ÉMILE PICARD

Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 2 (1885), p. 357-384
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__357_0>

SUR LES

FONCTIONS HYPERFUCHSIENNES

PROVENANT

DES SÉRIES HYPERGÉOMÉTRIQUES DE DEUX VARIABLES,

PAR M. ÉMILE PICARD,

CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

On sait que les intégrales

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

où g et h désignent deux des quantités 0, 1, x et ∞, satisfont à une équation linéaire du second ordre E; c'est, aux notations près, l'équation qui donne la série hypergéométrique. Dans son célèbre Mémoire sur l'intégration algébrique de cette équation (*Journal de Crelle*, t. 75), M. Schwarz signale incidemment un cas particulier remarquable: c'est celui où les trois expressions

$$\lambda+b_1-1,\quad \lambda+b_2-1,\quad b_1+b_2-1$$

seraient toutes trois égales respectivement à l'inverse d'un nombre entier positif; dans ce cas, si l'on désigne par ω_1 et ω_2 deux intégrales de l'équation E, la relation

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=z$$

donnera pour x une fonction *uniforme* de z. Ces fonctions, définies seulement à l'intérieur d'un cercle, rentrent dans la classe de ces fonctions uniformes d'une variable, que M. Poincaré a désignées sous le nom de *fonctions fuchsiennes*.

Envisageons maintenant les intégrales hypergéométriques de deux variables

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}\,du,$$

où g et h désignent deux des quantités 0, 1, x, y et ∞.

Ces fonctions de x et y satisfont à un système S de trois équations linéaires aux dérivées partielles, ayant trois solutions communes linéairement indépendantes; c'est ce qu'on peut voir dans mon travail sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann, relatif aux séries hypergéométriques (*Annales de l'École Normale*, 1881), et, en se plaçant à un autre point de vue, M. Appell a aussi rencontré ce système S d'équations aux dérivées partielles dans son Mémoire sur les fonctions hypergéométriques de deux variables (*Journal de Mathématiques*, 1881).

Désignons par ω_1, ω_2, ω_3 trois solutions linéairement indépendantes du système S et formons les équations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = z, \qquad \frac{\omega_3}{\omega_1} = t.$$

Je me suis proposé de rechercher les cas analogues à ceux de M. Schwarz, où ces deux équations donnent pour x et y des fonctions *uniformes* de z et t. Ces cas sont ceux où, considérant deux quelconques des quantités

$$\lambda, \quad \mu, \quad b_1 \quad \text{et} \quad b_2$$

soit, par exemple, λ et b_1, la différence

$$\lambda + b_1 - 1$$

est égale à l'inverse d'un nombre entier positif; de plus, si l'on prend trois quelconques des mêmes quantités, soit, par exemple, λ, μ et b_1, la différence

$$2 - \lambda - \mu - b_1$$

sera égale encore à l'inverse d'un nombre entier positif.

Les fonctions uniformes x et y de z et de t, données alors par les équations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = z, \qquad \frac{\omega_3}{\omega_1} = t,$$

ne sont pas définies pour toute valeur de z et de t. On peut choisir ω_1, ω_2 et ω_3, de telle sorte que le domaine dans lequel elles sont déterminées soit l'intérieur de l'hypersphère

$$z'^2 + z''^2 + t'^2 + t''^2 = 1,$$

en posant

$$z = z' + iz'', \qquad t = t' + it''.$$

Ces fonctions rentrent dans la classe de ces fonctions de deux variables, que j'ai appelées *hyperfuchsiennes,* et dont je me suis occupé dans différents Mémoires.

Dans la première Partie de ce travail, je reprends l'étude des fonctions fuchsiennes qui proviennent de la série hypergéométrique d'une variable, en suivant une marche qui s'étendra facilement au cas des séries hypergéométriques de deux variables; c'est ce qui est développé dans la seconde Partie.

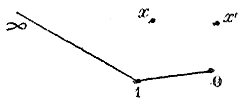
PREMIÈRE PARTIE.

1. Avant de nous occuper du cas de deux variables, nous allons nous arrêter sur les fonctions fuchsiennes qui naissent des séries hypergéométriques d'une variable. Considérons donc les expressions

$$(1) \qquad \int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

où g et h désignent deux des quantités 0, 1, x et ∞. Elles satisfont à une équation linéaire du second ordre, qui est bien connue; soient ω_1 et ω_2 deux intégrales linéairement indépendantes de cette équation, et considérons le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ que nous désignerons par z. Traçons, dans

Fig. 1.



le plan de la variable x (*fig.* 1), deux coupures, dont l'une va du point 0 au point 1, l'autre du point 1 à l'infini. Si l'on assujettit x à ne pas franchir ces coupures, le rapport z ne peut pas prendre la même valeur en deux points x et x' ou, en d'autres termes, au plan de la variable x, avec les coupures qui y sont tracées, correspondra d'une *manière uniforme*, au moyen de la relation

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = z,$$

une certaine portion du plan sur lequel est représentée la quantité complexe z.

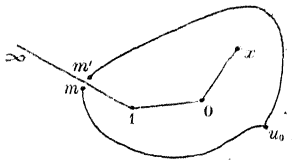
Je vais donner de ce fait une démonstration qui pourra s'étendre immédiatement aux fonctions hypergéométriques de deux variables. Nous ne considérons d'ailleurs que le cas où λ, b_1 et b_2 sont réels; de plus, nous supposons

$$b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad \lambda > 0, \quad b_1 + b_2 + \lambda < 2;$$

ce sont les conditions pour que toutes les intégrales (1) aient un sens.

Aux deux coupures déjà tracées $(0, 1)$, $(1, \infty)$, ajoutons la coupure

Fig. 2.



$(x, 0)$ ne rencontrant pas les précédentes, et supposons-les tracées sur le plan d'une variable u (*fig.* 2); envisageons l'intégrale

$$\mathrm{U} = \int_{u_0}^{u} u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du = \int_{u_0}^{u} dv$$

en posant

$$dv = u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

où nous supposerons que le chemin d'intégration ne traverse aucune des coupures.

