelle

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad l$$

les pôles de cette fonction dans un parallélogramme élémentaire, ces pôles étant supposés simples, et

$$\mathrm{A}, \quad \mathrm{B}, \quad \ldots, \quad \mathrm{L}$$

les résidus correspondants, on pourra écrire la fonction $\mathrm{F}(z)$ de la façon suivante

$$\mathrm{F}(z) = -\mathrm{A}\chi_m(a, z) - \mathrm{B}\chi_m(b, z) - \ldots - \mathrm{L}\chi_m(l, z) + \mathrm{G}(z),$$

où $G(z)$ désigne une fonction entière de z. Comme chaque fonction, telle que $\chi_m(a, z)$, vérifie les mêmes relations que $F(z)$, à savoir

$$\chi_m(a, z+2K) = \chi_m(a, z), \qquad \chi_m(a, z+2iK') = e^{-\frac{m\pi z i}{K}} \chi_m(a, z),$$

la fonction entière $G(z)$ devra vérifier ces mêmes relations

$$G(z+2K) = G(z), \qquad G(z+2iK') = e^{-\frac{m\pi z i}{K}} G(z).$$

Cette fonction $G(z)$ pourra donc, comme il est bien connu, s'exprimer d'une façon linéaire et homogène au moyen de m fonctions particulières vérifiant les mêmes relations.

Voici une première méthode pour déterminer cette partie entière $G(z)$. Reprenons la fonction appelée $\psi_m(z, \alpha)$,

$$\psi_m(z, \alpha) = e^{\frac{m\pi(z-\alpha)i}{2K}} \frac{H'(0)}{H(z-\alpha)} \frac{H(z+s-\alpha-mK)}{H(s-mK)} \prod_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{H(z-a_\nu)}{H(\alpha-a_\nu)},$$

dans laquelle $a_1, a_2, \ldots, a_m$ désignent des constantes et s la somme $a_1+a_2+\ldots+a_m$. Cette fonction, considérée comme fonction de α, admet dans un parallélogramme élémentaire les pôles

$$\alpha = z, \qquad \alpha = a_1, \qquad \alpha = a_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha = a_m;$$

appelons, comme plus haut,

$$G_1(z), \quad G_2(z), \quad \ldots, \quad G_m(z)$$

les résidus de cette fonction relatifs aux pôles $a_1, a_2, \ldots, a_m$, résidus qui sont des fonctions entières de z.

La fonction considérée $F(z)$ pourra alors s'écrire ainsi

$$\begin{aligned} F(z) = {} & A\psi_m(z, a) + B\psi_m(z, b) + \ldots + L\psi_m(z, l) \\ & + F(a_1)G_1(z) + F(a_2)G_2(z) + \ldots + F(a_m)G_m(z). \end{aligned}$$

Cette formule a été établie dans mon premier Mémoire (1); elle s'obtient en remarquant que la fonction de α,

$$F(\alpha)\psi_m(z, \alpha),$$

(1) *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. I, p. 141 et suiv.

est doublement périodique et, en écrivant que la somme de ses résidus relatifs aux pôles situés dans un parallélogramme des périodes est *nulle*.

Nous venons de voir (p. 20) que l'on a

$$\psi_m(z, a) = -\chi_m(a, z) + G_1(z)\chi_m(a, a_1) + G_2(z)\chi_m(a, a_2) + \ldots + G_m(z)\chi_m(a, a_m),$$
$$\psi_m(z, b) = -\chi_m(b, z) + G_1(z)\chi_m(b, a_1) + G_2(z)\chi_m(b, a_2) + \ldots + G_m(z)\chi_m(b, a_m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\psi_m(z, l) = -\chi_m(l, z) + G_1(z)\chi_m(l, a_1) + G_2(z)\chi_m(l, a_2) + \ldots + G_m(z)\chi_m(l, a_m);$$

donc, en remplaçant dans l'expression de $F(z)$ les fonctions $\psi_m(z, a)$, $\psi_m(z, b)$, ..., $\psi_m(z, l)$ par leurs valeurs ci-dessus, on a

$$F(z) = -A\chi_m(a, z) - B\chi_m(b, z) - \ldots - L\chi_m(l, z) + G(z), \tag{8}$$

où la partie *entière* $G(z)$ est donnée par la formule

$$G(z) = \lambda_1 G_1(z) + \lambda_2 G_2(z) + \ldots + \lambda_m G_m(z),$$

le coefficient constant λ_ν ayant pour valeur

$$\lambda_\nu = F(a_\nu) + A\chi_m(a, a_\nu) + B\chi_m(b, a_\nu) + L\chi_m(l, a_\nu)$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Telle est donc l'expression de la partie entière cherchée; il est à remarquer que cette partie entière $G(z)$ ne doit dépendre en aucune façon des constantes a_1, a_2, ..., a_m qui figurent dans son expression. On pourra, dans chaque exemple particulier, choisir les valeurs de ces constantes, de façon à simplifier le plus possible la forme de $G(z)$.

J'ai écrit les formules précédentes en supposant les constantes a_1, a_2, ..., a_m différentes à des multiples des périodes près; si plusieurs de ces constantes devenaient égales à des multiples des périodes près, ces formules subiraient des modifications faciles à apercevoir d'après la façon même dont elles ont été établies.

