LOUIS RAFFY

Sur les quadratures algébriques et logarithmiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 2 (1885), p. 185-206
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__185_0>

SUR LES

QUADRATURES ALGÉBRIQUES

ET

LOGARITHMIQUES,

PAR M. L. RAFFY,

MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

Certaines différentielles algébriques s'intègrent algébriquement; d'autres s'intègrent par un seul logarithme. Ce sont là deux cas importants de réduction des intégrales abéliennes.

Liouville a complètement résolu le problème de l'intégration algébrique. Dans ses premières recherches (1), il le ramène à cet autre : *Étant donnée une équation différentielle linéaire d'ordre quelconque, qui a pour coefficients et pour second membre des polynômes entiers, reconnaître si elle admet pour intégrale particulière une fonction rationnelle.* Mais c'est là encore une question délicate, et Poisson conservait des doutes (2) sur l'efficacité des principes qui permettaient de la traiter dans les cas les plus simples. Liouville reprit le problème et le réduisit à reconnaître si une équation linéaire admet pour intégrale particulière un *polynôme entier*. Ainsi simplifié, le problème ne dépend plus que de la résolution d'un système d'équations du premier degré.

Ces résultats ont été publiés (3) sans démonstration et paraissent

(1) *Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique*, deux Mémoires (*Journal de l'École Polytechnique*, XXII^e Cahier; *Mémoires des Savants étrangers*, t. V).

(2) *Rapport* sur les précédents Mémoires (*Journal de Crelle*, t. X).

(3) *Nouvelles recherches sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique* (*Comptes rendus*, t. II; *Journal de Liouville*, t. III).

avoir échappé à quelques auteurs. Je commence par les établir; puis, par des considérations analogues à celles qui y conduisent, je montre que, *pour savoir si une différentielle algébrique donnée s'intègre par un seul logarithme, il suffit de connaître un certain entier*. On n'a plus alors qu'à résoudre un système d'équations du premier degré. En terminant, j'applique ce théorème à une intégration qui a occupé Abel (1) et, plus récemment, MM. Tchebichef (2) et Zolotareff (3).

I.

1. Considérons une équation algébrique irréductible

$$F(x,y) = X_0 y^m + X_1 y^{m-1} + \ldots + X_{m-1} y + X_m = 0,$$

où $X_0, X_1, \ldots, X_m$ représentent des polynômes entiers en x. On sait que toute fonction uniforme t du point (x, y), qui n'a d'autres points singuliers que des pôles et des points critiques algébriques, est égale à une fonction rationnelle de x et y. Je reprends rapidement la démonstration (4) de ce théorème, parce qu'elle met en œuvre les éléments même que nous rencontrerons dans la suite.

La fonction t est une fonction algébrique de x. Désignons par t_1, $t_2, \ldots, t_m$ ses m déterminations, qui correspondent aux m valeurs y_1, $y_2, \ldots, y_m$ que prend y pour chaque valeur de x, et considérons les m expressions

$$t_1 y_1^\alpha + t_2 y_2^\alpha + \ldots + t_m y_m^\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Ce sont des fonctions symétriques de $y_1, y_2, \ldots y_m$. Ce sont donc des fonctions rationnelles de x. Soit P leur dénominateur commun; nous pouvons poser

$$(1) \qquad t_1 y_1^\alpha + t_2 y_2^\alpha + \ldots + t_m y_m^\alpha = \frac{P_\alpha}{P} \quad (\alpha = 0, 1, 2, m-1),$$

---

(1) *Sur l'intégration de la formule différentielle* $\frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}}, \ldots$, et *Théorie des transcendantes elliptiques*, problème III.

(2) *Journal de Liouville*, 1864 et 1874.

(3) *Théorie des nombres complexes*, Saint-Pétersbourg, 1874.

(4) Briot, *Théorie des fonctions abéliennes*, note B.

les lettres $P, P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ représentant des polynômes entiers en x. Du système des m équations (1), tirons l'inconnue t_1 par la méthode des multiplicateurs indéterminés. Multiplions la première de ces équations par A_{m-1}, la seconde par $A_{m-2}, \ldots$, l'avant-dernière par A_1, la dernière par 1, et ajoutons; si nous égalons à zéro les coefficients de $t_2, t_3, \ldots, t_m$, nous obtenons les $m-1$ relations

$$(2)\quad y_\beta^{m-1} + A_1 y_\beta^{m-2} + A_2 y_\beta^{m-3} + \ldots + A_{m-2} y_\beta + A_{m-1} = 0 \quad (\beta = 2, 3, \ldots, m)$$

entre les indéterminées A, et il reste

$$(3)\quad t_1(y_1^{m-1} + A_1 y_1^{m-2} + \ldots + A_{m-1}) = \frac{P_{m-1} + A_1 P_{m-2} + \ldots, + A_{m-1} P_0}{P}.$$

En vertu des relations (2), les multiplicateurs $1, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ sont proportionnels aux coefficients de l'équation

$$\frac{F(x,y)}{y-y_1} = X_0 y^{m-1} + (X_0 y_1 + X_1) y^{m-2} + \ldots + (X_0 y_1^{m-1} + \ldots + X_{m-1}) = 0,$$

qui a pour racines $y_2, y_3, \ldots, y_m$. On a donc

$$A_1 = \frac{X_0 y_1 + X_1}{X_0},$$

$$A_2 = \frac{X_0 y_1^2 + X_1 y + X_2}{X_0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_{m-1} = \frac{X_0 y_1^{m-1} + X_1 y_1^{m-2} + \ldots + X_{m-1}}{X_0}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (3), on en tire

$$t_1 = \frac{1}{P}\,\frac{X_0 P_{m-1} + (X_0 y_1 + X_1) P_{m-2} + \ldots + (X_0 y_1^{m-1} + \ldots + X_{m-1}) P_0}{m X_0 y_1^{m-1} + (m-1) X_1 y_1^{m-2} + \ldots + X_{m-1}}.$$

Remarquons qu'au numérateur de t_1 figure un polynôme entier en y_1, du degré $m-1$, dont le terme en y_1^{m-1} est divisible par X_0, et, au dénominateur, la dérivée partielle de $F(x, y_1)$ par rapport à y_1. Comme y_1 désigne l'une quelconque des valeurs de y et t_1 la valeur correspondante de t, nous pouvons supprimer les indices et écrire

$$(4) \qquad t = \frac{1}{P}\,\frac{P_0 X_0 y^{m-1} + Q_1 y^{m-2} + \ldots + Q_{m-1}}{F'_y(x, y)}.$$

Les coefficients Q seront des polynômes entiers en x, non divisibles en général par X_0.

