CH. HERMITE

Sur une application de la théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 2 (1885), p. 303-314
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__303_0>

SUR UNE APPLICATION
DE LA THÉORIE
DES
FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES
DE SECONDE ESPÈCE,

Par M. HERMITE.

On doit à Jacobi les développements en séries de sinus et de cosinus des expressions suivantes :

$$\frac{\Theta(x+a)}{\Theta(x)},\ \frac{\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)},\ \frac{\Theta_1(x+a)}{\Theta(x)},\ \frac{\mathrm{H}_1(x+a)}{\Theta(x)},$$

qui se sont offertes dans ses recherches mémorables sur le mouvement de rotation autour d'un point fixe d'un corps qui n'est sollicité par aucune force accélératrice. Ces résultats découverts par le grand géomètre m'ont paru devoir être complétés en considérant le système complet des seize quotients qui ont pour numérateurs

$$\Theta(x+a),\ \mathrm{H}(x+a),\ \Theta_1(x+a),\ \mathrm{H}_1(x+a)$$

et pour dénominateurs

$$\Theta(x),\ \mathrm{H}(x),\ \Theta_1(x),\ \mathrm{H}_1(x).$$

Les quantités qu'on obtient ainsi appartiennent à la catégorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, ayant un seul pôle dans le rectangle des périodes $2\mathrm{K}$, $2i\mathrm{K}$, et elles offrent ce caractère particulier, que l'un des multiplicateurs, celui qui correspond à la période $2\mathrm{K}$, est égal à ± 1.

C'est au point de vue de la théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce que je me placerai dans ce qui va suivre, en me proposant de faire voir comment elle permet de démontrer facilement les formules de Jacobi et celles que j'y ai ajoutées.

I.

Considérons en premier la série

$$\sum \frac{e^{\frac{ni\pi a}{K}}}{\sin \frac{\pi}{2K}(x + 2niK')},$$

où le nombre entier n prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, a étant une constante qui sera représentée par $\alpha + i\alpha'$; je dis qu'elle est convergente, quel que soit x, pourvu que α' soit en valeur absolue inférieur à $2K'$.

En effet, le terme général étant mis sous la forme

$$\frac{2ie^{\frac{ni\pi a}{K}}}{e^{\frac{i\pi}{K}(x+2niK')} - e^{-\frac{i\pi}{K}(x+2niK')}},$$

on pourra, au dénominateur, négliger la première exponentielle ou la seconde, suivant que n croît positivement ou négativement, ce qui donne les quantités

$$-2ie^{\frac{ni\pi}{K}(a+2iK')+\frac{i\pi x}{2K}}, \quad 2ie^{\frac{ni\pi}{K}(a-2iK')-\frac{i\pi x}{2K}}.$$

Écrivons $-n$ au lieu de n dans la seconde et prenons la limite pour n infiniment grand de la racine $n^{\text{ième}}$ des modules, on aura pour résultat, si l'on remplace a par $\alpha + i\alpha'$,

$$e^{-\frac{\pi}{K}(\alpha'+2K')}, \quad e^{\frac{\pi}{K}(\alpha'-2K')}.$$

Ces deux limites seront donc inférieures à l'unité en posant

$$\alpha' + 2K' > 0, \quad \alpha' - 2K' < 0,$$

et la série sera convergente, comme nous l'avons dit, quand la valeur absolue de α' sera moindre que $2K'$.