Nous devons chercher quelles relations il y a entre les valeurs de U en des points correspondants situés de part et d'autre d'une même coupure; soient d'abord m et m' deux points sur $(1, \infty)$: on aura, en désignant par U′ la valeur de U en m',

$$U' = U e^{(\lambda+b_1+b_2)2\pi i} + (1 - e^{(\lambda+b_1+b_2)2\pi i}) \int_{u_0}^{\infty} dv$$

ou

$$V' = V e^{(\lambda+b_1+b_2)2\pi i}, \tag{1}$$

en posant

$$V = \frac{\int_{u_0}^{u} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv}{\int_{u_0}^{1} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv}.$$

On aura de la même manière, en considérant la seconde coupure (o, 1),

$$U' = U e^{(\lambda+b_1)2\pi i} + e^{(\lambda+b_1)2\pi i}(e^{2i\pi b_2} - 1) \int_{u_0}^{1} dv + (1 - e^{2\pi i(\lambda+b_1+b_2)}) \int_{u_0}^{\infty} dv$$

et, par suite,

$$V' = e^{(\lambda+b_1)2\pi i} V + e^{2\pi i(\lambda+b_1)}(e^{2\pi i b_2} - 1). \tag{2}$$

Considérons enfin la troisième coupure (o, x),

$$U' = U e^{\lambda 2\pi i} + (e^{(\lambda+b_1)2\pi i} - e^{2\lambda\pi i}) \int_{u_0}^{0} dv$$
$$+ (e^{(\lambda+b_1+b_2)2\pi i} - e^{(\lambda+b_1)2\pi i}) \int_{u_0}^{1} dv + (1 - e^{(\lambda+b_1+b_2)2\pi i}) \int_{u_0}^{\infty} dv$$

et, par conséquent,

$$V' = V e^{2\pi i\lambda} + \frac{\int_{u_0}^{0} dv - \int_{u_0}^{1} dv}{\int_{u_0}^{1} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv} (e^{(\lambda+b_1)2\pi i} - e^{\lambda 2\pi i}) + (e^{(\lambda+b_1+b_2)2\pi i} - e^{2\pi i\lambda})$$

ou

$$V' = e^{2\pi\lambda i} V + (e^{2\pi(\lambda+b_1)i} - e^{2\pi\lambda i}) z + (e^{2\pi(\lambda+b_1+b_2)i} - e^{2\pi\lambda i}), \tag{3}$$

en posant

$$\frac{\int_{u_0}^{0} dv - \int_{u_0}^{1} dv}{\int_{u_0}^{1} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv} = z.$$

On remarquera que le numérateur et le dénominateur sont deux intégrales de l'équation différentielle hypergéométrique.

Ceci posé, nous allons employer un mode de raisonnement analogue à celui dont a fait usage M. Poincaré dans les considérations qu'il a présentées sur les fonctions inverses, auxquelles on est conduit quand on regarde les coefficients d'une équation linéaire comme fonctions de ses invariants fondamentaux (*Sur les groupes des équations linéaires*, *Acta mathematica*, t. IV, p. 216).

Reprenons la fonction de u

$$V = \frac{\int_{u_0}^{u} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv}{\int_{u_0}^{1} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv}.$$

On a tracé, dans le plan des u, comme il a été dit, les coupures $(\infty, 1)$, $(1, 0)$, $(0, x)$; quand u parcourra son plan, sans franchir ces coupures, V parcourra une certaine région R. Cette région sera analogue aux polygones générateurs des groupes fuchsiens, mais elle pourra se recouvrir partiellement elle-même. Elle aura six côtés et ses sommets sont faciles à obtenir; ce sont, d'une part :

$$(1^\circ) \qquad 0, \quad 1, \quad 1+z, \quad \frac{e^{2i\pi(\lambda+b_1)} - e^{2i\pi\lambda}}{1 - e^{2i\pi\lambda}}\, z + \frac{e^{2\pi i(\lambda+b_1+b_2)} - e^{2i\pi\lambda}}{1 - e^{2i\pi\lambda}}$$

et, d'autre part,

$$(2^\circ) \qquad 0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3,$$

a_3 étant égal au dernier terme de la ligne précédente, tandis que a_1 est le transformé de 1 par la substitution (1), et a_2 le transformé de $1+z$ par la substitution (2). On voit que ces sommets et les substitutions (1), (2) et (3) ne dépendent que du rapport z. La région R n'est pas entièrement déterminée quand on se donne z; on peut en effet faire varier la forme des côtés (1) et il y a alors des variations correspondantes pour les côtés conjugués (2). Ceci posé, il n'y a plus rien à changer au raisonnement fait par M. Poincaré (p. 220 et 221 du Mémoire cité); nous allons le reproduire succinctement.

On peut toujours tracer les coupures, de manière que les côtés (1) aient telle forme que l'on veut, et par suite, s'il existe deux fonctions V, correspondant à deux valeurs *différentes* x_1 et x_2 *de* x, et pour lesquelles le rapport de z, évalué comme nous l'avons indiqué, aurait la même valeur, on peut toujours supposer que la région R est la même dans l'un et l'autre cas.

Soient donc V_1 et V_2 les deux valeurs de V correspondant à x_1 et à x_2; on montre de suite que ces deux fonctions de u, qui correspondent à la même région R, doivent être liées par une relation de la forme

$$AV_1V_2 + BV_1 + CV_2 + D = 0,$$

et, comme elles ont la même valeur pour $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$, on en conclut que

$$V_1 = V_2;$$

par suite on aura nécessairement $x_1 = x_2$, comme nous voulions l'établir.

2. Nous voulons maintenant considérer le cas, signalé par M. Schwarz, où l'inversion du quotient de deux intégrales de l'équation différentielle hypergéométrique conduit à une fonction uniforme. Reprenons donc l'équation du second ordre

$$(\mathrm{E})\quad \left\{\begin{aligned} &x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}[b_1(x-1) + b_2x + (\lambda-2)(2x-1)] \\ &\qquad\qquad + (\lambda-1)(b_1+b_2+\lambda-2)y = 0, \end{aligned}\right.$$

à laquelle satisfont les intégrales

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}du \quad (g, h = 0, 1, x, \infty).$$

On sait que, dans le voisinage de $x = 0$, on peut trouver deux intégrales de l'équation E, dont le rapport dans le voisinage de l'origine peut se mettre sous la forme

$$x^{\lambda+b_1-1}\,P(x),$$

$P(x)$ étant holomorphe et différent de zéro pour $x = 0$.

De même, pour $x = 1$, on aura

$$(x-1)^{\lambda+b_2-1}\,Q(x)$$

et enfin, pour $x = \infty$,

$$x'^{b_1+b_2-1}\,R(x'), \qquad \text{en posant} \qquad x = \frac{1}{x'}.$$

Pour que l'inversion se fasse d'une manière uniforme, il faudra que les trois nombres

$$\lambda + b_1 - 1, \quad \lambda + b_2 - 1, \quad b_1 + b_2 - 1$$

soient les inverses de nombres entiers. Soient donc

$$\lambda + b_1 - 1 = \frac{1}{m}, \qquad \lambda + b_2 - 1 = \frac{1}{n}, \qquad b_1 + b_2 - 1 = \frac{1}{p},$$

m, n, p étant trois entiers que nous supposons *positifs*. Nous aurons donc

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right),$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right),$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{n}\right).$$

Nous voulons d'ailleurs, d'après ce qui a été dit au n° 1, que

$$b_1 > 0, \qquad b_2 > 0, \qquad \lambda > 0, \qquad b_1 + b_2 + \lambda > 2;$$

les trois premières conditions sont remplies, quels que soient les entiers positifs m, n, p, et, quant à la dernière, elle revient à

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1,$$

que nous supposerons satisfaite.

