ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CH. MÉRAY

Observations sur la légitimité de l'interpolation

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 1 (1884), p. 165-176
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1884_3_1__165_0>

OBSERVATIONS

SUR

LA LÉGITIMITÉ DE L'INTERPOLATION,

PAR M. CH. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

1. L'interpolation, dont on fait un si grand usage dans les calculs numériques, ne repose encore, quant à la légitimité de son principe, sur aucune base certaine. On semble admettre tacitement qu'elle peut fournir, par un polynôme entier, une représentation indéfiniment approchée d'une fonction donnée d'une seule variable, quand cette fonction est seulement *continue* dans les limites entre lesquelles on opère. Mais c'est là une simple allégation dont le fait suivant fait ressortir toute l'inexactitude.

Sur la circonférence qui a l'origine des affixes pour centre et 1 pour rayon, la fonction $\frac{1}{x}$ est non seulement continue, mais encore *olotrope* [1]; pourtant il est impossible de l'y représenter par interpolation avec une approximation indéfinie. Effectivement, si l'on interpole sur cette circonférence de $a = 1$ à $b = 1$, en prenant pour valeurs intermédiaires les $n - 1$ autres racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité (qui se rapprochent indéfiniment deux à deux quand n croît sans limite), on trouve simplement x^{n-1} (à cause de $x^{n-1} = \frac{1}{x}$, quand $x^n = 1$) pour le

(1) Dans mon *Nouveau précis d'Analyse infinitésimale,* publié en 1872, j'ai proposé ce mot pour qualifier les fonctions qui sont développables par la formule de Taylor à partir de tout système de valeurs particulières des variables qui tombent entre des limites données. En fait, mais non en principe, il équivaut à l'épithète *holomorphe* adoptée plus tard par MM. Briot et Bouquet (*Théorie des fonctions elliptiques*, 2e édition, p. 14).

polynôme entier de degré inférieur à n, qui devient numériquement égal à $\frac{1}{x}$ pour ces valeurs particulières de la variable. Or, excepté en $x = 1$, la différence $\frac{1}{x} - x^{n-1}$ entre la fonction considérée et le polynôme entier qui devrait en fournir une valeur de plus en plus approchée ne tend pas vers zéro, ni même vers quoi que ce soit, quand n augmente indéfiniment.

2. On peut facilement s'assurer *a priori* qu'ici, comme dans toute la théorie des fonctions (ou peu s'en faut), la continuité n'est pas une condition suffisante. Effectivement, dire que l'interpolation est praticable pour $f(x)$ dans un intervalle donné, plus généralement dans une aire donnée (S), c'est dire au fond que l'on peut assigner un polynôme entier à coefficients variables $f_n(x)$, tel que pour toute valeur de x tombant dans (S) on ait $f(x) = f_n(x) + \varepsilon_n$, n désignant le nombre indéfiniment croissant des valeurs particulières de x, pour lesquelles on a assuré l'égalité numérique $f_n(x) = f(x)$, et ε_n une quantité qui tend vers zéro quand n croît sans limite.

Or, par sa nature, $f_n(x)$ est indéfiniment développable par la formule de Taylor; donc, en appelant x' une valeur particulière de x prise à volonté dans l'aire (S), $f(x) = f(x' + \overline{x - x'})$ doit être représentable avec une approximation indéfinie par une certaine série entière en $x - x'$, pour toute valeur de x tombant dans l'aire considérée. En d'autres termes : *$f(x)$ doit, non seulement être olotrope dans l'aire* (S), *mais encore y posséder en chaque point un olomètre* [1] *au moins égal à la distance maximum de ce point aux divers autres points de l'aire dont il s'agit.* Par suite, l'interpolation ne semble pas possible, si $f(x)$ ne remplit pas les conditions précitées.