Soit maintenant

$$\Phi(x) = \sum \frac{e^{\frac{ni\pi a}{K}}}{\sin \frac{\pi}{2K}(x + 2niK')};$$

j'observe que, l'indice n variant de $-\infty$ à $+\infty$, on peut changer n en $n+1$ et écrire

$$\Phi(x) = \sum \frac{e^{\frac{(n+1)i\pi a}{K}}}{\sin \frac{\pi}{2K}[x + 2(n+1)iK']} = e^{\frac{i\pi a}{K}} \sum \frac{e^{\frac{ni\pi a}{K}}}{\sin \frac{\pi}{2K}(x + 2iK' + 2niK')}.$$

De la composition même de la série résulte donc la relation

$$\Phi(x) = e^{\frac{i\pi a}{K}} \Phi(x + 2iK'),$$

ou bien

$$\Phi(x + 2iK') = e^{-\frac{i\pi a}{K}} \Phi(x).$$

On a d'ailleurs immédiatement

$$\Phi(x + 2K) = -\Phi(x);$$

ainsi $\Phi(x)$ est une fonction doublement périodique de seconde espèce aux multiplicateurs -1 et $e^{-\frac{i\pi a}{K}}$; ses pôles s'obtiennent en posant

$$\sin \frac{\pi}{2K}(x + 2niK') = 0,$$

d'où

$$x = 2mK - 2niK',$$

m désignant un entier arbitraire; par conséquent, on n'a à l'intérieur du rectangle des périodes $2K$ et $2iK'$ que le seul pôle $x = 0$, auquel correspond le résidu $\frac{2K}{\pi}$. Les propriétés que nous venons de reconnaître suffisent à la complète détermination de la fonction $\Phi(x)$, et l'on sait construire avec les transcendantes de Jacobi une expression qui les réunisse : c'est la quantité

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(o)\Theta(x+a)}{H(x)\Theta(a)},$$

qui a, en effet, les mêmes multiplicateurs et le même pôle $x=o$ avec le résidu $\frac{2K}{\pi}$; on a, par suite, la relation

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(o)\Theta(x+a)}{H(x)\Theta(a)}=\sum\frac{e^{\frac{ni\pi a}{K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(x+2niK')},$$

et il suffit de permuter x et a pour en conclure l'une des formules de Jacobi, à savoir

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(o)\Theta(x+a)}{\Theta(x)H(a)}=\sum\frac{e^{\frac{ni\pi x}{K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(a+2niK')}.$$

Les autres s'en déduisent de la manière suivante.

Changeons d'abord a en $a+iK'$, nous aurons

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(o)H(x+a)}{\Theta(x)\Theta(a)}e^{-\frac{i\pi x}{2K}}=\sum\frac{e^{\frac{ni\pi x}{K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}[a+(2n+1)iK']},$$

puis, en multipliant par $e^{\frac{i\pi x}{2K}}$,

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(o)H(x+a)}{\Theta(x)\Theta(a)}=\sum\frac{e^{\frac{(2n+1)i\pi x}{2K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}[a+(2n+1)iK']}.$$

Mettons enfin dans ces deux relations $a+K$ au lieu de a, on obtiendra les formules qui restaient à établir

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(o)\Theta_1(x+a)}{\Theta(x)H_1(a)}=\sum\frac{e^{\frac{ni\pi x}{K}}}{\cos\frac{\pi}{2K}(a+2niK')},$$

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(o)H_1(x+a)}{\Theta(x)\Theta_1(a)}=\sum\frac{e^{\frac{(2n+1)i\pi x}{2K}}}{\cos\frac{\pi}{2K}[a+(2n+1)iK']}.$$

Je joindrai immédiatement à ces expressions des quatre quotients contenant $\Theta(x)$ en dénominateur ceux dont le dénominateur est $\Theta_1(x)$, et qui s'en tirent par le changement de x en $x+\mathrm{K}$. Les formules ainsi réunies ont un même caractère analytique essentiellement distinct de celles que nous obtiendrons ensuite; je conviendrai, afin de les écrire de la manière la plus simple, de représenter par les lettres n et m tous les entiers pairs et impairs, tant positifs que négatifs; cela étant, on a le tableau suivant :

$$(1)\qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(x+a)}{\Theta(x)\,\mathrm{H}(a)}=\sum\frac{e^{\frac{ni\pi x}{2\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+ni\mathrm{K}')},$$

$$(2)\qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)\,\Theta(a)}=\sum\frac{e^{\frac{mi\pi x}{2\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+mi\mathrm{K}')},$$

