Annales scientifiques de l'É.N.S.

P. Appell

Application du théorème de M. Mittag-Leffler aux fonctions doublement périodiques de troisième espèce

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 2 (1885), p. 67-74
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__67_0>

APPLICATION DU THÉORÈME DE M. MITTAG-LEFFLER

AUX

FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

DE TROISIÈME ESPÈCE,

PAR M. P. APPELL,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Les applications du théorème de M. Mittag-Leffler à des fonctions connues sont encore peu nombreuses. Dans celles que M. Weierstrass a indiquées pour les fonctions elliptiques, par exemple dans la formule

$$\frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)}=\sum\left[\frac{1}{x+2m\mathrm{K}+2ni\mathrm{K}'}-\frac{1}{2m\mathrm{K}+2ni\mathrm{K}'}-\frac{x}{(2m\mathrm{K}+2ni\mathrm{K}')^2}\right],$$

le polynôme retranché de la partie principale est du premier degré. M. Hermite, dans une Lettre à M. Mittag-Leffler insérée au Tome 92, page 145 du *Journal de Crelle*, a donné des exemples, obtenus par des combinaisons de fonctions eulériennes, dans lesquels il faut retrancher des fractions simples un polynôme de degré limité mais quelconque. Enfin, dans son *Cours à la Faculté des Sciences* (1), M. Hermite a considéré d'autres combinaisons de fonctions eulériennes pour lesquelles le degré du polynôme à retrancher de chaque fraction simple est proportionnel au rang de cette fraction dans la série et, par suite, croît au delà de toute limite.

Voici une nouvelle application du même théorème, dans laquelle les degrés des polynômes que l'on retranche de la partie principale

(1) Cours de M. Hermite, rédigé par M. Audoyer; Hermann, éditeur.

croissent indéfiniment; cette application est relative aux fonctions doublement périodiques de troisième espèce obtenues, comme l'on sait, en divisant un produit de fonctions Θ par un autre produit de même forme; je m'attacherai surtout au cas, le seul intéressant, où il y a plus de Θ au numérateur qu'au dénominateur.

1. Soit $F(x)$ une fonction uniforme de x vérifiant les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} F(x+2K) = F(x), \\ F(x+2iK') = \lambda e^{-\frac{\mu\pi x i}{K}} F(x), \end{cases}$$

λ désignant un facteur constant quelconque et μ un entier *positif*. Supposons que cette fonction admette un pôle simple $x = \alpha$ avec le résidu A; elle admettra tous les pôles

$$(2)\qquad \alpha + 2mK + 2niK', \quad (m \text{ et } n \text{ entiers})$$

avec les résidus respectifs

$$(3)\qquad A\lambda^n e^{-\frac{\mu n\pi\alpha i}{K}} q^{-\mu n(n-1)},$$

ainsi qu'il résulte de l'équation

$$F(x+2niK') = \lambda^n e^{-\frac{\mu n\pi x i}{K}} q^{-\mu n(n-1)} F(x).$$

Nous allons nous proposer de former une fonction uniforme qui admette les pôles simples (2) avec les résidus (3); nous pouvons évidemment supposer $A = \frac{2K}{\pi}$, car cela revient à diviser la fonction cherchée par $\frac{\pi A}{2K}$. La question à résoudre est alors la suivante :

Soient les fonctions

$$(4)\qquad \varphi_n(x) = \lambda^n e^{-\frac{\mu n\pi\alpha i}{K}} q^{-\mu n(n-1)} \cot\frac{\pi}{2K}(x - \alpha - 2niK'),$$

où

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty;$$

former une fonction uniforme $\Phi(x)$ admettant pour pôles les points (2) *de telle façon que la différence*

$$\Phi(x) - \varphi_n(x)$$

soit holomorphe dans le voisinage de chacun des points

$$\alpha + 2mK + 2niK',$$

où

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \infty.$$

La série

$$\sum \varphi_n(x)$$

est divergente, car le module du terme général augmente indéfiniment. En suivant la méthode de M. Mittag-Leffler, nous allons retrancher de chaque fonction $\varphi_n(x)$ un polynôme $g_n(x)$ en $\cos\frac{\pi x}{K}$ et $\sin\frac{\pi x}{K}$ choisi de telle façon que la série