2. Nous allons transformer l'expression de t en remplaçant l'inverse de F'_y par un polynôme entier du degré $m - 1$ en y. Considérons le déterminant

$$(5) \qquad X_0\Delta = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & \ldots & X_m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & X_0 & X_1 & \ldots & X_{m-1} & X_m & \ldots & 0 \\ . & .. & .. & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & X_m \\ mX_0 & (m-1)X_1 & (m-2)X_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & mX_0 & (m-1)X_1 & \ldots & X_{m-1} & 0 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & . & . & \ldots & X_{m-1} \end{vmatrix},$$

qui, égalé à zéro, exprime que $F(x, y)$ et $F'_y(x, y)$ ont une racine commune en y. On sait qu'il est égal, à un facteur numérique près, au produit de X_0 par le discriminant

$$F'_{y_1}(x, y_1) F'_{y_2}(x, y_2) \ldots F'_{y_m}(x, y_m)$$

de l'équation $F(x, y) = 0$, considérée comme équation en y seulement. Nous pouvons donc prendre Δ pour ce discriminant.

D'autre part, on ne changera pas la valeur du déterminant $X_0\Delta$ si l'on ajoute aux éléments de la dernière colonne ceux de l'avant-dernière multipliés par y, ceux de la précédente multipliés par y^2, ..., enfin ceux de la première multipliés par y^{2m-2}, ce qui revient à remplacer cette colonne par

$$y^{m-2}F,\ y^{m-3}F,\ \ldots,\ yF,\ F,\ y^{m-1}F'_y,\ y^{m-2}F'_y,\ \ldots,\ yF'_y,\ F'_y.$$

Alors le déterminant, développé suivant les éléments de cette dernière colonne, prend la forme

$$AF + BF'_y.$$

En tenant compte de l'hypothèse $F = 0$ et divisant par X_0 les deux membres de l'identité (5), il vient simplement

$$(6) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & X_1 & X_2 & \cdots & X_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & X_0 & X_1 & \cdots & X_{m-1} & X_m & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & X_{m-1} & 0 \\ m & (m-1)X_1 & (m-2)X_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & y^{m-1} \\ 0 & mX_0 & (m-1)X_1 & \cdots & X_{m-1} & 0 & \cdots & 0 & y^{m-2} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & 2X_{m-2} & 1 \end{vmatrix} F'_y.$$

On voit que le déterminant qui multiplie F'_y est un polynôme entier en y, du degré $m-1$, et que son terme en y^{m-1} est divisible par X_0, car il a pour coefficient le déterminant qui se déduit du précédent en supprimant : 1° la ligne et la colonne qui se croisent sur l'élément y^{m-1}; 2° la première ligne et la première colonne. On pourra donc écrire

$$(7) \qquad \Delta = (R_0 X_0 y^{m-1} + R_1 y^{m-2} + \ldots + R_{m-1}) F'_y,$$

les polynômes $R_0, R_1, \ldots, R_{m-1}$ n'étant pas en général divisibles par X_0.

L'équation (7) donne

$$\frac{1}{F'_y} = \frac{R_0 X_0 y^{m-1} + R_1 y^{m-2} + \ldots + R_{m-1}}{\Delta}.$$

Portant cette valeur dans la formule (4), il vient

$$t = \frac{(P_0 X_0 y^{m-1} + Q_1 y^{m-2} + \ldots + Q_{m-1})(R_0 X_0 y^{m-1} + R_1 y^{m-2} + \ldots + R_{m-1})}{P\Delta}.$$

Le numérateur de t est un polynôme entier du degré $2m-2$ en y. Son terme en y^{2m-2} étant divisible par X_0^2 et le suivant par X_0, on pourra, au moyen de l'équation

$$X_0 y^m + X_1 y^{m-1} + \ldots + X_m = 0,$$

l'abaisser au degré $2m-4$ sans que ses coefficients cessent d'être entiers par rapport à X_0; mais à chacune des $m-3$ substitutions qu'il faudra encore opérer pour abaisser ce polynôme du degré $2m-4$ au degré $m-1$, le coefficient X_0 s'introduira comme dénominateur, en sorte qu'on aura finalement

$$t = \frac{C_0 y^{m-1} + C_1 y^{m-2} + \ldots + C_{m-1}}{P X_0^{m-3} \Delta}, \tag{8}$$

les C étant des polynômes entiers en x, non divisibles en général par X_0.

Telle est l'expression de t que nous avions en vue d'obtenir.

3. *Remarque.* — La détermination de l'exposant, que nous venons de trouver égal à $m-3$, nous servira dans la troisième partie de cette étude. Elle tombe en défaut si m est égal à 2; mais alors le numérateur de t est du second degré. Son terme en y^2 est divisible par X_0 (même par X_0^2). On peut donc l'abaisser au premier degré, sans que X_0 s'introduise en dénominateur. Il vient alors

$$t = \frac{C_0 y + C_1}{P\Delta}.$$

II.

4. Nous pouvons maintenant aborder le problème suivant :

Étant donnée l'équation algébrique irréductible

$$F(x, y) = X_0 y^m + X_1 y^{m-1} + \ldots + X_{m-1} y + X_m = 0,$$

où $X_0, X_1, \ldots, X_m$ sont des polynômes entiers en x, on demande si l'intégrale

$$z = \int y\, dx$$

est ou n'est pas une fonction algébrique de x.

Voici comment Liouville résout la question.

