ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

S. DAUTHEVILLE

Étude sur les séries entières par rapport à plusieurs variables imaginaires indépendantes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 2 (1885), p. 3-59 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__S3_0>

ÉTUDE

SUR

LES SÉRIES ENTIÈRES

PAR RAPPORT

A PLUSIEURS VARIABLES IMAGINAIRES INDÉPENDANTES,

PAR M. S. DAUTHEVILLE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, MAITRE DE CONFÉRENCES
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.

INTRODUCTION.

On connaît les travaux récents de M. Weierstrass sur les fonctions analytiques uniformes de variables imaginaires. Dans le cas de plusieurs variables indépendantes, on fait un fréquent usage des séries ordonnées suivant les puissances entières, positives et croissantes des variables. Il m'a paru qu'il ne serait pas sans utilité de réunir les propriétés les plus importantes de ces séries, en les démontrant d'une manière rigoureuse, et de montrer par quelques théorèmes le profit qu'on peut en tirer pour la théorie des fonctions de plusieurs variables. C'est là le but de ce travail.

Un premier Chapitre est consacré aux définitions et à la démonstration de quelques théorèmes préliminaires.

Dans le second Chapitre, on démontre qu'une série qui s'annule pour l'origine des coordonnées peut être mise, dans un *domaine* convenablement choisi de ce point, sous forme d'un produit de deux facteurs dont l'un est une série qui ne s'annule en aucun point du domaine, et l'autre un polynôme entier relativement à l'une des variables. Ce théorème, dû à M. Weierstrass, sera d'un usage fréquent dans la suite. Nous en avons déduit la démonstration de plusieurs conséquences, relatives aux zéros d'une série et aux zéros communs à deux séries.

La divisibilité des séries fait l'objet de la troisième Partie. S_0 et S_1 représentant deux séries, si l'on peut fixer un domaine de l'origine dans lequel on ait $S_0 = S_1 S_2$, S_2 étant une nouvelle série, M. Weierstrass dit que S_0 est *divisible* par S_1. Je donne, d'après ce géomètre, les conditions pour qu'une série soit divisible par une autre, et les conditions pour que deux séries admettent des diviseurs communs. Lorsque deux séries admettent des diviseurs communs, on peut former une troisième série qui possède, relativement aux deux premières, des propriétés tout à fait analogues aux propriétés du plus grand commun diviseur de deux polynômes entiers. J'ai insisté sur l'analogie qui existe entre les théorèmes relatifs à la divisibilité des polynômes et ceux qui se rapportent à la divisibilité des séries. Je donne, à ce propos, quelques théorèmes que je crois nouveaux; en particulier ceux qui permettent de définir le plus petit multiple commun de deux séries.

Dans la quatrième Partie, les propriétés des séries sont appliquées à l'étude des points singuliers des fonctions uniformes de plusieurs variables imaginaires indépendantes. A ce sujet, pour citer un exemple, je démontre un théorème que l'on peut considérer comme une généralisation d'un théorème de M. Mittag-Leffler sur les fonctions d'une seule variable. En se plaçant à un point de vue différent, M. Appell a indiqué [1] une autre généralisation du même théorème. Je termine en prouvant que toute fonction dépourvue de points singuliers essentiels est une fraction rationnelle. Ce théorème, qui n'est pas sans importance, a été énoncé par M. Weierstrass. Je ne crois pas qu'on en ait encore donné une démonstration complète.

Je dois ajouter que j'ai pris les premiers éléments de mon travail dans une Note communiquée par M. Weierstrass à la Société mathématique de Berlin : *Einige auf die Theorie der analytischen Functionen*

---

[1] *Acta mathematica*, t. II, Cahier I, p. 71, et t. IV, Cahier IV, p. 326.

mehrerer veränderlichen sich beziehende Sätze, zusammengestellt und dem mathematischen Verein zu Berlin zur Veröffentlichung übergeben von Professor Dr C. Weierstrass (1).

I.

Définitions.

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$, n variables imaginaires indépendantes. Nous les représenterons géométriquement sur des plans différents. Si a_1, $a_2, \ldots, a_n$ sont n valeurs attribuées respectivement à chacune de ces variables, on dit que ce système de valeurs constitue *un point*, et l'on appelle ce point le *point a*.

Sur le plan où est figurée la variable z_1 imaginons une aire A_1, sur le plan de z_2 une aire A_2, etc., et enfin sur le plan de z_n une aire A_n. On considère l'ensemble de ces aires $A_1, A_2, \ldots, A_n$ comme formant l'*aire* A. On dit qu'un point est *pris dans l'aire* A lorsqu'il est formé par un système de valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, respectivement représentées géométriquement par des points situés, le premier dans l'aire A_1, le second dans l'aire A_2, etc., le dernier dans l'aire A_n.

On nomme, en particulier, *domaine δ du point a* l'aire formée par les cercles décrits sur le plan de chacune des variables avec les rayons $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ et avec les centres respectifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Cette définition peut se remplacer par la suivante. Désignons par le symbole

$$|z_i - a_i|$$

le module de l'expression imaginaire $z_i - a_i$. Alors, pour tout point du domaine δ du point a, on a la relation

$$|z_i - a_i| < \delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

et, réciproquement, tout point vérifiant cette relation appartient au domaine δ du point a.

---

(1) Autogr. Druck von H.-S. Hermann in Berlin, S. W. Beuthstrasse, 8.

Si l'un des points a_i est situé à l'infini, a_p par exemple, on remplacera dans la définition précédente l'expression $|z_p - a_p|$ par $\frac{1}{|z_p|}$.

$f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ étant une fonction des variables z, on appelle *valeur de cette fonction au point a* la valeur que prend $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ lorsqu'on attribue respectivement aux variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Si la fonction $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ est uniforme dans l'aire A, et si, en outre, pour chaque point de cette aire la fonction est continue et admet une dérivée partielle par rapport à chacune des variables z, on dit que $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ est *holomorphe dans l'aire* A.

Nous considérerons, dans la suite, des séries dans les termes desquelles les variables z ne figureront qu'à des puissances entières et positives. Il importe d'indiquer dans quel ordre seront rangés les termes. Désignons par P_n le polynôme, homogène et du degré n, formé par les termes du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport à toutes les variables. Nous ordonnons P_n par rapport aux puissances décroissantes de z_1. Les coefficients de ce polynôme sont des polynômes homogènes en $z_2, z_3, \ldots, z_n$. Soit Q l'un d'eux. Nous ordonnons Q par rapport aux puissances décroissantes de z_2. Les coefficients des puissances de z_2 dans le polynôme Q écrit de cette façon sont des polynômes en $z_3, \ldots, z_n$. Nous ordonnons chacun d'eux suivant les puissances décroissantes de z_3, et ainsi de suite. Nous écrirons alors les termes de la série dans l'ordre suivant :

$$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_n + \ldots.$$

Pour abréger le langage, nous nommerons une telle série une *série entière en* $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Une série entière sera représentée par le symbole

$$\sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n = 0}^{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n = \infty} A_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \ldots z_n^{\nu_n},$$

les A étant des constantes.

Théorème I. — *Étant donnée une série entière en $z_1, z_2, \ldots, z_n$, si les modules des termes sont tous finis pour les valeurs des variables qui vérifient les relations*

$$|z_i| = r_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

la série sera convergente pour tout système de valeurs telles que l'on ait

$$|z_i| < r_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soit la série

$$\sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n = 0}^{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n = \infty} A_{\nu_1, \ldots, \nu_n} z_1^{\nu_1} \ldots z_n^{\nu_n}.$$

Prenons des valeurs positives $r'_1, \ldots, r'_n$, telles que l'on ait

$$r'_i < r_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et écrivons les progressions géométriques décroissantes

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + \dfrac{r'_1}{r_1} + \left(\dfrac{r'_1}{r_1}\right)^2 + \left(\dfrac{r'_1}{r_1}\right)^3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 1 + \dfrac{r'_i}{r_i} + \left(\dfrac{r'_i}{r_i}\right)^2 + \left(\dfrac{r'_i}{r_i}\right)^3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 1 + \dfrac{r'_n}{r_n} + \left(\dfrac{r'_n}{r_n}\right)^2 + \left(\dfrac{r'_n}{r_n}\right)^3 + \ldots. \end{array} \right.$$

Formons la série

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + \dfrac{r'_1}{r_1} + \dfrac{r'_2}{r_2} + \ldots + \dfrac{r'_n}{r_n} \\ \quad + \left(\dfrac{r'_1}{r_1}\right)^2 + \left(\dfrac{r'_2}{r_2}\right)\left(\dfrac{r'_1}{r_1}\right) + \ldots + \left(\dfrac{r'_n}{r_n}\right)^2 \\ \quad + \left(\dfrac{r'_1}{r_1}\right)^3 + \left(\dfrac{r'_2}{r_2}\right)^2\left(\dfrac{r'_1}{r_1}\right) + \ldots + \left(\dfrac{r'_n}{r_n}\right)^3 \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

dont les termes sont rangés dans l'ordre suivant lequel on écrirait ceux d'une série entière en $\dfrac{r'_1}{r_1}, \ldots, \dfrac{r'_n}{r_n}$. Cette série est convergente. Pour le prouver, il suffit de montrer que la somme de tous les termes dont le degré par rapport aux quotients $\dfrac{r'_i}{r_i}$ ne dépasse pas le nombre entier p reste finie quand p croît indéfiniment. Désignons cette somme par Σ_p et appelons $S_p^{(1)}, \ldots, S_p^{(n)}$ les sommes analogues pour chacune des séries (1). On a

$$\Sigma_p < S_p^{(1)} S_p^{(2)} \ldots S_p^{(n)}.$$

Or les séries (1) sont convergentes. Le produit $S_p^{(1)}S_p^{(2)}\ldots S_p^{(n)}$ reste donc fini lorsque p croît indéfiniment, et par suite il en est de même pour Σ_p.

Cela posé, soit $a_{\nu_1,\ldots,\nu_n}$ le module de $A_{\nu_1,\ldots,\nu_n}$. Les quantités

$$a_{\nu_1,\ldots,\nu_n} r_1^{\nu_1} r_2^{\nu_2}\ldots r_n^{\nu_n} \quad (\nu_1,\ldots,\nu_n = 0,\ldots,\infty)$$

étant finies, si nous multiplions respectivement par chacune d'elles les termes correspondants de la série (2), nous obtiendrons une série convergente. Cette nouvelle série est précisément formée par les modules des termes de la série donnée. La série donnée est donc convergente pour tout système de valeurs des variables vérifiant les relations

$$|z_i| < r_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Remarque. — La série (2), dont les termes sont positifs, reste convergente quel que soit l'ordre dans lequel on dispose ses termes. Il en résulte que, si l'on écrit dans un autre ordre les termes de la série donnée, on obtient encore une série convergente. Ayant, en effet, choisi une disposition des termes pour la série considérée, écrivons les termes de (2) de manière que les termes $A_{\nu_1,\ldots,\nu_n} z_1^{\nu_1}\ldots z_n^{\nu_n}$ et $\left(\frac{r'_1}{r_1}\right)^{\nu_1}\cdots\left(\frac{r'_n}{r_n}\right)^{\nu_n}$ occupent le même rang dans les deux séries. La nouvelle série $\sum\left(\frac{r'_1}{r_1}\right)^{\nu_1}\cdot\cdot\left(\frac{r'_n}{r_n}\right)^{\nu_n}$ étant convergente, nous démontrerons, en raisonnant comme plus haut, que les modules des termes de la nouvelle série $\Sigma A_{\nu_1,\ldots,\nu_n} z_1^{\nu_1}\ldots z_n^{\nu_n}$ forment une suite convergente. La série considérée est donc elle-même convergente.

Il importe d'observer que, pour le point considéré, non seulement la série converge, mais aussi la série formée par les modules des termes.

Cercle de convergence. — Supposons que, pour le point a, les modules des termes d'une série entière soient tous finis. Sur le plan de chaque variable décrivons un cercle ayant l'origine pour centre et passant au point correspondant a_i. Nous avons ainsi une aire A telle que pour chacun de ses points la série est absolument convergente ainsi que la série des modules. Nous nommerons une telle aire *un cercle de convergence.*

De là résulte encore une conséquence importante. Une série entière peut renfermer une infinité de termes dans lesquels la variable z_i figure à la puissance p. Ces termes forment eux-mêmes une série convergente, puisque la série des modules est convergente. Par suite, pour tout point du cercle de convergence, une série entière peut s'écrire

$$P_0 + P_1 z_i + P_2 z_i^2 + \ldots,$$

les P désignant des séries entières par rapport aux autres variables z, séries qui admettent toutes pour cercle de convergence celui de la série donnée.

Théorème II. — *Une série entière en $z_1, \ldots, z_n$, ayant* A *pour cercle de convergence, est une fonction holomorphe des variables z dans l'aire* A.

En effet, si l'on attribue à $n-1$ des variables des valeurs choisies arbitrairement dans A, la série devient une fonction de la $n^{\text{ième}}$ variable, et l'on sait que cette fonction est holomorphe dans la portion de A correspondant à cette variable. Dès lors, il est clair que la série est holomorphe par rapport aux variables z.

Théorème III. — *$f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ désignant une fonction des variables z qui est holomorphe dans une aire* A *formée de cercles ayant les diverses origines pour centres, on peut former une série entière*

$$\sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 0}^{\nu_1, \ldots, \nu_n = \infty} A_{\nu_1, \ldots, \nu_n} z_1^{\nu_1} \ldots z_n^{\nu_n},$$

admettant A *pour cercle de convergence et telle qu'on ait pour tout point de* A

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 0}^{\nu_1, \ldots, \nu_n = \infty} A_{\nu_1, \ldots, \nu_n} z_1^{\nu_1} \ldots z_n^{\nu_n} \quad (^1).$$

Théorème IV. — *Deux fonctions holomorphes dans une aire* A, *qui prennent la même valeur en chaque point d'une aire α comprise dans* A, *prennent la même valeur en chaque point de* A.

Soient les fonctions $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ et $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Posons

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) - f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

---

(1) Voir *Théorie des Fonctions elliptiques*, par MM. Briot et Bouquet, 2e édition, p. 166.

φ est une fonction holomorphe dans A. Soient $b_2, b_3, \ldots, b_n$ des valeurs prises arbitrairement dans $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$. La fonction $\varphi(z_1, b_2, \ldots, b_n)$ est holomorphe dans A_1 et s'annule en tous les points de α_1 qui est comprise dans A_1. La fonction φ s'annule donc si l'on attribue à z_1 une valeur quelconque dans l'aire A_1 et à $z_2, \ldots, z_n$ des valeurs prises respectivement dans $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Considérons maintenant $\varphi(c_1, z_2, b_3, \ldots, b_n)$, où c_1 désigne une valeur prise arbitrairement dans A_1, $b_2, \ldots, b_n$ ayant la même signification que plus haut. On a une fonction de z_2 qui est holomorphe dans A_2 et nulle pour tout point de α_2. Cette fonction est donc nulle dans A_2. C'est-à-dire que la fonction φ s'annule si l'on attribue à z_1 une valeur prise arbitrairement dans A_1, à z_2 une valeur prise arbitrairement dans A_2, à $z_3, \ldots, z_n$ des valeurs arbitraires choisies dans $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$. On verra de même que, si l'on prend arbitrairement z_1, z_2, z_3 dans A_1, A_2, A_3, φ est encore nulle, et ainsi de suite. Le théorème est donc démontré.

On peut observer qu'une série entière étant holomorphe dans l'aire où elle est convergente, si deux séries prennent la même valeur en tous les points d'un domaine compris dans l'aire de convergence, elles prendront la même valeur en tout point de cette aire.

II.

Sur les séries entières qui s'annulent à l'origine.

Soit $S(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ une série entière en $z_1, z_2, \ldots, z_n$, convergente dans l'aire A, et qui s'annule à l'origine. On peut former un domaine δ de l'origine dans lequel il y a un nombre infini de points pour lesquels $S = 0$. De plus, si l'on se donne arbitrairement, dans le domaine δ, les valeurs de $n - 1$ des variables z, les valeurs de la $n^{\text{ième}}$ qu'il faut leur joindre pour obtenir un zéro de la série sont fournies par une équation algébrique. Ces résultats sont la conséquence d'un théorème fondamental dû à M. Weierstrass et relatif à une forme particulière qu'on peut donner à la série S dans un domaine de l'origine.