La méthode que je viens de donner pour déterminer la partie entière $G(z)$ revient à la méthode des coefficients indéterminés. En effet, soit

$$F(z) = -A\chi_m(a, z) - B\chi_m(b, z) - \ldots - L\chi_m(l, z) + G(z),$$

où $G(z)$ est encore inconnue. Comme cette fonction entière vérifie les relations

$$G(z+2K)=G(z), \qquad G(z+2iK')=e^{-\frac{m\pi z i}{K}}G(z),$$

elle est une fonction linéaire à coefficients constants de m fonctions particulières vérifiant ces mêmes relations, par exemple des fonctions particulières appelées ci-dessus

$$G_1(z), \quad G_2(z), \quad \ldots, \quad G_m(z),$$

et l'on aura

$$G(z)=\lambda_1 G_1(z)+\lambda_2 G_2(z)+\ldots+\lambda_m G_m(z),$$

où il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients constants $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Pour cela, faisons dans la formule de décomposition $z=a_\nu$ et remarquons que, d'après leurs expressions, toutes les fonctions $G_1(z)$, $G_2(z), \ldots, G_m(z)$ s'annulent pour $z=a_\nu$, *excepté* $G_\nu(z)$ qui devient égale à l'unité; la fonction $G(a_\nu)$ sera donc égale à λ_ν, et nous aurons

$$F(a_\nu)=-A\chi_m(a, a_\nu)-B\chi_m(b, a_\nu)-\ldots-L\chi_m(l, a_\nu)+\lambda_\nu,$$

équation qui donne pour λ_ν la valeur déjà écrite plus haut.

4. Soit, par exemple, à décomposer la fonction

$$F(z)=\frac{H^2(z)}{\Theta(z)};$$

cette fonction vérifie les deux relations

$$F(z+2K)=F(z), \qquad F(z+2iK')=e^{-\frac{i\pi}{K}(z+K+iK')}F(z);$$

si donc on fait

$$z+K+iK'=t$$

et

$$F(z)=F_1(t),$$

on aura une fonction $F_1(t)$ vérifiant les deux relations

$$F_1(t+2K)=F_1(t), \qquad F_1(t+2iK')=e^{-\frac{\pi t i}{K}}F_1(t),$$

et admettant, dans un parallélogramme des périodes, le seul pôle $t=K$ avec le résidu

$$\frac{-i}{\sqrt[4]{q}}\,\frac{\theta^2}{\eta'}.$$

Comme ici l'entier désigné par m est égal à l'unité, on aura immédiatement

$$F_1(t) = \frac{i}{\sqrt[4]{q}} \frac{\theta^2}{\eta'} \chi_1(K, t) + G(t),$$

$G(t)$ étant une fonction entière telle que

$$G(t+2K) = G(t), \qquad G(t+2iK') = e^{-\frac{\pi t i}{K}} G(t);$$

cette fonction $G(t)$ est donc de la forme

$$G(t) = \lambda e^{\frac{\pi t i}{2K}} H_1(t),$$

où λ est une constante qui reste à déterminer.

Revenant à la variable z par la formule

$$t = z + K + iK',$$

on a

$$F(z) = \frac{H^2(z)}{\Theta(z)} = \frac{i}{\sqrt[4]{q}} \frac{\theta^2}{\eta'} \chi_1(K, z+K+iK') - i\lambda \sqrt[4]{q}\, \Theta(z).$$

On déterminera λ en faisant $z = 0$; on obtient

$$i\lambda\sqrt[4]{q} = \frac{i}{\sqrt[4]{q}} \frac{\theta^2}{\eta'} \chi_1(K, K+iK');$$

donc

$$-i\sqrt[4]{q}\frac{\eta'}{\theta} \frac{H^2(z)}{\Theta(z)} = \theta\chi_1(K, z+K+iK') - \Theta(z)\chi_1(K, K+iK').$$

Telle est la formule cherchée. Comparons-la à celle que donne M. Biehler à la page 22 de sa Thèse. Pour cela, remplaçons la fonction χ_1 par son expression

$$\chi_1(K, z+K+iK') = -\frac{\pi}{2K} \sum (-1)^n e^{\frac{n\pi z i}{K}} q^{n^2} \cot \frac{\pi}{2K}[z + (2n+1)iK'],$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs entières de n, de $-\infty$ à $+\infty$. En partant de l'identité

$$\cot\frac{\pi}{2K}[z+(2n+1)iK'] = -i + \frac{e^{\frac{i\pi}{2K}[z+(2n+1)iK']}}{\sin\frac{\pi}{2K}[z+(2n+1)iK']},$$

on trouve immédiatement

$$\chi_1(\mathrm{K}, z+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') = \frac{\pi i}{2\mathrm{K}}\Theta(z) + \frac{\pi i}{2\mathrm{K}}\sqrt[4]{q}\,\mathrm{Z}\left(\frac{\pi z}{2\mathrm{K}}\right)$$

en posant

$$\mathrm{Z}\left(\frac{\pi z}{2\mathrm{K}}\right) = i\sum(-1)^n e^{\frac{(2n+1)\pi z i}{2\mathrm{K}}} \frac{q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}[z+(2n+1)i\mathrm{K}']}.$$

Faisant $z=0$, on aura

$$\chi_1(\mathrm{K}, \mathrm{K}+i\mathrm{K}') = \frac{\pi i}{2\mathrm{K}}\theta + \frac{\pi i}{2\mathrm{K}}\sqrt[4]{q}\,\mathrm{Z}(0).$$

Si l'on porte ces expressions de $\chi_1(\mathrm{K}, z+\mathrm{K}+i\mathrm{K}')$ et de $\chi_1(\mathrm{K}, \mathrm{K}+i\mathrm{K}')$ dans la formule de décomposition, et si l'on remarque que