Il résulte des travaux d'Abel que, si l'intégrale z est algébrique, elle est égale à une fonction rationnelle de x et y. C'est une fonction de la nature des fonctions t. Elle est donc aussi égale à un polynôme entier en y, du degré $m-1$, ayant pour coefficients des fonctions rationnelles de x. Nous poserons

$$z = \xi_0 + \xi_1 y + \xi_2 y^2 + \ldots + \xi_{m-1} y^{m-1}. \tag{9}$$

Il s'agit de déterminer les fonctions ξ de manière que $\frac{dz}{dx}$ soit égal à y, ou de reconnaître l'impossibilité de cette détermination.

Différentions l'expression de z :

$$(10)\quad \begin{cases} y = \dfrac{d\xi_0}{dx} + y\dfrac{d\xi_1}{dx} + y^2\dfrac{d\xi_2}{dx} + \ldots + y^{m-1}\dfrac{d\xi_{m-1}}{dx} \\ \qquad + [\xi_1 + 2\xi_2 y + \ldots + (m-1)\xi_{m-1}y^{m-2}]\dfrac{dy}{dx}. \end{cases}$$

Multipliant les deux membres par y^α, on peut écrire

$$(11)\quad \begin{cases} y^{\alpha+1} = y^\alpha\dfrac{d\xi_0}{dx} + y^{\alpha+1}\dfrac{d\xi_1}{dx} + y^{\alpha+2}\dfrac{d\xi_2}{dx} + \ldots + y^{\alpha+m-1}\dfrac{d\xi_{m-1}}{dx} \\ \qquad + \dfrac{\xi_1}{\alpha+1}\dfrac{d(y^{\alpha+1})}{dx} + \dfrac{2\xi_2}{\alpha+2}\dfrac{d(y^{\alpha+2})}{dx} + \ldots + \dfrac{(m-1)\xi_{m-1}}{\alpha+m-1}\dfrac{d(y^{\alpha+m-1})}{dx}. \end{cases}$$

Attribuons successivement à y les m valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_m$ fournies par l'équation $F(x, y) = 0$, et ajoutons membre à membre les m égalités ainsi déduites. En posant

$$S_k = y_1^k + y_2^k + \ldots + y_m^k,$$

nous trouverons

$$(12)\quad \begin{cases} S_{\alpha+1} = S_\alpha\dfrac{d\xi_0}{dx} + S_{\alpha+1}\dfrac{d\xi_1}{dx} + S_{\alpha+2}\dfrac{d\xi_2}{dx} + \ldots + S_{\alpha+m-1}\dfrac{d\xi_{m-1}}{dx} \\ \qquad + \dfrac{\xi_1}{\alpha+1}\dfrac{dS_{\alpha+1}}{dx} + \dfrac{2\xi_2}{\alpha+2}\dfrac{dS_{\alpha+2}}{dx} + \ldots + \dfrac{(m-1)\xi_{m-1}}{\alpha+m-1}\dfrac{dS_{\alpha+m-1}}{dx}. \end{cases}$$

Faisons successivement α égal à $0, 1, 2, \ldots, m-1$ dans cette formule. Nous obtenons un système de m équations différentielles linéaires et du premier ordre par rapport aux fonctions inconnues ξ. Les coefficients qui y figurent sont les sommes S_k et leurs dérivées $\frac{dS_k}{dx}$. La théorie des fonctions symétriques permet de les exprimer au moyen des coefficients X de l'équation $F(x, y) = 0$ et de leurs dérivées $\frac{dX}{dx}$.

Remarquons que la première équation du système (12) n'est autre que

$$S_1 = \frac{d}{dx}\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1}\xi_\alpha S_\alpha.$$

On aura donc

$$(13) \qquad \int S_1\,dx = m\xi_0 + \xi_1 S_1 + \xi_2 S_2 + \ldots + \xi_{m-1} S_{m-1},$$

en sorte que la fonction ξ_0 sera connue par une quadrature quand on connaîtra les autres fonctions ξ. Une première condition de possibilité du problème sera donc que la fraction rationnelle

$$S_1 = -\frac{X_1}{X_0}$$

ait son intégrale algébrique. C'est ce que l'on reconnaîtra facilement.

On portera la valeur de $\frac{d\xi_0}{dx}$ fournie par la première équation dans les suivantes, et, en résolvant le système ainsi réduit, on aura, pour les $m-1$ dérivées $\frac{d\xi_1}{dx}, \ldots, \frac{d\xi_{m-1}}{dx}$, des expressions linéaires par rapport aux fonctions $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$. On pourra donc former par le procédé connu une équation différentielle linéaire d'ordre $m-1$ pour chacune de ces fonctions et appliquer la méthode des coefficients indéterminés, si l'on connaît le dénominateur des fractions cherchées.

5. Ce dénominateur commun des fonctions ξ peut s'obtenir de la manière suivante.

Supposons d'abord que le coefficient X_0 soit constant. Alors y reste fini pour toutes les valeurs finies de x. Il en est de même de l'intégrale z. Les fonctions rationnelles $\frac{P_\alpha}{P}$, formées ici avec z et y comme précédemment avec t et y, restent finies pour toutes les valeurs finies de x. Ce sont des polynômes entiers. Ainsi P se réduit, comme X_0, à une constante, et l'expression générale de t, donnée par l'équation (8), devient

$$z = \frac{C_0}{\Delta} + \frac{C_1}{\Delta}y + \frac{C_2}{\Delta}y^2 + \ldots + \frac{C_{m-1}}{\Delta}y^{m-1}.$$

On voit que, dans le cas présent, les fonctions $\xi_\alpha = \frac{C_\alpha}{\Delta}$ ont pour dénominateur commun le discriminant Δ.