Quand λ, b_1, b_2 ont les valeurs écrites ci-dessus, l'inversion du quotient de deux intégrales conduit à une fonction uniforme; c'est ce que nous allons maintenant établir. Reportons-nous à cet effet aux substitutions fondamentales du groupe, telles que je les ai données récemment (*Bulletin des Sciences mathématiques*, août 1885). En désignant par ω_1 et ω_2 deux solutions convenables de l'équation (E), les deux substitutions fondamentales du groupe peuvent s'écrire

$$(S_1)\qquad [\omega_1,\ \omega_2,\ e^{-2(b_1+\lambda)i\pi}\,\omega_1,\ \omega_2+(e^{-2(b_1+\lambda)\pi i}-e^{-2\lambda i\pi})\,\omega_1],$$

$$(S_2)\qquad [\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_1+(e^{2(b_2+\lambda)i\pi}-e^{2\lambda i\pi})\,\omega_2,\ e^{2(b_2+\lambda)i\pi}\,\omega_2].$$

Si nous posons $\frac{\omega_1}{\omega_2}=z$, nous aurons pour z les substitutions

$$(\sigma_1)\qquad \left[z,\ \frac{e^{-2(b_1+\lambda)i\pi}z}{1+(e^{-2(b_1+\lambda)\pi i}-e^{-2\lambda i\pi})\,z}\right],$$

$$(\sigma_2)\qquad [z,\ e^{-2(b_2+\lambda)i\pi}z+(1-e^{-2b_2\pi i})].$$

Nous allons montrer que l'on peut trouver un cercle qui est transformé en lui-même par les substitutions (σ_1) et (σ_2). On peut mettre l'équation d'un cercle sous la forme

$$(C)\qquad Azz_0+Bz+B_0z_0+C=0,$$

où A et C sont réels, B et B_0 étant imaginaires conjuguées ainsi que z et z_0.

En écrivant que ce cercle est transformé en lui-même par la substitution (σ_1), on obtient les deux équations

$$B(1-e^{-2b_1\pi i})+B_0(1-e^{2b_1\pi i})+C(e^{-2b_1\pi i}-1)(e^{2b_1\pi i}-1)=0,$$
$$B(e^{2(b_1+\lambda)\pi i}-1)=C(1-e^{2b_1\pi i}),$$

et l'on voit que la première est une conséquence de la seconde.

Pareillement, la substitution (σ_2) conduit aux deux équations

$$B(1-e^{-2b_2\pi i})+B_0(1-e^{+2b_2\pi i})+A(1-e^{-2b_2\pi i})(1-e^{2b_2\pi i})=0,$$
$$B(e^{2(b_2+\lambda)\pi i}-1)=A(1-e^{2b_2\pi i}),$$

qui se réduisent aussi à la seconde.

On a donc seulement les *deux* équations de condition

$$(1)\qquad \begin{cases} B(e^{2(b_2+\lambda)\pi i}-1)=A(1-e^{2b_2\pi i}),\\ B(e^{2(b_1+\lambda)\pi i}-1)=C(1-e^{2b_1\pi i}).\end{cases}$$

Il faut qu'on puisse satisfaire à ces équations en prenant A et C *réels*. On voit de suite qu'il en est ainsi, car on peut remplacer la seconde équation par la suivante

$$A=\frac{(e^{2\pi b_1 i}-1)(e^{2\pi(b_2+\lambda)i}-1)}{(e^{2\pi b_2 i}-1)(e^{2\pi(b_1+\lambda)i}-1)}\,C,$$

et l'on s'assure sans peine que le coefficient de C est *réel*, en remarquant qu'il ne change pas quand on change i en $-i$.

On aura par suite le cercle ainsi complètement déterminé; nous devons chercher si ce cercle est réel. Il faut pour cela que

$$BB_0 - AC > 0;$$

en faisant le calcul, on ramène immédiatement cette condition à l'inégalité

$$(e^{2\pi\lambda i} - 1)(e^{2\pi b_2 i} - e^{-2\pi(b_1+\lambda)i})(1 - e^{2\pi b_1 i})(1 - e^{-2\pi b_2 i}) > 0.$$

Le premier membre est une fonction réelle de λ, soit $\varphi(\lambda)$, qui se discute facilement; laissons b_1 et b_2 fixes, et faisons varier λ entre

$$0 \quad \text{et} \quad 2 - b_1 - b_2,$$

cette dernière limite étant inférieure à l'unité, puisque $b_1 + b_2 = 1 + \frac{1}{p}$.

La fonction $\varphi(\lambda)$ s'annule pour $\lambda = 0$ et pour $\lambda = 2 - b_1 - b_2$, et elle ne s'annule pas dans l'intervalle. Il nous suffira, par suite, d'avoir son signe pour une valeur intermédiaire. Or on a

$$0 < 1 - b_1 < 2 - b_1 - b_2;$$

nous pouvons donc substituer $\lambda = 1 - b_1$ et l'on voit que pour cette valeur l'inégalité (2) est vérifiée.

Il existe donc un cercle réel C, *que les substitutions* (σ_1) *et* (σ_2) *transforment en lui-même*, et ce cercle est donné par les relations (1).

3. Reprenons maintenant l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u} u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

où λ, b_1 et b_2 ont les valeurs indiquées. Cette intégrale sera une intégrale abélienne correspondant à la relation algébrique entre v et u

$$v = u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}.$$

Elle sera d'ailleurs de première espèce, puisqu'elle reste finie pour toute valeur de u. Les périodes de cette intégrale peuvent s'exprimer à l'aide de ω_1 et ω_2, considérées au paragraphe précédent; elles se partageront en couples de la forme

$$k\omega_1, \quad k\omega_2,$$

où les k sont des constantes, c'est-à-dire des quantités indépendantes de x. On sait, d'après Riemann, qu'en désignant par

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p}$$

les périodes $2p$ d'une intégrale abélienne de première espèce et posant

$$\Omega_k = a_k + b_k i,$$

on a

$$\Sigma c_{ik}(a_i b_k - a_k b_i) < 0,$$

où les c sont des entiers. Cette proposition, appliquée au cas actuel, nous montre qu'en écrivant, comme plus haut, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = z$, on aura l'inégalité

$$\alpha z z_0 + \beta z + \beta_0 z_0 + \gamma < 0,$$

où α et γ sont réels, β et β_0 étant imaginaires conjugués.

Il est évident d'ailleurs que cette inégalité ne doit pas changer, quand on effectue sur ω_1, ω_2 une substitution quelconque du groupe (σ_1), (σ_2); par suite le cercle

$$\alpha z z_0 + \beta z + \beta_0 z_0 + \gamma = 0$$

doit se confondre avec le cercle trouvé plus haut

$$\text{(C)} \qquad \mathrm{A} z z_0 + \mathrm{B} z + \mathrm{B}_0 z_0 + \mathrm{C} = 0,$$

et nous arrivons, par suite, à cette conclusion : ω_1 et ω_2 étant les deux solutions de l'équation linéaire hypergéométrique (E), que nous avons considérées précédemment, si l'on pose

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = z,$$

le point z reste toujours, quand x varie, du même côté du cercle C, c'est-à-dire soit à l'intérieur, soit à l'extérieur. On peut d'ailleurs toujours supposer qu'il s'agit de l'intérieur du cercle, car une substitution linéaire faite sur z permet toujours de passer de l'extérieur d'un cercle à l'intérieur.