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\frac{\eta'}{\theta} = \theta_1\eta,$$

il vient

$$\theta_1\eta\frac{\mathrm{H}^2(z)}{\Theta(z)} = \mathrm{Z}(0)\,\Theta(z) - \theta\,\mathrm{Z}\left(\frac{\pi z}{2\mathrm{K}}\right). \tag{8}$$

Cette formule permet de retrouver l'expression de $\theta_1\eta\frac{\mathrm{H}^2(z)}{\Theta(z)}$ donnée par M. Biehler, d'après M. Hermite ([1]); il suffira de poser avec M. Biehler

$$\frac{\pi z}{2\mathrm{K}} = x$$

et de développer la fonction paire $\mathrm{Z}(x)$ suivant les cosinus des multiples de x. On retrouve ainsi le développement que M. Hermite appelle $\mathrm{Z}(x)$, développement qui n'est valable que dans une certaine bande du plan. On vérifie aisément que l'on a

$$\frac{\pi i}{2\mathrm{K}}\mathrm{Z}\left(\frac{\pi z}{2\mathrm{K}}\right) = \sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi z i}{2\mathrm{K}}}\,\omega_1(\mathrm{K}, z+\mathrm{K}+i\mathrm{K}').$$

Si l'on change, dans la formule (8) qui vient d'être établie, z en

([1]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, p. 3 et 4; 1862.

$z + iK'$, on obtient la nouvelle formule

$$\theta_1 \eta \frac{\Theta^2(z)}{H(z)} = Z(0)\,H(z) + \theta \sum (-1)^n e^{\frac{n\pi z i}{K}} \frac{q^{n^2}}{\sin\frac{\pi}{2K}(z + 2niK')}.$$

La série qui est multipliée par θ dans le second membre définit une fonction $U\left(\frac{\pi z}{2K}\right)$ dont le développement en série trigonométrique est identique à celui que M. Biehler désigne par $U(x)$ (Thèse, p. 22). On voit que l'on a

$$\frac{\pi}{2K} U\left(\frac{\pi z}{2K}\right) = -\,\omega_1(K, z + K).$$

L'application de la même méthode aux fonctions de la forme

$$\frac{H(z)\,\Theta_1(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)},$$

qui contiennent au numérateur le produit de trois fonctions Θ différentes et au dénominateur la quatrième fonction Θ, fournit les développements de ces fonctions tels qu'ils sont donnés par M. Biehler (Thèse, p. 28). Pour ces fonctions, la formule de décomposition en éléments simples se présente d'une façon très commode, car la partie entière est nulle. C'est ce qui résulte immédiatement des formules que j'ai données dans un précédent Mémoire (*Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. II, p. 29).

Mais, si l'on suppose que deux des trois fonctions Θ du numérateur deviennent égales, c'est-à-dire si l'on considère l'une des vingt-quatre fonctions de la forme

$$\frac{\Theta_1^2(z)\,H_1(z)}{H(z)},$$

la formule de décomposition en éléments simples donne un résultat d'une forme qui est différente de celle trouvée par M. Biehler.

Soit, en effet,

$$F(z) = \frac{\Theta_1^2(z)\,H_1(z)}{H(z)};$$

cette fonction vérifie les relations fondamentales

$$F(z + 2K) = F(z), \qquad F(z + 2iK') = e^{-\frac{2i\pi}{K}\left(z + iK' + \frac{K}{2}\right)} F(z);$$

si donc on pose

$$z + iK' + \frac{K}{2} = t, \qquad F(z) = f(t),$$

la fonction $f(t)$ vérifie les relations

$$f(t + 2K) = f(t), \qquad f(t + 2iK') = e^{-\frac{2\pi t i}{K}} f(t)$$

et admet, dans un parallélogramme élémentaire, le pôle

$$t = iK' + \frac{K}{2}$$

avec le résidu $\frac{\theta_1^2 \eta}{\eta'}$. On a donc

$$f(t) = -\frac{\theta_1^2 \eta}{\eta'} \chi_2\left(iK' + \frac{K}{2}, t\right) + g(t),$$

où $g(t)$ est une fonction entière vérifiant les mêmes relations que $f(t)$. Revenant à la variable z par la formule

$$t = z + iK' + \frac{K}{2}$$

et posant

$$g(t) = G(z),$$

on a

$$F(z) = -\frac{\theta_1^2 \eta}{\eta'} \chi_2\left(iK' + \frac{K}{2}, z + iK' + \frac{K}{2}\right) + G(z),$$

où la fonction entière $G(z)$ vérifie les mêmes relations que $F(z)$

$$G(z + 2K) = G(z), \qquad G(z + 2iK') = e^{-\frac{2\pi i}{K}\left(z + iK' + \frac{K}{2}\right)} G(z).$$