Nous établirons d'abord un théorème préliminaire.

Théorème V. — *Soit* $S(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *une série entière en* $z_1, \ldots, z_n$, *ayant* A *pour cercle de convergence et qui s'annule à l'origine.* S

$S(z_1, 0, \ldots, 0)$ *n'est pas nulle pour toute valeur de* z_1, *on peut déterminer trois nombres positifs* ρ_0, ρ_1, ρ, ρ_0 *étant inférieur à* ρ, *tels que pour tout système de valeurs des variables qui vérifie les relations*

$$\rho_0 < |z_1| < \rho, \quad |z_i| < \rho_1 \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

on ait identiquement

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = m z_1^{-1} + g(z_1) + \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \mathcal{G}_\nu(z_2, z_3, \ldots, z_n) z_1^\nu.$$

m *désigne le plus petit exposant de* z_1 *dans la série entière* $S(z_1, 0, \ldots, 0)$; *les nombres* ν *sont des entiers;*

$g(z_1)$ *est une série entière en* z_1 *convergente pour les valeurs telles que* $\rho_0 < |z_1| < \rho$;

enfin les $\mathcal{G}$ *sont des séries entières en* $z_2, \ldots, z_n$, *qui admettent* ρ_1 *pour cercle de convergence et s'annulent toutes à l'origine,* $\mathcal{G}_{-1}$ *étant identiquement nulle.*

La série S est absolument convergente dans A. Si on l'ordonne par rapport aux puissances croissantes de z_1 on obtient une nouvelle série convergente, dans laquelle les coefficients des diverses puissances de z_1 seront eux-mêmes des séries entières convergentes par rapport à $z_2, \ldots, z_n$. Prenons dans cet ordre les termes de la série S. Représentons par $S_0(z_1)$ la série obtenue en annulant dans la précédente les variables $z_2, \ldots, z_n$, et posons

$$S_0(z_1) - S_1(z_1, z_2, \ldots, z_n) = S(z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

S_0 est une fonction de z_1 qui est holomorphe dans A et s'annule pour $z_1 = 0$. Nous pouvons tracer de l'origine comme centre, dans l'aire A, deux cercles de rayons ρ et ρ_0 ($\rho_0 < \rho$), de manière que S_0 soit différente de 0 pour tous les points compris entre ces deux cercles. S_1 est aussi une fonction holomorphe des variables $z_1, \ldots, z_n$ dans le cercle de convergence. Si l'on prend $z_2 = z_3 = \ldots = z_n = 0$, S_1 s'annule quelle que soit la valeur attribuée à z_1. Dès lors, S_1 ne contient aucun terme indépendant des variables $z_2, \ldots, z_n$. Il en résulte qu'on peut prendre un nouveau nombre positif ρ_1, tel que, pour les valeurs qui satisfont aux inégalités

$$|z_i| < \rho_1 \quad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

on ait

$$|S_1| < |S_0|,$$

l'aire formée par les cercles ρ_1 étant comprise dans A. Considérons un système quelconque de valeurs pour $z_1, z_2, \ldots, z_n$ vérifiant les inégalités précédentes. On a

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{S_0 - S_1} = \frac{1}{S_0} + \frac{S_1}{S_0^2} + \ldots + \frac{S_1^{n-1}}{S_0^n} + \frac{1}{S_0 - S_1}\frac{S_1^n}{S_0^n}.$$

Comme $\left|\frac{S_1}{S_0}\right| < 1$, le dernier terme tend vers 0 quand n croît indéfiniment, et l'on peut écrire

$$\frac{1}{S} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{S_1^\lambda}{S_0^{\lambda+1}}.$$

On a donc

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = \left(\frac{\partial S_0}{\partial z_1} - \frac{\partial S}{\partial z_1}\right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{S_1^\lambda}{S_0^{\lambda+1}}$$

ou bien

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = \frac{\frac{\partial S_0}{\partial z_1}}{S_0} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{S_1^\lambda \frac{\partial S_0}{\partial z_1}}{S_0^{\lambda+1}} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{S_1^{\lambda-1}\frac{\partial S_1}{\partial z_1}}{S_0^\lambda}.$$

Mais

$$\frac{S_1^{\lambda-1}\frac{\partial S_1}{\partial z_1}}{S_0^\lambda} - \frac{S_1^\lambda \frac{\partial S_0}{\partial z_1}}{S_0^{\lambda+1}} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{S_1^\lambda}{S_0^\lambda},$$

et, comme les trois séries $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{S_1^{\lambda-1}}{S_0^\lambda}$, $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{S_1^\lambda}{S_0^{\lambda+1}}$, $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{S_1^\lambda}{S_0^\lambda}$ sont convergentes, puisque $\left|\frac{S_1}{S_0}\right| < 1$ et puisque $S_0 \neq 0$, on peut écrire

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{S_1^\lambda \frac{\partial S_0}{\partial z_1}}{S_0^{\lambda+1}} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{S_1^{\lambda-1}\frac{\partial S_1}{\partial z_1}}{S_0^\lambda} = -\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{S_1}{S_0}\right)^\lambda,$$

et l'on a

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = \frac{\frac{\partial S_0}{\partial z_1}}{S_0} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{S_1}{S_0}\right)^\lambda.$$

Mais la série $\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{S_1}{S_0}\right)^{\lambda}$, étant elle-même une série entière, est absolument convergente. On peut la considérer comme une série entière en z_1, et l'on a

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = \frac{\frac{\partial S_0}{\partial z_1}}{S_0} - \frac{\partial}{\partial z_1}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{S_1}{S_0}\right)^{\lambda}. \tag{1}$$

La fonction S_0 est une série entière en z_1. Soit

$$S_0(z_1) = A z_1^m + B z_1^{m+1} + \ldots,$$

A, B, ... étant des constantes et A étant différent de o. On a

$$\left(\frac{S_1}{S_0}\right)^{\lambda} = \left(\frac{S_1}{A + B z_1 + \ldots}\right)^{\lambda} z_1^{-m\lambda}.$$

La fraction $\left(\frac{S_1}{A + B z_1 + \ldots}\right)^{\lambda}$ constitue une fonction des variables z qui est nulle au point zéro et qui est holomorphe pour les valeurs considérées, puisqu'elle est le quotient de deux fonctions holomorphes, le diviseur n'étant pas nul. Cette fraction est développable en série entière, et l'on peut imaginer cette série ordonnée suivant les puissances croissantes de z_1. Soit donc

$$\left(\frac{S_1}{S_0}\right)^{\lambda} = \sum_{\mu=0}^{\infty}\overline{\mathcal{G}_{\mu}}(z_2, z_3, \ldots, z_n)\, z_1^{-m\lambda+\mu}, \tag{2}$$

les $\overline{\mathcal{G}}$ étant des séries entières en $z_2, \ldots, z_n$, toutes convergentes pour les valeurs considérées. Remarquons que ces séries ne contiennent pas de termes indépendants de $z_2, \ldots, z_n$, d'après la remarque faite plus haut que S_1 ne contient pas de terme indépendant de ces variables.

Imaginons maintenant les différentes séries représentées par la formule (2) lorsqu'on attribue à λ les valeurs $1, \ldots, \infty$. Écrivons ces séries les unes sous les autres en plaçant sur une même colonne verticale les termes qui renferment z_1 à la même puissance. Nous obtenons ainsi une série à double entrée. D'après ce qui a été dit plus haut, cette série converge quand on prend les termes par lignes horizontales. Par suite, d'après les propriétés des séries à double entrée, les colonnes verticales forment autant de séries convergentes, et la somme de ces nouvelles séries est la valeur de la série à double entrée. z_1 figurant à la même puissance dans tous les termes d'une même colonne, on peut écrire

$$(3) \qquad \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{S_1}{S_0}\right)^{\lambda} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}'_{\nu}(z_2, \ldots, z_n) z_1^{\nu},$$

où les $\mathcal{G}'$ sont des séries entières en $z_2, \ldots, z_n$, toutes convergentes dans l'aire considérée. De plus, les termes de ces séries s'annulent tous pour $z_2 = z_3 = \ldots = z_n = 0$, puisque cela arrivait pour les séries $\overline{\mathcal{G}}$ de la formule (2).

Mais l'hypothèse $S_0 = Az_1^m + Bz_1^{m+1} + \ldots$ donne

$$\frac{\frac{\partial S_0}{\partial z_1}}{S_0} = m z_1^{-1} \frac{A + \frac{m+1}{m} B z_1 + \ldots}{A + B z_1 + \ldots}.$$

La fraction est une fonction holomorphe de z_1, qui se réduit à l'unité pour $z_1 = 0$. On peut la représenter par $1 + \overline{g}(z_1)$, où $\overline{g}$ désigne une série entière en z_1, sans terme constant. On peut donc écrire

$$\frac{\frac{\partial S_0}{\partial z_1}}{S_0} = m z_1^{-1} + g(z_1),$$

$g(z_1)$ étant une série entière en z_1, convergente dans l'aire considérée. On a alors, à cause des formules (1), (2) et (3),

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = m z_1^{-1} + g(z_1) - \frac{\partial}{\partial z_1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}'_{\nu}(z_2, \ldots, z_n) z_1^{\nu},$$

relation qu'on peut écrire

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = m z_1^{-1} + g(z_1) + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_{\nu}(z_2, \ldots, z_n) z_1^{\nu}$$

en posant

$$-\frac{\partial}{\partial z_1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}'_{\nu}(z_2, \ldots, z_n) z_1^{\nu} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_{\nu}(z_2, \ldots, z_n) z_1^{\nu}.$$

Remarquons que le second membre ne contiendra pas de terme en z_1^{-1}, c'est-à-dire que $\mathcal{G}_{-1}$ est identiquement nulle.

On a donc la relation qu'il fallait établir.

Théorème VI. — S *désignant une série entière en* $z_1, \ldots, z_n$, *admettant* A *pour cercle de convergence, nulle à l'origine, et telle que* $S(z_1, 0, \ldots, 0)$ *ne soit pas nulle pour toute valeur de* z_1, *on peut fixer un nombre positif* $\delta (\delta \leq A)$ *tel qu'on ait, pour chaque point du domaine* δ *de l'origine,*

$$S = PS'.$$

S' *désigne une série entière en* $z_1, \ldots, z_n$, *convergente dans* δ *et qui ne s'annule en aucun point de ce domaine.*

P *est un polynôme entier par rapport à la variable* z_1; *son degré est le plus faible exposant de* z_1 *dans* $S(z_1, 0, \ldots, 0)$, *et ses coefficients sont des séries entières par rapport aux autres variables, séries qui convergent dans* δ *et s'annulent à l'origine.*

Posons, comme dans le théorème précédent,

$$S_0(z_1) = S(z_1, 0, \ldots, 0),$$
$$S(z_1, \ldots, z_n) = S_0(z_1) - S_1(z_1, \ldots, z_n),$$

et prenons les nombres ρ, ρ_0, ρ_1, comme il a été expliqué plus haut. Pour tout système de valeurs des variables vérifiant les inégalités

$$\rho_0 < |z_1| < \rho \quad |z_i| < \rho_1, \quad (i = 2, \ldots, n),$$

on aura

$$\frac{\dfrac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = m z_1^{-1} + g(z_1) + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^\nu, \tag{1}$$

les notations conservant le même sens. Attribuons à $z_2, \ldots, z_n$ des valeurs arbitraires dans les limites considérées. S devient une fonction de z_1, holomorphe dans le cercle ρ. Dans ce cercle, il y a des points où S s'annule. Car, si cela n'avait pas lieu, le quotient $\dfrac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S}$ serait holomorphe et pourrait être développé en série entière en z_1; cette série devrait présenter les mêmes termes que le second membre de la formule (1); or, dans ce second membre, figure le terme $m z_1^{-1}$, et l'on sait que ni $g(z_1)$ ni $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^\nu$ ne contiennent de terme en z_1^{-1}.

Cela posé, S étant une fonction holomorphe de z_1, ses racines sont en nombre limité, et chacune est d'un degré entier et fini. Soient a_1, $a_2, \ldots, a_p$ ces racines, chacune d'elles étant répétée autant de fois que l'indique son degré. La somme

$$(2) \qquad \frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} - \frac{1}{z_1 - a_1} - \frac{1}{z_1 - a_2} - \ldots - \frac{1}{z_1 - a_p}$$

est finie pour les valeurs considérées de z_1. Ceci est évident pour les valeurs différentes des racines. Considérons la valeur a_1. On a

$$S(z_1) = (z_1 - a_1)^q \psi(z_1),$$

q étant un nombre entier positif, et ψ une fonction holomorphe de z_1, différente de o pour $z_1 = a_1$. Dès lors,

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = \frac{q}{z_1 - a_1} + \frac{\frac{\partial \psi}{\partial z_1}}{\psi},$$

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} - \frac{1}{z_1 - a_1} - \ldots - \frac{1}{z_1 - a_p} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial z_1}}{\psi} - \frac{1}{z_1 - a_r} - \ldots - \frac{1}{z_1 - a_p},$$

$a_r, \ldots, a_p$ étant les racines différentes de a_1, et il est évident que le second membre prend une valeur finie pour $z_1 = a_1$. La somme (2) peut donc être développée en série entière en z_1, $R(z_1)$. Donnons à z_1 des valeurs telles que

$$\rho > |z_1| > |a_i| \quad (i = 1, \ldots, p)$$

et

$$|z_1| > \rho_0;$$

on aura, pour l'une quelconque de ces valeurs,

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} - \frac{1}{z_1 - a_1} - \frac{1}{z_1 - a_2} - \ldots - \frac{1}{z_1 - a_p} = R(z_1).$$

Mais, puisque $|z_1| > |a_1|$, on peut développer $\frac{1}{z_1 - a_1}$ en série convergente

$$\frac{1}{z_1} + a_1 \frac{1}{z_1^2} + a_1^2 \frac{1}{z_1^3} + \ldots + a_1^\nu \frac{1}{z_1^{\nu+1}} + \ldots$$

et de même pour les quotients $\frac{1}{z_1 - a_2}, \ldots, \frac{1}{z_1 - a_p}$. Si l'on pose alors

$$Q_0 = p, \quad Q_\nu = (a_1)^\nu + \ldots + (a_p)^\nu,$$

on aura

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = R(z_1) + \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu . z_1^{-\nu-1}. \tag{3}$$

Le quotient $\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S}$ étant une fonction holomorphe de z_1 dans l'aire comprise entre les deux cercles ρ_0 et ρ, qui ont l'origine pour centre, le théorème de Laurent fait voir que les coefficients des mêmes puissances de z_1 dans les seconds membres des relations (1) et (3) doivent être égaux. Égalant les coefficients des puissances négatives de z_1, on aura

$$\left\{\begin{array}{l} Q_0 = m, \\ Q_1 = \mathcal{G}_{-2}, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ Q_l = \mathcal{G}_{-l-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{4}$$

ce qui montre que les sommes Q peuvent se calculer au moyen des coefficients des séries $\mathcal{G}$, c'est-à-dire au moyen des coefficients de S. On peut maintenant écrire la relation (1)

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = g(z_1) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{G}_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^\nu + m z_1^{-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{G}_{-\nu}(z_2, \ldots, z_n) z_1^{-\nu}$$

ou encore, d'après (4),

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = g(z_1) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{G}_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu z_1^{-\nu-1}.$$

Puisque $Q_0 = m$, on a aussi $p = m$. Posons

$$P(z_1) = (z_1 - a_1) \ldots (z_1 - a_m) = z_1^m + P_1 z_1^{m-1} + \ldots + P_m.$$

Les coefficients de P s'expriment en fonction des sommes Q au moyen des formules de Newton

$$\begin{aligned} P_1 &= - Q_1, \\ 2 P_2 &= - Q_2 - Q_1 P_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m P_m &= - Q_m - \ldots - Q_1 P_{m-1}. \end{aligned}$$

On voit donc, en considérant les formules (4), que les coefficients $P_1, \ldots, P_m$ sont des séries entières en $z_2, \ldots, z_n$, convergentes dans le domaine ρ_1 et qui s'annulent toutes à l'origine.

