P. APPELL

Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 1 (1884), p. 135-164
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1884_3_1__135_0>

SUR LES

FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

DE

TROISIÈME ESPÈCE[1],

PAR M. P. APPELL,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE.

Ce Mémoire a pour objet l'étude des fonctions doublement périodiques de troisième espèce et plus particulièrement la décomposition de ces fonctions en éléments simples. Il se termine par quelques remarques sur certaines fonctions d'un point analytique (x, y) qui peuvent être considérées comme la généralisation des fonctions obtenues en remplaçant l'argument d'une fonction doublement périodique de troisième espèce par l'intégrale elliptique de première espèce correspondante.

Les principaux résultats démontrés dans ce Mémoire se trouvent indiqués dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences le 17 décembre 1883.

Soit $\varphi(z)$ une fonction uniforme de la variable imaginaire z vérifiant les deux équations

$$\begin{aligned} \varphi(z+2\mathrm{K}) &= e^{az+b}\varphi(z), \\ \varphi(z+2i\mathrm{K}') &= e^{a'z+b'}\varphi(z), \end{aligned}$$

(1) *Voir*, au sujet de ces fonctions, différentes Notes de M. Hermite dans les *Comptes rendus* des années 1861 et 1862. *Voir* aussi la Thèse d'Analyse présentée à la Faculté des Sciences de Paris par M. Biehler, avril 1879.

a, b, a', b' étant des constantes. Si l'on pose

$$f(z) = e^{\lambda z^2 + \lambda' z}\varphi(z),$$

on pourra toujours [1] déterminer λ et λ' de façon que

$$(1) \qquad f(z + 2K) = f(z), \quad f(z + 2iK') = e^{Az+B} f(z),$$

où A est nécessairement de la forme

$$A = -\frac{m\pi i}{K},$$

m désignant un *entier* positif, négatif ou nul.

Lorque ce nombre m est nul, la fonction $f(z)$ est, d'après les dénominations introduites par M. Hermite, une fonction doublement périodique de première ou de seconde espèce; de première si e^B est égal à l'unité, de seconde si e^B est différent de l'unité. M. Hermite a donné des formules de la plus haute importance pour la décomposition en éléments simples de ces fonctions de première et de seconde espèce. Nous nous plaçons ici dans l'hypothèse $m \gtrless 0$; dans ce cas, la fonction $f(z)$ est une fonction doublement périodique de *troisième espèce*. Si nous supposons que cette fonction soit méromorphe, c'est-à-dire qu'elle n'ait à distance finie d'autres points singuliers que des pôles, la différence entre le nombre des zéros et le nombre des infinis qu'elle possède dans un parallélogramme des périodes $2K$ et $2iK'$ est égale à m; en effet, en vertu des relations (1), l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

prise sur le contour d'un parallélogramme des périodes est égale à m. Si donc m est positif, $f(z)$ a plus de zéros que de pôles, et en particulier il existe des fonctions entières vérifiant les équations (1); si, au contraire, m est négatif, $f(z)$ a plus de pôles que de zéros, et il n'existe pas de fonctions entières vérifiant ces équations. Dans les deux cas, nous nous proposons de décomposer $f(z)$ en une somme d'éléments

---

[1] *Voir*, par exemple, *Théorie des fonctions elliptiques* de MM. Briot et Bouquet, p. 236.

simples n'ayant chacun qu'un pôle dans un parallélogramme des périodes, et en une partie entière s'il y a lieu.

Comme m est supposé différent de zéro, nous pouvons poser

$$F(z) = f\left(z + \frac{BK}{m\pi i}\right);$$

cette fonction $F(z)$ vérifie alors les deux relations

$$(2) \qquad F(z+2K) = F(z), \quad F(z+2iK') = e^{-\frac{m\pi zi}{K}} F(z);$$

c'est cette fonction $F(z)$ que nous allons décomposer en éléments simples. Les circonstances qui se présentent sont entièrement différentes suivant que m est positif ou négatif; nous allons examiner successivement ces deux hypothèses.

I. $m > 0$.

1. Supposons d'abord que la fonction $F(z)$ soit méromorphe; si elle devient infinie en p points d'un parallélogramme des périodes, elle s'y annule en $(p+m)$ points.