3. Il est assez étonnant que les hasards de la pratique n'aient encore fait connaître aucun cas dans lequel l'interpolation soit illusoire. Cela peut tenir à la petitesse relative des intervalles considérés, mais aussi à cette circonstance, que le plus souvent on applique l'interpolation

---

[1] Rayon de convergence du développement de $f(x+h)$ par la formule de Taylor.

au calcul des intégrales définies, en divisant l'intervalle réel considéré en un nombre pair de parties sensiblement égales.

En représentant alors par deux courbes planes rapportées aux mêmes axes la fonction proposée et son expression approchée, on voit facilement que les arcs de la seconde courbe, limités aux ordonnées tracées par les points de division de l'intervalle, tombent alternativement au-dessus et au-dessous de la première. D'où une compensation évidente qui peut rendre sensiblement égales les aires renfermées par les deux courbes, nonobstant un écart moyen sensible entre les ordonnées des points correspondants de l'une et de l'autre.

La comparaison des ordonnées des points correspondants des deux courbes, dont l'abscisse commune est moyenne entre celles de deux points de division consécutifs, pourrait rendre sensible l'erreur persistante qui se produit dans un intervalle impropre à l'interpolation. On pourrait encore comparer les aires elles-mêmes si, interpolant d'une autre manière plus générale, qui sera indiquée tout à l'heure (n° 6), on empêchait la seconde courbe de traverser la première, en lui imposant avec elle des contacts d'ordres impairs en leurs points communs. L'épreuve n'en serait même que plus concluante, les deux courbes ayant alors en ces points des contacts au lieu de simples intersections.

4. Quoi qu'il en soit, nous allons assigner un cas dont l'étendue suffit largement aux besoins de la pratique, dans lequel on peut interpoler en toute sécurité. Comme le calcul des résidus de Cauchy fournit pour cette question des notations et des artifices de raisonnement d'une très grande commodité, je commencerai par en rappeler certains principes.

I. *Si* $\varphi(x)$ *est quasi olotrope* (¹) *dans une aire donnée* (S), *la différence*

$$\varphi(x) - \bar{\mathcal{E}}_t \frac{[\varphi(t)]}{(x-t)}$$

(¹) Je dis qu'une fonction est *quasi olotrope* dans une aire donnée quand, aux points de cette aire où elle cesse d'être olotrope, son inverse arithmétique redevient olotrope. Ce sont les fonctions *méromorphes* de MM. Briot et Bouquet (*Théorie des fonctions elliptiques*, 2ᵉ édition, p. 15).

y est olotrope, le résidu s'étendant à tous les infinis de $\varphi(t)$ qui tombent dans l'aire donnée.

II. D'où il suit que *si $\varphi(x)$ est une fraction rationnelle, le développement du résidu ci-dessus fournit les fractions simples résultant de sa décomposition.*

5. *En appelant $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ des quantités quelconques, μ un entier positif et posant $\varpi(t) = (t - t_1)(t - t_2) \ldots (t - t_\nu)$, la quantité*

$$\mathcal{E}_t \frac{t^\mu}{[\varpi(t)]}$$

se réduit à zéro, si $\mu < \nu - 1$; à 1, si $\mu = \nu - 1$; et à la somme de tous les monômes entiers dissemblables de degré $\mu - (\nu - 1)$ en $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ et de coefficient 1, si $\mu > \nu - 1$.

Les deux premières parties de ce lemme ont été démontrées par Cauchy.

Pour établir la troisième, il suffit de remarquer que,

$$\mathcal{E}_t \frac{t_\nu^\mu}{[\varpi(t)]}$$

étant nul en vertu de la première, la quantité à évaluer peut s'écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_t \frac{t^\mu - t_\nu^\mu}{[\varpi(t)]} &= \mathcal{E}_t \frac{t^\mu - t_\nu^\mu}{t - t_\nu} \frac{1}{[\varpi_\nu(t)]}\\ &= \mathcal{E}_t \frac{t^{\mu-1}}{[\varpi_\nu(t)]} + t_\nu \mathcal{E}_t \frac{t^{\mu-2}}{[\varpi_\nu(t)]} + \ldots + t_\nu^{\mu-(\nu-1)},\end{aligned}$$

où, pour abréger, on a posé $\dfrac{\varpi(t)}{t - t_\nu} = \varpi_\nu(t)$.