La série $\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{G}_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^\nu$ peut être considérée comme la dérivée par rapport à z_1 d'une autre série entière

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu+1} \mathcal{G}_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^{\nu+1},$$

et de même pour $g(z_1)$. Posons

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \int_0^{z_1} g(z_1)\, dz_1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu+1} \mathcal{G}_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^{\nu+1},$$

$$S''(z_1, \ldots, z_n) = e^{F(z_1, \ldots, z_n)}.$$

S'' est holomorphe dans le domaine de l'origine formé par les cercles ρ et ρ_1, et ne s'annule pas dans ce domaine. On peut donc considérer S'' comme une série entière différente de o pour tout point de ce domaine. Si maintenant on observe qu'on a

$$g(z_1) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{G}_\nu(z_2, \ldots, z_n) z_1^\nu = \frac{\dfrac{\partial S''}{\partial z_1}}{S''}, \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu z_1^{-\nu-1} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial z_1}}{P},$$

on trouve

$$\frac{\dfrac{\partial S}{\partial z_1}}{S} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial z_1}}{P} + \frac{\dfrac{\partial S''}{\partial z_1}}{S''},$$

d'où

$$S = P S'' C,$$

C étant une fonction de $z_2, \ldots, z_n$ indépendante de z_1. Cette fonction est holomorphe dans le domaine ρ_1; pour l'origine, elle se réduit au coefficient de z_1^m dans $S_0(z_1)$. Si, en effet, on fait $z_2 = \ldots = z_n = 0$, S devient $S_0(z_1)$, P devient z_1^m et S″ devient $e^{F(z_1, 0, \ldots, 0)}$. Or

$$F(z_1, 0, \ldots, 0) = \int_0^{z_1} g(z_1)\,dz_1,$$

c'est-à-dire que $F(z_1, 0, \ldots, 0)$ est une série entière sans terme constant. Il en résulte que $e^{F(z_1, 0, \ldots, 0)}$ est une série entière ayant l'unité pour terme constant. En représentant cette série par $1 + az_1 + \ldots$, on aura, en annulant toutes les variables sauf z_1,

$$S_0(z_1) = [C]_0 z_1^m (1 + az_1 + \ldots),$$

ce qui montre bien que $[C]_0$ est le coefficient de z_1^m dans $S_0(z_1)$. La fonction C peut s'annuler pour les valeurs considérées des variables. Mais $z_2, \ldots, z_n$ sont assujetties à la seule condition d'avoir leurs modules inférieurs à ρ_1. On peut imaginer un nombre positif ρ_2 inférieur à ρ_1 et assez petit pour que C, qui est différent de o à l'origine, ne s'annule pas dans le domaine ρ_2 de l'origine. Alors, dans ce domaine, le produit CS″ est une série entière qui ne s'annule pas. En représentant cette série par S′, on aura finalement la relation

$$S = PS', \tag{5}$$

où P et S′ ont les significations indiquées dans l'énoncé.

Cette relation n'est établie que pour les valeurs des variables qui sont situées dans une aire déterminée. Cette aire est comprise dans le domaine de l'origine formée par des cercles ayant un rayon δ égal au plus petit des deux nombres ρ et ρ_2. Les trois séries S, P, S′ sont convergentes dans ce domaine. Par suite, la relation (4) subsiste, d'après le théorème IV, pour tout point de δ, et le théorème est démontré.

Le théorème précédent permet d'étudier les zéros de la fonction $S(z_1, \ldots, z_n)$ qui sont situés dans un certain domaine de l'origine.

Supposons, pour prendre d'abord un cas simple, que $S_1(z_1, 0, \ldots, 0)$ ne soit pas nulle pour toute valeur de z_1. Nous pouvons fixer un domaine δ de l'origine dans lequel on a $S = PS'$, les notations ayant le même sens que plus haut. Proposons-nous d'étudier les zéros de la fonction S dans le domaine δ. Donnons à $z_2, \ldots, z_n$ des valeurs arbitraires, situées dans δ, et cherchons les valeurs de z qu'il faut leur joindre pour obtenir des zéros de S. P est un polynôme, de degré m par exemple, et S' une série entière en z_1. Pour les valeurs considérées de $z_2, \ldots, z_n$, les coefficients de P et de S' prennent des valeurs déterminées, et nous pouvons faire abstraction de la complication des calculs qui donneraient ces valeurs. On est amené à chercher les valeurs de z_1, situées dans δ, qui annulent le produit PS'. Or S' ne s'annule pas dans δ. Donc il y a m valeurs de z_1, situées dans δ, qui annulent S, et pas davantage. On voit que ces valeurs sont données par l'équation algébrique $P = 0$. Il y a donc, dans le domaine δ, une infinité de points pour lesquels S s'annule. Autrement dit, il est impossible de fixer un domaine de l'origine dans lequel la fonction S n'ait qu'un nombre limité de zéros.

Imaginons que les points qui figurent les variables $z_2, \ldots, z_n$ sur leurs plans respectifs se déplacent en partant de l'origine et voyons comment se comporteront sur le plan des z_1 les différents points tels que chacun d'eux réuni avec les précédents forme un zéro de la fonction. Traçons sur les plans respectifs des variables $z_2, \ldots, z_n$ des courbes arbitraires partant de l'origine, et supposons que les affixes des variables se déplacent d'un mouvement continu sur les courbes correspondantes. Les coefficients de P sont des séries entières en $z_2, \ldots, z_n$ qui s'annulent toutes à l'origine. Chacune de ces séries est une fonction holomorphe de $z_2, \ldots, z_n$ dans le domaine δ. Par suite, si, comme on le suppose, chacune des variables $z_2, \ldots, z_n$ varie d'une manière continue, il en sera de même des coefficients de P et des m racines de l'équation algébrique en z_1. Les points qui représentent ces racines se déplacent donc d'un mouvement continu sur une courbe déterminée.

Nous pouvons représenter analytiquement ces résultats. Posons

$$\begin{aligned} z_h &= x_h + y_h \quad (h = 1, 2, \ldots, n), \\ x_h &= \varphi_h(t) \quad (h = 2, \ldots, n), \\ y_h &= \psi_h(t) \quad (h = 2, \ldots, n), \end{aligned}$$

t étant une variable réelle, les φ et les ψ des fonctions continues de t. Lorsque t variera, chaque point z_h $(h = 2, \ldots, n)$ se déplacera sur une courbe, déterminée par les équations $x_h = \varphi_h(t)$, $y_h = \psi_h(t)$. Si t varie d'une manière continue, chaque point se déplace sur la courbe correspondante d'un mouvement continu. Dans l'équation

$$z_1^m + P_1 z_1^{m-1} + \ldots + P_m = 0,$$

substituons aux variables z les variables x, y, puis égalons à o le coefficient de i et le terme indépendant de i. Nous aurons deux équations

$$f(x_1, y_1) = 0, \quad f_1(x_1, y_1) = 0.$$

Enfin faisons la substitution

$$x_h = \varphi_h(t), \quad y_h = \psi_h(t) \quad (h = 2, \ldots, n),$$

nous aurons

$$\varphi_1(x_1, y_1, t) = 0, \quad \psi_1(x_1, y_1, t) = 0.$$

Ces équations font connaître z_1 en fonction de t. De plus, elles déterminent la courbe sur laquelle se déplace le point z_1, d'un mouvement continu, quand t varie d'une manière continue.

Si $S(z_1, 0, \ldots, 0)$ s'annule pour toute valeur de z_1, on cherchera à recommencer le raisonnement avec une autre des variables. Dans le cas où chaque terme de la série contient toutes les variables z, le raisonnement est en défaut. Nous procéderons alors de la manière suivante.

Représentons par $(z_1, z_2, \ldots, z_n)_\lambda$ l'ensemble des termes de S qui sont du degré λ par rapport à toutes les variables, et soit μ la plus petite valeur de λ pour laquelle les coefficients $(z_1, \ldots, z_n)_\lambda$ ne sont pas tous nuls; on aura

$$S(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_n)_\mu + (z_1, \ldots, z_n)_{\mu+1} + \ldots.$$

Faisons la substitution

$$(1) \qquad \begin{cases} z_1 = C_1^1 t_1 + C_1^2 t_2 + \ldots + C_1^n t_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_n = C_n^1 t_1 + C_n^2 t_2 + \ldots + C_n^n t_n, \end{cases}$$

les C désignant des constantes choisies arbitrairement, mais telles que

$$\begin{vmatrix} C_1^1 & C_1^2 & \ldots & C_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_n^1 & C_n^2 & \ldots & C_n^n \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{et} \quad (C_1^1, \ldots, C_n^1)_\mu \neq 0.$$

Par cette substitution, S devient une série entière par rapport aux t. Représentons-la par $\Sigma(t_1, \ldots, t_n)$. On a

$$\Sigma(t_1, 0, \ldots, 0) = (C_1^1, C_2^1, \ldots, C_n^1)_\mu t_1^\mu + \ldots.$$

D'après ce qui précède, on a, dans un domaine δ', relatif aux variables t,

$$\Sigma(t_1, \ldots, t_n) = (t_1^\mu + Q_1 t_1^{\mu-1} + \ldots + Q_\mu)\Sigma'(t_1, \ldots, t_n),$$

où les Q sont des séries entières en $t_2, \ldots, t_n$ qui s'annulent toutes pour $t_2 = \ldots = t_n = 0$, et où Σ' est une série entière différente de 0 dans δ'. Au domaine δ' relatif aux t correspond un domaine δ pour les z. Alors, pour avoir les valeurs des variables z situées dans δ et qui annulent S, on prendra arbitrairement $t_2, \ldots, t_n$ dans δ', on calculera μ valeurs de t_1 par l'équation algébrique

$$t_1^\mu + Q_1 t_1^{\mu-1} + \ldots + Q_\mu = 0, \tag{2}$$

et l'on aura ensuite les z par les relations (1).

On voit, comme plus haut, que si les points $z_2, \ldots, z_n$ se déplacent d'un mouvement continu sur des courbes partant de l'origine, le point z_1, qu'il faut joindre à un système de valeurs de $z_2, \ldots, z_n$ pour avoir un zéro de S, décrit d'un mouvement continu une trajectoire déterminée. On peut déterminer analytiquement les trajectoires par un calcul analogue au précédent. Posons

$$\left.\begin{aligned} z_h &= x_h + iy_h \\ t_h &= \xi_h + i\eta_h \end{aligned}\right\} \quad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_h &= \varphi_h(u) \\ \eta_h &= \psi_h(u) \end{aligned}\right\} \quad (h = 2, \ldots, n),$$

les φ et ψ étant des fonctions continues de la variable réelle u. Dans les équations (1) et (2), faisons les substitutions

$$z_h = x_h + iy_h, \quad t_h = \xi_h + i\eta_h,$$

puis égalons à 0 les coefficients de i et les termes indépendants. Nous aurons $2(n+1)$ équations

$$\tag{3} \left\{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} f_h(x_h, y_h, \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0 \\ g_h(x_h, y_h, \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (h = 1, \ldots, n), \\ &F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0, \\ &G(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0. \end{aligned}\right.$$

Les équations suivantes déterminent la trajectoire du point z_h :

$$f_h(x_h, y_h, \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0,$$
$$g_h(x_h, y_h, \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0,$$
$$F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0,$$
$$G(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0,$$
$$\begin{gathered} \xi_2 = \varphi_2(u), \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \xi_n = \varphi_n(u), \\ \eta_2 = \psi_2(u), \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \eta_n = \psi_n(u). \end{gathered}$$

Nous ferons une autre remarque au sujet du théorème précédent. Soit S une série entière n'ayant pas de terme constant. On peut déterminer un domaine δ de l'origine, tel que, si l'on choisit un système de valeurs pour $z_2, \ldots, z_n$ dans ce domaine, les valeurs de z_1, situées dans δ et satisfaisant à l'équation $S = 0$, sont données par des équations algébriques. On voit ainsi que l'équation $S = 0$ définit, dans le domaine δ, une fonction implicite z_1 des variables $z_2, \ldots, z_n$ qui possède les mêmes propriétés que la fonction implicite définie par une équation algébrique.

Soient S_0 et S_1 deux séries entières s'annulant à l'origine et admettant A pour cercle de convergence. Proposons-nous de rechercher s'il y a, dans un domaine de l'origine, d'autres points pour lesquels les deux séries s'annulent. Faisons la substitution

$$\begin{gathered} z_1 = C_1^1 t_1 + \ldots + C_1^n t_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_n = C_n^1 t_1 + \ldots + C_n^n t_n. \end{gathered}$$

S_0 et S_1 deviennent des séries entières par rapport aux variables t, Σ_0 et Σ_1. Choisissons les constantes telles que le déterminant

$$\begin{vmatrix} C_1^1 & \ldots & C_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ C_n^1 & \ldots & C_n^n \end{vmatrix}$$

soit différent de o, et telles aussi que ni $\Sigma_0(t_1, 0, \ldots, 0)$ ni $\Sigma_1(t_1, 0, \ldots, 0)$ ne soient nulles pour toutes les valeurs de t_1. Cela posé, on peut fixer un domaine δ' de l'origine dans lequel on aura

$$\Sigma_0 = P_0 \Sigma'_0, \quad \Sigma_1 = P_1 \Sigma'_1,$$

P_0, P_1 étant deux polynômes en t_1; Σ'_0, Σ'_1 étant des séries entières par rapport aux t qui ne s'annulent en aucun point de δ'. Si Σ_0 et Σ_1 s'annulent, P_0 et P_1 s'annulent aussi, et réciproquement. Soit R le résultant des polynômes P_0, P_1. Ce résultant est une fonction entière et homogène des coefficients de P_0 et P_1, c'est-à-dire une série entière en $t_2, \ldots, t_n$, série qui s'annule à l'origine. La série R admet une infinité de zéros dans un domaine δ'' de l'origine, et l'on peut prendre $\delta'' < \delta'$. A chaque zéro de R correspond au moins un zéro commun à S_0 et S_1. En effet, si l'on prend un zéro de R, les polynômes P_0 et P_1 admettent au moins une racine commune située dans δ', et si l'on prend pour t_1 une racine commune, on a un zéro de Σ_0 et de Σ_1, c'est-à-dire de S_0 et de S_1. Si maintenant on appelle δ le domaine relatif aux variables z qui correspond au domaine δ'', on voit que les deux séries admettent une infinité de zéros communs dans le domaine δ. On pourrait les déterminer de la manière suivante. On aurait d'abord un zéro de R d'après la méthode déjà indiquée, en prenant arbitrairement $n-2$ variables et calculant la $(n-1)^{\text{ième}}$ par une équation algébrique. Cela fait, on chercherait la racine commune aux deux équations algébriques $P_0 = 0$, $P_1 = 0$, et l'on aurait la $n^{\text{ième}}$ variable. Les valeurs des z se déduisent sans peine de celles des t.

Dans le cas particulier où les séries données sont à deux variables, R n'en contient plus qu'une, et alors les résultats changent. R étant une fonction holomorphe, nulle pour l'origine, on peut fixer un domaine δ dans lequel R n'aura pas d'autres zéros que l'origine, et l'on peut prendre $\delta \leq \delta'$. Alors S_0 et S_1 n'ont pas, dans le domaine δ, d'autres zéros communs que l'origine. Ainsi, si deux séries à deux variables ont un zéro commun, il est possible de fixer un domaine de ce point dans lequel il n'y a pas d'autres zéros communs.

III.

Divisibilité des séries entières.

Conditions de divisibilité de deux séries entières.

Soient S_0, S_1 deux séries entières par rapport aux variables indépendantes $z_1, \ldots, z_n$, et supposons que ces deux séries admettent A pour cercle de convergence. Nous dirons, en adoptant une locution de M. Weierstrass, que la série S_0 est *divisible* par la série S_1, si l'on peut fixer un domaine δ de l'origine dans lequel on ait

$$S_0 = S_1 S_2,$$

S_2 désignant une série entière convergente dans δ.

Si S_1 ne s'annule pas à l'origine, on peut fixer un domaine δ ($\delta \leqq A$) de ce point dans lequel la série n'a pas de zéros. Alors la fraction $\frac{S_0}{S_1}$ est holomorphe dans δ, et l'on peut la mettre sous la forme d'une série entière convergente dans δ. Il en résulte que S_0 est divisible par S_1. Au contraire, si S_1 s'annule à l'origine, tandis que S_0 prend en ce point une valeur différente de o, le quotient $\frac{S_0}{S_1}$ étant infini à l'origine, il est impossible de le représenter dans un domaine de ce point par une série entière convergente. Il n'y a donc lieu de rechercher les conditions de divisibilité de deux séries que dans l'hypothèse où elles s'annulent toutes les deux à l'origine.