Comme les deux fonctions entières

$$\Theta(z)\,\Theta_1(z), \quad H(z)\,H_1(z)$$

vérifient ces mêmes relations et sont linéairement indépendantes, la fonction $G(z)$, d'après un théorème connu, sera de la forme

$$G(z) = A\,\Theta(z)\,\Theta_1(z) + B\,H(z)\,H_1(z),$$

A et B étant des constantes qui se déterminent comme il suit. Dans la formule trouvée

$$\frac{\Theta_1^2(z)\,H_1(z)}{H(z)} = -\frac{\theta_1^2 \eta}{\eta'} \chi_2\left(iK' + \frac{K}{2}, z + iK' + \frac{K}{2}\right) + A\,\Theta(z)\,\Theta_1(z) + B\,H(z)\,H_1(z),$$

faisons successivement $z = -\mathrm{K}$ et $z = -i\mathrm{K}' - \mathrm{K}$; nous aurons les deux équations

$$o = -\frac{\theta_1^2 \eta}{\eta'} \chi_2\left(i\mathrm{K}' + \frac{\mathrm{K}}{2},\ i\mathrm{K}' - \frac{\mathrm{K}}{2}\right) + \mathrm{A}\,\theta\theta_1,$$

$$o = -\frac{\theta_1^2 \eta}{\eta'} \chi_2\left(i\mathrm{K}' + \frac{\mathrm{K}}{2},\ -\frac{\mathrm{K}}{2}\right) + \frac{i\mathrm{B}}{\sqrt{q}}\,\theta\theta_1,$$

qui donnent A et B. Il suffit d'écrire la série qui définit

$$\chi_2\left(i\mathrm{K}' + \frac{\mathrm{K}}{2},\ i\mathrm{K}' - \frac{\mathrm{K}}{2}\right)$$

pour voir que les termes de cette série sont deux à deux égaux et de signes contraires et que, par suite, le coefficient A est *nul*. Remplaçant alors A par o et B par la valeur que nous venons de trouver, nous aurons

$$\frac{\eta'\theta}{\theta_1\eta}\,\frac{\Theta_1^2 \mathrm{H}_1}{\mathrm{H}} = -\theta\theta_1 \chi_2\left(i\mathrm{K}' + \frac{\mathrm{K}}{2},\ z + i\mathrm{K}' + \frac{\mathrm{K}}{2}\right) - i\sqrt{q}\,\chi_2\left(i\mathrm{K}' + \frac{\mathrm{K}}{2},\ -\frac{\mathrm{K}}{2}\right)\mathrm{H}\mathrm{H}_1,$$

qui est la formule de décomposition cherchée.

Pour la comparer à la formule de M. Biehler (Thèse, p. 37 et 38), remplaçons la fonction χ_2 par son expression

$$\chi_2\left(i\mathrm{K}' + \frac{\mathrm{K}}{2},\ z + i\mathrm{K}' + \frac{\mathrm{K}}{2}\right) = -\frac{\pi}{2\mathrm{K}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{\frac{2n\pi z i}{\mathrm{K}}} q^{2n^2} \cot \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z + 2ni\mathrm{K}'),$$

d'où

$$\chi_2\left(i\mathrm{K}' + \frac{\mathrm{K}}{2},\ -\frac{\mathrm{K}}{2}\right) = +\frac{\pi}{2\mathrm{K}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{2n^2 - 2n} \operatorname{tang} \frac{(2n-1)\pi\mathrm{K}' i}{2\mathrm{K}}.$$

Substituant ces séries dans la formule trouvée et remarquant que

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\eta' = \theta\theta_1\eta,$$

il vient enfin

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\theta}{\theta_1}\,\frac{\Theta_1^2 \mathrm{H}_1}{\mathrm{H}} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{\frac{2n\pi z i}{\mathrm{K}}} q^{2n^2} \cot \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z + 2ni\mathrm{K}') \\ &\quad - i\frac{\mathrm{H}\mathrm{H}_1}{\theta\theta_1} \sum (-1)^n q^{\frac{(2n-1)^2}{2}} \operatorname{tang} \frac{(2n-1)\pi\mathrm{K}' i}{2\mathrm{K}}. \end{aligned}\right.$$

La formule de M. Biehler (Thèse, p. 38) est

$$(10)\qquad \frac{\theta}{\theta_1}\,\frac{\Theta_1^2\,H_1}{H} = U^{(2)}(x) - \frac{Z_1^{(2)}(o)}{F_1^{(2)}(o)}\,\Phi^{(2)}(x);$$

cette formule est valable dans une certaine bande du plan. Si l'on développe en série trigonométrique la première fonction qui figure dans la formule (9), c'est-à-dire

$$-\frac{2K}{\pi}\chi_2\left(iK' + \frac{K}{2},\ z + iK' + \frac{K}{2}\right),$$

développement qui se déduit de celui que j'ai donné dans les *Annales de l'École Normale* [3^e série, t. II, p. 22, formule (8)], en y remplaçant a par $\frac{K}{2}$ et x par $z + \frac{K}{2}$, on retrouve la fonction $U^{(2)}(x)$ de M. Biehler, dans laquelle $x = \frac{\pi z}{2K}$.

Pour comparer les deux seconds termes des deux formules, je remarque d'abord que les deux fonctions appelées par M. Biehler $F^{(2)}(x)$ et $F_1^{(2)}(x)$ sont identiques, et que l'on a

$$F^{(2)}(x) = F_1^{(2)}(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{2n^2} e^{\frac{2n\pi z i}{K}},$$

en supposant toujours $x = \frac{\pi z}{2K}$. D'autre part, on sait, et la méthode des coefficients indéterminés montre immédiatement que l'on a

$$\Theta(z)\,\Theta_1(z) = A_0\sum(-1)^n q^{2n^2} e^{\frac{2n\pi z i}{K}} = A_0\,F^{(2)}(x);$$

si l'on remplace $\Theta(z)$ et $\Theta_1(z)$ par leurs développements en série d'exponentielles et si l'on identifie les termes constants des deux membres, on trouve

$$A_0 = \sum(-1)^n q^{2n^2} = F^{(2)}(o).$$

Donc

$$\Theta(z)\,\Theta_1(z) = F^{(2)}(o)\,F^{(2)}(x)$$

et, pour $z = o$,

$$\theta\theta_1 = [F^{(2)}(o)]^2, \qquad F^{(2)}(o) = \sqrt{\theta\theta_1} \quad (^1).$$

---

(1) *Voir* un article de M. Hermite : *Sur quelques formules relatives au module dans la théorie des fonctions elliptiques* (*Journ. de Mathém. pures et appliquées*, t. IX, p. 4; 1864).