$$(3)\qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta_1(x+a)}{\Theta(x)\,\mathrm{H}_1(a)}=\sum\frac{e^{\frac{ni\pi x}{2\mathrm{K}}}}{\cos\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+ni\mathrm{K}')},$$

$$(4)\qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}_1(x+a)}{\Theta(x)\,\Theta_1(a)}=\sum\frac{e^{\frac{mi\pi x}{2\mathrm{K}}}}{\cos\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+mi\mathrm{K}')},$$

$$(5)\qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta_1(x+a)}{\Theta_1(x)\,\mathrm{H}(a)}=\sum\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}e^{\frac{ni\pi x}{2\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+ni\mathrm{K}')},$$

$$(6)\qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}_1(x+a)}{\Theta_1(x)\,\Theta(a)}=\sum\frac{i^m e^{\frac{mi\pi x}{2\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+mi\mathrm{K}')},$$

$$(7)\qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(x+a)}{\Theta_1(x)\,\mathrm{H}_1(a)}=\sum\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}e^{\frac{ni\pi x}{2\mathrm{K}}}}{\cos\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+ni\mathrm{K}')},$$

$$(8)\qquad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(x+a)}{\Theta_1(x)\,\Theta_1(a)}=\sum\frac{(-i)^m e^{\frac{mi\pi x}{2\mathrm{K}}}}{\cos\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(a+mi\mathrm{K}')}.$$

II.

Nous considérons en second lieu une série d'une forme entièrement différente de la précédente, qui est représentée ainsi :

$$\cot\frac{\pi a}{2\mathrm{K}} + \sum e^{\frac{ni\pi a}{2\mathrm{K}}}\left[\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x + ni\mathrm{K}') + \varepsilon i\right].$$

Dans cette formule, l'entier n parcourt toute la suite des nombres pairs de $-\infty$ à $+\infty$, et la quantité désignée par ε doit être supposée nulle pour $n = 0$ et égale à l'unité positive ou négative, selon que n est lui-même positif ou négatif.

On devra donc, en n'introduisant que les entiers positifs

$$n = 2, 4, 6, \ldots,$$

la décomposer en deux séries partielles et l'écrire ainsi

$$\begin{aligned}\cot\frac{\pi a}{2\mathrm{K}} + \cot\frac{\pi x}{2\mathrm{K}} &+ \sum e^{\frac{ni\pi a}{2\mathrm{K}}}\left[\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x + ni\mathrm{K}') + i\right] \\ &+ \sum e^{-\frac{ni\pi a}{2\mathrm{K}}}\left[\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x - ni\mathrm{K}') - i\right],\end{aligned}$$

ou bien encore, au moyen d'une transformation facile,

$$\cot\frac{\pi a}{2\mathrm{K}} + \cot\frac{\pi x}{2\mathrm{K}} + \sum \frac{e^{\frac{i\pi}{2\mathrm{K}}(na + ni\mathrm{K}' + x)}}{\cos\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x + ni\mathrm{K}')} + \sum \frac{e^{-\frac{i\pi}{2\mathrm{K}}(na - ni\mathrm{K}' + x)}}{\cos\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x - ni\mathrm{K}')},$$

et c'est cette nouvelle forme qui conduit aux conditions de convergence. Remplaçons, en effet, pour de grandes valeurs de n, les deux dénominateurs $\cos\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x + ni\mathrm{K}')$ et $\cos\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x - ni\mathrm{K}')$ par $\frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{2\mathrm{K}}(x + ni\mathrm{K}')}$ et $\frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x - ni\mathrm{K}')}$, les termes généraux deviennent

$$2\,e^{\frac{i\pi}{2\mathrm{K}}(na + 2ni\mathrm{K}' + 2x)}, \quad 2\,e^{-\frac{i\pi}{2\mathrm{K}}(na - 2ni\mathrm{K}' + 2x)}.$$