4. Ceci posé, nous pouvons aborder l'inversion de la relation

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = z$$

et montrer que cette équation donne pour x une fonction uniforme de z. Traçons dans le plan des x les deux coupures $(0, 1)$ et $(1, \infty)$. Il a été montré (n° 1) que, quand x décrit son plan sans traverser les coupures, le rapport z décrit dans son plan un polygone correspondant, et ce polygone *ne se recouvre pas lui-même*. Ce polygone P a quatre côtés, et, en disposant convenablement des coupures $(0, 1)$ et $(1, \infty)$, on peut évidemment supposer que ce polygone est convexe. Soient α, β, β' et γ les sommets de ce quadrilatère; les côtés $\alpha\beta$ et $\alpha\beta'$ sont conjugués, ainsi que les deux côtés $\beta\gamma$ et $\beta'\gamma$; ces couples de côtés correspondent aux deux bords de l'une et l'autre coupure. On peut prendre pour les deux substitutions fondamentales la substitution qui transforme $\alpha\beta'$ en $\alpha\beta$ et celle qui transforme $\gamma\beta'$ en $\gamma\beta$; désignons ces deux substitutions par Σ_1 et Σ_2. La substitution Σ_1 équivaut à une rotation de x autour du point zéro; le multiplicateur de cette substitution est donc égal à $e^{2\pi i(\lambda+b_1-1)}$, c'est-à-dire à $e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Donc, si nous effectuons m fois de suite la substitution Σ, le polygone P se transformera en P_1, P_2, ..., P_{m-1} et le polygone P_{m-1} se confondra avec le polygone P; d'ailleurs ces polygones n'auront que des côtés communs, mais ils n'auront pas d'*aire* commune; il en sera de même pour la substitution Σ_2, dont le multiplicateur est égal à $e^{2\pi i(b_1+b_2+1)}$ ou $e^{\frac{2\pi i}{p}}$, et qui donnera les polygones Q_1, Q_2, ..., Q_{p-1}.

Nous venons d'étudier la disposition des polygones autour des points α et γ; examinons maintenant les sommets β et β'. La substitution Σ_2, qui transforme $\gamma\beta'$ en $\gamma\beta$, transforme P en Q_1; puis, en effectuant sur Q_1 la substitution Σ_2^{-1} qui transforme $\alpha\beta$ en $\alpha\beta'$, nous transformons le polygone Q_1 en un nouveau polygone P'_2, et la substitution résultant de ces deux substitutions, qui équivaut manifestement à une rotation de x autour du point 1, laisse le sommet β invariable et son multiplicateur est $e^{(\lambda+b_3-1)2\pi i}$ ou $e^{\frac{2\pi i}{n}}$. On aura donc ainsi autour du sommet β un ensemble de n couples de polygones, tels que P et Q_1, et ces polygones n'empiéteront pas les uns sur les autres. Il en sera de même autour du sommet β'. Le cercle C est donc couvert ainsi par un réseau de polygones : on le voit en employant le raisonnement de M. Poincaré, et il en résulte alors immédiatement que l'équation

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = z$$

donne pour x une fonction uniforme de z, définie seulement à l'intérieur du cercle C.

SECONDE PARTIE.

1. Nous allons maintenant nous occuper des fonctions hyperfuchsiennes auxquelles on est conduit par la considération de certaines fonctions hypergéométriques de deux variables. On sait que l'intégrale

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}\,du,$$

où g et h désignent deux des quantités 0, 1, x, y et ∞ satisfait à un système S de trois équations linéaires aux dérivées partielles, ayant trois solutions communes linéairement indépendantes [*voir* mon *Mémoire sur les séries hypergéométriques de deux variables* (*Annales de l'École Normale*, 1881)]. Nous nous bornons d'ailleurs à considérer le cas où λ, b_1, b_2 et b_3 sont réels et satisfaisant aux conditions

$$b_1 > 0, \qquad b_2 > 0, \qquad \mu > 0, \qquad \lambda > 0, \qquad b_1 + b_2 + \lambda + \mu < 3;$$

ce sont les conditions pour que toutes les intégrales précédentes aient un sens.

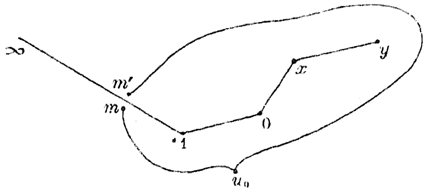
Envisageons l'intégrale

$$U = \int_{u_0}^{u} u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}\,du$$

et traçons dans le plan de la variable u (*fig.* 3) les coupures $(\infty, 1)$,

$(1, 0)$, puis $(0, x)$ et (x, y) et nous supposerons que le chemin d'intégration ne traverse aucune coupure.

Fig. 3.



Nous allons d'abord chercher quelles relations il y a entre les valeurs de U en des points correspondants situés de part et d'autre d'une même coupure; c'est une étude toute semblable à celle que nous avons faite au n° 1. Soient d'abord m et m' deux points sur la coupure $(\infty, 1)$; on aura, en désignant par U′ la valeur de U en m',

$$\mathrm{U}' = \mathrm{U}\, e^{(\lambda+b_1+b_2+b_3)2\pi i} + (1 - e^{(\lambda+b_1+b_2+\mu)2\pi i}) \int_{u_0}^{\infty} dv,$$

en écrivant, pour abréger,

$$dv = u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}$$

et

$$(1) \qquad \mathrm{V}' = \mathrm{V} e^{(\lambda+b_1+b_2+\mu)2\pi i},$$

en posant

$$\mathrm{V} = \frac{\displaystyle\int_{u_0}^{u} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv}{\displaystyle\int_{u_0}^{1} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv}.$$

On aura de la même manière, en considérant la seconde coupure $(1, 0)$

$$\mathrm{U}' = \mathrm{U}\, e^{(\lambda+\mu+b_1)2\pi i} + e^{(\lambda+\mu+b_1)2\pi i}(e^{2i\pi b_2} - 1) \int_{u_0}^{1} dv + (1 - e^{2\pi i(\lambda+\mu+b_1+b_2)}) \int_{u_0}^{x} dv,$$

et l'on aura pour V la substitution

$$(2) \qquad \mathrm{V}' = e^{(\lambda+\mu+b_1)2\pi i}\, \mathrm{V} + e^{2\pi i(\lambda+\mu+b_1)}(e^{2\pi i b_2} - 1).$$