Puis, dans la formule que nous venons de trouver

$$\Theta(z)\,\Theta_1(z) = F^{(2)}(0)\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{2n^2} e^{\frac{2n\pi z i}{K}},$$

remplaçons z par $z + iK'$; nous avons, après réduction,

$$iH(z)\,H_1(z) = F^{(2)}(0)\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{2}} e^{\frac{(2n+1)\pi z i}{K}}.$$

Or la série du second membre définit une fonction que M. Biehler appelle

$$\iota\,\Phi^{(2)}(x),$$

comme on le voit en groupant ensemble les termes qui correspondent à des valeurs de $(2n+1)$ égales et de signes contraires. Donc

$$H(z)\,H_1(z) = F^{(2)}(0)\,\Phi^{(2)}(x);$$

comme

$$F^{(2)}(0) = F_1^{(2)}(0) = \sqrt{\theta\theta_1},$$

on a enfin

$$\frac{H(z)\,H_1(z)}{\theta\theta_1} = \frac{\Phi^{(2)}(x)}{F_1^{(2)}(0)}.$$

Et alors la comparaison des seconds termes des deux formules (9) et (10) donne

$$Z_1^{(2)}(0) = \iota\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\frac{(2n-1)^2}{2}} \operatorname{tang}\frac{(2n-1)\pi K'\iota}{2K},$$

ce qu'il est aisé de vérifier.

En changeant, dans la formule (9), z en $z + K$, $z + iK'$, $z + K + iK'$, on en déduit trois autres formules dont la comparaison avec celles de la page 38 de la Thèse de M. Biehler donne la définition de la fonction $Z^{(2)}(x)$, dans tout le plan, à l'aide d'un élément simple χ_2. Ayant ainsi établi les quatre formules d'un groupe, suivant l'expression de M. Biehler, on peut vérifier ou retrouver toutes les autres en se servant des relations linéaires qu'il y a entre les carrés de trois fonctions Θ. Ainsi la relation

$$k' H^2(z) + H_1^2(z) = k\,\Theta_1^2(z)$$

donne

$$\frac{H_1^2(z)}{H(z)} = k\frac{\Theta_1^2(z)}{H(z)} - k'H(z);$$

et en multipliant les deux membres par une des trois fonctions,

$$H_1(z), \quad \Theta(z), \quad \Theta_1(z),$$

on obtient des relations dont chacune exprime une des fonctions de M. Biehler en fonction d'une autre et d'une partie entière.

5. La méthode de détermination de la partie entière que je viens de donner et d'appliquer à quelques exemples est la méthode des coefficients indéterminés. En voici une autre qui permet d'établir la formule de décomposition et de déterminer en même temps la partie entière. Cette méthode est celle qui a été employée par M. Hermite pour les fonctions de première et seconde espèce.

Soit une fonction uniforme $F(z)$ vérifiant les deux relations

$$F(z+2K) = F(z), \qquad F(z+2iK') = e^{-\frac{m\pi zi}{K}}F(z)$$

où m est un entier positif. L'élément simple $\chi_m(x, z)$ envisagé comme fonction de x vérifie les deux relations

$$\begin{aligned}
\chi_m(x+2K, z) &= \chi_m(x, z)\\
\chi_m(x+2iK', z) &= e^{\frac{m\pi xi}{K}}\chi_m(x, z) - \frac{\pi i}{2K}\left(1+e^{\frac{m\pi xi}{K}}\right)g_0^{(m)}(z)\\
&\quad - \frac{\pi i}{K}\sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} e^{\frac{(m-\nu)\pi xi}{K}} g_\nu^{(m)}(z),
\end{aligned}$$

dans la seconde desquelles les fonctions entières

$$g_0^{(m)}(z), \quad g_1^{(m)}(z), \quad \ldots, \quad g_{m-1}^{(m)}(z)$$

sont définies par les séries

$$g_\nu^{(m)}(z) = e^{\frac{\nu\pi zi}{K}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi zi}{K}} q^{mn(n-1)+2n\nu},$$

où

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \quad (^1).$$

---

(1) Voir *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. I, p. 138 et 147.

Prenons un parallélogramme des périodes PQRS dont les sommets ont pour affixes

$$t_0, \quad t_0 + 2\mathrm{K}, \quad t_0 + 2\mathrm{K} + 2i\mathrm{K}', \quad t_0 + 2i\mathrm{K}'.$$

t_0 désignant une constante; et supposons que, dans ce parallélogramme, la fonction $\mathrm{F}(z)$ n'ait que des pôles simples

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad l$$

de résidus

$$\mathrm{A}, \quad \mathrm{B}, \quad \ldots, \quad \mathrm{L};$$

si nous supposons le point z situé dans ce même parallélogramme PQRS, la fonction de x

$$\chi_m(x, z)$$

admet, dans PQRS, le seul pôle $x = z$ de résidu $+1$.