Cela étant, si l'on fait encore $a = \alpha + i\alpha'$, on obtient pour la limite de la racine $n^{\text{ième}}$ de leurs modules, en supposant n infini, les quantités

$$e^{-\frac{\pi}{2K}(\alpha'+2K')}, \quad e^{\frac{\pi}{2K}(\alpha'-2K')}$$

et, par conséquent, les conditions

$$\alpha'+2K'>0, \quad \alpha'-2K'<0.$$

Notre seconde série est donc, comme la première, convergente, pour toute valeur de x, lorsque le coefficient de i dans la constante a est en valeur absolue inférieur à $2K'$. J'ajoute qu'elle définit encore une fonction doublement périodique de seconde espèce, et qu'en posant

$$\Pi(x) = \cot\frac{\pi a}{2K} + \sum e^{\frac{ni\pi a}{2K}}\left[\cot\frac{\pi}{2K}(x+niK') + \varepsilon i\right],$$

on a les relations

$$\Pi(x+2K) = \Pi(x), \quad \Pi(x+2iK') = e^{-\frac{i\pi a}{K}}\Pi(x).$$

La première est évidente et la seconde résulte de l'expression du produit $e^{\frac{i\pi a}{K}}\Pi(x+2iK')$, à savoir

$$e^{\frac{i\pi a}{K}}\Pi(x+2iK') = e^{\frac{i\pi a}{K}}\cot\frac{\pi a}{2K} + e^{\frac{i\pi a}{K}}\sum e^{\frac{ni\pi a}{2K}}\left[\cot\frac{\pi}{2K}(x+2iK'+niK') + \varepsilon i\right].$$

On a, en effet,

$$e^{\frac{i\pi a}{K}}\cot\frac{\pi a}{2K} = \cot\frac{\pi a}{2K} + i\left(e^{\frac{i\pi a}{K}} + 1\right),$$

et si nous changeons, comme il est permis, n en $n-2$ dans le terme général, il viendra

$$e^{\frac{i\pi a}{K}}\Pi(x+2iK') = \cot\frac{\pi a}{2K} + i\left(e^{\frac{i\pi a}{K}} + 1\right) + \sum e^{\frac{ni\pi a}{2K}}\left[\cot\frac{\pi}{2K}(x+niK') + \varepsilon i\right];$$

mais, sous cette forme et à l'égard du nouveau nombre n, une modification est apportée à la signification de ε. On doit, en effet, prendre maintenant $\varepsilon = 1$ pour $n = 4, 6, 8$, puis $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = -1$ pour $n = 2$, et $n = 0, -2, -4, \ldots$. Or on voit qu'en ajoutant aux termes correspondant à $n = 2$ et $n = 0$ d'une part $ie^{\frac{i\pi a}{K}}$, de l'autre i, et, par conséquent, en faisant entrer dans la somme la quantité $i\left(e^{\frac{i\pi a}{K}} + 1\right)$, on retrouve pour ε précisément la signification qui lui a été donnée dans la fonction $\Pi(x)$. La relation à établir et, par conséquent, le caractère analytique de fonction doublement périodique de seconde espèce résulte donc encore de la composition même de la série considérée. Enfin, si l'on remarque que, dans le rectangle des périodes, il n'existe qu'un seul pôle $x = 0$, auquel correspond pour résidu $\frac{2K}{\pi}$, on obtient l'expression de $\Pi(x)$ au moyen des fonctions de Jacobi sous la forme $\frac{2K}{\pi} \frac{H'(0)H(x+a)}{H(x)H(a)}$.

En prenant x et a, on a, par suite,

$$\frac{2K}{\pi} \frac{H'(0)H(x+a)}{H(x)H(a)} = \cot\frac{\pi x}{2K} + \sum e^{\frac{ni\pi x}{2K}} \left[\cot\frac{\pi}{2K}(a + niK') + \varepsilon i\right];$$

c'est le premier exemple et le type du second groupe de huit formules auxquelles nous allons parvenir.

