G. FLOQUET

Addition à un mémoire sur les équations différentielles linéaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 1 (1884), p. 405-408
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1884_3_1__405_0>

ADDITION A UN MÉMOIRE

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES,

PAR M. G. FLOQUET,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY.

Soit $f(x)$ une fonction supposée uniforme autour du point $x = 0$ et présentant en ce point une singularité essentielle. Supposons, en outre, que $x = 0$ soit un point singulier isolé, c'est-à-dire qu'il n'existe ni pôle, ni point essentiel, à distance infiniment petite de l'origine, auquel cas $f(x)$ est développable en une double série, procédant suivant les puissances entières, positives et négatives de x, et convergente dans le domaine de l'origine. Les dérivées $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(i)}(x), \ldots$ seront aussi développables de cette manière. Mais il s'en faut qu'il en soit toujours de même de la dérivée logarithmique $\frac{f'(x)}{f(x)}$ et des fonctions $\frac{f^{(i)}(x)}{f(x)}$.

Si $f(x)$ n'a pas de zéros infiniment voisins de l'origine, $\frac{f^{(i)}(x)}{f(x)}$ ne présentera aucune discontinuité à distance infiniment petite du point $x = 0$, et sera développable en double série convergente. Mais l'équation $f(x) = 0$ peut admettre une infinité de solutions dans tout domaine du point $x = 0$, si petit qu'il soit, auquel cas $\frac{f^{(i)}(x)}{f(x)}$ admettra une infinité de pôles. Ce rapport n'est plus alors développable à la manière de $f(x)$.

De là la nécessité d'apporter une restriction à une remarque et à un théorème que j'ai énoncés dans un Mémoire antérieur, publié comme Supplément au tome VIII des *Annales de l'École Normale supérieure*, année 1879. Il s'agissait d'une équation différentielle linéaire

$$P(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0,$$

dont les coefficients sont de la forme $\sum_{-\infty}^{+\infty} C_i x^i$, c'est-à-dire développables en doubles séries convergentes dans le domaine du point zéro.

A la page 17 (n° 18), je suppose qu'il existe une intégrale telle que $x^\rho \psi(x)$, $\psi(x)$ désignant une fonction holomorphe dans le domaine de l'origine, différente de zéro en ce point, et je fais la substitution

$$y = x^\rho \psi(x) \int z \, dx.$$

J'obtiens la transformée en z

$$Q(z) = \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + q_1 \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + \ldots + q_{m-1} z = 0,$$

dont les coefficients q sont donnés par les formules marquées du signe (1). Observant que q_k se compose de p_k, augmenté d'une somme de termes tels que $\sum_0^h C_\alpha x^{-\alpha} \frac{\psi^{(h-\alpha)}(x)}{\psi(x)}$, où $\psi^{(h-\alpha)}(x)$ est la dérivée $(h-\alpha)^{\text{ième}}$ de $\psi(x)$, j'en conclus que les coefficients q sont uniformes et continus dans le domaine du point $x = 0$, à ce point près, et par conséquent de la forme $\sum_{-\infty}^{+\infty} C_i x^i$, comme les coefficients p. Cette conclusion est entièrement rigoureuse. Mais la remarque qui la suit (p. 18, ligne 3) demande à être complétée. « Pour que les coefficients q possèdent ces propriétés, il n'est pas nécessaire que $\psi(x)$ ne contienne dans son développement que des puissances positives de x : il suffit que $\psi(x)$ soit de la forme $\sum_{-\infty}^{+\infty} C_i x^i$. » Il faut ajouter, d'après ce qui a été dit plus haut : « et que $\psi(x)$ n'ait pas de zéros infiniment voisins de l'origine ».