Considérons alors la fonction de x

$$\Phi(x) = \mathrm{F}(x)\,\chi_m(x, z);$$

cette fonction admet, dans PQRS, les pôles

$$x = a, \qquad x = b, \qquad \ldots, \qquad x = l, \qquad x = z$$

avec les résidus

$$\mathrm{A}\chi_m(a, z), \quad \mathrm{B}\chi_m(b, z), \quad \ldots, \quad \mathrm{L}\chi_m(l, z), \quad \mathrm{F}(z),$$

et elle vérifie les deux relations suivantes qui résultent immédiatement de celles que vérifient $\mathrm{F}(x)$ et $\chi_m(x, z)$,

$$\Phi(x + 2\mathrm{K}) = \Phi(x),$$

$$\Phi(x + 2i\mathrm{K}') = \Phi(x) - \frac{\pi i}{2\mathrm{K}}\,\mathrm{F}(x)\left(e^{-\frac{m\pi x i}{\mathrm{K}}} + 1\right) g_0^{(m)}(z)$$
$$- \frac{\pi i}{\mathrm{K}}\,\mathrm{F}(x) \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} e^{-\frac{\nu\pi x i}{\mathrm{K}}}\, g_\nu^{(m)}(z).$$

Cela posé, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{PQRS}} \Phi(x)\,dx,$$

prise sur le contour du parallélogramme, est égale à la somme des résidus

$$A\chi_m(a, z) + B\chi_m(b, z) + \ldots + L\chi_m(l, z) + F(z);$$

mais nous pouvons évaluer directement cette intégrale en remarquant que les parties de l'intégrale relatives aux côtés QR et SP ont une somme nulle, car $\Phi(x)$ admet la période $2K$, et que les parties de l'intégrale relatives aux côtés PQ et RS ont pour somme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{t_0}^{t_0+2K}[\Phi(x) - \Phi(x + 2iK')]\,dx,$$

c'est-à-dire, d'après la seconde des relations auxquelles satisfait $\Phi(x)$,

$$\frac{1}{4K}g_0^{(m)}(z)\int_{t_0}^{t_0+2K}\left(1 + e^{-\frac{m\pi x i}{K}}\right)F(x)\,dx$$
$$+\frac{1}{2K}\sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} g_\nu^{(m)}(z)\int_{t_0}^{t_0+2K} e^{-\frac{\nu\pi x i}{K}}F(x)\,dx.$$

Telle est donc la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{PQRS}}\Phi(x)\,dx;$$

cette valeur est de la forme

$$\lambda_0 g_0^{(m)}(z) + \lambda_1 g_1^{(m)}(z) + \ldots + \lambda_{m-1} g_{m-1}^{(m)}(z),$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ désignent des constantes ayant pour valeurs

$$(11)\qquad \begin{cases} \lambda_0 = \dfrac{1}{4K}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+2K}\left(1 + e^{-\frac{m\pi x i}{K}}\right)F(x)\,dx, \\ \lambda_\nu = \dfrac{1}{2K}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+2K} e^{-\frac{\nu\pi x i}{K}}F(x)\,dx, \end{cases}$$

où

$$\nu = 1, 2, \ldots, (m-1),$$

les intégrations étant faites le long du côté PQ du parallélogramme élémentaire.

En égalant la valeur que nous venons de trouver pour l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\text{PQRS}} \Phi(x)\,dx$$

à la somme des résidus de $\Phi(x)$ dans le parallélogramme PQRS, nous avons la formule de décomposition cherchée

$$F(z) = -A\chi_m(a, z) - B\chi_m(b, z) - \ldots - L\chi_m(l, z) + G(z)$$

avec

$$G(z) = \lambda_0 g_0^{(m)}(z) + \lambda_1 g_1^{(m)}(z) + \ldots + \lambda_{m-1} g_{m-1}^{(m)}(z),$$

les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ étant donnés par les intégrales (11). On peut indiquer une signification fort simple de ces coefficients. En effet, comme le côté PQ du parallélogramme ne contient aucun pôle de $F(x)$, cette fonction est, dans une certaine bande du plan, limitée par deux parallèles à ce côté PQ, développable par la formule de Fourier en une série de la forme

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{\frac{n\pi x i}{K}},$$

où

$$A_n = \frac{1}{2K}\int_{t_0}^{t_0+2K} e^{-\frac{n\pi x i}{K}} F(x)\,dx.$$

Donc

$$\lambda_0 = \tfrac{1}{2}(A_0 + A_m)$$

et

$$\lambda_\nu = A_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m-1).$$

J'ai supposé, dans ce qui précède, que la fonction $F(x)$ n'a que des pôles simples; si l'un des pôles, par exemple le pôle $x = a$, était d'ordre α, le résidu de la fonction

$$\Phi(x) = F(x)\chi_m(x, z),$$

relatif à ce pôle, serait de la forme

$$A\chi_m(a, z) + A'D_a\chi_m(a, z) + \ldots + A^{(\alpha-1)}D_a^{\alpha-1}\chi_m(a, z);$$

d'ailleurs la détermination de la partie entière $G(z)$ resterait la même.