Considérons ensuite la coupure $(0, x)$; elle conduit à la substitution

$$(3) \quad \mathrm{V}' = e^{2\pi i(\lambda+\mu)}\, \mathrm{V} + (e^{2\pi i(\lambda+\mu+b_1)} - e^{2\pi i(\lambda+\mu)})z + (e^{2\pi i(\lambda+\mu+b_1+b_2)} - e^{2\pi(\lambda+\mu)i}),$$

où

$$z = \frac{\int_{u_0}^{0} dv - \int_{u_0}^{1} dv}{\int_{u_0}^{1} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv};$$

ces résultats sont entièrement semblables à ceux du n° 1 du Chap. I. Il nous reste à calculer la substitution correspondant à la coupure (x, y). On aura

$$\begin{aligned} \mathrm{U}' - \mathrm{U} e^{2\pi i\lambda} + e^{2\pi i\lambda}(1 - e^{2\pi i\mu}) \int_{u_0}^{x} dv + e^{2\pi i(\lambda+\mu)}(1 - e^{2\pi i b_1}) \int_{u_0}^{0} dv \\ + e^{2i\pi(\lambda+\mu+b_1)}(1 - e^{2\pi i b_2}) \int_{u_0}^{1} dv + (e^{2\pi i(\lambda+\mu+b_1+b_2)} -) \int_{u_0}^{\infty} dv = 0, \end{aligned}$$

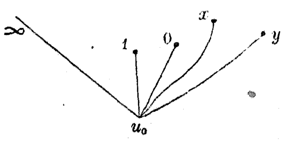
et il en résultera pour V une substitution (4), que je n'écris pas pour abréger, mais dont les coefficients seront manifestement des polynômes du premier degré en z et en t, en posant

$$t = \frac{\int_{u_0}^{x} dv - \int_{u_0}^{0} dv}{\int_{u_0}^{1} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv}.$$

On remarque que, dans z et t, le dénominateur commun et les deux numérateurs sont trois intégrales linéairement indépendantes du système S d'équations linéaires, dont j'ai parlé au début.

Il importe de ne pas oublier comment sont évaluées les intégrales

Fig. 4.



définies qui figurent dans z et dans t; on peut dire qu'elles sont évaluées le long de chemins *se succédant autour du point* u_1 (*fig.* 4) *dans l'ordre*

$$u_0 x, \quad u_0 y, \quad u_0 0, \quad u_0 1, \quad u_0 \infty.$$

2. Nous pouvons maintenant établir une proposition analogue à celle que nous avons démontrée, au début de la première Partie. Il n'est pas possible, les intégrales étant évaluées comme il vient d'être indiqué, que l'on ait, pour deux systèmes différents de valeurs de x et y, les mêmes valeurs pour z et pour t. Ce théorème se démontrera absolument comme celui qui est relatif au cas d'une variable, en montrant que la fonction de u

$$V = \frac{\int_{u_0}^{u} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv}{\int_{u_0}^{1} dv - \int_{u_0}^{\infty} dv}$$

doit avoir la même valeur dans les deux cas, d'où l'on conclut l'identité des valeurs de x et y.

3. Nous voulons maintenant étudier les cas où l'inversion des quotients de trois intégrales linéairement indépendantes du système S conduit à des fonctions uniformes de deux variables indépendantes; ces cas seront les analogues de ceux de M. Schwarz, que nous avons étudiés dans la première Partie. En se reportant au Mémoire déjà cité (*Annales de l'École Normale*, 1881), on voit que, dans le voisinage de $x = 0$, $y = \alpha$ (α étant une valeur quelconque différente de 0, 1, ∞), le système admet trois intégrales de la forme

$$P_1(x, y), \quad P_2(x, y), \quad x^{\mu+b_1-1} P_3(x y),$$

P_1, P_2 et P_3 étant holomorphes dans le voisinage de $x = 0$, $y = \alpha$. Pareillement, dans le voisinage de $x = 1$, $y = \alpha$, nous aurons trois intégrales

$$Q_1(x, y), \quad Q_2(x, y), \quad (x - 1)^{\mu+b_2-1} Q_3(x, y).$$

Dans le voisinage de $x = y = \alpha$, α étant toujours différent de 0, 1, ∞, on a trois intégrales de la forme

$$A_1(x, y), \quad A_2(x, y), \quad (x - y)^{\lambda+\mu-1} A_3(x, y).$$

Pareillement, pour $x = \frac{1}{x'} = \infty$, on aura

$$x^{1-\mu+1} R_1(x', y), \quad x'^{-\mu+1} R_2(x', y), \quad x'^{3-\lambda-\mu-b_1-b_2} R_3(x', y).$$

Il suit de là tout d'abord qu'il est nécessaire, pour l'inversion uniforme des quotients de deux de ces intégrales à la troisième, que

$$\mu + b_1 - 1, \quad \mu + b_2 - 1, \quad \lambda + \mu - 1 \quad \text{et} \quad 2 - \lambda - b_1 - b_2$$

soient égaux à l'inverse d'un nombre entier positif; mais nous avons encore des formes toutes semblables pour les déterminations des intégrales dans le voisinage de $x = \alpha$ et de $y = 0$, 1 et ∞ ; nous en concluons que

$$\lambda + b_1 - 1, \quad \lambda + b_2 - 1, \quad 2 - \mu - b_1 - b_2$$

doivent être aussi égaux à l'inverse d'un nombre entier positif.

4. Nous supposerons donc que λ, b_1, b_2 et μ, satisfaisant d'ailleurs aux inégalités

$$b_1 > 0, \qquad b_2 > 0, \qquad \lambda > 0, \qquad \mu > 0, \qquad b_1 + b_2 + \mu + \lambda < 3,$$

satisfassent de plus aux conditions précédentes.

Pour suivre la même marche que dans le cas d'une variable, nous aurions besoin d'avoir les substitutions fondamentales du groupe relatif au système S. Nous n'allons pas avoir besoin, toutefois, de calculer toutes ces substitutions fondamentales; laissant d'abord y constant, on a, en faisant tourner x autour des points 0, 1, y, trois substitutions. Si l'on prend trois intégrales convenables ω_1, ω_2, ω_3, j'ai donné (*Bulletin des Sciences mathématiques,* août 1885) ces trois substitutions fondamentales que je rappellerai ici :

$$(\Sigma_1) \qquad \begin{cases} \omega'_1 = e^{-2(\lambda+\mu)\pi i}\omega_1, \\ \omega'_2 = \omega_2 + (e^{-2(\lambda+\mu)\pi i} - e^{-2\mu\pi i})\omega_1, \\ \omega'_2 = \omega_3; \end{cases}$$

$$(\Sigma_2) \qquad \begin{cases} \omega''_1 = \omega_1 + (e^{2(b_1+\mu)\pi i} - e^{2\mu\pi i}))\omega_2, \\ \omega''_2 = e^{2(b_1+\mu)\pi i}\omega_2, \\ \omega''_3 = (1 - e^{2i\pi\mu})\omega_2 + \omega_3 \end{cases}$$

et, enfin,

$$(\Sigma_3) \qquad \begin{cases} \omega'''_1 = \omega_1 + (e^{2(b_2+\mu)\pi i} - e^{2\mu\pi i})\omega_2 + (e^{2(b_1+b_2+\mu)\pi i} - e^{2(b_1+\mu)\pi i})\omega_3, \\ \omega'''_2 = (1 + e^{2(b_2+\mu)\pi i} - e^{2\mu\pi i})\omega_2 + (e^{2(b_1+b_2+\mu)\pi i} - e^{2(b_1+\mu)\pi i})\omega_3, \\ \omega'''_3 = e^{-\pi b_1 i}(e^{2\pi\mu i} - 1)\omega_2 + e^{2\pi\mu i}\omega_3. \end{cases}$$

En laissant de même x constant et faisant tourner y autour des points x, o, 1, on aurait trois autres substitutions; la première n'est autre que la substitution Σ_1. Désignons les deux autres par Σ_4 et Σ_5; elles sont de forme analogue aux trois premières et peuvent s'obtenir de la même manière. Je ne les écris pas, car elles ne me seront pas utiles dans ce qui va suivre.