Changeons d'abord a en $a + iK'$, on obtient, après avoir multiplié par $e^{\frac{i\pi x}{2K}}$ et en désignant par m l'entier impair $n + 1$,

$$\frac{2K}{\pi} \frac{H'(0)\Theta(x+a)}{H(x)\Theta(a)} = e^{\frac{i\pi x}{2K}} \cot\frac{\pi x}{2K} + \sum e^{\frac{mi\pi x}{2K}} \left[\cot\frac{\pi}{2K}(a + miK') + \varepsilon i\right].$$

Il suffit ensuite d'employer la relation

$$e^{\frac{i\pi x}{2K}} \cot\frac{\pi x}{2K} = \frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2K}} + ie^{\frac{i\pi x}{2K}},$$

pour avoir en définitive et en faisant entier le terme $ie^{\frac{i\pi x}{2K}}$ sous le signe Σ,

$$\frac{2K}{\pi} \frac{H'(0)\Theta(x+a)}{H(x)\Theta(a)} = \frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2K}} + \sum e^{\frac{mi\pi x}{2K}} \left[\cot\frac{\pi}{2K}(a + miK') + \varepsilon i\right].$$

Le nombre m représente, dans cette formule, tous les entiers impairs, et ε doit être pris égal à $+1$ ou -1, suivant que m est positif ou négatif, sans jamais passer par zéro. En y changeant, ainsi que dans la précédente, a en $a+K$, on obtient quatre relations qui, ensuite, en donnent quatre autres, lorsqu'on y remplace x par $x+K$. C'est, par conséquent, le système complet des huit formules qu'il s'agissait d'obtenir et que je groupe dans le Tableau suivant :

$$(9)\quad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,H(x+a)}{H(x)\,H(a)} = \cot\frac{\pi x}{2K} + \sum e^{\frac{ni\pi x}{2K}}\left[\cot\frac{\pi}{2K}(a+niK')+\varepsilon i\right],$$

$$(10)\quad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,\Theta(x+a)}{H(x)\,\Theta(a)} = \operatorname{cos\acute{e}c}\frac{\pi x}{2K} + \sum e^{\frac{mi\pi x}{2K}}\left[\cot\frac{\pi}{2K}(a+miK')+\varepsilon i\right],$$

$$(11)\quad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,H_1(x+a)}{H(x)\,H_1(a)} = \cot\frac{\pi x}{2K} - \sum e^{\frac{ni\pi x}{2K}}\left[\operatorname{tang}\frac{\pi}{2K}(a+niK')-\varepsilon i\right],$$

$$(12)\quad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,\Theta_1(x+a)}{H(x)\,\Theta_1(a)} = \operatorname{cos\acute{e}c}\frac{\pi x}{2K} - \sum e^{\frac{mi\pi x}{2K}}\left[\operatorname{tang}\frac{\pi}{2K}(a+miK')-\varepsilon i\right],$$

$$(13)\quad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,H_1(x+a)}{H_1(x)\,H(a)} = -\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2K} + \sum (-1)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{ni\pi x}{2K}}\left[\cot\frac{\pi}{2K}(a+niK')+\varepsilon i\right],$$

$$(14)\quad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,\Theta_1(x+a)}{H_1(x)\,\Theta(a)} = \operatorname{s\acute{e}c}\frac{\pi x}{2K} + \sum i^m e^{\frac{mi\pi x}{2K}}\left[\cot\frac{\pi}{2K}(a+miK')+\varepsilon i\right],$$

$$(15)\quad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,H_1(x+a)}{H_1(x)\,H_1(a)} = -\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2K} + \sum (-1)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{ni\pi x}{2K}}\left[\operatorname{tang}\frac{\pi}{2K}(a+niK')-\varepsilon i\right],$$

$$(16)\quad \frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\,\Theta(x+a)}{H_1(x)\,\Theta_1(a)} = \operatorname{s\acute{e}c}\frac{\pi x}{2K} - \sum i^m e^{\frac{mi\pi x}{2K}}\left[\operatorname{tang}\frac{\pi}{2K}(a+miK')-\varepsilon i\right].$$

III.