Supposons maintenant que X_0 dépende de x. Ce cas se ramène au précédent. Posons, en effet, $y = \frac{y'}{T}$, T étant un polynôme déterminé de manière que, dans l'équation entre y' et x, le coefficient de y'^m soit indépendant de x. Ce sera d'ailleurs X_0 lui-même ou un diviseur de X_0. Si l'on a

$$T = T_1 T_2^2 T_3^3 \ldots T_n^n,$$

l'équation $T_1 T_2 T_3 \ldots T_n = 0$ n'ayant que des racines simples, le plus grand commun diviseur de T et de sa dérivée $\frac{dT}{dx}$ sera

$$\theta = T_2 T_3^2 \ldots T_n^{n-1}.$$

Or les seules valeurs finies de x qui puissent rendre infinie l'intégrale

$$z = \int y\,dx = \int \frac{y'}{T}\,dx$$

sont les racines multiples de T. Soit x_0 l'une d'elles, et soit p son ordre de multiplicité. Pour $x = x_0$, les diverses intégrales

$$z_\alpha = \int \frac{y'_\alpha}{T}\,dx$$

seront ou finies ou infiniment grandes d'un ordre au plus égal à celui de $\frac{1}{(x-x_0)^{p-1}}$. Donc les fonctions rationnelles $\frac{P_\alpha}{P}$ auront pour dénominateur commun, soit θ lui-même, soit un diviseur de θ. L'expression générale de t, donnée par l'équation (8), se réduit alors à

$$z = \frac{C_0}{\theta\Delta'} + \frac{C_1}{\theta\Delta'}y' + \frac{C_2}{\theta\Delta'}y'^2 + \ldots + \frac{C_{m-1}}{\theta\Delta'}y'^{m-1},$$

en désignant par Δ' le discriminant de l'équation qui lie y' à x. Par conséquent, on pourra prendre pour dénominateur des fonctions ξ le produit $\theta\Delta'$.

6. *Remarque*. — Outre les résultats qui précèdent, Liouville indique aussi qu'on serait encore ramené à chercher des polynômes entiers (quand X_0 est constant) si l'on prenait pour inconnues, soit les m fonctions

(14) $\rho_{\alpha+1} = \xi_0 S_\alpha + \xi_1 S_{\alpha+1} + \ldots + \xi_{m-1} S_{\alpha+m-1} \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, m-1),$

soit les $m-1$ fonctions

$$(15) \qquad \sigma_{\alpha+1} = \frac{\xi_0}{\alpha}\frac{dS_\alpha}{dx} + \frac{\xi_1}{\alpha+1}\frac{dS_{\alpha+1}}{dx} + \ldots + \frac{\xi_{m-1}}{\alpha+m-1}\frac{dS_{\alpha+m-1}}{dx}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, m-1).$$

En effet, $\rho_{\alpha+1}$ n'est pas autre chose que

$$z_1 y_1^\alpha + z_2 y_2^\alpha + \ldots + z_m y_m^\alpha = \frac{P_\alpha}{P},$$

et nous avons vu que les fractions $\frac{P_\alpha}{P}$ se réduisent à des polynômes quand X_0 est constant et ont pour dénominateur θ si X_0 dépend de x.

Quant aux fonctions σ, on a identiquement, d'après la formule (12),

$$S_{\alpha+1} = \frac{d\rho_{\alpha+1}}{dx} - \alpha\sigma_{\alpha+1} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots m-1).$$

Ainsi les fonctions σ dépendent des fonctions ρ, dont la détermination revient à celle de polynômes entiers. Une fois les fonctions ρ connues, les m équations (14), où $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ entrent linéairement et qui ont pour déterminant Δ (ou Δ') donneront les valeurs de ces fonctions.

Pour déduire de la détermination des inconnues σ celle des fonctions ξ, il suffirait d'adjoindre l'équation (13) aux $m-1$ équations (15).

7. *Exemple.* — Nous allons appliquer la méthode de Liouville à un exemple choisi de manière à permettre une vérification immédiate.

Soit à intégrer la fonction y définie par l'équation

$$y^3 - 3y + 2x = 0.$$

L'intégrale cherchée sera de la forme

$$z = \int y\,dx = \xi_0 + \xi_1 y + \xi_2 y^2.$$

Si l'on calcule les sommes S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, on trouve

$$S_0 = 3, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 6, \quad S_3 = -6x, \quad S_4 = 18.$$

Par suite, le système d'équations différentielles (12), que doivent vérifier les fonctions ξ, devient

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx}(\xi_0 + 2\xi_2), \\ 3 &= 3\frac{d\xi_1}{dx} - 3x\frac{d\xi_2}{dx} - 2\xi_2, \\ -3x &= 3\frac{d\xi_0}{dx} - 3x\frac{d\xi_1}{dx} + 9\frac{d\xi_2}{dx} - \xi_1. \end{aligned}$$

Portant la valeur de $\frac{d\xi_0}{dx}$ de la première équation dans la troisième et résolvant le système que forment alors les deux dernières, on trouve

$$(\xi) \qquad \left\{ \begin{aligned} 3(1-x^2)\frac{d\xi_1}{dx} &= x\xi_1 + 2\xi_2 + 3(1-x^2), \\ 3(1-x^2)\frac{d\xi_2}{dx} &= \xi_1 + 2x\xi_2. \end{aligned} \right.$$

De là, on déduit facilement l'équation linéaire du second ordre

$$9(1-x^2)\frac{d^2\xi_2}{dx^2} - 27x\frac{d\xi_2}{dx} - 8\xi_2 = 3.$$

Or le coefficient de y^3 dans l'équation proposée est constant; le discriminant est, à un facteur numérique près, égal à $(1-x^2)$. Nous pouvons donc poser

$$\xi_2 = \frac{C}{1-x^2},$$

C étant un polynôme entier qui devra satisfaire à l'équation

$$9(1-x^2)^2\frac{d^2C}{dx^2} + 9x(1-x^2)\frac{dC}{dx} + (10+8x^2)C = 3(1-x^2)^2.$$

Ici, comme dans tous les autres exemples qu'on pourra avoir à traiter, deux hypothèses se présentent : 1° les termes du plus haut degré du premier membre se réduisent entre eux; 2° ils se réduisent avec le terme de degré le plus élevé du second membre.

Si l'on désigne par λ le degré inconnu du polynôme C, la première supposition conduit actuellement à l'équation

$$9\lambda(\lambda-1) - 9\lambda + 8 = 0,$$

dont les racines sont fractionnaires.