Soient, dans ce cas,

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m+p}$$

les zéros de $F(z)$ dans un parallélogramme des périodes,

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$$

les infinis dans ce même parallélogramme; ces quantités sont liées par la relation

$$(3) \qquad \Sigma\beta - \Sigma\alpha + mK = 2nK + 2n'iK',$$

$\Sigma\beta$ désignant la somme des zéros, $\Sigma\alpha$ celle des infinis, n et n' des entiers. En effet, dans ces hypothèses, la fonction $F(z)$ peut, d'après les notations de Jacobi, se mettre sous la forme

$$F(z) = Ce^{hz}\frac{H(z-\beta_1)H(z-\beta_2)\ldots H(z-\beta_{m+p})}{H(z-\alpha_1)H(z-\alpha_2)\ldots H(z-\alpha_p)};$$

écrivons que cette fonction $F(z)$ satisfait aux relations (2), en nous rappelant les formules

$$H(z+2K)=-H(z),\quad H(z+2iK')=-\frac{1}{q}e^{-\frac{\pi z i}{K}}H(z),$$

dans lesquelles $q=e^{-\frac{\pi K'}{K}}$. Nous obtenons les deux relations

$$(-1)^m e^{2hK}=1,\quad (-1)^m e^{2hiK'+\frac{\pi i}{K}(\Sigma\beta-\Sigma\alpha)}=q^m;$$

ces deux relations donnent : la première

$$2hK=m\pi i-2n'\pi i,$$

la seconde

$$2hiK'+\frac{\pi i}{K}(\Sigma\beta-\Sigma\alpha)=-m\pi i-\frac{m\pi K'}{K}+2n\pi i;$$

en éliminant h entre ces deux dernières équations, on trouve la formule (3) à démontrer.

Il peut se faire, en particulier, que le nombre p des infinis soit *nul;* la fonction $F(z)$ est alors entière et admet m zéros

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m;$$

dans ce cas la formule (3) devient

$$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m+mK=2nK+2n'iK'. \tag{3'}$$

2. Ceci posé, occupons-nous d'abord des fonctions entières vérifiant les relations (2); l'application du développement en série de Fourier et la méthode des coefficients indéterminés fournissent immédiatement la fonction entière la plus générale vérifiant les équations (2); cette fonction est une fonction linéaire homogène à coefficients constants de m fonctions spéciales [1] obtenues comme il suit. Posons

$$g_\nu^{(m)}(z)=e^{\frac{\nu\pi z i}{K}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}e^{\frac{mn\pi z i}{K}}q^{mn(n-1)+2n\nu}, \tag{4}$$

où q désigne, comme plus haut, la quantité $e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ et où ν est un *entier*

---

[1] *Voir* le Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris par M. Hermite, 1re édition, p. 166.

quelconque. On voit immédiatement, en changeant, dans la série (4), n en $n+1$, que l'on a

$$g_{\nu+m}^{(m)}(z) = q^{-2\nu} g_{\nu}^{(m)}(z);$$

il n'y a donc que m fonctions $g_{\nu}^{(m)}(z)$ distinctes, obtenues en donnant, à ν, m valeurs entières consécutives; par exemple, les fonctions

$$g_0^{(m)}(z),\quad g_1^{(m)}(z),\quad \ldots,\quad g_{m-1}^{(m)}(z),$$

obtenues en faisant $\nu = 0, 1, 2, \ldots, (m-1)$. Toutes ces fonctions vérifient les relations (2); elles peuvent s'exprimer toutes à l'aide de l'une quelconque d'entre elles : ainsi

$$g_{\nu}^{(m)}(z) = e^{\frac{\nu\pi z i}{K}} g_0^{(m)}\left(z + \frac{2\nu i K'}{m}\right),$$

comme on le vérifie immédiatement. La fonction entière $\Phi(z)$ la plus générale vérifiant les relations (2) est alors

$$\Phi(z) = \lambda_0 g_0^{(m)}(z) + \lambda_1 g_1^{(m)}(z) + \ldots + \lambda_{m-1} g_{m-1}^{(m)}(z) \tag{5}$$