Pour appliquer cette méthode à un exemple, considérons la fonction

$$F(z) = \frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)},$$

qui satisfait aux relations

$$F(z + 2K) = F(z),$$
$$F(z + 2iK') = e^{-\frac{\pi i}{K}(z + iK')} F(z).$$

Posons

$$t = z + iK',$$
$$F(z) = F_1(t);$$

alors la fonction $F_1(t)$ vérifie les deux relations

$$F_1(t + 2K) = F_1(t), \qquad F_1(t + 2iK') = e^{-\frac{\pi t i}{K}} F_1(t).$$

Dans un parallélogramme des périodes PQRS dont le sommet P a pour affixe

$$t_0 = 2\varepsilon K + 2\varepsilon' i K',$$

ε et ε' étant des nombres réels positifs moindres que l'unité, la fonction $F_1(t)$ admet le pôle

$$t = 2K + 2iK'$$

avec le résidu

$$\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\,\frac{\theta\theta_1}{\eta'}.$$

La formule de décomposition est donc ici

$$F_1(t) = -\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\,\frac{\theta\theta_1}{\eta'}\chi_1(2K + 2iK', t) + \lambda_0 g_0^{(1)}(t),$$

où

$$g_0^{(1)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{n\pi t i}{K}} q^{n(n-1)}$$

et où la constante λ_0 a pour valeur

$$\lambda_0 = \frac{1}{4K}\int_{t_0}^{t_0+2K}\left(1 + e^{-\frac{\pi t i}{K}}\right) F_1(t)\,dt.$$

Revenons à la variable z par la formule

$$t = z + iK'$$

et remarquons que la fonction $g_0^{(1)}(t)$ devient

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{n\pi z i}{K}} q^{n^2},$$

c'est-à-dire $\Theta_1(z)$; nous aurons

$$\frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)} = -\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\,\frac{\theta\theta_1}{\eta'}\,\chi_1(2K + 2iK', z + iK') + \lambda_0\,\Theta_1(z)$$

avec

$$\lambda_0 = \frac{1}{4K}\int_{z_0}^{z_0+2K}\left(1 + \frac{1}{q}e^{-\frac{\pi z i}{K}}\right)F(z)\,dz,$$

z_0 désignant la valeur $t_0 - iK'$. Dans la bande qui contient ce point z_0 et qui contient aussi l'origine, la fonction $F(z) = \frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)}$ est développable en une série de la forme

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{\frac{n\pi z i}{K}},$$

et comme, dans cette bande, on a

$$F(-z) = -F(z),$$

on voit immédiatement que

$$A_n = -A_{-n}, \qquad A_0 = 0;$$

donc la valeur de λ_0 se réduit à

$$\lambda_0 = \frac{1}{q}\,\frac{A_1}{2}.$$

D'après des formules de M. Hermite, dont M. Biehler a donné la démonstration dans sa Thèse (p. 13), le coefficient A_1 a pour valeur

$$A_1 = -\frac{2i}{\eta}q^{\frac{3}{4}},$$

donc

$$\lambda_0 = -\frac{i}{\eta\sqrt[4]{q}},$$

et la formule de décomposition cherchée devient enfin

$$\frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)} = -\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\frac{\theta\theta_1}{\eta'}\chi_1(2K + 2iK', z + iK') - \frac{i}{\eta\sqrt[4]{q}}\Theta_1(z).$$

Remplaçons la fonction χ_1 par son développement en série et rappelons-nous la relation

$$\frac{2K}{\pi}\eta' = \theta\theta_1\eta,$$

nous aurons

$$\eta\frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)} = \frac{1}{\sqrt[4]{q}}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{n\pi z i}{K}} q^{n^2} \cot\frac{\pi}{2K}[z + (2n - 1)iK'] - \frac{i}{\sqrt[4]{q}}\Theta_1(z).$$

Le second membre devant être une fonction impaire, comme le premier, cherchons à mettre cette propriété en évidence. Pour cela, remplaçons, dans le terme général de la série, la fonction

$$\cot\frac{\pi}{2K}[z + (2n - 1)iK']$$

par l'expression identique

$$\frac{e^{-\frac{i\pi z}{2K}} q^{-\frac{(2n-1)}{2}}}{\sin\frac{\pi}{2K}[z + (2n - 1)iK']} + i;$$

alors la partie entière disparaît, et il reste

$$\eta\frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{\frac{\nu\pi z i}{2K}} q^{\frac{\nu^2}{4}} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(z + \nu i K')},$$

ν désignant un *entier impair* qui varie de $-\infty$ à $+\infty$.

6. La détermination des coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ de la partie entière peut aussi être obtenue par une voie plus élémentaire qui a son point de départ dans la proposition suivante :

Soient a un point situé dans le parallélogramme PQRS *et*

$$\chi_m(a, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n e^{\frac{n\pi z i}{K}};$$

le développement en série d'exponentielles de la fonction $\chi_m(a, z)$ *dans la bande du plan qui contient le côté* PQ *du parallélogramme; on a*

$$a_0 + a_m = 0, \qquad a_1 = a_2 = \ldots = a_{m-1} = 0.$$

Pour démontrer cette proposition, remarquons que, si z est un point du côté PQ, on a

$$1 > \left| e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} \right| > |q^2|,$$

où la notation $|x|$ signifie *module* de x. En effet, z étant un point du côté PQ, on a

$$a - z = 2\varepsilon K + 2\varepsilon' i K',$$

ε et ε' étant réels, et ε' étant positif et plus petit que l'unité. Donc

$$e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} = e^{2\pi\varepsilon i - \frac{2\varepsilon'\pi K'}{K}}$$

et

$$\left| e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} \right| = |q^{2\varepsilon'}|;$$

comme ε' est positif et moindre que 1, l'inégalité que nous avions en vue est démontrée.