Depuis longtemps, M. Kronecker a eu l'idée de développer, suivant les puissances de q, les expressions de Jacobi, et, en 1877, l'illustre géomètre m'a donné communication des résultats extrêmement remarquables auxquels il s'est trouvé ainsi amené; en raison de leur intérêt, j'indiquerai succinctement comment on y parvient. Il est indispensable pour cela de séparer, dans les séries dont nous avons donné le Tableau, les termes qui correspondent aux valeurs positives de ceux qui correspondent aux valeurs négatives des entiers désignés par m et n. En convenant donc qu'on supposera désormais

$$m = 1, 3, 5, \ldots; \quad n = 2, 4, 6, \ldots,$$

il suffira, pour effectuer tous les développements suivant les puissances de q, d'employer les formules suivantes, où s est une constante positive, qu'on prendra tour à tour égale à m ou à n :

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2K}(a + siK')} = +2i \sum q^{\frac{ms}{2}} e^{-\frac{mi\pi a}{2K}},$$

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2K}(a - siK')} = -2i \sum q^{\frac{ms}{2}} e^{\frac{mi\pi a}{2K}},$$

$$m = 1, 3, 5, \ldots;$$

$$\cot \frac{\pi}{2K}(a + siK') + i = -2i \sum q^{\frac{ns}{2}} e^{\frac{ni\pi a}{2K}},$$

$$\cot \frac{\pi}{2K}(a - siK') - i = +2i \sum q^{\frac{ns}{2}} e^{-\frac{ni\pi a}{2K}},$$

$$n = 2, 4, 6, \ldots.$$

Cela étant, si l'on convient encore de désigner par m' et n', comme on l'a fait plus haut pour m et n, tous les entiers impairs et tous les entiers pairs, positifs, on aura les seize formules suivantes :

$$(1) \quad \frac{2K}{\pi} \frac{H'(0)\, \Theta(x+a)}{\Theta(x)\, H(a)} = \operatorname{coséc} \frac{\pi a}{2K} + 4 \sum q^{\frac{mn}{2}} \sin \frac{\pi}{2K}(ma - nx),$$

$$(2) \quad \frac{2K}{\pi} \frac{H'(0)\, H(x+a)}{\Theta(x)\, \Theta(a)} = 4 \sum q^{\frac{mm'}{2}} \sin \frac{\pi}{2K}(ma - m'x),$$

$$(3) \quad \frac{2K}{\pi} \frac{H'(0)\, \Theta_1(x+a)}{\Theta(x)\, H_1(a)} = \operatorname{séc} \frac{\pi a}{2K} + 4 \sum (-1)^{\frac{m-1}{2}} q^{\frac{mn}{2}} \cos \frac{\pi}{2K}(ma - nx),$$

$$(4) \quad \frac{2K}{\pi} \frac{H'(0)\, H_1(x+a)}{\Theta(x)\, \Theta_1(a)} = +4 \sum (-1)^{\frac{m-1}{2}} q^{\frac{mm'}{2}} \cos \frac{\pi}{2K}(ma - m'x);$$

$$(5)\qquad \frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\,\Theta_1(x+a)}{\Theta_1(x)\,H(a)} = \operatorname{coséc}\frac{\pi a}{2K} \qquad + 4\sum(-1)^{\frac{n}{2}} q^{\frac{mn}{2}} \sin\frac{\pi}{2K}(ma-nx),$$

$$(6)\qquad \frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\,H_1(x+a)}{\Theta_1(x)\,\Theta(a)} = \qquad 4\sum(-1)^{\frac{m'-1}{2}} q^{\frac{mm'}{2}} \cos\frac{\pi}{2K}(ma-m'x),$$