La seconde supposition exige que C soit du second degré. On pourrait poser

$$C = ax^2 + bx + c$$

et chercher à déterminer a, b, c, en identifiant les deux membres de l'équation différentielle; mais il est plus simple ici de remarquer que, en vertu de cette équation même, C est divisible par $(1 - x^2)$. On peut donc prendre

$$C = a(1 - x^2), \quad \frac{dC}{dx} = -2ax, \quad \frac{d^2C}{dx^2} = -2a.$$

Ces valeurs, portées dans l'équation différentielle, donnent

$$-18(1 - x^2)^2 a - 18x^2(1 - x^2)a + (10 + 8x^2)(1 - x^2)a = 3(1 - x^2)^2$$

ou bien, tous calculs faits,

$$a = -\tfrac{3}{8}.$$

En conséquence, il vient

$$C = -\tfrac{3}{8}(1 - x^2), \quad \xi_2 = \frac{C}{1 - x^2} = -\tfrac{3}{8}.$$

Portant cette valeur de ξ_2 dans la seconde des équations (ξ), on trouve

$$\xi_1 = \tfrac{3}{4}x;$$

quant à ξ_0, on a

$$\xi_0 = -2\xi_2 + \text{const.} = \tfrac{3}{4} + \text{const.}$$

Choisissant la constante arbitraire de manière que ξ_0 soit nul, on obtient facilement

$$z = \frac{6xy - 3y^2}{8}.$$

Ce résultat est facile à vérifier. En effet, on a

$$z = \int y\,dx = xy - \int x\,dy = xy + \tfrac{1}{2}\int (y^3 - 3y)\,dy$$

ou bien, en annulant z avec y,

$$z = xy + \frac{y^4 - 6y^2}{8}.$$

Mais on a aussi

$$y^4 = 3y^2 - 2xy, \quad y^4 - 6y^2 = -3y^2 - 2xy;$$

d'où, en substituant dans l'expression de z,

$$z = \frac{8xy - 2xy - 3y^2}{8} = \frac{6xy - 3y^2}{8};$$

c'est bien ce que nous avions trouvé.

III.

8. *Étant donnée l'équation algébrique irréductible*

$$(16) \quad f(u, \mathrm{U}) = \mathrm{U}^m f_0(u) + \mathrm{U}^{m-1} f_1(u) + \ldots + \mathrm{U} f_{m-1}(u) + f_m(u) = 0,$$

où $f_0, f_2, \ldots, f_{m-1}, f_m$ désignent des polynômes entiers en u, on demande si la fonction u, inverse de l'intégrale

$$z = \int^u \frac{du}{\mathrm{U}},$$

est simplement périodique et n'a en chaque point z qu'un nombre limité de valeurs.

S'il en est ainsi, la fonction u, en vertu d'un théorème dû à MM. Briot et Bouquet [1], est racine d'une équation algébrique, ayant pour coefficients des fonctions entières d'une exponentielle e^{gz}, où le facteur g est constant.

De plus, l'équation proposée présente alors certains caractères que je vais rappeler [2] :

1° Si l'on désigne par δ_k le degré du polynôme $f_k(u)$, on a

$$\delta_m \geqq m - k + \delta_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Il en résulte que toutes les valeurs de u qui correspondent à $\mathrm{U} = 0$ sont finies; elles sont fournies par l'équation $f_m(u) = 0$.

2° Toute racine multiple d'ordre p de $f_m(u)$ est racine d'ordre $p-1$ au moins de $f_{m-1}(u), \ldots,$ et, en général, d'ordre $p - l - 1$ au moins de $f_{m-l}(u)$.

---

(1) *Recherches sur la théorie des fonctions* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXVI^e Cahier, troisième Mémoire : *Intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques*).

(2) Voir *Recherches algébriques sur les intégrales abéliennes* (*Annales de l'École Normale*, 2^e série, t. XII, p. 117 et 124).

3° Les valeurs c du rapport $\frac{u}{\mathrm{U}}$ pour u infini et les valeurs c'_0 du rapport $\frac{du}{d\mathrm{U}}$ pour $\mathrm{U} = 0$ forment une suite de nombres tous commensurables entre eux.

Ces conditions sont nécessaires pour que la fonction u ait la forme analytique proposée; mais, sauf le cas où l'équation $\mathrm{F}(u, \mathrm{U}) = 0$ est du genre zéro, elles ne sont pas suffisantes.

Quand elles sont réalisées, on trouve facilement les valeurs *exactes* de tous les paramètres c et c'_0, et l'on peut déterminer, à un facteur *entier* près, le coefficient g.

Si, parmi les valeurs de U qui deviennent infinies avec u et sont du même ordre que u, il y en a p qui forment un système circulaire, elles donnent, pour le rapport $\frac{u}{\mathrm{U}}$, la même valeur c finie et différente de zéro, et l'intégrale z admet la période polaire $2pi\pi c$. Pareillement, si, parmi les valeurs de U qui deviennent nulles pour les racines b de $f_m(u)$ et sont du même ordre que $u - b$, il y en a p' qui forment un système circulaire, elles donnent, pour le rapport $\frac{du}{d\mathrm{U}}$, la même valeur c'_0, et l'intégrale z admet la période polaire $2p'i\pi c'_0$.

9. En suivant la marche des opérations qui font connaître le genre d'une courbe algébrique à singularités supérieures [1], on déterminera par des calculs purement arithmétiques les divers nombres p et p'. Les diverses quantités pc, $p'c'_0$ sont donc connues; puisqu'elles sont commensurables entre elles, il est aisé de trouver leur plus grand commun diviseur ρ : j'entends par là un nombre réel (qui pourra être incommensurable) ou un nombre imaginaire, tel que les rapports $\frac{pc}{\rho}$, $\frac{p'c'_0}{\rho}$ soient tous des entiers positifs ou négatifs qu'aucun entier ne divise à la fois.