Continuant à suivre la même marche que dans la première Partie, nous devons montrer qu'il existe une forme quadratique ternaire à indéterminées conjuguées u, v, w, que laissent invariable les substitutions du groupe G; soit

$$A u_0 + A' v_0 + A'' w_0 + B'' u v_0 + B''_0 u_0 v + B' u w_0 + B'_0 u_0 w + B v w_0 + B_0 v_0 w$$

une telle forme; A, A′ et A″ sont réels et les autres coefficients B, B_0, ... sont deux à deux conjugués.

Nous avons pu calculer les coefficients pour le cas de deux variables; ici, le calcul complet serait bien plus laborieux, quoique évidemment de même nature. Nous le simplifierons en démontrant d'abord indirectement l'existence d'une telle forme. Considérons, à cet effet, l'intégrale, déjà étudiée au n° 1,

$$\int_{u_0}^{u} u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}\,du,$$

où λ, b_1, b_2 et μ sont des nombres commensurables satisfaisant aux conditions indiquées.

On peut considérer cette intégrale comme une intégrale abélienne, correspondant à la relation algébrique entre v et u,

$$v = u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}.$$

Elle sera d'ailleurs de première espèce, car elle reste finie pour toute valeur de u. Les périodes de cette intégrale peuvent s'exprimer avec trois solutions linéairement indépendantes du système; soient, par exemple, les trois solutions, ω_1, ω_2, ω_3.

Les intégrales pourront se grouper, trois par trois, en expression de la forme

$$\alpha\omega_1, \quad \alpha\omega_2, \quad \alpha\omega_3,$$

où les α sont des constantes, c'est-à-dire des quantités indépendantes de x et y. En écrivant, comme au n° 3 de la première Partie, que

$$\Sigma c_{ik}(a_i b_k - a_k b_i) < 0,$$

on trouve une inégalité de la forme

$$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0) < 0,$$

le premier membre de cette inégalité étant une forme quadratique ternaire à indéterminées conjuguées, où ω_1^0, ω_2^0 et ω_3^0 représentent les conjuguées de ω_1, ω_2 et ω_3. Les coefficients de cette forme ne dépendent ni de x ni de y.

Si l'on fait varier x et y, l'inégalité précédente ne cessera évidemment pas d'être vérifiée, et, par suite, elle sera transformée en elle-même, quand on effectuera sur ω_1, ω_2 et ω_3 une substitution quelconque du groupe G. On en conclut, en posant

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = u, \qquad \frac{\omega_2}{\omega_3} = v,$$

qu'il existe une certaine *surface* S,

$$(\mathrm{S}) \quad A u u_0 + A' v v_0 + A'' + B'' u v_0 + B''_0 u_0 v + B' u + B'_0 u_0 + B v + B_0 v_0 = 0,$$

que transforment en elle-même les substitutions du groupe G. Cette conclusion se trouve établie pour les valeurs de λ, μ, b_1 et b_2 ayant la forme indiquée; mais, ces valeurs étant en nombre quadruplement infini, il est évident que la conclusion subsiste pour toute valeur de λ, μ, b_1 et b_2.

Le calcul complet de la forme f se trouve alors bien simplifié, quand on admet l'existence de la forme. Nous écrirons la forme comme il suit

$$\begin{aligned} &A\omega_1\omega_1^0 + A'\omega_2\omega_2^0 + A''\omega_3\omega_3^0 + B''\omega_1\omega_2^0 \\ &\quad + B''_0\omega_1^0\omega_2 + B'\omega_1\omega_3^0 + B'_0\omega_1^0\omega_3 + B\omega_2\omega_3^0 + B_0\omega_2^0\omega_3; \end{aligned}$$

la substitution (Σ_1) nous donne d'abord

$$B''(e^{2(\lambda+\mu)\pi i} - 1) = A'(1 - e^{2\lambda\pi i}),$$

puis

$$B'(e^{-2(\mu+\lambda)i\pi}-1)+B(e^{-2\mu i\pi}e^{-2\lambda i\pi}-1)=0;$$

la substitution (Σ_2) donne ensuite, en prenant le coefficient de $\omega_2\omega_3^0$,

$$A''(1-e^{2i\pi\mu})+B'(e^{2-(b_1+\mu)\pi i}-e^{2\pi\mu i})+B(e^{2(b_1+\mu)\pi i}-1)=0,$$

d'où l'on conclut

$$A''=B\,\frac{(1-e^{2\pi i(\mu+b_1+\lambda)})}{1-e^{2\pi i(\mu+\lambda)}}.$$

Nous avons donc déjà les trois relations

$$B''=A'\,\frac{1-e^{2\lambda\pi i}}{e^{2(\lambda+\mu)\pi i}-1},\qquad B'=B\,\frac{1-e^{2\lambda\pi i}}{e^{2(\lambda+\mu)\pi i}-1},\qquad A''=B\,\frac{(1-e^{2\pi i(\lambda+\mu+b_1)})}{1-e^{2\pi i(\lambda+\mu)}}.$$

Nous aurons, d'autre part, en comparant les coefficients de $\omega_1\omega_2^0$, après avoir fait la substitution (Σ_3),

$$A(e^{-2(b_1+\mu)\pi i}-e^{-2\mu\pi i})+B''(e^{-2(b_1+\mu)\pi i}-1)+B'(1-e^{-2i\pi\mu})=0;$$

puis, en comparant les coefficients $\omega_1\omega_3^0$, après avoir fait la substitution (Σ_3),

$$\begin{aligned}&A(e^{-2(b_1+b_2+\mu)\pi i}-e^{-2(b_1+\mu)\pi i})\\&\quad+B''(e^{-2(b_1+b_2+\mu)\pi i}-e^{-2(b_1+\mu)\pi i})+B'(e^{-2i\pi\mu}-1)=0.\end{aligned}$$

Des cinq relations précédentes, on tire, en faisant $A=1$,

$$\begin{aligned}B''&=\frac{e^{2(b_1+b_2)\pi i}-1}{1-e^{2(b_1+b_2+\mu)\pi i}},\\ B'&=\frac{e^{2b_2\pi i}-1}{1-e^{2(b_1+b_2+\mu)\pi i}},\\ A'&=B''\,\frac{e^{2(\lambda+\mu)\pi i}-1}{1-e^{2\lambda\pi i}},\\ B&=B'\,\frac{e^{2(\lambda+\mu)\pi i}-1}{1-e^{2\lambda\pi i}},\\ A''&=B\,\frac{1-e^{2\pi(\lambda+\mu+b_1)i}}{1-e^{2\pi i(\lambda+\mu)}};\end{aligned}$$

ces valeurs seront bien déterminées, si aucun des dénominateurs ne s'annule; nous faisons donc les hypothèses, auxquelles nous serons, d'ailleurs, conduit de nouveau dans un instant,

$$1 < \lambda + \mu < 2$$

et

$$1 < b_1 + b_2 + \mu < 2,$$

en excluant les cas limites où l'une ou l'autre de ces inégalités se transformerait en une égalité; il faudrait dans ces cas donner aux coefficients une forme différente.