$$(7)\qquad \frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\,\Theta(x+a)}{\Theta_1(x)\,H_1(a)} = \operatorname{séc}\frac{\pi a}{2K} \qquad + 4\sum(-1)^{\frac{m+n-1}{2}} q^{\frac{mn}{2}} \cos\frac{\pi}{2K}(ma-nx),$$

$$(8)\qquad \frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\,H(x+a)}{\Theta_1(x)\,\Theta_1(a)} = \qquad 4\sum(-1)^{\frac{m+m'-2}{2}} q^{\frac{mm'}{2}} \sin\frac{\pi}{2K}(ma-m'x);$$

$$(9)\qquad \frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\,H(x+a)}{H(x)\,H(a)} = \cot\frac{\pi x}{2K} + \cot\frac{\pi a}{2K} + 4\sum q^{\frac{nn'}{2}} \sin\frac{\pi}{2K}(na+n'x),$$

$$(10)\qquad \frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\,\Theta(x+a)}{H(x)\,\Theta(a)} = \operatorname{coséc}\frac{\pi x}{2K} \qquad + 4\sum q^{\frac{mn}{2}} \sin\frac{\pi}{2K}(na+mx),$$

$$(11)\qquad \frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\,H_1(x+a)}{H(x)\,H_1(a)} = \cot\frac{\pi x}{2K} - \operatorname{tang}\frac{\pi a}{2K} + 4\sum(-1)^{\frac{n}{2}} q^{\frac{nn'}{2}} \sin\frac{\pi}{2K}(na+n'x),$$

$$(12)\qquad \frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\,\Theta_1(x+a)}{H(x)\,\Theta_1(a)} = \operatorname{coséc}\frac{\pi x}{2K} \qquad + 4\sum(-1)^{\frac{n}{2}} q^{\frac{mn}{2}} \sin\frac{\pi}{2K}(na+mx);$$

$$(13)\qquad \frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\,H_1(x+a)}{H_1(x)\,H(a)} = -\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2K} + \cot\frac{\pi a}{2K} + 4\sum(-1)^{\frac{n'}{2}} q^{\frac{nn'}{1}} \sin\frac{\pi}{2K}(na+n'x),$$

$$(14)\qquad \frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\,\Theta_1(x+a)}{H_1(x)\,\Theta(a)} = \operatorname{séc}\frac{\pi x}{2K} \qquad + 4\sum(-1)^{\frac{m-1}{2}} q^{\frac{mn}{2}} \cos\frac{\pi}{2K}(na+mx),$$

$$(15)\qquad \frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\,H(x+a)}{H_1(x)\,H_1(a)} = \operatorname{tang}\frac{\pi x}{2K} - \operatorname{tang}\frac{\pi a}{2K} + 4\sum(-1)^{\frac{n+n'-2}{2}} q^{\frac{nn'}{2}} \sin\frac{\pi}{2K}(na+n'x),$$

$$(16)\qquad \frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\,\Theta(x+a)}{H_1(x)\,\Theta_1(a)} = \operatorname{séc}\frac{\pi x}{2K} \qquad + 4\sum(-1)^{\frac{m+n-1}{2}} q^{\frac{mn}{2}} \cos\frac{\pi}{2K}(na+mx).$$

On remarquera que dans les huit premières relations figurent, sous les signes trigonométriques, des différences d'arguments, tandis que les suivantes contiennent toutes des sommes. Les développements, suivant les puissances de q, conservent donc trace de la différence analytique signalée précédemment entre les fonctions du premier et celles du second groupe [1].

---

[1] Un Travail important de M. Scheibner, qui a paru dans les Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Saxe, en 1883, sous le titre : *Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form,* contient dans une note les développements en séries trigonométriques des mêmes fonctions que j'ai considérées. Je m'empresse de signaler ces résultats, dont je n'ai eu que récemment connaissance, en remarquant que les formules du savant auteur sont présentées sous une forme semblable à celle qu'a adoptée Jacobi, dans ses Recherches sur la rotation, et entièrement différente de la mienne.