Si l'on sait reconnaître que le module du quotient $\frac{S_0}{S_1}$ reste fini dans un domaine δ de l'origine, on en conclut que ce quotient est holomorphe dans δ et peut être développé en série entière. S_0 est donc divisible par S_1.

Considérons maintenant le cas général. Soient $S_0(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $S_1(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ deux séries entières qui s'annulent à l'origine. Faisons la substitution

$$z_i = C_i^1 t_1 + \ldots + C_i^n t_n \quad (i = 1, \ldots, n)$$

les C désignant des constantes assujetties seulement aux deux conditions suivantes, le déterminant

$$\begin{vmatrix} C_1^1 & \dots & C_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ C_n^1 & \dots & C_n^n \end{vmatrix}$$

est différent de o, et aucune des deux séries

$$S_0(C_1^1 t_1, C_2^1 t_1, \dots, C_n^1 t_1), \quad S_1(C_1^1 t_1, C_2^1 t_1 \dots, C_n^1 t_1)$$

ne s'annule pour toutes les valeurs de t_1. Représentons par Σ_0 et Σ_1 les séries entières par rapport aux variables t que l'on obtient par la substitution indiquée. Soient μ et ν les plus faibles exposants de t_1 dans $\Sigma_0(t_1, o, \dots, o)$ et $\Sigma_1(t_1, o, \dots, o)$. On sait que l'on peut déterminer un domaine δ de l'origine dans lequel on aura

$$\Sigma_0 = P_0 \Sigma'_0, \quad \Sigma_1 = P_1 \Sigma'_1,$$

Σ_0, Σ'_1 désignant des séries qui ne s'annulent en aucun point de δ; P_0, P_1 désignant des polynômes entiers en t_1. Soit

$$P_0 = t_1^\mu + P_0^{(1)} t_1^{\mu-1} + \dots + P_0^{(\mu)},$$
$$P_1 = t_1^\nu + P_1^{(1)} t_1^{\nu-1} + \dots + P_1^{(\nu)},$$

les P_0 et P_1 étant des séries entières en $t_2, \dots, t_n$, dépourvues de termes constants.

Les conditions de divisibilité des séries sont alors données par le théorème suivant :

Théorème VII. — *Si l'on effectue la division du polynôme* P_0 *par le polynôme* P_1, *on obtient pour reste un polynôme en* t_1 *dont les coefficients sont des séries entières en* $t_2, \dots, t_n$. *Pour que* S_0 *soit divisible par* S_1, *il faut et il suffit que ces nouvelles séries aient tous leurs coefficients nuls.*

En d'autres termes, *pour que* S_0 *soit divisible par* S_1, *il faut et il suffit que le polynôme* P_0 *soit divisible, au sens ordinaire du mot, par le polynôme* P_1, *quelles que soient les valeurs attribuées à* $t_2, \dots, t_n$.

En effet, pour que S_0 soit divisible par S_1, il faut et il suffit que Σ_0 soit divisible par Σ_1, c'est-à-dire que le module du quotient $\frac{\Sigma_0}{\Sigma_1}$ reste fini dans un certain domaine Δ de l'origine, ce domaine étant relatif aux variables t.

Je dis d'abord que les conditions sont nécessaires. Nous pouvons prendre δ aussi petit que nous voulons, et par suite inférieur à Δ. Le module du quotient $\frac{\Sigma_0}{\Sigma_1}$ doit donc rester fini pour tout point de δ. Les racines des polynômes P_0, P_1 se réduisent à zéro pour $t_2 = t_3 = \ldots = t_n = 0$ et sont, dans le domaine δ, des fonctions continues des variables $t_2, \ldots, t_n$. On peut donc déterminer un nombre positif $\delta_1 \leqq \delta$ tel que, pour tout système de valeurs de $t_2, \ldots, t_n$ vérifiant l'inégalité

$$|t_i| < \delta_1 \quad (i = 2, \ldots, n),$$

le module de chaque racine des polynômes P_0 et P_1 soit inférieur à δ. Prenons alors un point $t'_2, \ldots, t'_n$ dans δ_1, et appelons $t_1^{(1)}, \ldots, t_1^{(m)}$ les racines distinctes des polynômes P_0 et P_1 qui correspondent à ce point. On a, pour ce point,

$$\frac{P_0}{P_1} = (t_1 - t_1^{(1)})^{\lambda_1} \ldots (t_1 - t_1^{(m)})^{\lambda_m},$$

les λ étant des nombres entiers, positifs, négatifs ou nuls. De là

$$\frac{\Sigma_0}{\Sigma_1} = (t_1 - t_1^{(1)})^{\lambda_1} \ldots (t_1 - t_1^{(m)})^{\lambda_m} \frac{\Sigma'_0}{\Sigma'_1}.$$

Le quotient $\frac{\Sigma'_0}{\Sigma'_1}$ étant différent de o, dans δ, on voit que, si un seul des λ est négatif, λ_i par exemple, le module du quotient $\frac{\Sigma_0}{\Sigma_1}$ est infini pour le point $(t_1 = t_1^{(i)}, t_2 = t'_2, \ldots, t_{n_1} = t'_n)$ pris dans Δ. Il faut donc que tous les λ soient positifs, ou nuls; c'est-à-dire que, pour les valeurs considérées $t'_2, \ldots, t'_n$, P_0 est divisible par P_1. On a posé

$$P_0 = t_1^{\mu} + P_0^{(1)} t_1^{\mu-1} + \ldots + P_0^{(\mu)},$$
$$P_1 = t_1^{\nu} + P_1^{(1)} t_1^{\nu-1} + \ldots + P_1^{(\nu)}.$$

Soient le quotient des deux polynômes

$$t_1^{\mu-\nu} + P_2^{(1)} t_1^{\mu-\nu-1} + \ldots + P_2^{(\mu-\ )}$$

et le reste

$$P_3^{(0)} t_1^{\nu-1} + P_3^{(1)} t_1^{\nu-2} + \ldots + P_3^{(\nu-1)}.$$

On aura identiquement

$$\begin{aligned} & t_1^{\mu} + P_0^{(1)} t_1^{\mu-1} + \ldots + P_0^{(\mu)} \\ = & (t_1^{\nu} + P_1^{(1)} t_1^{\nu-1} + \ldots + P_1^{(\nu)}) (t_1^{\mu-\nu} + P_2^{(1)} t_1^{\mu-\nu-1} + \ldots + P_2^{(\mu-\nu)}) \\ & + P_3^{(0)} t_1^{\nu-1} + \ldots + P_3^{(\nu-1)} \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} P_0^{(1)} &= P_2^{(1)} + P_1^{(1)}, \\ P_0^{(2)} &= P_2^{(2)} + P_1^{(1)} P_2^{(1)} + P_1^{(2)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_0^{(\nu)} &= P_2^{(\mu-\nu)} + \ldots + P_1^{(\mu-\nu)}, \\ P_0^{(\mu)} &= P_1^{(\nu)} P_2^{(\mu-\nu)} + \ldots + P_3^{(\nu-1)}. \end{aligned}$$

Ces relations montrent que les coefficients P_2 et P_3 sont des séries entières en $t_2, \ldots, t_n$, convergentes dans δ. On a vu que, pour les valeurs considérées de $t_2, \ldots, t_n$, P_0 était divisible par P_1. On a donc, pour ces valeurs,

$$P_3^{(0)} = 0, \quad P_3^{(1)} = 0, \quad P_3^{(\nu-1)} = 0.$$

Mais le même raisonnement peut se faire avec un autre système de valeurs de $t_2, \ldots, t_n$, choisi arbitrairement dans δ_1. Les séries P_3 prennent donc la valeur 0 pour tout point de l'aire δ_1 et, par suite, les coefficients des termes de chacune de ces séries sont nuls. Ce sont les conditions indiquées.

On voit qu'on peut énoncer ce résultat en disant que le polynôme P_0 est divisible par P_1, c'est-à-dire qu'on a pour tout point de δ

$$P_0 = P_1 P_2,$$

P_2 étant un polynôme en t_1, dont les coefficients ont été calculés plus haut.

Je dis maintenant que les conditions sont suffisantes. Nous avons formé les polynômes P_0 et P_1, et reconnu qu'on avait pour tout point de δ

$$P_3^{(0)} = 0, \quad P_3^{(1)} = 1, \quad \ldots, \quad P_3^{(\nu-1)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$P_0 = P_1 P_2.$$

On a identiquement dans δ

$$\Sigma_0(t_1, \ldots, t_n) = P_0\Sigma'_0 = P_1 P_2 \Sigma'_0 = \Sigma_1 \frac{\Sigma'_0}{\Sigma'_1} P_2.$$

Mais le quotient $\frac{\Sigma'_0}{\Sigma'_1}$ est holomorphe dans δ, de même que P_2. Leur produit est aussi holomorphe, et on peut le mettre sous forme de série entière, Σ_2, convergente dans δ. On a alors

$$\Sigma_0(t_1, \ldots, t_n) = \Sigma_1(t_1, \ldots, t_n)\Sigma_2(t_1, \ldots, t_n),$$

ce qui démontre le théorème.

De ce théorème, on déduit qu'une série entière S_0, nulle pour l'origine, est divisible par une infinité de séries s'annulant à l'origine. Par un changement de variables, mettons, comme plus haut, la série Σ_0 sous la forme $P_0\Sigma'_0$, les notations ayant toujours le même sens. Prenons un diviseur quelconque P_1 du polynôme P_0, et désignons par Σ'_1 une série entière quelconque qui ne soit pas nulle à l'origine. On peut fixer un domaine δ dans lequel Σ'_1 ne sera pas nulle et dans lequel on aura $\Sigma_0 = P_0\Sigma'_0$. La fonction $P_1\Sigma'_1$ étant holomorphe dans δ, on peut la développer en série entière Σ_1. Cette série Σ_1 divise Σ_0. Si maintenant on revient aux variables z, on obtiendra une série S_1 divisant S_0. Le facteur Σ'_1 étant arbitraire, la série S_0 admet une infinité de diviseurs.

Diviseurs communs à deux séries.

Soient $S_0(z_1, \ldots, z_n)$, $S_1(z_1, \ldots, z_n)$ deux séries entières qui s'annulent à l'origine. Proposons-nous de rechercher s'il y a des séries entières s'annulant à l'origine, qui divisent à la fois S_0 et S_1. Si nous trouvons des séries répondant à la question, nous les appellerons des *diviseurs communs* aux deux séries données.

Soit S_2 une série entière divisant S_0 et S_1, S_2 s'annulant à l'origine. Aux variables z, substituons de nouvelles variables t, comme précédemment, et conservons les mêmes notations. On peut fixer un domaine δ de l'origine, dans lequel on aura

$$\Sigma_0 = P_0\Sigma'_0, \quad \Sigma_1 = P_1\Sigma'_1, \quad \Sigma_2 = P_2\Sigma'_2.$$

D'après le théorème précédent, pour que S_2 divise S_0 et S_1, il faut que le polynôme P_2 divise P_0 et P_1. Désignons par λ et μ les degrés par rapport à t_1 des polynômes P_0 et P_1, et supposons, pour fixer les idées, $\lambda \geqq \mu$. Effectuons les divisions successives qui donnent le plus grand commun diviseur des polynômes. Le reste de la division de P_0 par P_1 sera un polynôme de degré $\mu - 1$ au plus. Si ce reste est effectivement de degré $\mu - 1$, représentons-le par

$$R_{\mu-1} t_1^{\mu-1} + R_{\mu-1}^{(1)} t_1^{\mu-2} + \ldots + R_{\mu-1}^{(\mu-1)}.$$

Les coefficients sont des polynômes entiers par rapport aux coefficients de P_0 et P_1, c'est-à-dire des séries entières en $t_2, \ldots, t_n$ qui admettent δ pour cercle de convergence et se réduisent toutes à o pour $t_2 = t_3 = \ldots = t_n = 0$. Divisons maintenant P_1 par ce reste, et faisons les divisions de manière que les coefficients du nouveau reste soient aussi des polynômes par rapport aux coefficients du dividende et du diviseur, c'est-à-dire des séries entières. Nous aurons un reste que nous représenterons par

$$R_{\mu-2} t_1^{\mu-2} + R_{\mu-2}^{(1)} t_1^{\mu-3} + \ldots + R_{\mu-2}^{(\mu-2)}.$$

Si le reste de la première division avait été de degré $\mu - 2$, le calcul indiqué n'aurait pu se faire. Dans ce cas, nous représenterons le reste de degré $\mu - 1$ par la même formule que précédemment, en convenant que les $R_{\mu-1}$ désignent des séries dont tous les coefficients sont nuls, et alors le reste donné par la première division sera représenté par

$$R_{\mu-2} t_1^{\mu-2} + R_{\mu-2}^{(1)} t_1^{\mu-3} + \ldots + R_{\mu-2}^{(\mu-2)},$$

la série $R_{\mu-2}$ n'ayant pas tous ses coefficients nuls. En continuant de la même manière, nous pouvons dire que la série des divisions donne une suite de restes qui sont des polynômes en t_1 de degrés respectivement égaux à $\mu - 1$, $\mu - 2$, ..., 1, 0, dont les coefficients sont des séries entières en $t_2, \ldots, t_n$ qui admettent toutes δ pour cercle de convergence, et se réduisent toutes à zéro pour $t_2 = t_3 = \ldots = t_n = 0$. Représentons ces restes par les formules

$$\begin{array}{l}
R_{\mu-1} t_1^{\mu-1} + \ldots + R_{\mu-1}^{(\mu-1)}, \\
R_{\mu-2} t_1^{\mu-2} + \ldots + R_{\mu-2}^{(\mu-2)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
R_\nu t_1^\nu + \ldots + R_\nu^{(\nu)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
R_1 t_1 + R_1^{(1)}, \\
R.
\end{array}$$

D'après nos conventions, si R_ν a tous ses coefficients nuls, il en est de même pour $R_\nu^{(1)}, \ldots, R_\nu^{(\nu)}$. Cela posé, les polynômes P_0 et P_1 admettant un diviseur commun, on verra, comme précédemment, que la série R a tous ses coefficients nuls.

On obtient ainsi, en fonction des coefficients des séries données S_0, S_1, des conditions nécessaires pour que ces séries admettent des diviseurs communs qui s'annulent à l'origine.

Réciproquement, si la série R a tous ses coefficients nuls, je dis que les deux séries données admettent des diviseurs communs. Supposons, en effet, que chacune des séries $R, R_1, R_1^{(1)}, \ldots$ ait tous ses coefficients nuls, la série R_ν étant la première de la suite qui n'a pas tous ses coefficients nuls. Prenons dans le domaine δ un point $t'_2, \ldots, t'_n$, pour lequel la série R_ν ne soit pas nulle. Pour ces valeurs des variables $t_2, \ldots, t_n$, les polynômes P_0 et P_1 admettent un plus grand commun diviseur

$$R_\nu t_1^\nu + R_\nu^{(1)} t_1^{\nu-1} + \ldots + R_\nu^{(\nu)}.$$

On peut fixer un domaine ω du point $t'_2, \ldots, t'_n$, qui soit compris dans δ, et dans lequel R_ν soit différent de o. Pour chaque point de ce domaine P_0 et P_1 admettent le polynôme précédent pour plus grand commun diviseur. Ce plus grand commun diviseur peut s'écrire

$$t_1^\nu + \frac{R_\nu^{(1)}}{R_\nu} t_1^{\nu-1} + \ldots + \frac{R_\nu^{(\nu)}}{R_\nu}.$$

Les quotients $\frac{R_\nu^{(1)}}{R_\nu}, \ldots, \frac{R_\nu^{(\nu)}}{R_\nu}$ peuvent être développés, dans le domaine ω, en séries entières par rapport aux différences $(t_2 - t'_2), \ldots, (t_n - t'_n)$, soient $T_1, T_2, \ldots, T_\nu$. Mais on peut considérer $T_1, \ldots, T_\nu$ comme des séries entières en $t_2, \ldots, t_n$ convergentes dans δ. Si nous posons

$$P_2 = t_1^\nu + T_1 t_1^{\nu-1} + \ldots + T_\nu,$$

on voit qu'on aura pour tout point de ω et, par suite, de δ (théorème IV),

$$P_0 = P_2 P_3, \quad P_1 = P_2 P_4,$$

P_3 et P_4 désignant des polynômes en t_1 dont les coefficients sont des séries entières en $t_2, \ldots, t_n$. Il en résulte que Σ_0 et Σ_1 admettent un diviseur commun P_2. Par suite, S_0 et S_1 admettent aussi un diviseur commun S_2, qu'on obtient en remplaçant dans P_2 les variables t par leurs valeurs en fonction des variables z.