Effectivement $\varpi_\nu(t)$ est de degré $\nu - 1$ seulement, et, d'après la seconde partie de notre énoncé, le résidu intégral de $\dfrac{t^{\nu-2}}{\varpi_\nu(t)}$ se réduit à 1; d'après la première, ceux de $\dfrac{t^{\nu-3}}{\varpi_\nu(t)}, \dfrac{t^{\nu-4}}{\varpi_\nu(t)}, \ldots, \dfrac{1}{\varpi_\nu(t)}$ s'évanouissent.

Le point à établir est donc vrai pour les valeurs considérées de μ, ν, s'il l'est pour les valeurs moindres des mêmes nombres; or il est évident, quel que soit μ, quand ν se réduit à 1.

6. Supposons maintenant qu'il s'agisse de représenter approximativement par interpolation une fonction d'une seule variable $f(x)$, olotrope dans une aire donnée (S) et soient

$$(1) \qquad x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

n valeurs particulières de x tombant dans cette aire.

Habituellement, on suppose ces quantités toutes distinctes les unes des autres, et l'on résout la question en construisant le polynôme entier $f_n(x)$ de degré $< n$ qui satisfait aux n égalités numériques

$$(2) \qquad f_n(x_1) = f(x_1),\quad f_n(x_2) = f(x_2),\quad \ldots,\quad f_n(x_n) = f(x_n).$$

Il est même impossible d'opérer autrement, quand on connaît seulement une Table de valeurs numériques de la fonction considérée, à l'exclusion de celles de ses dérivées, en particulier quand les valeurs de $f(x)$ ne sont données que par des observations physiques.

Mais il est avantageux de généraliser le problème, en n'imposant pas aux quantités (1) la restriction d'être inégales. On assujettit alors le polynôme $f_n(x)$ à satisfaire en x_i aux k_i égalités numériques

$$(3) \qquad f_n(x_i) = f(x_i),\quad f'_n(x_i) = f'(x_i),\quad \ldots,\quad f_n^{(k_i-1)}(x_i) = f^{(k_i-1)}(x_i),$$

x_i désignant la valeur commune de k_i des quantités (1), supposées égales entre elles, aucune d'elles ne l'étant à quelqu'une des $n - k_i$ autres. De cette manière, les équations (2) dont dépendent les n coefficients de $f_n(x)$ sont remplacées par d'autres de forme différente, mais toujours en nombre n et de nature à déterminer exactement ces coefficients. Ce dernier fait résulte implicitement de ce que nous verrons ci-après, et il est inutile de l'établir par un raisonnement spécial.

La méthode d'approximation de Newton pour le calcul des racines des équations numériques implique une interpolation de cette espèce plus générale; car, au fond, elle revient à remplacer le premier membre de l'équation proposée par un polynôme de premier degré assujetti à la double condition de prendre, lui et sa dérivée, pour une certaine valeur de x, les mêmes valeurs que ce premier membre et sa dérivée. La méthode des parties proportionnelles, au contraire, implique une interpolation, toujours du premier degré, mais de l'espèce ordinaire, c'est-à-dire de nature à pouvoir être exécutée par la formule de Lagrange. A ce point de vue, il n'y a donc aucune différence essentielle entre les deux méthodes.