5. Il est important d'être assuré que la forme f est *indéfinie;* car, dans le cas contraire, la *surface* (S) serait imaginaire et n'offrirait aucun intérêt. La forme f peut s'écrire

$$\begin{aligned}(\omega_1 + B''_0\omega_2 + B'_0\omega_3)(\omega_1^0 + B''\omega_2^0 + B'\omega_3^0) + \omega_2\omega_2^0(A' - B''B''_0)\\ + \omega_3\omega_3^0(A'' - B'B'_0) + \omega_2\omega_3^0(B - B''_0B') + \omega_2^0\omega_3(B_0 - B''B'_0).\end{aligned}$$

Remarquons d'abord que le discriminant de cette forme ne peut être nul; si, en effet, ce discriminant était nul, on pourrait, par une substitution linéaire, réduire la forme ternaire en une forme binaire

$$F(U, V, U_0, V_0),$$

et cette forme se transformerait en elle-même par toute substitution du groupe. Il faudrait donc que ces substitutions transformassent U et V en des expressions linéaires et homogènes de U et V, et que, par suite, le système S ne fût pas irréductible. Or ce système est certainement irréductible, pour toutes les valeurs de λ, μ, b_1 et b_2, *comprises entre zéro et un,* et satisfaisant aux inégalités

$$\begin{array}{lll}\lambda + b_1 > 1, & \mu + b_1 > 1, & \lambda + \mu > 1,\\ \lambda + b_2 > 1, & \mu + b_2 > 1, & \lambda + b_1 + b_2 + \mu < 3,\\ \mu + b_1 + b_2 < 2, & \lambda + b_1 + b_2 < 2, & \end{array}$$

qui sont vérifiées pour les valeurs de λ, μ, b_1 et b_2, que nous avons à considérer. Cela posé, la forme f sera certainement indéfinie, si le discriminant de la forme binaire en ω_2 et ω_3, qui suit le premier terme

$$(\omega_1 + B''_0\omega_2 + B'_0\omega_3)(\omega_1^0 + B''\omega_2^0 + B'\omega_3^0),$$

est positif. Or ce discriminant ne peut jamais s'annuler pour les valeurs de λ, μ, b_1 et b_2 satisfaisant aux inégalités précédentes, car le discriminant de f serait alors nul, ce que nous venons de voir être impossible. Il sera donc suffisant de considérer un cas particulier ; or, si b_1 et b_2 satisfont à la condition

$$b_1 + b_2 = 1,$$

on a $B'' = 0$, $A' = 0$, et le discriminant se réduit à BB_0 et est, par suite, positif.

Une dernière question est à poser, relativement à l'inégalité

$$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0) < 0,$$

où, comme nous venons de le voir, f est une forme *indéfinie*, dont le discriminant n'est pas nul. Par une substitution linéaire effectuée sur ω_1, ω_2, ω_3, cette inégalité pourrait prendre l'une ou l'autre forme

$$UU_0 + VV_0 - WW_0 < 0$$

ou bien

$$UU_0 - VV_0 - WW_0 < 0,$$

et ces deux formes d'inégalité sont bien distinctes. Je dis que c'est la première forme que nous allons rencontrer ici ; on doit, en effet, rencontrer toujours la même forme d'inégalité pour toutes les valeurs de λ, μ, b_1 et b_2 satisfaisant aux inégalités écrites plus haut, car le passage d'une forme à l'autre correspondrait nécessairement à une forme de discriminant nul.

Nous pouvons donc considérer encore ici un cas particulier. Prenons des valeurs commensurables, pour lesquelles on ait

$$\lambda + \mu + b_1 > 2,$$

inégalité qui est incompatible avec les précédentes ; désignons toujours par

$$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0)$$

le polynôme, dont j'ai (nº 5) calculé les coefficients, et qui est, d'après ce que nous venons de voir, réductible à la forme $UU_0 + VV_0 - WW_0$.

Il s'agit de savoir si l'on a l'inégalité

$$f > 0$$

ou l'inégalité

$$f < 0.$$

Or faisons tendre x et y vers zéro. On voit, avec l'hypothèse faite

$$\lambda + \mu + b_1 > 2,$$

que, pour $x = 0$, $y = 0$,

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0,$$

ω_3 étant différent de zéro.

Le premier membre se réduit alors à $A''\omega_2\omega_3^0$; or on a

$$A'' = \frac{e^{2\pi(\lambda+\mu+b_1)} - 1}{1 - e^{2\lambda\pi i}} \; \frac{e^{2\pi b_2 i} - 1}{1 - e^{2(b_1+b_2+\mu)\pi i}},$$

et il est facile de voir que, $\lambda + \mu + b_1$ étant supérieur à deux, on a $A'' < 0$. L'inégalité doit donc avoir la forme

$$f < 0,$$

c'est-à-dire

$$UU_0 + VV_0 - WW_0 < 0.$$

6. Nous sommes donc arrivé à la conclusion suivante : on peut trouver trois intégrales ω_1, ω_2, ω_3, linéairement indépendantes (et nous avons appris à les former), pour lesquelles on a, en posant

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = u,$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = v,$$

l'inégalité

$$(\mathrm{S}) \quad A u u_0 + A' v v_0 + A'' + B'' u v_0 + B''_0 u_0 v + B' u + B'_0 u_0 + B v + B_0 v_0 < 0.$$

les coefficients ayant les valeurs données au n° 5.

En effectuant sur (u, v) une substitution linéaire (fractionnaire) convenable, on ramène cette inégalité à la forme

$$(\Sigma) \qquad UU_0 + VV_0 < WW_0,$$

à chaque point (u, v) du domaine (S) correspond un point du domaine (Σ) et réciproquement. Ceci posé, traçons, comme nous l'avons fait au n° 1, deux coupures $(1, \infty)$ et $(1, 0)$, et évaluons, comme il a été dit, les intégrales qui servent à former ω_1, ω_2 et ω_3 ; x et y prenant, *dans ces conditions*, toutes les valeurs possibles, les valeurs correspondantes de u et v, et, par suite, de U et V vont former un certain *domaine*, et ce *continuum* ne se recouvrira pas lui-même, d'après ce que nous avons établi au n° 2, puisque, pour deux systèmes de valeurs de x et y, on ne peut pas avoir les mêmes valeurs de u et v.