avec m coefficients arbitraires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$. Toutes ces fonctions peuvent, d'ailleurs, s'exprimer à l'aide des fonctions θ, comme le montrent MM. Briot et Bouquet à l'endroit déjà cité plus haut (1). Chacune des fonctions (5) a, dans un parallélogramme des périodes, m zéros; on peut déterminer les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ de façon que $(m-1)$ de ces zéros coïncident avec des points donnés d'avance

$$z_1,\quad z_2,\quad \ldots,\quad z_{m-1};$$

le dernier z_m est alors déterminé, en vertu de l'équation (3'), par l'équation

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_{m-1} + z_m + mK = 2nK + 2n'iK', \tag{5'}$$

n et n' étant deux entiers.

Si l'on voulait exprimer directement que la fonction (5) s'annule aux m points distincts

$$z_1,\quad z_2,\quad \ldots,\quad z_m,$$

---

(1) On a, par exemple, $g_0^{(1)}(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{\frac{\pi z i}{2K}} H_1(z)$.

on obtiendrait m équations linéaires homogènes par rapport aux coefficients

$$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1},$$

et l'on trouverait, comme condition de possibilité, que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_0^{(m)}(z_1) & g_1^{(m)}(z_1) & \ldots & g_{m-1}^{(m)}(z_1) \\ g_0^{(m)}(z_2) & g_1^{(m)}(z_2) & \ldots & g_{m-1}^{(m)}(z_2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ g_0^{(m)}(z_m) & g_1^{(m)}(z_m) & \ldots & g_{m-1}^{(m)}(z_m) \end{vmatrix}$$

doit être égal à zéro; cette relation transcendante doit conduire à la relation (5'). Or cela résulte de ce que l'on a identiquement

$$(6) \qquad \Delta = A e^{\frac{m\pi i}{2K}(z_1+z_2+\ldots+z_m)} H(z_1+z_2+\ldots+z_m+mK) \prod_{i,j} H(z_i - z_j),$$

le produit $\prod\limits_{i,j}$ étant étendu aux $\frac{m(m-1)}{2}$ fonctions $H(z_i - z_j)$ ayant pour arguments les différences des quantités $z_1, z_2, \ldots, z_m$ deux à deux, et A désignant une constante. Cette identité se démontre facilement : il suffit pour cela de considérer le déterminant Δ successivement comme fonction de $z_1, z_2, \ldots, z_m$, et de remarquer que Δ considéré comme fonction de z_i vérifie les relations (2) et s'annule aux $(m-1)$ points

$$z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_m$$

et, par suite, d'après la relation (3'), au point

$$-(z_1+z_2+\ldots+z_{i-1}+z_{i+1}+\ldots+z_m+mK).$$

Cette identité (6) donne naissance à d'autres relations plus particulières si l'on suppose qu'un certain nombre des quantités $z_1, z_2, \ldots, z_m$ deviennent égales entre elles. Par exemple, si toutes ces quantités deviennent égales entre elles et égales à z, on obtient la relation

$$\begin{vmatrix} g_0^{(m)}(z) & g_1^{(m)}(z) & \ldots & g_{m-1}^{(m)}(z) \\ \frac{dg_0^{(m)}(z)}{dz} & \frac{dg_1^{(m)}(z)}{dz} & \ldots & \frac{dg_{m-1}^{(m)}(z)}{dz} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{d^{m-1} g_0^{(m)}(z)}{dz^{m-1}} & \frac{d^{m-1} g_1^{(m)}(z)}{dz^{m-1}} & \ldots & \frac{d^{m-1} g_{m-1}^{(m)}(z)}{dz^{m-1}} \end{vmatrix} = B e^{\frac{m^2\pi z i}{2K}} H(mz+mK),$$

B désignant une constante qu'il serait facile d'exprimer en fonction de A.