On peut, dès lors, énoncer le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Étant données deux séries entières en* $z_1, \ldots, z_n$ *qui s'annulent à l'origine, si l'on fait un changement de variables comme il a été indiqué, et si ensuite on calcule le résultant des polynômes* P_0 *et* P_1 (*nous conservons toujours les mêmes notations*), *les conditions nécessaires et suffisantes pour que* S_0 *et* S_1 *admettent des diviseurs communs sont que la série résultante ait tous ses coefficients nuls.*

Plus grand commun diviseur de deux séries.

Soient deux séries S_0, S_1 qui sont nulles à l'origine. Reprenons les notations précédentes. Aux variables z substituons les variables t. Nous obtenons les séries Σ_0, Σ_1. Soit δ un domaine de l'origine dans lequel on a $\Sigma_0 = P_0\Sigma'_0$, $\Sigma_1 = P_1\Sigma'_1$. Supposons que P_0 et P_1 admettent un plus grand commun diviseur de degré ν, P_2. On a pour tout point de δ

$$P_0 = P_2P_3, \quad P_1 = P_2P_4,$$
$$\Sigma_0 = P_2\Sigma_3, \quad \Sigma_1 = P_2\Sigma_4,$$

en posant

$$\Sigma_3 = P_3\Sigma'_0, \quad \Sigma_4 = P_4\Sigma'_1.$$

Soient enfin S_3, S_4 les séries que donnent Σ_3, Σ_4, quand on revient aux variables z.

Théorème IX. — *Les séries* S_3, S_4 *n'admettent pas de diviseur commun nul à l'origine.*

Nous allons montrer, en effet, que, si S_3 et S_4 admettaient un diviseur commun, nul à l'origine, les polynômes en t_1, P_3 et P_4 auraient un diviseur commun; or cela est impossible, puisque ces polynômes sont les quotients obtenus en divisant P_0 et P_1 par leur plus grand commun diviseur. Si S_3 et S_4 admettent un diviseur commun nul à l'origine, on peut prendre un système de valeurs pour $t_2, \ldots, t_n$ (dans le domaine où ces variables doivent rester), tel que les valeurs de t_1, qui forment avec les précédentes un zéro du diviseur, soient aussi dans le domaine δ. Mais alors ce point est aussi un zéro de Σ_3 et de Σ_4.

Or Σ'_0 ne s'annule pas dans le domaine δ. Donc les valeurs considérées annulent P_3. Σ'_1 ne s'annule pas non plus. Donc ces mêmes valeurs annulent P_4. Il en résulterait que P_3 et P_4 admettraient des racines communes.

THÉORÈME X. — *Toute série, nulle à l'origine, qui divise* S_0 *et* S_1, *divise aussi* S_2.

Soit Q une série qui divise S_0 et S_1. Prenons un domaine δ de l'origine, dans lequel on ait

$$\Sigma_0 = P_0 \Sigma'_0, \quad \Sigma_1 = P_1 \Sigma'_1,$$
$$Q = HQ' \quad \Sigma_2 = P_2 \Sigma'_2,$$

P_0, P_1, P_2, H désignant toujours des polynômes en t_1 et $\Sigma'_0, \Sigma'_1, \Sigma'_2$, Q' des séries différentes de o dans δ. Donnons à $t_2, \ldots, t_n$ des valeurs comprises dans $\delta'(\delta' < \delta)$ et telles que les valeurs correspondantes de t_1, qui annulent H, soient comprises dans δ. Chaque racine de H associée à ces valeurs de $t_2, \ldots, t_n$ forme un zéro de Q et, par suite, un zéro de S_0 et de S_1. Donc, en raisonnant comme plus haut, on voit que P_0 et P_1 sont tous les deux divisibles par H. Par suite, H divise le plus grand commun diviseur P_2 de P_0 et P_1. Soit $P_2 = HK$, K étant un polynôme en t_1. On aura, dans le domaine δ',

$$P_2 = Q \frac{K}{Q'} = QQ_1,$$

Q_1 désignant une série entière convergente dans δ'. Alors

$$\Sigma_2 = QQ_1 \Sigma'_2 = QQ_2,$$

où Q_2 est toujours une série entière convergente dans δ', et le théorème est démontré.

De ce qui précède résulte que la série S_2 joue, par rapport aux séries S_0 et S_1, le même rôle que le plus grand commun diviseur par rapport à deux polynômes. Tout diviseur commun de deux polynômes est un diviseur de leur plus grand commun diviseur; de même toute série qui divise S_0 et S_1 divise S_2. Les quotients obtenus en divisant deux polynômes par leur plus grand commun diviseur sont premiers entre eux; de même les séries S_3 et S_4, qui, respectivement multipliées par S_2, reproduisent S_0 et S_1, n'admettent aucun diviseur-série commun.

Nous appellerons cette série S_2 *le plus grand commun diviseur des séries* S_0 *et* S_1.

THÉORÈME XI. — S_0, S_1, S_2 *étant trois séries entières par rapport aux variables* $z_1, \ldots, z_n$, *admettant* A *pour cercle de convergence et s'annulant à l'origine, si la série* S_0 *est divisible par* S_1 *et par* S_2, *les séries* S_1 *et* S_2 *n'admettant pas de plus grand commun diviseur, la série* S_0 *est divisible par le produit* $S_1 S_2$.

Aux variables z substituons les variables t, de la manière souvent indiquée, et conservons toujours les mêmes notations. Fixons un domaine $\delta(\delta \leqq A)$ dans lequel on ait

$$\Sigma_0 = P_0 \Sigma'_0, \quad \Sigma_1 = P_1 \Sigma'_1, \quad \Sigma_2 = P_2 \Sigma'_2.$$

Par hypothèse, le résultant des polynômes P_0 et P_1 est nul en tout point de δ, et de même pour celui de P_0 et P_2. Au contraire, le résultant de P_1 et de P_2 n'est pas nul pour tous les points de δ. Prenons un point $t'_2, \ldots, t'_n$ et un domaine ω de ce point tous deux compris dans δ, pour lesquels ce dernier résultant soit différent de o. Appelons ω' l'aire formée par les valeurs de t_1 situées dans δ et de $t_2, \ldots, t_n$ situées dans ω. On a alors dans ω'

$$P_0 = P_1 P_3, \quad P_0 = P_2 P_4,$$

et, comme P_1, P_2 sont premiers entre eux,

$$P_0 = P_1 P_2 P_5.$$

P_5 est une série entière en $t_2, \ldots, t_n$ qui admet δ pour cercle de convergence. Alors la relation précédente, établie pour ω' seulement, subsiste pour le domaine δ tout entier (théorème IV). De cette relation on déduit

$$\Sigma_0 = \Sigma_1 \Sigma_2 \frac{P_5}{\Sigma'_1 \Sigma'_2},$$

et, comme le produit $\Sigma'_1 \Sigma'_2$ ne s'annule pas dans δ, on peut remplacer le quotient $\frac{P_5}{\Sigma'_1 \Sigma'_2}$ par une série entière en $t_1, \ldots, t_n$, Σ_3. On a donc

$$\Sigma_0 = \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3,$$

et, en revenant aux variables z,

$$S_0 = S_1 S_2 S_3. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME XII. — S_0, S_1, S_2 *étant trois séries entières par rapport aux variables* $z_1, \ldots, z_n$ *qui admettent* A *pour cercle de convergence et s'annulent à l'origine, si la série* S_0 *est divisible par* S_1 *et par* S_2, *ces deux dernières admettant un plus grand commun diviseur* S_3, *on peut fixer un domaine* δ *de l'origine dans lequel on ait*

$$S_0 = \frac{S_1 S_2}{S_3} S_4,$$

S_4 *étant une série entière convergente dans* δ.

On sait, en effet, qu'on peut fixer un domaine δ' de l'origine dans lequel on a

$$S_0 = S_1 Q, \quad S_1 = S_3 Q_1, \quad S_2 = S_3 Q_2,$$

les Q désignant des séries entières. On a donc

$$S_0 = S_3 Q_1 Q.$$

Ainsi la série S_0 est divisible par S_3 et le quotient est lui-même divisible par Q_1. On verrait de même que le quotient de S_0 par S_3 est divisible par Q_2. Mais les séries Q_1 et Q_2 n'admettent pas de plus grand commun diviseur (théorème IX). Donc le quotient $\frac{S_0}{S_3}$ est divisible par le produit $Q_1 Q_2$ d'après le théorème précédent. De là suit qu'on peut fixer un domaine de l'origine dans lequel on a

$$S_0 = S_3 Q_1 Q_2 Q_3,$$

Q_3 étant une série entière. De cette relation on déduit

$$S_0 = \frac{S_1 S_2}{S_3} Q_3. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce théorème donne la forme de toute série divisible séparément par deux autres.

On peut appeler la série $\frac{S_1 S_2}{S_3}$ le *plus petit multiple commun* des deux séries S_1 et S_2.

Les deux derniers théorèmes font encore ressortir l'analogie qui existe entre les théorèmes relatifs à la divisibilité des séries et ceux qui sont relatifs à la divisibilité des polynômes. Il serait aisé de poursuivre cette analogie et, en particulier, de considérer la recherche du plus grand commun diviseur et celle du plus petit multiple commun pour le cas de plusieurs séries.

IV.

Des points singuliers des fonctions uniformes de plusieurs variables indépendantes.

Une fonction uniforme des variables $z_1, \ldots, z_n$ est dite *régulière au point a* si, dans un certain domaine de ce point, on peut la mettre sous la forme

$$\Sigma A_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(z_1 - a_1)^{\nu_1}(z_2 - a_2)^{\nu_2} \ldots (z_n - a_n)^{\nu_n} \quad (\nu_1, \ldots, \nu_n = 0, 1, \ldots, \infty).$$

où les ν sont des nombres entiers et les A des coefficients constants; autrement dit, si la fonction peut être développée en série entière relativement aux différences $(z_i - a_i)$, série convergente dans l'aire considérée. Si la grandeur a_i a un module infini, on remplace $(z_i - a_i)$ par $\frac{1}{z_i}$.

Une fonction régulière en un point est holomorphe dans le domaine de ce point (théorème II). Réciproquement, une fonction qui est holomorphe dans une aire est régulière pour tout point de cette aire. Considérons, en effet, un point $a_1, \ldots, a_n$ situé dans l'aire où la fonction est holomorphe. Sur le plan de la variable a_i, on peut décrire un cercle de centre a_i qui soit tout entier compris dans l'intérieur de l'aire dans laquelle la fonction est holomorphe. Alors, la fonction étant holomorphe en tous les points de l'aire formée par les cercles a_i, on peut la représenter dans cette aire par une série entière par rapport aux différences $(z_1 - a_1), \ldots, (z_n - a_n)$. En particulier, une fonction régulière au point a est régulière en tout point du domaine de a.

Un point pour lequel une fonction uniforme n'est pas régulière est dit *point singulier*. Soit a un tel point. Si l'on peut former une série entière en $(z_1 - a_1), \ldots, (z_n - a_n)$, S_0, convergente dans un domaine de a, qui s'annule en a et soit telle que le produit

$$S_0 f(z_1, \ldots, z_n)$$

soit lui-même une fonction régulière au point a, on dit que a est un *point singulier non essentiel* de la fonction $f(z_1, \ldots, z_n)$. Dans tout autre cas, le point singulier est dit *essentiel*.

Si le nombre des variables est au moins deux, on distingue deux sortes de points singuliers non essentiels. Soit a un tel point. On a, dans le domaine δ de ce point, $f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{S_1}{S_0}$, S_0, S_1 désignant des séries entières en $(z_1 - a_1)$, $\ldots$, $(z_n - a_n)$ convergentes dans le domaine δ, et S_0 s'annulant au point a. Supposons que S_1 soit différente de o en ce point. Les fonctions S sont continues au point a. Prenons arbitrairement un nombre positif ε inférieur au module de la valeur que prend S_1 en a, ce que nous écrirons $\varepsilon < |S_1|_a$. Nous pouvons déterminer un nombre positif $\delta'(\delta' \leqq \delta)$ tel qu'on ait, pour tout point du domaine δ' de a, $|S_0| < \varepsilon$. Nous pouvons, en outre, déterminer un nombre positif $\delta''(\delta'' \leqq \delta)$, tel que le module de l'accroissement de S_1 quand on passe du point a à un point quelconque du domaine δ'' de a soit inférieur à ε. Prenons alors δ_1 égal au plus petit des deux nombres δ', δ''. On aura, pour tout point du domaine δ_1 de a,

$$|S_0| < \varepsilon, \quad |S_1| > |S_1|_a - \varepsilon$$

et

$$|f| = \frac{|S_1|}{|S_0|} > \frac{|S_1|_a - \varepsilon}{\varepsilon}.$$

Soit A un nombre positif choisi arbitrairement. Si l'on prend $\varepsilon < \frac{|S_1|_a}{1+A}$, on aura $|f| > A$, et l'on voit que, pour tout point de δ_1, le module de la fonction considérée est supérieur à tout nombre donné A.

Supposons maintenant que S_1 s'annule au point a. Les séries S peuvent admettre un diviseur comme nul au point a. Dans ce cas, en désignant par S_2 leur plus grand commun diviseur et par S_3, S_4 les quotients, on aura

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{S_1}{S_0} = \frac{S_2 S_3}{S_2 S_4} = \frac{S_3}{S_4},$$

et l'on sait (théorème IX) que les nouvelles séries S_3, S_4 n'admettent pas de diviseur commun nul au point a. Il suffit donc de considérer le cas où les deux séries S n'admettent pas de diviseur commun nul au point a. On sait, par les Chapitres précédents, qu'on peut former des fonctions $t_1, t_2, \ldots, t_n$, linéaires et homogènes en $(z_i - a_i)$, au moyen desquelles, dans un domaine $\delta'(\delta' \leqq \delta)$ du point a, les séries S se mettent sous les formes

$$\Sigma_0 = [t_1^{\mu} + P_0^{(1)} t_1^{\mu-1} + \ldots + P_0^{(\mu)}]\Sigma'_0,$$
$$\Sigma_1 = [t_1^{\nu} + P_1^{(1)} t_1^{\nu-1} + \ldots + P_1^{(\nu)}]\Sigma'_1,$$

et l'on se rappelle les propriétés des fonctions P, Σ'_0, Σ'_1.

On peut, puisque Σ_0 et Σ_1 n'ont pas de diviseur commun, prendre dans le domaine δ' des valeurs de $t_2, \ldots, t_n$ pour lesquelles les polynômes en t_1 n'ont pas de racines communes. Autrement dit, il y a certainement dans le domaine δ' au moins un point pour lequel $S_0 = 0$, $S_1 \neq 0$. La fonction $f(z_1, \ldots, z_n)$ est infinie en ce point.

Soit maintenant K une constante arbitraire. On a, dans le domaine δ,

$$S_0[f(z_1, \ldots, z_n) - K] = S_1 - S_0 K = S_2,$$

S_2 étant une série entière, nulle au point a. Dès lors la fonction $\dfrac{1}{f(z_1, \ldots, z_n) - K}$ est placée dans les mêmes conditions que $f(z_1, \ldots, z_n)$. Par suite, on peut trouver un point dans le domaine δ pour lequel $\dfrac{1}{f(z_1, \ldots, z_n) - K} = \infty$, c'est-à-dire $f(z_1, \ldots, z_n) = K$. Le point a est donc tel qu'il existe toujours dans son domaine au moins un point pour lequel la fonction prend une valeur arbitraire, c'est-à-dire que la fonction est complètement indéterminée au point a.