Toutes les périodes polaires sont des multiples de $2i\pi\rho$. Si ces périodes sont les seules que possède l'intégrale z ou si les autres périodes de z sont aussi des multiples de $2i\pi\rho$, l'exponentielle $e^{\frac{z}{\rho}}$ sera une fonction algébrique de u, admettant, pour chaque valeur de u,

---

(1) *Voir* notre Mémoire déjà cité, *Annales de l'École Normale*, 2e série, t. XII, p. 156 et suivantes.

m valeurs et m seulement. Mais il peut arriver que z ait des périodes abéliennes égales à des sous-multiples de $2i\pi\rho$; il existe alors un entier positif λ, tel que $\frac{2i\pi\rho}{\lambda}$ est le plus grand commun diviseur des périodes abéliennes et, par suite, de toutes les périodes de z. Ce n'est plus l'exponentielle $e^{\frac{z}{\rho}}$, mais bien $e^{\frac{\lambda z}{\rho}}$ qui prend m valeurs pour chaque valeur de u.

Il faudrait donc déterminer l'entier inconnu λ. On n'y a pas réussi jusqu'à ce jour; on n'a pas même prouvé que la connaissance de λ permît de répondre à la question posée plus haut. Je vais montrer qu'il en est ainsi.

10. Je supposerai, pour abréger l'écriture quand ρ n'est pas égal à 1, qu'on ait pris pour nouvelle variable $\frac{z}{\rho}$, et je continuerai à l'appeler z; U sera la dérivée de u par rapport à cette nouvelle variable. Les périodes de la nouvelle intégrale z auront pour plus grand commun diviseur $\frac{2i\pi}{\lambda}$, λ *étant un entier que nous considérerons comme connu.*

L'exponentielle $e^{\lambda z}$ est une fonction algébrique de u et admet m valeurs pour chaque valeur de u. En raisonnant sur cette exponentielle, sur u et U, comme on l'a fait, en commençant, sur t, x et y, on arrive à l'expression

$$e^{\lambda z} = \xi_0 + \xi_1 U + \xi_2 U^2 + \ldots + \xi_{m-1} U^{m-1},$$

dans laquelle les lettres ξ représentent des fonctions rationnelles de u.

11. Nous allons, en imitant le procédé de Liouville, établir entre les m fonctions inconnues ξ autant d'équations différentielles linéaires du premier ordre. Différentions par rapport à z l'équation précédente et, dans la dérivée $\lambda e^{\lambda z}$ du premier membre, remplaçons $e^{\lambda z}$ par sa valeur; on trouve ainsi

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda(\xi_0 + \xi_1 U + \ldots + \xi_{m-1} U^{m-1}) \\ &\quad = \left(\frac{d\xi_0}{du} + U\frac{d\xi_1}{du} + \ldots + U^{m-1}\frac{d\xi_{m-1}}{du}\right)U \\ &\quad + \left(\xi_1\frac{dU}{du} + 2\xi_2 U\frac{dU}{du} + \ldots + (m-1)\xi_{m-1}U^{m-2}\frac{dU}{du}\right)U, \end{aligned}\right.$$

ou bien, en groupant les termes d'une manière différente,

$$\lambda\xi_0 = \left(\frac{d\xi_0}{du} - \lambda\xi_1\right)U + \left(\frac{d\xi_1}{du} - \lambda\xi_2\right)U^2 + \ldots + \left(\frac{d\xi_{m-2}}{du} - \lambda\xi_{m-1}\right)U^{m-1}$$
$$+ \frac{d\xi_{m-1}}{du}U^m + \xi_1 U\frac{dU}{du} + 2\xi_2 U^2\frac{dU}{du} + \ldots + (m-1)\xi_{m-1}U^{m-1}\frac{dU}{du}.$$

Multipliant les deux membres par U^α, on peut écrire

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda\xi_0 U^\alpha &= \left(\frac{d\xi_0}{du} - \lambda\xi_1\right)U^{\alpha+1} + \left(\frac{d\xi_1}{du} - \lambda\xi_2\right)U^{\alpha+2} + \ldots \\ &+ \left(\frac{d\xi_{m-2}}{du} - \lambda\xi_{m-1}\right)U^{\alpha+m-1} + \frac{d\xi_{m-1}}{du}U^{\alpha+m} + \frac{\xi_1}{\alpha+2}\frac{d(U^{\alpha+2})}{du} + \ldots \\ &+ \frac{(m-2)\xi_{m-2}}{\alpha+m-1}\frac{d(U^{\alpha+m-1})}{du} + \frac{(m-1)\xi_{m-1}}{\alpha+m}\frac{d(U^{\alpha+m})}{du}. \end{aligned}\right.$$

Attribuons successivement à U les m valeurs $U_1, U_2, \ldots, U_m$ fournies par l'équation $F(u, U) = 0$ et ajoutons membre à membre les m égalités ainsi déduites. En posant

$$S_k = U_1^k + U_2^k + \ldots + U_m^k,$$

nous trouverons

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda\xi_0 S_\alpha &= \left(\frac{d\xi_0}{du} - \lambda\xi_1\right)S_{\alpha+1} + \left(\frac{d\xi_1}{du} - \lambda\xi_2\right)S_{\alpha+2} + \ldots \\ &+ \left(\frac{d\xi_{m-2}}{du} - \lambda\xi_{m-1}\right)S_{\alpha+m-1} + \frac{d\xi_{m-1}}{du}S_{\alpha+m} + \frac{\xi_1}{\alpha+2}\frac{dS_{\alpha+2}}{du} + \ldots \\ &+ \frac{(m-2)\xi_{m-2}}{\alpha+m-1}\frac{dS_{\alpha+m-1}}{du} + \frac{(m-1)\xi_{m-1}}{\alpha+m}\frac{dS_{\alpha+m}}{du}. \end{aligned}\right.$$

Faisons successivement α égal à $-1, 0, 1, 2, \ldots, (m-2)$ dans cette formule. Nous obtenons un système de m équations différentielles linéaires et du premier ordre par rapport aux fonctions ξ; les coefficients qui y figurent sont des fonctions rationnelles de u. En résolvant ce système, on aura, pour les m dérivées $\frac{d\xi_0}{du}, \ldots, \frac{d\xi_{m-1}}{du}$, des expressions linéaires (et homogènes) par rapport aux fonctions $\xi_0, \ldots, \xi_{m-1}$. On pourra donc former par le procédé connu une équation différentielle linéaire d'ordre m pour chacune de ces fonctions. Ces m équations seront des équations sans second membre, de la forme

$$(20)\qquad \eta_0\frac{d^m\xi}{du^m} + \eta_1\frac{d^{m-1}\xi}{du^{m-1}} + \ldots + \eta_{m-1}\frac{d\xi}{du} + \eta_m\xi = 0,$$

les lettres η désignant des polynômes entiers en u complètement connus, puisque λ est supposé connu.