Cela posé, on a

$$\chi_m(a, z) = \frac{\pi i}{2K} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi z i}{K}} q^{mn(n-1)} \frac{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} - q^{2n}}.$$

Prenons dans cette série les termes dans lesquels n est *positif* et désignons leur somme par P,

$$P = \frac{\pi i}{2K} \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{\frac{mn\pi z i}{K}} q^{mn(n-1)} \frac{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}} - q^{2n}}.$$

Puisque

$$\left| e^{\frac{\pi(z-a)i}{K}} q^{2n} \right| < 1,$$

on aura

$$\frac{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}}+q^{2n}}{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}}-q^{2n}}=\frac{1+q^{2n}e^{\frac{\pi(z-a)i}{K}}}{1-q^{2n}e^{\frac{\pi(z-a)i}{K}}}=1+2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}e^{\frac{\nu\pi(z-a)i}{K}}q^{2n\nu};$$

donc

$$P=\frac{\pi i}{2K}\sum_{n=1}^{n=\infty}e^{\frac{mn\pi z i}{K}}q^{mn(n-1)}+\frac{\pi i}{K}\sum_{n=1,\,\nu=1}^{n=\infty,\,\nu=\infty}e^{\frac{(mn+\nu)\pi z i-\nu\pi a i}{K}}q^{mn(n-1)+2n\nu}.$$

Dans ce développement ne figurent que des puissances positives de $e^{\frac{\pi z i}{K}}$; les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ des termes en

$$e^{\frac{\pi z i}{K}},\quad e^{\frac{2\pi z i}{K}},\quad \ldots,\quad e^{\frac{(m-1)\pi z i}{K}}$$

sont nuls et celui de $e^{\frac{m\pi z i}{K}}$ est

$$a_m=\frac{\pi i}{2K}.$$

Prenons maintenant, dans la série qui définit $\chi_m(a,z)$, les termes dans lesquels n est *nul* ou *négatif* et désignons par N leur somme

$$N=\frac{\pi i}{2K}\sum_{n=0}^{n=-\infty}e^{\frac{mn\pi z i}{K}}q^{mn(n-1)}\frac{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}}+q^{2n}}{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}}-q^{2n}};$$

mais on peut écrire

$$\frac{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}}+q^{2n}}{e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}}-q^{2n}}=-\frac{1+q^{-2n}e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}}}{1-q^{-2n}e^{\frac{\pi(a-z)i}{K}}}=-1-2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}e^{\frac{\nu\pi(a-z)i}{K}}q^{-2n\nu}.$$

Donc.

$$N=-\frac{\pi i}{2K}\sum_{n=0}^{n=-\infty}e^{\frac{mn\pi z i}{K}}q^{mn(n-1)}-\frac{\pi i}{K}\sum_{n=0,\,\nu=1}^{n=-\infty,\,\nu=\infty}e^{(mn-\nu)\frac{\pi z i}{K}+\frac{\nu\pi a i}{K}}q^{mn(n-1)-2n\nu}.$$

Dans ce développement ne figurent que des puissances négatives ou nulles de

$$e^{\frac{\pi z i}{K}};$$

le terme indépendant de $e^{\frac{\pi z i}{K}}$ est

$$a_0 = -\frac{\pi i}{2K}.$$

Donc enfin, dans le développement de la fonction $\chi_m(a, z)$, qui est égal à $P + N$, on a

$$a_0 + a_m = 0, \qquad a_1 = a_2 = \ldots = a_{m-1} = 0.$$

Ce théorème étant établi, reprenons la formule de décomposition en éléments simples

$$F(z) = -A\chi_m(a, z) - B\chi_m(b, z) - \ldots - L\chi_m(l, z) + G(z),$$

où

$$G(z) = \lambda_0 g_0^{(m)}(z) + \lambda_1 g_1^{(m)}(z) + \ldots + \lambda_{m-1} g_{m-1}^{(m)}(z).$$

Développons les deux membres de la formule de décomposition par la série de Fourier. On a

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{\frac{n\pi z i}{K}},$$

$$\chi_m(a, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n e^{\frac{n\pi z i}{K}},$$

$$\chi_m(b, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} b_n e^{\frac{n\pi z i}{K}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\chi_m(l, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} l_n e^{\frac{n\pi z i}{K}};$$

quant à $G(z)$, il résulte des développements de

$$g_0^{(m)}(z), \quad g_1^{(m)}(z), \quad \ldots, \quad g_{m-1}^{(m)}(z)$$

que les coefficients des puissances $0, 1, 2, \ldots, m$ de $e^{\frac{\pi z i}{K}}$ dans $G(z)$ sont

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_{m-1}, \quad \lambda_0.$$

On a donc, en identifiant les deux membres de la formule de décomposition et se rappelant que les coefficients

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_{m-1}, \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_{m-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ l_1, & l_2, & \ldots, & l_{m-1} \end{matrix}$$

sont *nuls*,

$$A_1 = \lambda_1, \qquad A_2 = \lambda_2, \qquad \ldots, \qquad A_{m-1} = \lambda_{m-1};$$

puis

$$\begin{aligned} A_0 &= -A a_0 - B b_0 - \ldots - L l_0 + \lambda_0, \\ A_m &= -A a_m - B b_m - \ldots - L l_m + \lambda_0; \end{aligned}$$

d'où, en ajoutant et tenant compte des relations

$$a_0 + a_m = 0, \qquad b_0 + b_m = 0, \qquad \ldots, \qquad l_0 + l_m = 0,$$

$$\lambda_0 = \frac{A_0 + A_m}{2}.$$

On retrouve ainsi les valeurs précédemment obtenues pour λ_0, λ_1, ..., λ_{m-1}.