On reconnaît ainsi que la nature du point singulier non essentiel est différente, suivant que le numérateur de la fraction par laquelle la fonction est représentée dans le domaine du point est nul ou non en ce point. Dans la seconde hypothèse, on peut déterminer un domaine du point singulier tel que, pour tout point de ce domaine, la fonction prend une valeur dont le module surpasse tout nombre donné; on peut dire que la fonction prend une valeur infinie pour le point singulier. Dans la première hypothèse, il est possible de fixer un domaine du point singulier tel qu'il existe au moins un point du domaine, pour lequel la fonction prend une valeur assignée à l'avance d'une manière arbitraire; la fonction est indéterminée pour le point singulier.

Comme application, étudions les points singuliers d'un polynôme entier, d'une fraction rationnelle, et enfin d'une fraction ayant pour termes des séries entières.

THÉORÈME XIII. — *Un polynôme entier n'a pas de points singuliers essentiels.*

Un polynôme, étant holomorphe pour toutes les valeurs finies des variables, sera une fonction régulière pour tout point à distance finie. Considérons un point pour lequel quelques-unes des variables, ou toutes, prennent un module infini. Soit le polynôme $f(z_1, \ldots, z_n)$; soient $m_1, m_2, \ldots, m_n$ les degrés de f par rapport à z_1, à $z_2, \ldots$, à z_n. Enfin supposons que $z_i (i = 1, 2, \ldots, p) p \leqq n$, prennent des modules infinis pour le point considéré, les autres variables étant finies. On a

$$(1) \qquad \frac{1}{z_1^{m_1} \ldots z_i^{m_i}} f(z_1, \ldots, z_n) = \Sigma A \frac{1}{z_1^{m'_1}} \cdots \frac{1}{z_i^{m'_i}} z_{i+1}^{\lambda_1} \ldots z_n^{\lambda_{n-i}},$$

A étant un coefficient constant, $m'_1, \ldots, m'_i$ étant des nombres entiers positifs ou nuls, de même que $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-i}$. Formons de la manière suivante un domaine du point considéré. Sur le plan de chacune des variables $z_1, \ldots, z_i$ décrivons un cercle ayant l'origine pour centre et un rayon donné R. Sur le plan de chacune des variables $z_{i+1}, \ldots, z_n$ décrivons un cercle de centre $a_{i+1}, \ldots, a_n$ et de rayon r. Nous prendrons pour domaine δ du point considéré,

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_i = \infty, \quad z_{i+1} = a_{i+1}, \quad \ldots, \quad z_n = a_n,$$

l'ensemble des cercles r et l'ensemble des aires extérieures aux cercles R. Posons

$$z_1 = \frac{1}{u_1}, \quad \ldots, \quad z_i = \frac{1}{u_i},$$

le second membre de la relation précédente devient

$$(2) \qquad \Sigma A u_1^{m'_1} \ldots u_i^{m'_i} z_{i+1}^{\lambda_1} \ldots z_n^{\lambda_{n-i}}.$$

Au domaine δ correspond, pour les variables $u_1, \ldots, u_i, z_{i+1}, \ldots, z_n$ un domaine δ' formé par l'ensemble des cercles r et par i cercles décrits sur les plans des variables u de chaque origine comme centres avec des rayons égaux à $\frac{1}{R}$. Il est clair que la somme (2) est holomorphe en chaque point de δ'. On peut donc la représenter par une série entière par rapport à $u_1, \ldots, u_i, (z_{i+1} - a_{i+1}), \ldots, (z_n - a_n)$. Si l'on remplace les u par leurs valeurs en fonction des z, on a une série entière en $\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_i}, (z_{i+1} - a_{i+1}), \ldots, (z_n - a_n)$. Soit cette série

$$S\left[\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_i}, (z_{i+1} - a_{i+1}), \ldots, (z_n - a_n)\right].$$

La relation (1) montre alors que l'on a pour tout point du domaine δ

$$\frac{1}{z_1^{m_1} \ldots z_i^{m_i}} f(z_1, \ldots, z_n) = S\left[\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_i}, (z_{i+1} - a_{i+1}), \ldots, (z_n - a_n)\right].$$

De là résulte que le point considéré est un point singulier non essentiel, puisque l'on peut considérer le produit $\frac{1}{z_1^{m_1}} \cdots, \frac{1}{z_i^{m_i}}$ comme une série entière en $\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_i}, (z_{i+1} - a_{i+1}), \ldots, (z_n - a_n)$, série qui s'annule au point $(z_1 = z_2 = \ldots = z_i = \infty,\ z_{i+1} = a_{i+1}, \ldots, z_n = a_n)$.

Remarquons, en outre, que les deux sortes de points singuliers non essentiels peuvent se présenter. Supposons que dans le polynôme donné figure le terme $A z_1^{m_1} \ldots z_i^{m_i}$, A étant un coefficient constant. Alors la somme (2) contiendra un terme, A, indépendant des u et des z; la série S prendra donc une valeur différente de 0 au point considéré, et le module de f deviendra infini en ce point. Au contraire, si dans le polynôme il n'y a aucun terme renfermant à la fois $z_1, z_2, \ldots, z_i$, aux puissances respectives $m_1, m_2, \ldots, m_i$, chacun des termes de (2) contiendra en facteur l'une au moins des variables u, et par conséquent la série S s'annulera au point considéré. On a alors un point singulier non essentiel dans le domaine duquel on peut toujours trouver un point qui donne à la fonction une valeur choisie arbitrairement.

Théorème XIV. — *Une fraction rationnelle des variables $z_1, \ldots, z_n$ ne présente pas de points singuliers essentiels.*

Soient φ et ψ deux polynômes entiers par rapport aux variables $z_1, \ldots, z_n$. Le quotient

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{\varphi(z_1, \ldots, z_n)}{\psi(z_1, \ldots, z_n)}$$

constitue une fonction uniforme des variables z. Prenons d'abord un point a à distance finie. Si $\psi(a) \neq 0$, on peut déterminer un domaine de a dans lequel ψ ne s'annule pas. Alors f est holomorphe en tout point de ce domaine, et par suite f est régulière au point a. Soit maintenant $\psi(a) = 0$. Prenons pour domaine de a l'ensemble des cercles décrits de $a_1, \ldots, a_n$ comme centres avec des rayons égaux à un nombre R choisi arbitrairement. On a pour ce domaine

$$\psi(z_1, \ldots, z_n)\, f(z_1, \ldots, z_n) = \varphi(z_1, \ldots, z_n).$$

φ et ψ sont holomorphes, et $\psi(a) = 0$. On voit donc que a est un point singulier non essentiel. Suivant que $\varphi(a)$ sera différent de 0 ou nul, on aura un point singulier non essentiel de l'une ou l'autre espèce.

Considérons un point a pour lequel les modules de certaines variables deviennent infinis, les modules des autres restant finis. Soient $z_1, \ldots, z_i$ les variables dont les modules sont infinis, et $a_{i+1}, \ldots, a_n$ les valeurs finies des autres variables. Désignons par $m_1, m_2, \ldots, m_i$ les degrés du polynôme φ par rapport à z_1, à z_2, ..., à z_i, et par $p_1, \ldots, p_i$ les degrés de ψ par rapport aux mêmes variables. On a identiquement

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{z_1^{p_1-m_1}, \ldots, z_i^{p_i-m_i}} \frac{\varphi'(u_1, \ldots, u_i, z_{i+1}, \ldots, z_n)}{\psi'(u_1, \ldots, u_i, z_{i+1}, \ldots, z_n)},$$

où $u_1 = \frac{1}{z_1}, \ldots, u_i = \frac{1}{z_i}$, et où φ' et ψ' désignent des polynômes entiers par rapport aux variables u et z. Formons le domaine δ du point a comme dans le théorème précédent, et appelons encore δ' le domaine correspondant pour les valeurs u et $z_{i+1}, \ldots, z_n$. Comme on l'a vu plus haut, le point a n'est pas un point singulier essentiel pour le quotient $\frac{\varphi'}{\psi'}$. On peut former un domaine de a, δ_1 ($\delta_1 \leq \delta$), dans lequel on a

$$\frac{\varphi'}{\psi'} = \frac{S}{S'},$$

S, S' désignant des séries entières en $\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_i}$, $(z_{i+1} - a_{i+1}), \ldots, (z_n - a_n)$. De plus, la série S' sera nulle au point a si a est un point singulier du quotient; elle se réduira à une constante, si le quotient est régulier en a. On a donc pour tout point de δ,

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{z_1^{p_1-m_1} \ldots z_i^{p_i-m_i}} \frac{S}{S'}.$$

Par suite, si $p \geqq m_1, \ldots, p_i \geqq m_i$, on peut poser

$$S'f = Q\left[\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_i}, (z_{i+1} - a_{i+1}), \ldots, (z_n - a_n)\right],$$

où $Q\left[\frac{1}{z_1}, \ldots, (z_n - a_n)\right]$ désigne une série entière, et a est un point pour lequel f est régulier si $S'(a)$ est une constante, un point singulier non essentiel si $S'(a)$ est nulle.

Dans le cas où chaque nombre p n'est pas supérieur ou égal au nombre correspondant m, on aura $Q'f = Q$, Q, Q' ayant toujours des significations analogues, et alors a est un point singulier non essentiel.

On peut remarquer que, lorsque a est un point singulier, $Q(a) = 0$, et par suite la fonction $f(z_1, \ldots, z_n)$ est indéterminée en ce point.

Théorème XV. — *Soient* S_0, S_1 *deux séries entières convergentes pour tous les points d'une aire* A *formée en prenant sur le plan de chaque variable le cercle de rayon* R *ayant l'origine pour centre. On peut considérer la fraction* $\frac{S_1}{S_0}$ *comme une fonction uniforme, définie seulement dans l'aire* A, *et ne présentant dans cette aire aucun point singulier essentiel.*

Soit a un point de l'aire pour lequel $S_0(a) \neq 0$. Le quotient a une valeur déterminée. On peut former un domaine δ de a dans lequel $S_0 \neq 0$. On a dans ce domaine $f = \frac{S_1}{S_0}$, et, comme ce quotient est holomorphe, on voit que f est régulière en a.

Considérons maintenant un point pour lequel $S_1(a) \neq 0$, $S_0(a) = 0$. On peut former un domaine de a pour lequel $S_1 \neq 0$. On a, pour ce domaine,

$$S_0 f = S_1,$$

et, par suite, a est un point singulier non essentiel pour lequel la fonction devient infinie.

Enfin prenons un point a pour lequel $S_1(a) = S_0(a) = 0$. On sait que l'on peut former un domaine δ de ce point dans lequel on a $S_0 = S_2 S_3$, $S_1 = S_2 S_4$, les séries S_3, S_4 n'ayant aucun diviseur commun nul au point a. Alors on voit que l'on a, pour tout point de δ, $S_3 f = S_4$, et par suite a est un point singulier essentiel pour lequel la fonction est indéterminée.

Soient n quantités données $a_1, \ldots, a_n$. Nous dirons, pour abréger le langage, qu'un point est *formé avec les* a, si, pour former ce point, on attribue à certaines des variables $z_1, \ldots, z_n$ les valeurs correspondantes dans la suite $a_1, \ldots, a_n$. En particulier, on dira qu'un point est à l'infini si quelques-unes des variables, ou toutes, prennent des modules infinis; et l'on dira qu'un point est à distance finie si les modules des variables sont tous finis.

Considérons la fraction

$$f = \frac{A}{(z_1 - a_1)^{p_1} \ldots (z_n - a_n)^{p_n}},$$

où A est une constante et les p des nombres entiers positifs. Tout point à distance finie et formé avec les a est un point singulier non essentiel. La fraction est régulière, au contraire, pour tout point à distance finie qui n'est pas formé avec les a. La fraction est régulière et s'annule pour tout point à l'infini qui n'est pas formé avec les a. Considérons un point à l'infini formé avec les a. Soit, par exemple, $z_1 = a_1$, $z_2 = \infty$, ..., $z_3, \ldots, z_n$ ayant des valeurs finies respectivement différentes de $a_3, \ldots a_n$. On a

$$(z_1 - a_1)^{p_1} f = \frac{A}{(z_2 - a_2)^{p_2} \ldots (z_n - a_n)^{p_n}},$$

et le second nombre est une fonction régulière au point considéré. On voit donc que ce point est un point singulier non essentiel.

Ainsi, étant données n quantités $a_1, \ldots, a_n$, il est possible de former une fonction rationnelle des variables $z_1, \ldots, z_n$ qui n'aura pas de points singuliers essentiels, n'admettra comme points singuliers non essentiels que ceux qui sont formés avec les a, et s'annulera pour tout point à l'infini qui n'est pas un point singulier non essentiel.

On peut recommencer le même raisonnement en supposant certaines des quantités a infinies, pourvu que dans ce cas on remplace la différence $z_\nu - a_\nu$, qui correspond à $|a_\nu| = \infty$, par $\frac{1}{z_\nu}$.

La considération de ces fractions est utile dans la démonstration du théorème suivant, théorème que l'on peut considérer comme une généralisation d'un théorème de M. Mittag-Leffler pour les fonctions d'une seule variable.

Avant d'aborder ce théorème, rappelons qu'on nomme *fonction entière* une fonction uniforme qui est régulière en tous les points formés par des valeurs des variables dont les modules sont finis. On voit qu'une telle fonction peut être représentée par une série entière convergente pour tout système de valeurs des variables dont les modules sont finis. Réciproquement, une telle série est une fonction entière. Si la série qui représente une fonction entière a une infinité de termes dont les coefficients ne sont pas nuls, on dit que la fonction est *transcendante*. Dans le cas contraire, on dit que la fonction est *rationnelle*.

Théorème XVI. — 1° *Soient données n suites*

$$\begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_\nu^1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_\nu^n & \ldots \end{matrix}$$

telles que dans chacune d'elles les modules croissent avec l'indice ν et croissent indéfiniment.

2° *Soit donnée une suite indéfinie de fonctions rationnelles f_i des variables $z_1, \ldots, z_n$ possédant les propriétés suivantes. La fonction f_ν, par exemple, n'a pas de points singuliers essentiels; elle n'admet pour points singuliers non essentiels que ceux qui sont formés avec les quantités a_ν; elle est régulière en tout autre point et s'annule pour tout point à l'infini qui n'est pas un point singulier non essentiel.*

On peut former une fonction $\mathrm{F}(z_1, \ldots, z_n)$ *possédant les propriétés suivantes :*

1° *Elle n'a pas de points singuliers essentiels à distance finie;*

2° *Elle n'a pour points singuliers non essentiels que ceux qui sont formés avec les quantités a, en prenant pour certaines des variables*

$z_1, \ldots, z_n$ *une valeur dans celle des séries* $a^1, \ldots, a^n$ *qui lui correspond* (*à la variable* z_i, *on fait correspondre la série* a^i);

3° *Enfin, pour toute valeur de* ν, *la différence*

$$F(z_1, \ldots, z_n) - f_\nu(z_1, \ldots, z_n)$$

est régulière au point a_ν.

Prenons arbitrairement une suite de nombres positifs inférieurs à 1, dont la somme ait une limite δ. Soit

$$0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots < 1.$$

Prenons aussi arbitrairement un nombre ε, positif et moindre que 1.

Nous formons d'abord des fonctions auxiliaires F_ν de la manière suivante.