12. La méthode des coefficients indéterminés sera applicable à chacune des équations (20) quand on aura déterminé le dénominateur commun des fractions rationnelles ξ. En vertu de la formule (8), ce dénominateur est le produit

$$P[f_0(u)]^{m-3}\Delta,$$

Δ étant le discriminant

$$f'_{U_1}(u, U_1)\, f'_{U_2}(u, U_2) \ldots f'_{U_m}(u, U_m)$$

de l'équation $f(u, U) = 0$ et P le dénominateur commun des fractions rationnelles

$$e^{\lambda z_1} U_1^\alpha + e^{\lambda z_2} U_2^\alpha + \ldots + e^{\lambda z_m} U_m^\alpha = \frac{P_\alpha}{P} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Les valeurs finies de u qui rendent infinie l'une de ces fractions sont celles qui rendent infinie l'exponentielle $e^{\lambda z}$ ou la dérivée U. Pour que l'exponentielle $e^{\lambda z}$, *où λ est un entier positif,* devienne infinie, il faut et il suffit que la variable complexe z prenne des valeurs de la forme $\alpha + \beta i$, α et β étant réels, β quelconque et α infiniment grand *et positif.* Or z ne devient infiniment grand, u restant fini, que si U, et par suite $f_m(u)$, s'annulent.

Soit donc $u = b$ une racine de $f_m(u)$. Les valeurs de U qui s'annulent avec $u - b$ sont de l'ordre de $u - b$; l'inverse de l'une d'elles sera, aux environs du point b, représentée par le développement suivant

$$\frac{1}{U} = \frac{c'_0}{u-b} + \ldots,$$

où, d'après nos hypothèses, c'_0 est un entier positif ou négatif. Multiplions par du et intégrons ; il vient

$$z = c'_0 \log(u-b) + \ldots.$$

La partie réelle du logarithme népérien de la quantité très petite $(u - b)$ est négative et très grande en valeur absolue. Pour que la partie réelle de z soit positive et très grande, il faut et il suffit que c'_0

soit négatif. Alors l'exponentielle $e^{\lambda z}$ sera, pour $u=b$, de l'ordre de grandeur de $(u-b)^{\lambda c'_0}$, et le dénominateur P sera divisible par $(u-b)^{-\lambda c'_0}$. Désignons par $-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots, -\gamma_i, \ldots, -\gamma_n$ ceux des paramètres c'_0 qui sont négatifs, et soit $\varphi_i(u)$ le produit des différents binômes $(u-b)$ auxquels correspond la valeur γ_i de c'_0. Le polynôme P sera divisible par le produit

$$\Phi(u) = [\varphi_1(u)]^{\lambda\gamma_1}[\varphi_2(u)]^{\lambda\gamma_2}\ldots[\varphi_i(u)]^{\lambda\gamma_i}\ldots[\varphi_n(u)]^{\lambda\gamma_n}.$$

13. Les valeurs finies de u qui rendent U infini sont les racines de $f_0(u)$. Soit $u=b$ l'une d'elles; supposons qu'on ait, aux environs du point b,

$$U = h(u-b)^{-\frac{q}{p}} + h_1(u-b)^{\frac{-q+1}{p}} + \ldots.$$

L'exponentielle $e^{\lambda z}$ restant finie pour $u=b$, le produit $e^{\lambda z}U^\alpha$ sera infiniment grand et de l'ordre de $(u-b)^{-\frac{\alpha q}{p}}$. Mais, si l'exposant $\frac{\alpha q}{p}$ est fractionnaire, les termes de la somme $\frac{P_\alpha}{P}$ qui sont du degré $-\frac{\alpha q}{p}$ se réduiront entre eux, puisque cette somme est une fonction rationnelle. Si $E(\alpha)$ est le plus grand entier contenu dans $\frac{\alpha q}{p}$, la fraction $\frac{P_\alpha}{P}$ sera, pour $u=b$, infiniment grande comme $(u-b)^{-E(\alpha)+k}$, k étant un entier positif ou nul. En appliquant cette règle à $\frac{P_{m-1}}{P}$, on voit que P est divisible par $(u-b)^{E(m-1)-k}$. Supposons donc qu'on ait déterminé les exposants $-\frac{q}{p}$ qui commencent les développements des diverses racines U infinies pour $f_0(u)$ nul (cette recherche dépend de simples divisions algébriques) et soit $-\frac{q_0}{p_0}$ le plus grand en valeur absolue de tous ces exposants. Désignons par E le plus grand entier contenu dans $(m-1)\frac{q_0}{p_0}$, et par $\psi_0(u)$ le produit des facteurs binômes distincts de $f_0(u)$; le polynôme P admettra ces facteurs à un degré de multiplicité au plus égal à E. On pourra donc prendre pour P le produit $\Phi(u)[\psi_0(u)]^E$ et, par suite, le dénominateur cherché D sera

$$D = \Phi(u)[\psi_0(u)]^E[f_0(u)]^{m-3}\Delta.$$

14. Voici maintenant deux remarques qui permettront d'abréger les calculs.

Remarque I. — On pourra, dans la plupart des cas, abaisser l'exposant E attribué à tous les facteurs binômes de $\psi_0(u)$, en affectant chacun d'eux du plus grand des exposants $E(m-1)$ qui lui correspondent.