3. Soit maintenant F(z) une fonction mémorphe vérifiant les relations (2) : nous nous proposons de la décomposer en éléments simples et en une partie entière. L'élément de la décomposition sera la fonction

$$\psi_m(z,\alpha) = e^{\frac{m\pi(z-\alpha)i}{2K}} \frac{H'(0)}{H(z-\alpha)} \frac{H(z-a_1)H(z-a_2)\ldots H(z-a_{m+1})}{H(\alpha-a_1)H(\alpha-a_2)\ldots H(\alpha-a_{m+1})},$$

les lettres $a_1, a_2, \ldots, a_m$ désignant des constantes *arbitraires*, et a_{m+1} étant déterminée par la relation

$$(7)\qquad a_{m+1} = \alpha + mK - a_1 - a_2 - \ldots - a_m;$$

aucune de ces constantes $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ne doit être de la forme $\alpha + 2nK + 2n'iK'$ (n et n' entiers), et leur somme ne doit pas être de la forme $mK + 2nK + 2n'iK'$. Alors la fonction $\psi_m(z,\alpha)$ est une fonction de z admettant pour pôles simples le point α et ses homologues $\alpha + 2nK + 2n'iK'$, avec le résidu $+1$ au point α; de plus elle vérifie les deux relations

$$\psi_m(z+2K,\alpha) = \psi_m(z,\alpha), \quad \psi_m(z+2iK',\alpha) = e^{-\frac{m\pi z i}{K}}\psi_m(z,\alpha),$$

ainsi qu'il résulte des propriétés de la fonction H(z).

Mais il importe d'étudier aussi les propriétés de $\psi_m(z,\alpha)$ considéré comme fonction de α. En remplaçant a_{m+1} par sa valeur (7), on a

$$\psi_m(z,\alpha) = e^{\frac{m\pi(z-\alpha)i}{2K}} \frac{H'(0)}{H(z-\alpha)} \frac{H(z-a_1)\ldots H(z-a_m)}{H(\alpha-a_1)\ldots H(\alpha-a_m)} \frac{H(z+s-\alpha-mK)}{H(s-mK)},$$

où s désigne la somme $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$.

On voit que $\psi_m(z,\alpha)$, considéré comme fonction de α, admet pour pôles simples les points $\alpha = z$, $\alpha = a_1, \ldots, \alpha = a_m$ et leurs homologues, le point z avec le résidu -1; de plus, on vérifie aisément que cette fonction satisfait aux deux relations

$$(8)\qquad \begin{cases} \psi_m(z,\alpha+2K) = \psi_m(z,\alpha), \\ \psi_m(z,\alpha+2iK') = e^{\frac{m\pi\alpha i}{K}}\psi_m(z,\alpha). \end{cases}$$

Il convient, pour ce qui suit, de former les résidus de $\psi_m(z, \alpha)$ considéré comme fonction de α relativement aux pôles

$$a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_m.$$

Désignons par $G_\nu(z)$ le résidu relatif au pôle $\alpha = a_\nu$; nous aurons

$$G_\nu(z) = e^{\frac{m\pi(z-a_\nu)i}{2K}} \frac{H(z-a_1)\ldots H(z-a_{\nu-1})H(z-a_{\nu+1})\ldots H(z-a_m)}{H(a_\nu-a_1)\ldots H(a_\nu-a_{\nu-1})H(a_\nu-a_{\nu+1})\ldots H(a_\nu-a_m)} \frac{H(z+s-a_\nu-mK)}{H(s-mK)};$$

en faisant $\nu = 1, 2, \ldots, m$, on aura les m résidus cherchés.

Chacun de ces résidus $G_\nu(z)$ est une fonction *entière* de z vérifiant les équations (2); on pourrait donc l'exprimer à l'aide des fonctions $g_\nu^{(m)}(z)$ définies dans le numéro précédent.

Supposons alors que la fonction proposée $F(z)$, qui satisfait aux relations (2) et qu'il s'agit de décomposer en éléments simples, admette, dans un parallélogramme des périodes, les p pôles simples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ avec les résidus respectifs $R_1, R_2, \ldots, R_p$. Considérons la fonction de α

$$\Psi(\alpha) = F(\alpha)\,\psi_m(z, \alpha);$$

cette fonction de α admet les deux périodes $2K$ et $2iK'$: en effet, chacun des facteurs $F(\alpha)$ et $\psi_m(z, \alpha)$ admet la période $2K$, et, lorsqu'on augmente α de $2iK'$, le premier facteur est multiplié par $e^{-\frac{m\pi\alpha i}{K}}$, le second par $e^{\frac{m\pi\alpha i}{K}}$, et leur produit ne change pas. La fonction $\Psi(\alpha)$ étant doublement périodique, la somme des résidus de cette fonction relatifs aux pôles situés dans un parallélogramme des périodes est égale à zéro. Je puis supposer que le point z, les pôles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ de $F(\alpha)$ et les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_m$ soient dans un même parallélogramme élémentaire; ces différents points seront alors les pôles de $\Psi(\alpha)$ dans un parallélogramme des périodes; les résidus correspondants de $\Psi(\alpha)$ sont :