7. *Le polynôme de degré $<n$, $f_n(x)$, qui est lié à $f(x)$ relativement aux valeurs* (1) *de x par les n équations analogues à* (3), *est donné par la formule*

$$f_n(x) = \omega(x) \mathop{\mathcal{E}}_t \frac{f(t)}{[\omega(t)](x-t)}, \tag{4}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Pour que les conditions (3) soient satisfaites, il est nécessaire et suffisant que la fonction

$$\frac{f(x)-f_n(x)}{(x-x_i)^{k_i}}$$

soit olotrope en $x = x_i$, ou bien ce qui revient au même, puisque $x - x_i$ n'entre que k_i fois comme facteur dans $\omega(x)$, que

$$\frac{f(x)-f_n(x)}{\omega(x)} \tag{5}$$

jouisse de la même propriété; et de même en $x = x_1$, ou $= x_2$, ..., ou $= x_n$.

La fonction (5) doit donc être olotrope dans toute l'aire (S); par suite, le groupe de fractions simples correspondant à ses infinis apparents (1), qu'il faut retrancher d'elle pour qu'elle jouisse de cette propriété, doit être identiquement nul. D'où (4, I) l'identité

$$\mathop{\mathcal{E}}_t \frac{f(t)-f_n(t)}{[\omega(t)](x-t)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{E}_t \frac{f_n(t)}{[\omega(t)](x-t)} = \mathcal{E}_t \frac{f(t)}{[\omega(t)](x-t)}.$$

Mais (4, II) le premier membre représente l'ensemble des fractions simples que donne la décomposition de la fraction rationnelle $\frac{f_n(x)}{\omega(x)}$, et même la totalité du résultat de cette décomposition, puisque le degré du numérateur $f_n(x)$ est essentiellement inférieur à n, degré du dénominateur $\omega(x)$, et qu'ainsi le polynôme entier qui peut figurer dans ce résultat se réduit identiquement à zéro.

L'identité précédente donne donc

$$\frac{f_n(x)}{\omega(x)} = \mathcal{E}_t \frac{f(t)}{[\omega(t)](x-t)},$$

ce qui s'accorde bien avec la formule (4).

Réciproquement il est visible que le second membre de cette formule est un polynôme entier en x qui satisfait à toutes les conditions requises.

8. *Pour toute valeur de x située aussi dans l'aire* (S), *on a*

$$(6) \qquad f(x) - f_n(x) = \omega(x)\, \mathcal{E}_t \frac{f(t)}{[\omega(t)(t-x)]}.$$

D'après la formule (4), la somme des résidus partiels relatifs aux racines (1) de l'équation $\omega(t) = 0$ se réduit effectivement à $-\frac{f_n(x)}{\omega(x)}$. Quant au résidu partiel relatif à $t = x$, il se réduit évidemment à $\frac{f(x)}{\omega(x)}$.

9. *La fonction $f(x)$ étant supposée olotrope à l'intérieur d'une circonférence $(x_0 r')$ ayant x_0 pour centre et r' pour rayon, la condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $f_n(x)$, construit par interpolation de manière à coïncider numériquement, lui et ses dérivées éventuellement, avec $f(x)$ et ses dérivées, quand x prend une quelconque des valeurs* (iné-

gales ou égales) de la suite (1) *tombant toutes à l'intérieur de* $(x_0 r')$, *représente* $f(x)$ *avec une approximation aussi grande qu'on le voudra pour toute valeur de* x *tombant dans un autre cercle* $(x_0 r)$ *de même centre* x_0 *et de rayon* r, *cette condition, dis-je, est que, pour toute valeur* x' *de* x *située dans le cercle* $(x_0 r')$, *le développement de* $f(x'+h)$ *par la formule de Taylor converge jusqu'à un module de* h *au moins égal à la distance maximum de* x' *aux points de l'intérieur de* $(x_0 r)$; *ou bien encore, car cela revient au même, que le développement de* $f(x_0+h)$ *converge jusqu'à quelque limite du module de* h *supérieure à* $r+2r'$.