Si l'une des quantités a_ν est nulle, on pose

$$F_\nu(z_1, \ldots, z_n) = f_\nu(z_1, \ldots, z_n).$$

Soit $a_\nu^1 a_\nu^2 \ldots a_\nu^n \neq 0$. Sur le plan de chaque variable z_i, décrivons un cercle ayant l'origine pour centre et laissant le point a_ν^i en dehors. Désignons par A_ν l'aire formée par l'ensemble de ces cercles. La fonction f_ν est holomorphe dans A_ν, puisque, par hypothèse, elle est régulière en tous les points de cette aire. Soit

$$\sum_{\mu_1 \ldots = 0}^{\infty} A_{\mu_1, \ldots, \mu_n} z_1^{\mu_1} \ldots z_n^{\mu_n} \tag{1}$$

la série qui représente f_ν dans A_ν. Nous pouvons disposer dans l'ordre suivant les termes de cette série. Prenons d'abord le terme constant. Ensuite écrivons les termes qui sont du premier degré par rapport aux variables, puis les termes du second degré et ainsi de suite. C'est l'ordre indiqué pour écrire les termes d'une série entière. Représentons par le symbole suivant la série obtenue en retranchant de la première tous les termes dont le degré n'atteint pas m :

$$\sum^{\infty} A_{\mu_1, \ldots, \mu_n} z_1^{\mu_1} \ldots z_n^{\mu_n}.$$

On peut déterminer m tel que, pour les valeurs

$$\left|\frac{z_i}{a_\nu^i}\right| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on ait

(2) $$\left|\sum_m^\infty \mathrm{A}_{\mu_1, \ldots, \mu_n} z_1^{\mu_1} \ldots z_n^{\mu_n}\right| < \varepsilon_\nu.$$

On a, en effet, pour ces valeurs des variables,

(2) $$\left\{\begin{aligned} \left|\sum_m^\infty \mathrm{A}_{\mu_1, \ldots, \mu_n} z_1^{\mu_1} \ldots z_n^{\mu_n}\right| &< \sum_m^\infty |\mathrm{A}_{\mu_1, \ldots, \mu_n}| \, |z_1|^{\mu_1} \ldots |z_n|^{\mu_n} \ldots \\ &< \sum_{p=m}^{p=\infty} |\mathrm{A}_{\mu_1, \ldots, \mu_n}| \, \varepsilon^p \, |a_\nu'|^{\mu_1} \ldots |a_\nu^n|^{\mu_n}. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$\left|\frac{z_i}{a_\nu^i}\right| = \varepsilon_0, \quad \varepsilon < \varepsilon_0 < 1.$$

Soit M le maximum des modules des termes de la série (1). On aura

$$|\mathrm{A}_{\mu_1, \ldots, \mu_n}| \, \varepsilon_0^p \, |a_\nu^1|^{\mu_1} \ldots |a_\nu^n|^{\mu_n} \leqq \mathrm{M},$$

et

$$|\mathrm{A}_{\mu_1, \ldots, \mu_n}| \leqq \mathrm{M} \, \varepsilon_0^{-p} \, |a_\nu^1|^{-\mu_1} \ldots |a_\nu^n|^{-\mu_n}.$$

La relation (3) donne alors

$$\left|\sum_m^\infty \mathrm{A}_{\mu_1, \ldots, \mu_n} z_1^{\mu_1} \ldots z_n^{\mu_n}\right| < \sum_{p=m}^\infty \mathrm{M}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^p < \mathrm{M} \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m}{1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}.$$

Posons

$$\mathrm{M} \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m}{1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \leqq \varepsilon_\nu,$$

d'où

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m \leqq \frac{\varepsilon_\nu}{\mathrm{M}}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right).$$

Si l'on désigne par m_ν la plus petite valeur entière positive de m qui vérifie cette relation, on aura

$$(4) \qquad \left| \sum_{m_\nu}^{\infty} A_{\mu_1, \ldots, \mu_n} z_1^{\mu_1}, \ldots, z_n^{\mu_n} \right| < \varepsilon_\nu,$$

ce qui est l'inégalité que nous cherchions à obtenir.

Cela posé, définissons la fonction F_ν par la relation

$$(5) \qquad F_\nu(z_1, \ldots, z_n) = f_\nu(z_1, \ldots, z_n) - \sum_0^{m_\nu - 1} A_{\mu_1, \ldots, \mu_n} z_1^{\mu_1} \ldots z_n^{\mu_n}.$$

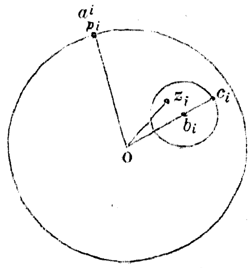
La somme figurant au second membre est un polynôme entier. Par suite, F_ν est régulière en même temps que f_ν; elle admet les mêmes points singuliers non essentiels que f_ν et, en outre, ceux qu'on forme en prenant des valeurs infinies pour les variables. De plus, F_ν n'a pas de points singuliers essentiels.

Je dis maintenant que la série

$$(6) \qquad F(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z_1, \ldots, z_n)$$

est convergente pour tout point, à distance finie, qui n'est pas formé

Fig. 1.



au moyen des a. Soit $b_1, \ldots, b_n$ un tel point. Sur le plan de z_1 décrivons de b_1 comme centre un cercle de rayon ρ qui ne comprenne aucun des points a^1, ni l'origine des coordonnées. Faisons de même sur le plan de chaque variable. Appelons R l'aire formée par l'ensemble de ces cercles. Sur le plan de z_1, de l'origine pour centre, décrivons les différents cercles qui passent par les différents points a^1, et appelons $a^1_{p_1}$ le point qui détermine le cercle de plus petit rayon parmi ceux qui entourent complètement le cercle ρ. Faisons de même sur les plans des autres variables, et soient $a^2_{p_2}, \ldots, a^n_{p_n}$ les points analogues à $a^1_{p_1}$. Les suites (1) se composant de quantités dont les modules croissent indéfiniment, on peut trouver un nombre k, tel que l'on ait

$$|a^1_k| \geqq |a^1_{p_1}| \ldots |a^n_k| \geqq a^n_{p_n}.$$

Si maintenant nous prenons un point quelconque dans R, nous aurons

$$\left|\frac{z_i}{a^i_{p_i}}\right| < \frac{\mathrm{O}c_i}{\mathrm{O}a^i_{p_i}},$$

et, en appelant ε le plus grand des quotients $\dfrac{\mathrm{O}c_i}{\mathrm{O}a^i_{p_i}}$, on aura

$$\left|\frac{z_i}{a^i_\nu}\right| < \left|\frac{z_i}{a^i_{p_i}}\right| < \varepsilon \quad (\nu \geqq k).$$

En se reportant au calcul précédent, on voit maintenant que

$$|\mathrm{F}_\nu| \leqq \varepsilon_\nu, \qquad \sum_{\nu=k}^{\infty} |\mathrm{F}_\nu| \leqq \partial.$$

Or

$$\mathrm{F} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{F}_\nu = \sum_{\nu=1}^{k-1} \mathrm{F}_\nu + \sum_{\nu=k}^{\infty} \mathrm{F}_\nu.$$

La première somme a une valeur déterminée, et la seconde est une série uniformément convergente, puisque la série formée par les modules de ses termes est elle-même convergente. On voit par là que F est une fonction holomorphe dans R. Par conséquent, la fonction définie par la relation (6) est une fonction régulière pour tout point qui n'est formé ni avec des valeurs a ni avec des valeurs infinies des variables.

Considérons maintenant un point formé au moyen de a. Ce point est singulier non essentiel pour certaines des fonctions F_ν Si nous appelons S la somme de ces fonctions, on aura

$$\mathrm{F} = (\mathrm{F} - \mathrm{S}) + \mathrm{S}.$$

$(F - S)$ est régulière au point considéré, tandis que ce point est singulier non essentiel pour S. Donc on peut considérer la fonction F comme définie en ce point, qui sera un point singulier non essentiel.

De ce qui précède résulte que la relation (6) définit une fonction uniforme qui n'a pas de points singuliers essentiels à distance finie, pour laquelle tout point formé avec les a est un point singulier non essentiel, et qui est régulière en tout autre point.

Démontrons enfin que $F - f_\nu$ reste finie pour le point a_ν. Sur le plan de z_1 décrivons un cercle de centre a_ν^1 et de rayon ρ qui ne comprenne aucun des points a_1. Faisons de même pour le plan de chacune des autres variables et appelons R l'aire formée par ces cercles. La série

$$\left[\sum_{\lambda=1}^{\infty} F_\lambda(z_1, \ldots, z_n)\right] - F_\nu(z_1, \ldots, z_n)$$

est holomorphe dans R. On peut la développer en série entière $P(z_1 - a_\nu^1, \ldots, z_n - a_\nu^n)$, de sorte que l'on a pour tout point de R

$$\left[\sum_{\lambda=1}^{\infty} F_\lambda(z_1, \ldots, z_n)\right] - F_\nu(z_1, \ldots, z_n) = P(z_1 - a_\nu^1, \ldots, z_n - a_\nu^n),$$

$$F(z_1, \ldots, z_n) = F_\nu(z_1 \ldots, z_n) + P(z_1 - a_\nu^1, \ldots, z_n - a_\nu^n).$$

Or

$$F(z_1, \ldots, z_n) = f_\nu(z_1, \ldots, z_n) - \sum_0^{m_\nu - 1} A_{\mu_1, \ldots, \mu_n} z_1^{\mu_1} \ldots z_n^{\mu_n}.$$

L'expression $\sum_0^{\mu_\nu - 1} A_{\mu_1, \ldots, \mu_n} z_1^{\mu_1} \ldots z_n^{\mu_n}$ est un polynôme entier en $z_1, \ldots, z_n$. Donc la différence

$$P(z_1 - a_\nu^1 \ldots, z_n - a_\nu^n) - \sum_0^{m_\nu - 1} A_{\mu_1, \ldots, \mu_n} z_1^{\mu_1}, \ldots z_n^{\mu_n}$$

est elle-même holomorphe dans R. Représentons-la par une série entière, $P_1(z_1 - a_\nu^1, \ldots, z_n - a_\nu^n)$. On aura, pour tout point de R,

$$F(z_1, \ldots, z_n) - f_\nu(z_1, \ldots, z_n) = P_1(z_1 - a_\nu^1, \ldots, z_n - a_\nu^n).$$

ce qui montre que la différence $F - f_\nu$ est régulière au point a_ν. Le théorème se trouve ainsi démontré.

COROLLAIRE. — $G(z_1, \ldots, z_n)$ *désignant une fonction entière, la fonction*

$$H(z_1, \ldots, z_n) = F(z_1, \ldots, z_n) + G(z_1, \ldots, z_n)$$

possède les propriétés que l'on vient de démontrer pour la fonction $F(z_1, \ldots, z_n)$.

RÉCIPROQUE. — *Si* $H(z_1, \ldots, z_n)$ *possède les mêmes propriétés que la fonction* $F(z_1, \ldots, z_n)$, *la différence* $H - F$ *est une fonction entière.*

Reportons-nous aux notations précédentes. Si nous prenons un point qui n'est pas formé avec les a, H et F étant toutes deux régulières, il en est de même pour leur différence. Considérons ensuite un point formé avec les a. Ce point est singulier non essentiel pour certaines des fonctions f_ν. Soit p leur nombre ($p \leqq n$) et soient ces fonctions $f_{\nu_1}, f_{\nu_2}, \ldots, f_{\nu_p}$. On sait que les différences

$$\begin{gathered} H - f_{\nu_1},\ H - f_{\nu_2},\ \ldots,\ H - f_{\nu_p}, \\ F - f_{\nu_1},\ F - f_{\nu_2},\ \ldots,\ F - f_{\nu_p} \end{gathered}$$

sont toutes finies pour le point considéré. On a

$$p(H - F) = (H - f_{\nu_1}) + \ldots + (H - f_{\nu_p}) - (F - f_{\nu_1}) - \ldots - (F - f_{\nu_p}),$$

et le second membre de cette égalité a une valeur finie. La différence $(H - F)$ est donc finie en ce point et, par suite, elle est régulière en ce point. $H - F$ étant régulière en tout point à distance finie est une fonction entière.

THÉORÈME XVII. — *Soient données :*

1° *n quantités* $c_1, \ldots, c_n$ *et n suites illimitées*

$$\begin{gathered} a_1^1,\ a_2^1,\ \ldots,\ a_\nu^1,\ \ldots, \\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots, \\ a_1^n,\ a_2^n,\ \ldots,\ a_\nu^n,\ \ldots, \end{gathered}$$

telles que chaque quantité a soit différente des c et telles, en outre, que le module de la différence $a_\nu^p - c_p$ *décroisse et tende vers* 0 *quand* ν *croît indéfiniment;*

2° *Une suite illimitée de fonctions rationnelles* f_1 *des variables* $z_1, \ldots, z_n$ *telles que la fonction* f_ν, *par exemple, n'admette pour points singuliers que ceux qui sont formés avec les quantités* a_ν *ne présente pas de points singuliers essentiels et s'annule pour tout point formé avec les* c.

On peut former une fonction uniforme $F(z_1, \ldots, z_n)$ *possédant les propriétés suivantes :*

1° *Elle n'admet pour points singuliers essentiels que ceux qui sont formés avec les* c.

2° *Elle n'a pour points singuliers non essentiels que ceux qui sont formés avec les* a, *sans le secours des* c.

3° *Enfin, pour toute valeur de* ν *la différence* $F - f_\nu$ *est régulière au point* a.

Posons

$$\begin{array}{llll}
z'_1 = \dfrac{1}{z_1 - c_1}, & \ldots, & z'_n = \dfrac{1}{z_n - c_n}, & \\[2ex]
b_1^1 = \dfrac{1}{a_1^1 - c_1}, & \ldots, & b_\nu^1 = \dfrac{1}{a_\nu^1 - c_1}, & \ldots, \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, \\[2ex]
b_1^n = \dfrac{1}{a_1^n - c_n}, & \ldots, & b_\nu^n = \dfrac{1}{a_\nu^n - c_n}, & \ldots.
\end{array}$$

Les fonctions données f deviennent des fonctions rationnelles des variables z'. Si l'on considère ces nouvelles fonctions et les quantités b, on est placé dans les conditions du théorème précédent. On formera la fonction $F(z'_1, \ldots, z'_n)$ comme plus haut, et, si l'on y remplace z'_1 par $\dfrac{1}{z_1 - c_1}$, $\ldots$, z'_n par $\dfrac{1}{z_n - c_n}$, on aura la fonction cherchée.

On voit sans peine que le corollaire du théorème précédent et sa réciproque se généralisent d'une manière analogue.

Théorème XVIII. — *Soient* N, D, N', D' *des séries entières convergentes pour toutes les valeurs des variables* $z_1, \ldots, z_n$ *situées dans une aire* A, *et telles que les deux fractions* $\dfrac{N}{D}$, $\dfrac{N'}{D'}$ *soient holomorphes et égales en tous les points d'une aire* A' *comprise dans* A. *Alors :*

1° *Si en un point de* A *l'une des fractions est régulière et prend la valeur* A_0, *il en est de même pour la seconde ;*

2° *Si un point de* A *est point singulier pour l'une des fractions, il l'est aussi pour l'autre, et le point singulier est de même espèce pour chacune des fractions.*

Nous énoncerons plus rapidement ce théorème en disant que *les deux fractions sont égales en tous les points de* A.

On a dans A'

$$\frac{N}{D} = \frac{N'}{D'}, \quad ND' = DN'. \tag{1}$$

Les deux membres de (1) étant holomorphes dans A, la relation (1) subsiste pour toute l'aire A (théorème IV). Supposons que $\frac{N}{D}$, par exemple, soit régulière en un point. On peut fixer un domaine δ de ce point dans lequel on a

$$\frac{N}{D} = S \quad \text{ou} \quad N = DS,$$

S étant une série entière convergente dans δ. La relation (1) donne alors, dans δ,

$$DSD' = DN'.$$

D n'est pas nul en tous les points de δ, et l'on peut fixer un domaine $\delta' < \delta$ dans lequel $D \neq 0$. On aura donc, dans δ',

$$SD' = N',$$

et, par suite, cette relation subsistera pour tout point de δ, puisque N' et SD' sont holomorphes dans δ. On a alors

$$\frac{N'}{D'} = \frac{SD'}{D'} = S,$$

et l'on voit que la fraction $\frac{N'}{D'}$ est régulière au point considéré et y prend la même valeur que $\frac{N}{D}$.

Considérons un point singulier de $\frac{N}{D}$. D'après ce qui précède, ce point est singulier pour $\frac{N'}{D'}$. Supposons que dans un domaine δ du point considéré on ait $S_0 \frac{N}{D} = S_1$, la série S_0 s'annulant au point que nous considérons. De la relation (1) et de la précédente, on déduit, pour tout point de δ,

$$S_0 N = S_1 D, \quad S_0 N D' = S_0 N' D, \quad D D' S_1 = S_0 N' D,$$

et, en raisonnant comme plus haut,

$$D' S_1 = N' S_0, \quad S_0 \frac{N'}{D'} = \frac{S_0 N'}{D'} = \frac{D' S_1}{D'} = S_1.$$

Cette relation montre que le point singulier est non essentiel pour $\frac{N'}{D'}$ comme pour $\frac{N}{D}$, et qu'il est de même espèce pour les deux fractions.