$$\Phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [\varphi_n(x) - g_n(x)]$$

soit absolument convergente. Cette série définira une fonction $\Phi(x)$ satisfaisant aux conditions du problème; la fonction la plus générale satisfaisant à ces conditions sera $\Phi(x)$ augmentée d'une fonction entière $G(x)$.

On peut écrire

$$(5) \qquad \cot\frac{\pi}{2K}(x - \alpha - 2niK') = i\,\frac{e^{\frac{\pi i(x-\alpha)}{K}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi i(x-\alpha)}{K}} - q^{2n}};$$

d'autre part, quels que soient a et b, on a identiquement

$$(6) \qquad \frac{a+b}{a-b} = 1 + 2\frac{b}{a} + 2\frac{b^2}{a^2} + \ldots + 2\left(\frac{b}{a}\right)^{\rho-1} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\rho} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\rho}\frac{a+b}{a-b}.$$

Supposons d'abord *n positif* et appliquons l'identité (6) en y faisant

$$a = e^{\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}}, \quad b = q^{2n}, \quad \rho = \rho_n;$$

nous aurons

$$\cot\frac{\pi}{2K}(x - \alpha - 2niK') = i\left[1 + 2q^{2n}e^{-\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}} + \ldots + q^{2n\rho_n}e^{-\rho_n\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}}\right.$$
$$\left. + q^{2n\rho_n}e^{-\rho_n\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}}\cot\frac{\pi}{2K}(x - \alpha - 2niK')\right].$$

Portant cette expression de $\cot\frac{\pi}{2K}(x-\alpha-2niK')$ dans celle de $\varphi_n(x)$ et posant

$$(7)\quad g_n(x) = i\lambda^n e^{-\frac{\mu n\pi\alpha i}{K}} q^{-\mu n(n-1)}\left[1 + 2q^{2n} e^{-\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}} + \ldots + q^{2n\rho_n} e^{-\rho_n\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}}\right],$$

on a

$$(8)\quad \varphi_n(x) - g_n(x) = \lambda^n e^{(\rho_n-\mu n)\frac{\pi\alpha i}{K}} q^{2n\rho_n-\mu n(n-1)} e^{-\rho_n\frac{\pi x i}{K}} \cot\frac{\pi}{2K}(x-\alpha-2niK');$$

la fonction (7) $g_n(x)$ est, comme il a été dit plus haut, un polynôme en $\cos\frac{\pi x}{K}$ et $\sin\frac{\pi x}{K}$, et l'on voit que ce polynôme est de degré ρ_n.

Cela posé, la série

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} [\varphi_n(x) - g_n(x)]$$

sera absolument convergente, si l'on choisit l'entier ρ_n en fonction de n de la façon suivante. Soit N un entier quelconque; on prendra ρ_n arbitraire pour toutes les valeurs de n pour lesquelles la différence $(\mu n - N)$ est négative, ce qui n'a lieu que pour un nombre fini de termes à cause de l'hypothèse $n > 0$; et, pour les autres termes, on prendra

$$\rho_n = \mu n - N.$$

En effet, avec cette détermination de ρ_n, la différence $\varphi_n(x) - g_n(x)$ prend la forme

$$\lambda^n e^{-\frac{N\pi\alpha i}{K}} q^{\mu n(n+1)-2nN} e^{-(\mu n - N)\frac{\pi x i}{K}} \cot\frac{\pi}{2K}(x-\alpha-2niK'),$$

ce qui, grâce à la présence du facteur $q^{\mu n^2}$, est le terme général d'une série absolument convergente. La détermination de ρ_n que nous venons d'indiquer dépend de l'entier arbitraire N; le plus simple sera de supposer $N = 0$ et de prendre

$$(9)\quad \rho_n = \mu n;$$

alors la différence $\varphi_n(x) - g_n(x)$ devient

$$\lambda^n e^{-\mu n \frac{\pi x i}{K}} q^{\mu n(n+1)} \cot \frac{\pi}{2K}(x - \alpha - 2niK'), \tag{10}$$

forme que nous adopterons définitivement.