L'équivalence de deux formes sous lesquelles est formulée la condition dont il s'agit résulte de la relation qui existe entre l'étendue de l'aire où une fonction est olotrope et la valeur maxima de son olomètre en chaque point de cette aire (*voir* notamment le n° 86 de mon *Nouveau Précis*). Pour simplifier, nous raisonnerons dans l'hypothèse $x_0 = 0$, à laquelle toute autre se ramènerait immédiatement en posant

$$x = x_0 + {}'x, \quad x_1 = x_0 + {}'x_1, \quad \ldots.$$

La nécessité de la condition posée est évidente, dans le cas tout au moins que nous considérons, où aucune hypothèse particulière n'est faite sur les positions des quantités (1) dans le cercle $(\mathrm{O}r')$. Supposons effectivement que ces n quantités soient toutes égales entre elles, en ayant, par exemple, x' pour valeur commune. Alors le polynôme $f_n(x)$ coïncide évidemment avec l'ensemble des n premiers termes du développement de $f(x' + \overline{x - x'})$ par la série de Taylor. Pour que la différence $f(x) - f_n(x)$ tende vers zéro quand n augmente indéfiniment, il faut donc que la somme de ces n premiers termes ait $f(x)$ pour limite, en d'autres termes que le développement de $f(x' + \overline{x - x'})$ converge tant que x reste dans $(\mathrm{O}r)$, ou bien encore que le rayon de convergence de ce développement soit au moins égal à la distance maxima de x' aux points intérieurs au cercle $(\mathrm{O}r)$.

Pour prouver que la condition posée est suffisante, nous la prendrons sous la seconde forme de l'énoncé. Nous écrirons

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

pour le développement de $f(x)$ par la formule de Maclaurin; nous nommerons R une quantité positive comprise entre $r+2r'$ et le rayon de convergence de cette série qui, par hypothèse, surpasse $r+2r'$; nous désignerons par M la limite supérieure que l'on peut assigner à mod. $f(x)$, pour toutes les valeurs de x ayant R pour module commun.

Cela posé, considérons la série

$$\sum_0^\infty{}_k\, a_{n+k}\,\mathrm{X}_k, \tag{7}$$

X_k désignant la somme de tous les monômes entiers dissemblables en $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de degré k et de coefficient 1. En appelant α_m, $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n$ les modules de $a_m, x, x_1, \ldots, x_n$, on a, d'après un lemme de Cauchy bien connu (*Nouveau Précis*, n° 84)

$$\alpha_m < \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}^m};$$

moyennant quoi la somme des modules des termes élémentaires de $a_{n+k}\mathrm{X}_k$ est inférieur à

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}^n}\,\Xi_k, \tag{8}$$

Ξ_k désignant ce que devient X_k quand on y substitue

$$\frac{\xi}{\mathrm{R}},\ \frac{\xi_1}{\mathrm{R}},\ \ldots,\ \frac{\xi_n}{\mathrm{R}} \tag{9}$$

à $x, x_1, \ldots, x_n$ respectivement.

Or les quantités positives (9) étant toutes <1, la série qui a (8) pour terme général est convergente, sa somme étant

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}^n}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\xi}{\mathrm{R}}\right)\left(1-\frac{\xi_1}{\mathrm{R}}\right)\cdots\left(1-\frac{\xi_n}{\mathrm{R}}\right)} = \frac{\mathrm{MR}}{(\mathrm{R}-\xi)(\mathrm{R}-\xi_1)\ldots(\mathrm{R}-\xi_n)}. \tag{10}$$

On en conclut (*Nouveau Précis*, n^{os} 30 et 31) que la série entière en x, x_1, ..., x_n formée par les termes élémentaires des polynômes $a_n X_0 (= a_n)$, $a_{n+1} X_1$, ... est convergente, par suite que la série (7) l'est aussi; que ces deux séries ont une même somme

$$F(x, x_1, \ldots, x_n),$$

dont le module satisfait aux inégalités

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{mod} F(x, x_1, \ldots, x_n) &< \frac{MR}{(R-\xi)(R-\xi_1)\ldots(R-\xi_n)} \\ &< \frac{MR}{(R-r)(R-r')^n}, \end{aligned} \right.$$

cette dernière ayant lieu *a fortiori* à cause de

$$(12) \qquad \xi < r; \quad \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n < r'.$$