Désignons ce domaine fondamental par D ; quand on fera

$$x = y$$

(cette valeur commune étant arbitraire, mais distincte de 0, 1, ∞), on obtiendra une *arête*. De même nous aurons six autres arêtes correspondant respectivement à

$$\begin{array}{ll} x = 0, & y = 0, \\ x = 1, & y = 1, \\ x = \infty, & y = \infty. \end{array}$$

Mais ce ne seront pas les seules arêtes du domaine D. Étudions en effet le cas où x et y tendraient simultanément vers zéro; pour cela, remarquons qu'on peut substituer aux intégrales dont nous sommes partis les intégrales

$$\int u^{b_1-1}\left(u-\frac{1}{x}\right)^{b_2-1}(u-1)^{\mu-1}\left(u-\frac{y}{x}\right)^{\lambda-1} du$$

prises entre les limites 0, 1, $\frac{1}{x}$, $\frac{y}{x}$, ∞, quand on veut étudier seulement les rapports de ces intégrales. Nous avons donc à considérer un nouveau système S', où les variables sont maintenant $\frac{1}{x}$ et $\frac{y}{x}$; faisant la même remarque qu'au n° 3, nous supposerons donc que

$$b_1 + b_2 - 1 \qquad \text{et} \qquad 2 - \mu - \lambda - b_1$$

sont égaux à l'inverse d'un nombre entier positif, et aux valeurs arbitraires du rapport $\frac{y}{x}$, quand x et y tendent vers zéro, correspond une arête du domaine D. Des considérations analogues sont applicables au cas où l'on aurait simultanément soit

$$x = y = 1,$$

soit

$$x = y = \infty.$$

et nous arrivons donc, relativement à λ, μ, b_1 et b_2, à la conclusion suivante; si l'on prend deux quelconques des quatre nombres

$$\lambda, \quad \mu, \quad b_1, \quad b_2;$$

soit, par exemple, λ et b_1, la somme

$$\lambda + b_1 - 1$$

est l'inverse d'un entier positif. On obtient ainsi six équations de condition. De même, en prenant trois quelconques des mêmes quantités, soit, pour fixer les idées, λ, b_1 et b_2, la différence

$$2 - \lambda - b_1 - b_2$$

est encore égale à l'inverse d'un nombre entier, ce qui nous donnera quatre nouvelles équations.

7. Nous allons voir maintenant qu'en supposant remplies toutes les conditions indiquées, les deux équations

$$\frac{U}{W} = z,$$
$$\frac{V}{W} = t$$

donnent pour x et y des fonctions uniformes de z et t.

Considérons en effet le *polyèdre* fondamental D qui vient d'être défini. Ce domaine est limité par certaines *faces*, formant un espace à trois dimensions, et l'intersection de deux faces sera une *arête*, n'ayant que deux dimensions. Or il est facile de voir que, en effectuant les substitutions du groupe du système S, chaque arête appartiendra à un nombre limité de polyèdres, n'ayant d'autres parties communes que des faces. Prenons, par exemple, l'arête correspondant à $x = 0$, y recevant une valeur arbitraire; il existe une certaine substitution transformant cette arête en elle-même, et cette substitution transformera en l'autre face une des faces passant par cette arête. Les variables étant convenablement choisies, la substitution aura la forme

$$X' = X,$$
$$Y' = e^{\frac{2i\pi}{p}} Y.$$

p étant un entier positif, et cette substitution effectuée p fois de suite donnera p polyèdres, n'ayant en commun aucun *continuum* à trois dimensions. Pour d'autres arêtes, le raisonnement pourra être un peu moins simple; ainsi nous aurons pour $x = 1$, y étant arbitraire, deux arêtes, suivant que x arrivera vers *un* d'un côté ou de l'autre des coupures. Ces deux arêtes se correspondent par la substitution dont nous venons de parler, et nous aurons alors à faire un raisonnement tout semblable à celui qui a été fait au nº 4 de la première Partie. Dans tous les cas, autour de toutes les arêtes ne se trouvera disposé qu'un nombre limité de polyèdres, n'ayant en commun aucun *continuum* à quatre dimensions.

Ces résultats admis, on pourra se servir des raisonnements employés par M. Poincaré dans sa théorie des groupes fuchsiens; c'est ce que j'ai déjà indiqué dans mon Mémoire sur les groupes hyperabéliens (*Journal de Mathématiques*, 1885); on montre ainsi que l'hypersphère se trouve remplie par le réseau précédent des polyèdres, qui ne se recouvrent jamais eux-mêmes. Il suit bien évidemment de là que les équations

$$\frac{U}{W} = z,$$
$$\frac{V}{W} = t$$

donnent pour x et y des fonctions uniformes de z et t.

8. Les conditions imposées aux quatre nombres λ, μ, b_1 et b_2 sont,

comme nous l'avons vu, au nombre de *dix*. Je ne m'arrêterai pas à rechercher toutes les valeurs possibles, dont le nombre est probablement assez limité, je veux seulement m'arrêter, en terminant, sur deux cas particuliers : l'un deux est fourni par

$$\lambda = b_1 = b_2 = \mu = \tfrac{2}{3},$$

pour lesquels les dix conditions sont bien vérifiées. J'ai étudié autrefois, par une méthode spéciale, ce cas particulier, comme on peut le voir dans le tome I des *Acta mathematica* (*Sur des fonctions de deux variables analogues aux fonctions modulaires*). Dans ce cas, toutes les quantités analogues à

$$2 - \lambda - \mu - b_1$$

sont nulles. Donc, par conséquent, pour $x = 0$, $y = 0$, ou plus commodément pour $\frac{1}{x} = \infty$, $\frac{y}{x}$ étant arbitraire, les développements contiendront un terme en $\log x$, et par suite on aura un point correspondant situé nécessairement sur la surface même de l'hypersphère. Le polyèdre correspondant aura donc des *sommets* situés sur la surface de l'hypersphère limite

$$zz_0 + tt_0 = 1.$$

Prenons maintenant un autre exemple, qui va nous offrir des circonstances différentes. Soit

$$\lambda = b_1 = b_2 = \mu = \tfrac{3}{5}.$$

On a

$$b_1 + b_2 - 1 = \tfrac{1}{5}$$

et toutes les combinaisons analogues, puisque les nombres sont égaux.

Pareillement

$$2 - \lambda - b_1 + b_2 = \tfrac{1}{5};$$

par conséquent aucun des développements à employer ne contiendra de logarithmes, et nous pouvons par suite en conclure que la surface du polyèdre fondamental D n'aura aucun point commun avec la surface de l'hypersphère.

Ce cas particulier est intéressant, comme donnant précisément un exemple dans lequel le domaine fondamental est tout entier à l'intérieur de l'hypersphère limite. Dans la classe très étendue de groupes hyperfuchsiens, où nous avait conduit la considération des formes quadratiques ternaires à indéterminées conjuguées (*Acta mathematica*, t. V), les polyèdres fondamentaux avaient toujours un certain nombre de sommets sur l'hypersphère.