Il résulte de là que le théorème énoncé à la page 121 (n° 95) doit être rectifié. S'il est toujours possible de décomposer l'expression $P(y)$ en facteurs premiers symboliques, il n'est pas toujours permis de les supposer de la forme $\frac{dy}{dx} - y\sum_{-\infty}^{+\infty} C_i x^i$. Pour que cette forme soit possible, il faut et il suffit que les fonctions désignées par $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_m(x)$ n'admettent pas de zéros à une distance infiniment petite de l'origine. Par exemple, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x^4}\left(\sin^2\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)y$$
$$= \left[\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right)y\right]\left[\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right)y\right],$$

tandis qu'il n'existe pas une seule décomposition de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^4}y = \left[\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\left(2 - \frac{1}{x}\cot\frac{1}{x}\right)y\right]\left(\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2}\cot\frac{1}{x}y\right),$$

où les facteurs aient la forme en question.

La proposition I (p. 122) doit donc s'énoncer ainsi :

Si l'expression $P(y)$ *est décomposable en facteurs symboliques de la forme* $\frac{dy}{dx} - y\sum_{-\infty}^{+\infty} C_i x^i$, *le degré* γ *de sa fonction déterminante est égal au nombre total* j *des facteurs réguliers qui entrent dans cette décomposition.*

La proposition II est exacte, à cause de la remarque qui est au bas de la page 124. Les théorèmes I, II et III de la page 125 sont toujours des conséquences des deux propositions précédentes. Quant aux quelques raisonnements qui suivent, il est trop aisé de reconnaître ce qu'on doit y modifier pour que nous insistions.

Puisque j'ai été amené à revenir sur cette question, de la décomposition d'une expression différentielle linéaire en facteurs symboliques, je vais, en terminant, l'appliquer au cas où $P(y) = 0$ est à coefficients périodiques, l'intégrale étant uniforme.

Supposons les coefficients simplement périodiques; $P(y) = 0$ admet toujours comme intégrale une fonction v_1 périodique de seconde espèce.

Je pose $y = v_1 \int z\, dx$. La transformée $Q(z) = 0$, d'ordre $m - 1$, est de même forme que $P(y) = 0$, et je possède une intégrale v_2 telle que v_1. Je pose $z = v_2 \int t\, dx$, et de l'équation en t, je déduis pareillement v_3, et ainsi de suite jusqu'à v_m. Considérons la décomposition en facteurs premiers symboliques

$$P = A_m A_{m-1} \ldots A_2 A_1,$$

corrélative du système fondamental

$$y_1 = v_1, \quad y_2 = v_1 \int v_2\, dx, \quad \ldots, \quad y_m = v_1 \int v_2\, dx \ldots \int v_m\, dx.$$

On a

$$A_i = \frac{dy}{dx} - a_i y, \quad a_i = \frac{d}{dx} \log(v_1 v_2 \ldots v_i) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, m).$$

Or, le produit $v_1 v_2 \ldots v_i$ étant périodique de seconde espèce, sa dérivée logarithmique a_i est périodique de première espèce; par conséquent, dans le cas considéré, l'expression $P(y)$ est toujours décomposable en m facteurs à coefficients périodiques.

Le même raisonnement prouvera que, si les coefficients de $P(y)$ sont doublement périodiques, il existe toujours une décomposition à coefficients doublement périodiques. Soit, par exemple, l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} \frac{dy}{dx} + y \operatorname{dn}^2 x = 0,$$

où k désigne le module, et où les coefficients possèdent les périodes $2K$ et $2K'\sqrt{-1}$. Elle admet les deux solutions $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$, qui sont doublement périodiques de seconde espèce, aux multiplicateurs égaux à -1 pour la période $2K$, aux multiplicateurs $+1$ et -1 pour la période $2K'\sqrt{-1}$. Son premier membre se décompose ainsi :

$$\left(\frac{dy}{dx} - a_2 y\right)\left(\frac{dy}{dx} - a_1 y\right),$$

a_1 et a_2 ayant pour expressions

$$a_1 = -\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x}, \quad a_2 = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} - k^2 \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x},$$

fonctions qui sont bien de première espèce.