Nous venons d'envisager les termes dans lesquels n est positif; supposons, au contraire, n *négatif;* en appliquant alors l'identité (6) dans laquelle on fait

$$a = q^{2n}, \quad b = e^{\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}}, \quad \rho = \rho_n,$$

on a

$$\begin{aligned}\cot \frac{\pi}{2K}(x - \alpha - 2niK') = -i\left[1 + 2q^{-2n} e^{\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}} + \ldots + q^{-2n\rho_n} e^{\rho_n \frac{\pi(x-\alpha)i}{K}}\right] \\ + q^{-2n\rho_n} e^{\rho_n \frac{\pi(x-\alpha)i}{K}} \cot \frac{\pi}{2K}(x - \alpha - 2niK').\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$g_n(x) = -i\lambda^n e^{-\frac{\mu n \pi \alpha i}{K}} q^{-\mu n(n-1)}\left[1 + 2q^{-2n} e^{\frac{\pi(x-\alpha)i}{K}} + \ldots + q^{-2n\rho_n} e^{\rho_n \frac{\pi(x-\alpha)i}{K}}\right],$$

il vient, pour la différence $\varphi_n(x) - g_n(x)$, l'expression

$$\lambda^n e^{-(\mu n + \rho_n)\frac{\pi \alpha i}{K}} q^{-2n\rho_n - \mu n(n-1)} e^{\rho_n \frac{\pi x i}{K}} \cot \frac{\pi}{2K}(x - \alpha - 2niK').$$

La détermination la plus simple de l'entier ρ_n sera ici

$$\rho_n = -\mu n, \tag{9'}$$

ce qui donne

$$\varphi_n(x) - g_n(x) = \lambda^n e^{-\mu n \frac{\pi x i}{K}} q^{\mu n(n+1)} \cot \frac{\pi}{2K}(x - \alpha - 2niK'), \tag{10'}$$

expression identique à (10). Ainsi l'on peut, pour les valeurs positives et négatives de n, déterminer des polynômes $g_n(x)$ de degrés $\pm \mu n$ en $\cos \frac{\pi x}{K}$ et $\sin \frac{\pi x}{K}$, de telle manière que la différence $\varphi_n(x) - g_n(x)$ prenne la forme (10). On obtiendra, de cette façon, pour l'une des fonctions satisfaisant à la question, la série

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(x) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} [\varphi_n(x) - g_n(x)] \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda^n e^{-\mu n \frac{\pi x i}{K}} q^{\mu n(n+1)} \cot \frac{\pi}{2K}(x - \alpha - 2niK'). \end{aligned} \right.$$

La fonction transcendante $\Phi(x)$ à laquelle on est ainsi conduit se rencontre, comme on pouvait le prévoir, dans le problème de la décomposition des fonctions doublement périodiques de troisième espèce en éléments simples [1]. Elle s'exprime aisément à l'aide de la transcendante que j'ai désignée par $\chi_\mu(\alpha, z)$ et qui est définie par la série

$$\chi_\mu(\alpha, z) = \frac{\pi}{2K} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\mu n \pi z i}{K}} q^{\mu n(n-1)} \cot \frac{\pi}{2K}(\alpha - z - 2niK').$$