Enfin, si nous considérons un point singulier essentiel de $\frac{N}{D}$, on voit, par ce qui précède, que le même point est singulier essentiel pour $\frac{N'}{D'}$.

Théorème XIX. — *Soit $f(z_1, \ldots, z_n)$ une fonction uniforme des variables z, qui ne présente aucun point singulier essentiel, et soit telle qu'en attribuant à p des variables des valeurs arbitraires choisies dans un domaine pour lequel $f(z_1, \ldots, z_n)$ est uniforme on forme une fonction de $(n-p)$ variables dépourvue de points singuliers essentiels. On peut déterminer deux polynômes entiers par rapport à toutes les variables z,* N *et* D, *tels que la fraction $\frac{N}{D}$ possède les propriétés suivantes :*

1° *Si $f(z_1, \ldots, z_n)$ est régulière en un point, il en est de même pour $\frac{N}{D}$, qui prend en ce point la même valeur que $f(z_1, \ldots, z_n)$, et réciproquement;*

2° *Tout point singulier de $f(z_1, \ldots, z_n)$ est un point singulier de même espèce pour $\frac{N}{D}$, et réciproquement.*

On peut énoncer le théorème en disant que l'on a pour tout point $f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{N}{D}$; autrement dit, *la fonction considérée est une fraction rationnelle.*

La démonstration de ce théorème est connue pour le cas d'une seule variable (¹). Nous la rendrons générale en montrant que, si l'on admet le théorème pour $(n-1)$ variables, il est vrai pour n.

Considérons un point du plan pour lequel la fonction $f(z_1, \ldots, z_n)$ est régulière, et, pour simplifier l'écriture, admettons que ce point soit l'origine des coordonnées. On a, dans un domaine δ de l'origine,

$$f(z_1, \ldots, z_n) = A_0 + A_1 z_1 + A_2 z_1^2 + \ldots,$$

les A désignant des séries entières en $z_2, \ldots, z_n$ toutes convergentes dans δ. Nous allons montrer que, dans le domaine δ, la fonction donnée est égale à une fraction rationnelle, et pour cela nous suivrons une méthode de calcul indiquée par M. Hurwitz (²). Sur le plan de z_2, traçons autour du point $z_2 = 0$ un cercle de rayon $\delta'(\delta' < \delta)$ et donnons à z_2 la valeur b_2 située dans δ'. La fonction $f(z_1, b_2, \ldots, z_n)$ ne présente pas de points singuliers essentiels et, comme elle ne dépend que de $n-1$ variables, elle peut être représentée par une fraction rationnelle. Soit donc

$$f(z_1, b_2 \ldots, z_n) = \frac{B_0 + B_1 z_1 + \ldots + B_r z_1^r}{B'_0 + B'_1 z_1 + \ldots + B'_r z_1^r},$$

les B désignant des polynômes entiers en $z_3, \ldots, z_n$, et r étant le plus haut exposant de z_1 dans les deux polynômes qui forment la fraction rationnelle. Si nous désignons par $\overline{A}$ la valeur que prend la série A pour $z_2 = b_2$, nous aurons pour tout point de δ

$$\overline{A}_0 + \overline{A}_1 z_1 + \ldots = \frac{B_0 + B_1 z_1 + \ldots + B_r z_1^r}{B'_0 + B'_1 z_1 + \ldots + B'_r z_1^r}$$

$$(\overline{A}_0 + \overline{A}_1 z_1 + \ldots)(B'_0 + B'_1 z_1 + \ldots + B'_r z_1^r) = B_0 + B_1 z_1 + \ldots + B_r z_1^r;$$

d'où, en égalant les coefficients des termes en $z_1^{r+1}, z_1^{r+2}, \ldots$

$$\overline{A}_1 B'_r + \overline{A}_2 B'_{r-1} + \ldots + \overline{A}_{r+i} B'_0 = 0,$$
$$\overline{A}_2 B'_r + \overline{A}_3 B'_{r-i} + \ldots + \overline{A}_{r+2} B'_0 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(¹) BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, 2ᵉ édition, p. 206. — *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*, von K. Weierstrass. *Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1876. — E. PICARD, *Annales scientifiques de l'École Normale*, mars, avril, mai 1879.

(²) *Journal de Crelle*, t. 95, p. 201 et suiv.

Les coefficients B' n'étant pas tous nuls, puisque $f(z_1, b_2, \ldots, z_n)$ est régulière dans le domaine δ, tous les déterminants que l'on peut former en prenant $(r+1)$ quelconques des lignes suivantes sont nuls, quelles que soient les valeurs choisies dans le domaine δ pour les variables $z_3, z_4, \ldots, z_n$,

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \overline{A}_1 & \overline{A}_2 & \ldots & \overline{A}_{r+1} \\ \overline{A}_2 & \overline{A}_3 & \ldots & \overline{A}_{r+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

A chaque point b_2 du domaine δ correspond une valeur de r, le nombre entier positif qui exprime le degré de la fraction rationnelle $f(z_1, b_2, \ldots, z_n)$. Je dis qu'il y a au moins une valeur de r qui correspond à une infinité de points b_2.

Deux cas se présentent : ou bien les valeurs que prend r ont un maximum, ou bien elles croissent au delà de toute limite. Dans le premier cas, si à chaque valeur de r correspondait un nombre limité de points b_2, le nombre des points b_2 serait limité, ce qui n'a pas lieu.

Considérons le second cas. Supposons qu'à chaque valeur $r_1, r_2, \ldots$, du nombre r corresponde un nombre limité de points b_2. Les abscisses des points b_2 sont des nombres réels. Rangeons celles des points qui correspondent à r_1 suivant une loi déterminée, par exemple par ordre de grandeurs croissantes, en n'écrivant pas deux fois la même. Faisons de même pour les abscisses des points qui correspondent à r_2, etc., en ayant soin de ne pas répéter la même abscisse. Nous obtenons ainsi une suite infinie de nombres réels différents les uns des autres qui se succèdent d'après une loi déterminée. Cette suite devrait contenir les abscisses de tous les points b_2 du domaine δ. Or M. Cantor a démontré (1) que, « lorsque l'on a une suite infinie de nombres réels différents les uns des autres, se succédant suivant une loi déterminée, $u_1, \ldots, u_\nu, \ldots$, on peut, dans chaque intervalle $(\alpha, \ldots, \beta)$ donné d'avance, déterminer un nombre η qui ne se trouve pas dans la suite ». Prenons un tel nombre η. Ce nombre étant compris entre α et β, il y a un nombre infini de points b_2 du domaine δ qui admettent η pour

(1) *Journal de Crelle*, t. 77, p. 258. La traduction en français des Mémoires de M. Cantor a été publiée dans les *Acta mathematica*, t. II, n° 4. La démonstration du théorème indiqué se trouve à la page 308.

abscisse, et alors la suite que nous avons formée ne contient pas les abscisses de tous les points b_2.

Ainsi se trouve établi qu'il y a certainement une valeur de r correspondant à une infinité de points b_2. Si l'on prend pour r cette valeur, on voit que les déterminants (1) sont nuls pour une infinité de valeurs de z_2 prises dans δ, z_3, ..., z_n ayant d'ailleurs des valeurs arbitraires. Mais chacun de ces déterminants est une fonction holomorphe de z_2 dans δ. Dès lors ces déterminants s'annulent pour toutes les valeurs de z_2 situées dans δ.

Ainsi les déterminants formés avec $n+1$ quelconques des lignes

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{r+1} \\ A_2 & A_3 & \dots & A_{r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

sont nuls, quelles que soient les valeurs attribuées aux variables z.

Considérons les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} f_r A_1 + f_{r-1} A_2 + \dots + f_0 A_{r+1} = 0, \\ f_r A_2 + f_{r-1} A_3 + \dots + f_0 A_{r+2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

qui sont en nombre illimité et dans lesquelles les f sont les inconnues. Les déterminants (2) étant nuls, ces équations définissent, dans le domaine δ, des fonctions régulières f_0, ..., f_r, qui ne sont pas toutes nulles ensemble. On a maintenant

$$f(z_1, \dots, z_n)(f_0 + f_1 z_1 + \dots + f_r z_1^r) = (A_0 + A_1 z_1 + \dots)(f_0 + \dots + f_r z_1^r).$$

Posons

$$(4) \qquad \begin{cases} \varphi_0 = A_0 f_0, \\ \varphi_1 = A_0 f_1 + A_1 f_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \varphi_r = A_0 f_r + \dots + A_r f_0. \end{cases}$$

En tenant compte des équations (3) et (4), on aura, pour tout point du domaine δ,

$$(5) \qquad f(z_1, \dots, z_n)(f_0 + f_1 z_1 + \dots + f_r z_1^r) = \varphi_0 + \varphi_1 z_1 + \dots + \varphi_r z_1^r.$$

Les fonctions φ, définies dans δ, sont régulières dans ce domaine.

Cela posé, prenons d'une manière arbitraire $2r+1$ points distincts dans le domaine δ du point $z_1 = 0$. Soient $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \ldots, a_1^{(2r+1)}$. On aura, pour tout point de δ,

$$f_0[f(z_1, \ldots, z_n)] + f_1[f(z_1, \ldots, z_n)z_1] + \ldots + f_r[f(z_1, \ldots, z_n)z_1^r] \\ - \varphi_0 - z_1\varphi_1 - \ldots - z_1^r\varphi_r = 0,$$

$$f_0[f(a_1^{(1)}, \ldots, z_n)] + f_1[f(a_1^{(1)}, \ldots, z_n)a_1^{(1)}] + \ldots + f_r[f(a_1^{(1)}, \ldots, z_n)(a_1^{(1)})^r] \\ - \varphi_0 - a_1^{(1)}\varphi_1 - \ldots - (a_1^{(1)})^r\varphi_r = 0,$$

. . . .

$$f_0[f(a_1^{(2r+1)}, \ldots, z_n)] + \ldots + f_r[f(a_1^{(2r+1)}, \ldots, z_n)(a_1^{(2r+1)})^r] \\ - \varphi_0 - a_1^{(2r+1)}\varphi_1 - \ldots - (a_1^{(2r+1)})^r\varphi_r = 0,$$

Nous avons là $2r+2$ équations linéaires et homogènes par rapport aux $2r+2$ quantités f et φ.

Ces quantités n'étant pas toutes nulles, le déterminant des équations est nul. Si l'on ordonne ce déterminant par rapport aux éléments de la première ligne, on obtient une équation qui montre que f est une fraction rationnelle des z, car les fonctions $f(a_1^{(i)}, \ldots, z_n)$ sont elles-mêmes des fractions rationnelles de $z_2, \ldots, z_n$.

Toutefois, la conclusion n'est pas légitime si les déterminants d'ordre $(2r+1)$, qu'on déduit des lignes suivantes

$$f(a_1^{(i)}, \ldots, z_n), \quad \ldots, \quad f(a_1^{(i)}, \ldots, z_n)(a_1^{(i)})^r, \quad 1, \quad \ldots, \quad (a_2^{(i)})^r \qquad (i = 1, \ldots, 2r+1),$$

sont nuls pour chaque système de points $a_1^{(1)}, \ldots, a_1^{(2r+1)}$. Dans ce cas, nous remarquerons que les déterminants d'ordre $2r+1$ formés, en remplaçant dans la première des lignes précédentes $a_1^{(1)}$ par z_1, sont nuls, pour tout point de δ. En ordonnant l'un d'eux par rapport aux éléments de la première ligne, on aura encore f sous forme de fraction rationnelle, à moins que les déterminants d'ordre $2r$, formés avec les $2r$ dernières lignes, ne soient nuls. Si cette circonstance se présentait, on remplacerait l'une des quantités $a_1^{(i)}$ $(i = 2, \ldots, 2r+1)$ par la variable z_1, et le raisonnement se poursuivrait de la même manière.

Ainsi, l'on peut admettre que l'on a, pour tout point du domaine δ, la relation

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{N}{D}, \tag{6}$$

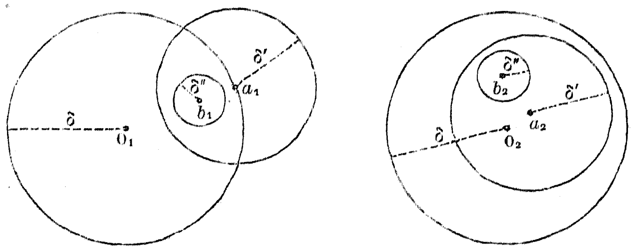
N et D étant des polynômes entiers en $z_1, \ldots, z_n$.

Nous allons maintenant montrer : 1° que si en un point du plan l'une des fonctions f et $\frac{N}{D}$ est régulière et prend la valeur A_0, il en est de même pour l'autre; 2° que si un point est singulier pour l'une des fonctions, il l'est pour l'autre, le point singulier étant de même espèce pour les deux fonctions.

La relation (6) est établie dans le domaine δ du point $o_1, \ldots, o_n$. Prenons arbitrairement $a_2, \ldots, a_n$ dans δ et a_1 sur la limite de ce domaine, comme l'indique la figure. On peut fixer un domaine δ' du point $a_1, \ldots, a_n$, tel qu'on ait, pour tout point de ce domaine, $f = \frac{S_1}{S_0}$, S_1 et S_0 étant deux séries convergentes dans δ'. De plus, nous pouvons prendre δ' assez petit pour que, sur le plan des variables $z_2, \ldots, z_n$, les domaines δ' soient compris dans δ.

Sur le plan de z_1, le cercle δ' (*fig.* 2) contiendra une aire extérieure

Fig. 2.



à δ. Désignons par A l'aire formée par les cercles δ' qui correspondent aux variables $z_2, \ldots, z_n$ et par l'aire comprise entre les cercles δ' et δ sur le plan de z_1. La série S_0, qui est holomorphe dans δ', ne peut s'annuler en tous les points de A, sans quoi elle serait nulle en tous les points de δ'. Soit $b_1, b_2, \ldots, b_n$ un point de A pour lequel $S_0 \neq 0$. On peut fixer un domaine δ'' de $b_1, \ldots, b_n$, dans lequel $S_0 \neq 0$, et l'on peut réduire assez δ'' pour qu'il soit tout entier compris dans A, c'est-à-dire dans δ'. Si nous remarquons que δ'' est compris dans δ, nous voyons que les deux fractions $\frac{N}{D}$ et $\frac{S_1}{S_0}$ sont holomorphes dans δ'' et égales en tous les points de ce domaine. D'après le théorème XVIII, ces deux fractions prennent donc la même valeur (au sens que nous avons indiqué pour cette locution) en tout point du domaine δ', dans lequel les quatre séries sont convergentes. Comme la fonction f est représentée dans δ' par $\frac{S_1}{S_0}$, on voit que la relation (6) subsiste dans δ'.

Nous avons pris $a_2, \ldots, a_n$ d'une manière arbitraire dans δ. Si nous répétons le raisonnement avec le point $z_1 = a_1$, $z_2 = a'_2$, ..., $z_n = a'_n$, $a'_2, \ldots, a'_n$ étant encore situés dans δ, on verra que, sur le plan z_1, on peut sortir de δ sans que la relation (6) cesse d'être vérifiée, pourvu que z_1 reste situé dans une certaine aire entourant le point a_1. Ainsi, d'une manière générale, la relation (6) est étendue à une aire Δ formée des cercles δ pour les variables $z_2, \ldots, z_n$ et pour la variable z_1 d'une aire composée de δ et d'une aire extérieure à δ entourant le point a_1. On peut maintenant raisonner sur Δ comme sur δ, et, en continuant de la même manière, on agrandira l'aire Δ autant qu'on le voudra, puisque les polynômes N et D sont définis dans tout le plan. Dès lors, la relation (6) est démontrée pour tout point formé, en donnant à z_1 une valeur quelconque et à $z_2, \ldots, z_n$ des valeurs situées dans δ.

Raisonnant maintenant avec z_2 comme avec z_1, puis avec z_3, etc., on verra que la relation (6) est vérifiée pour tout point du plan, en sorte que le théorème est démontré.