Remarque II. — Dans l'équation proposée

$$f(u, U) = f_0(u)U^m + f_1(u)U^{m-1} + \ldots + f_{m-1}(u)U + f_m(u) = 0,$$

on peut faire disparaître le terme en U. D'après les conditions rappelées au début, le quotient $\frac{f_{m-1}(u)}{f_m(u)}$ est la dérivée logarithmique d'une fonction rationnelle de u. On peut donc écrire

$$\log\theta(u) = \int \frac{f_{m-1}(u)}{f_m(u)} du,$$

$\theta(u)$ désignant une fraction rationnelle qui s'obtient par des divisions algébriques ([1]). Si l'on pose

$$z = \int \frac{du}{U} = t - \frac{1}{m}\log\theta(u)$$

et si l'on désigne par W la dérivée $\frac{du}{dt}$, on n'a qu'à différentier par rapport à u pour trouver

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{W} - \frac{1}{m}\frac{f_{m-1}(u)}{f_m(u)}.$$

Substituant dans l'équation proposée, on obtient une nouvelle équation différentielle sans terme en W.

Or, s'il existe une relation algébrique entre la fonction u et une exponentielle $e^{\lambda z}$, il en existera une aussi entre u et l'exponentielle $e^{\lambda t}$, puisqu'on a

$$e^{\lambda z} = [\theta(u)]^{\frac{-\lambda}{m}} e^{\lambda t}.$$

([1]) Voir *Annales de l'École Normale*, 2e série, t. XII, p. 150 et suiv.

La réciproque est vraie. On pourra donc, si l'on veut, se borner à considérer des équations sans terme en U.

15. *Application.* — Nous supposerons cette réduction opérée sur l'équation générale du second degré en U, et nous écrirons

$$f_0(u)\mathrm{U}^2 + f_2(u) = 0$$

ou, plus simplement,

$$\mathrm{U}^2 - \mathrm{B} = 0.$$

Par suite, nous aurons

$$\mathrm{S}_{-1} = 0, \quad \mathrm{S}_0 = 2, \quad \mathrm{S}_1 = 0, \quad \mathrm{S}_2 = 2\mathrm{B}.$$

Dans le cas de $m = 2$, le système d'équations fourni par la formule (19) est le suivant :

$$\lambda\xi_0 \mathrm{S}_{-1} = \left(\frac{d\xi_0}{du} - \lambda\xi_1\right)\mathrm{S}_0 + \frac{d\xi_1}{du}\mathrm{S}_1 + \xi_1\frac{d\mathrm{S}_1}{du},$$

$$\lambda\xi_0 \mathrm{S}_0 = \left(\frac{d\xi_0}{du} - \lambda\xi_1\right)\mathrm{S}_1 + \frac{d\xi_1}{du}\mathrm{S}_2 + \frac{\xi_1}{2}\frac{d\mathrm{S}_2}{du}.$$

En remplaçant S_{-1}, S_0, S_1, S_2 par leurs valeurs, il se réduit à

$$0 = \frac{d\xi_0}{du} - \lambda\xi_1, \quad 2\lambda\xi_0 = 2\mathrm{B}\frac{d\xi_1}{du} + \xi_1\frac{d\mathrm{B}}{du}.$$

La première équation fera connaître ξ_1 quand ξ_0 sera déterminé. Si l'on en tire ξ_1 ainsi que sa dérivée, et qu'on substitue dans l'équation suivante, il vient

$$2\mathrm{B}\frac{d^2\xi_0}{du^2} + \frac{d\mathrm{B}}{du}\frac{d\xi_0}{du} - 2\lambda^2\xi_0 = 0,$$

ou, en tenant compte de l'expression de B,

$$(21) \qquad 2f_0 f_2 \frac{d^2\xi_0}{du} + (f_0 f_2' - f_0' f_2)\frac{d\xi_0}{du} + 2\lambda^2 f_0^2 \xi_1 = 0.$$

Pour trouver le dénominateur de ξ_0, revenons aux formules

$$e^{\lambda z_1} = \xi_0 + \xi_1 \mathrm{U}_1, \quad e^{\lambda z_2} = \xi_0 + \xi_1 \mathrm{U}_2;$$

on en déduit par addition

$$e^{\lambda z_1} + e^{\lambda z_2} = \frac{P_0}{P} = 2\xi_0.$$

Ainsi le dénominateur de ξ_0 est celui de la fraction $\frac{P_0}{P}$. Nous l'avons déterminé au n° 12.

Tout ce qui précède s'applique au célèbre problème posé par Abel : *Étant donnée la différentielle*

$$\frac{(u+A)\,du}{\sqrt{R(u)}}, \quad R(u) = u^4 + \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta,$$

reconnaître si elle s'intègre par un seul logarithme. Nous avons à traiter l'équation

$$f_0 U^2 + f_2 = 0,$$

dont les coefficients ont pour valeurs

$$f_0 = (u+A)^2, \quad f_2 = -R(u).$$

L'équation (21) devient alors

$$2(u+A)R(u)\frac{d^2\xi_0}{du^2} + [(u+A)R'(u) - 2R(u)]\frac{d\xi_0}{du} - 2\lambda^2(u+A)^3\xi_0 = 0.$$

Comme on suppose essentiellement que le polynôme $R(u)$ a ses racines distinctes, les paramètres c'_0 sont tous nuls. L'exponentielle $e^{\lambda z}$ reste finie pour toutes les valeurs finies de u; par suite, ξ_0 est un polynôme entier. Si l'on pose

$$\xi_0 = u^p + a_1 u^{p-1} + \ldots + a_p,$$

le terme du plus haut degré en u dans l'équation différentielle en ξ_0 a pour coefficient

$$2p(p-1) + 2p - 2\lambda^2 = 2(p^2 - \lambda^2).$$

Égalant ce coefficient à zéro, on voit que p est égal à λ, puisque p et λ

sont tous deux positifs. Ainsi la fonction ξ_0 est un polynôme entier et un polynôme de degré λ.

Il serait facile, dans ce cas particulier, d'arriver directement à cette conclusion; mais il n'était peut être pas sans intérêt de la rattacher à la proposition générale que nous avons établie plus haut.