Observons actuellement qu'en vertu du lemme (5) la somme des $k+1$ premiers termes de la série (7) est précisément ce que devient le résidu de la formule (6), quand on substitue à $f(t)$ la somme de $k+1$ premiers termes de son développement par la série de Maclaurin. Ce résidu est donc égal à la somme $F(x, x_1, \ldots, x_n)$ de cette série, ce qui permet de remplacer la relation (6) par

$$(13) \qquad f(x) - f_n(x) = \omega(x) F(x, x_1, \ldots, x_n).$$

Comme $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$, les inégalités (12) donnent celle-ci

$$\operatorname{mod.} \omega(x) < (r + r')^n,$$

dont la combinaison avec l'identité (13) et l'inégalité (11) donne finalement

$$(14) \qquad \operatorname{mod.} [f(x) - f_n(x)] < \frac{MR}{R-r}\left(\frac{r+r'}{R-r'}\right)^n.$$

On a, par hypothèse,

$$R > r + 2r', \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{r + r'}{R - r'} < 1;$$

il en résulte immédiatement, comme il fallait le prouver, que $\left(\frac{r+r'}{R-r'}\right)^n$ et mod $[f(x) - f_n(x)]$ à plus forte raison, sont des quantités infiniment petites quand n, nombre des valeurs de x qui ont servi à interpoler, augmente indéfiniment.

10. Cette proposition confirme pleinement, pour des aires circulaires, les inductions du n° **2**; je ne sais si l'on pourrait l'étendre à des aires de formes quelconques, mais c'est indifférent pour la pratique.

On conçoit que certaines hypothèses sur la distribution des quantités (1) dans le cercle (Or') puissent permettre d'abaisser la limite supérieure que la formule (14) assigne à l'erreur à craindre. Si, par exemple, ces quantités se rapprochaient toutes du centre de ce cercle d'une certaine longueur λ, on pourrait dans cette inégalité diminuer r' de λ, ce qui ferait évidemment décroître son second membre. Je ne m'engagerai pas dans cette discussion; je ferai toutefois remarquer que la limite dont il s'agit ne peut être sensiblement abaissée, tant qu'on ne veut faire aucune hypothèse spéciale sur la nature de $f(x)$, ou bien sur la distribution des quantités (1) dans le cercle (Or').

Posons effectivement $f(x) = \frac{N}{1 - x}$, N étant une quantité positive, et prenons, dans les conditions voulues, les quantités (1) toutes positives, mais x négative et $= -\mathrm{x}$. On trouve facilement, au lieu de l'inégalité (14), l'égalité

$$\text{val. num.}\,[f(x) - f_n(x)] = \frac{N}{1+\mathrm{x}}\,\frac{\mathrm{x} + x_1}{1 - x_1}\,\frac{\mathrm{x} + x_2}{1 - x_2}\cdots\frac{\mathrm{x} + x_n}{1 - x_n}.$$

Ici 1 remplace R et il est visible qu'un choix convenable de x, x_1, x_2, ..., x_n peut amener le produit des n derniers facteurs du second membre à différer aussi peu qu'on le veut de $\left(\frac{r + r'}{1 - r'}\right)^n$.

La formule (13) avait déjà été obtenue par Gauss, mais d'une autre manière et dans le cas seulement où les quantités (1) sont inégales, abstraction faite de toute considération de convergence [*Theoria interpolationis, etc.* (*Werke,* Bd. III, S. 276)]. La formule (4), pour le même cas particulier, a été donnée par Cauchy dans son premier Mémoire sur le calcul des résidus, où l'on trouvera également les principes que j'ai rappelés ci-dessus (*Exercices de Mathématiques,* première année, p. 21 et suiv.).