Si, dans la série (12), on fait $\lambda = e^{-\frac{\mu \pi \beta i}{K}}$, β étant une constante convenablement choisie, et si l'on y change n en $-n$, on voit que

$$\Phi(x) = -\frac{2K}{\pi} \chi_\mu(\alpha + \beta, x + \beta),$$

$$\frac{\pi A}{2K} \Phi(x) = -A\chi_\mu(\alpha + \beta, x + \beta).$$

Revenons maintenant à la fonction doublement périodique de troisième espèce $F(x)$ qui vérifie les relations (1). Nous avons supposé que dans un parallélogramme des périodes elle admettait le pôle α avec le résidu A; imaginons qu'elle ait, dans ce même parallélogramme, n autres pôles simples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de résidus $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Il résulte de ce qui précède que cette fonction $F(x)$ ne différera de la somme

$$-A\chi_\mu(\alpha + \beta, x + \beta) - A_1\chi_\mu(\alpha_1 + \beta, x + \beta) - \ldots - A_n\chi_\mu(\alpha_n + \beta, x + \beta)$$

---

[1] *Voir* deux Mémoires que j'ai publiés dans les *Annales de l'École Normale* en 1884 et 1885.

que par une fonction entière $G(x)$,

$$F(x) = G(x) - A\chi_\mu(\alpha+\beta, x+\beta) \\ - A_1\chi_\mu(\alpha_1+\beta, x+\beta) - \ldots - A_n\chi_\mu(\alpha_n+\beta, x+\beta).$$

Comme chacune des fonctions

$$\chi_\mu(\alpha+\beta, x+\beta), \quad \ldots, \quad \chi_\mu(\alpha_n+\beta, x+\beta)$$

vérifie les relations (1), ainsi que l'on s'en assurera facilement, il faut, pour que la fonction $F(x)$ vérifie ces relations, que la fonction entière $G(x)$ les vérifie également. Or il est facile d'avoir l'expression la plus générale d'une telle fonction $G(x)$; c'est, comme l'on sait, une fonction linéaire homogène de μ fonctions spéciales qui, d'après la notation que j'ai employée dans mon premier Mémoire (¹), s'écriront

$$g_0^{(\mu)}(x+\beta), \quad g_1^{(\mu)}(x+\beta), \quad \ldots, \quad g_{\mu-1}^{(\mu)}(x+\beta);$$

on aura donc

$$G(x) = K_0 g_0^{(\mu)}(x+\beta) + K_1 g_1^{(\mu)}(x+\beta) + \ldots + K_{\mu-1} g_{\mu-1}^{(\mu)}(x+\beta),$$

où il ne restera plus qu'à déterminer les constantes $K_0, K_1, \ldots, K_{\mu-1}$ dans chaque exemple particulier.

2. La résolution de ce même problème dans le cas où l'entier μ qui figure dans les équations (1) est négatif ne présente aucune difficulté; ce cas est celui où la fonction $F(x)$ contient dans son expression plus de fonctions Θ au dénominateur qu'au numérateur. Si l'on suppose $\mu = -\nu$, l'expression du résidu (3) relatif au pôle

$$\alpha + 2mK + 2niK'$$

devient, en laissant de côté le facteur A,

$$\lambda^n e^{\frac{\nu n\pi\alpha i}{K}} q^{\nu n(n-1)},$$

(¹) *Annales de l'École Normale*, 1884, p. 138.

et la série des parties principales $\varphi_n(x)$

$$\Psi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n \lambda^n e^{\frac{\nu n \pi \alpha i}{K}} q^{\nu n(n-1)} \cot \frac{\pi}{2K}(x - \alpha - 2niK')$$

est absolument convergente. Si l'on fait encore ici

$$\lambda = e^{\frac{\nu\pi\beta i}{K}},$$

on a

$$\Psi(x) = \frac{2K}{\pi} \chi_\nu(x + \beta, \alpha + \beta).$$

On trouve alors, en supposant que $F(x)$ ait les pôles simples α, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de résidus $A, A_1, \ldots, A_n$,

$$F(x) = A\chi_\nu(x + \beta, \alpha + \beta) + A_1\chi_\nu(x + \beta, \alpha_1 + \beta) + \ldots + A_n\chi_\nu(x + \beta, \alpha_n + \beta),$$

sans ajouter de fonction entière, comme je l'ai montré dans mon premier Mémoire.