Pour le point z,

$$-F(z);$$

pour les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$,

$$R_1\psi_m(z, \alpha_1), \; R_2\psi_m(z, \alpha_2), \; \ldots, \; R_p\psi_m(z, \alpha_p);$$

pour les points $a_1, a_2, \ldots, a_m$,

$$F(a_1)G_1(z),\ F(a_2)G_2(z),\ \ldots,\ F(a_m)G_m(z).$$

Puisque la somme de tous ces résidus est nulle, on a l'équation

$$F(z) = R_1\psi_m(z, \alpha_1) + R_2\psi_m(z, \alpha_2) + \ldots + R_p\psi_m(z, \alpha_p) + G(z), \tag{8}$$

$G(z)$ désignant la fonction entière

$$G(z) = F(a_1)G_1(z) + F(a_2)G_2(z) + \ldots + F(a_m)G_m(z). \tag{8'}$$

La fonction $F(z)$ est, par cette formule (8), décomposée en une somme d'éléments simples

$$R_1\psi_m(z, \alpha_1),\ \ldots,\ R_p\psi_m(z, \alpha_p),$$

n'ayant chacun qu'un pôle dans un parallélogramme des périodes, augmentée d'une fonction entière $G(z)$ définie par l'équation (8').

Jusqu'à présent nous avons laissé les m quantités $a_1, a_2, \ldots, a_m$ entièrement arbitraires; dans une application on pourra particulariser ces constantes, de façon à simplifier la formule obtenue. Par exemple, si la fonction $F(z)$, qui possède dans un parallélogramme des périodes $(m+p)$ zéros, admet m zéros distincts connus, on pourra prendre a_1, $a_2, \ldots, a_m$ égaux respectivement à ces m zéros, et alors la partie entière $G(z)$ sera nulle, puisque tous les facteurs $F(a_1)$, $F(a_2)$, $\ldots$, $F(a_m)$ seront nuls.

Dans ce qui précède, on a supposé les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_m$ distinctes à des multiples des périodes près. S'il n'en était pas ainsi, la forme de la partie entière $G(z)$ devrait être modifiée. Ainsi, en supposant par exemple $a_2 = a_1$, le résidu de $\Psi(\alpha)$ relatif à l'infini $\alpha = a_1$ n'est plus $F(a_1)G_1(z)$; ce résidu prend une nouvelle forme dépendant de $F(a_1)$ et $F'(a_1)$. Mais je n'insiste pas sur ce fait qui offre peu d'intérêt, en me bornant à remarquer que, dans tous les cas, on pourra prendre les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_m$ égales à m zéros distincts ou non de $F(z)$, et qu'alors la partie entière $G(z)$ sera toujours nulle, car le produit désigné par $\Psi(\alpha)$ ne deviendra plus infini pour $\alpha = a_1$, $a_2, \ldots, a_m$.

4. Il est plus important de se rendre compte des modifications que subit la formule de décomposition (8) quand la fonction $F(z)$ admet des pôles d'un degré plus élevé que le premier. Supposons que le pôle $z = \alpha_1$ soit d'ordre r et que, dans le voisinage de ce point, on ait

$$F(z) = \frac{R_1}{z - \alpha_1} + \frac{R'_1}{(z - \alpha_1)^2} + \ldots + \frac{R_1^{(r-1)}}{(z - \alpha_1)^r} + F_1(z),$$

$F_1(z)$ étant holomorphe dans le voisinage de α_1. Si alors nous nous reportons à la fonction de α

$$\Psi(\alpha) = F(\alpha)\,\psi_m(z, \alpha),$$

nous voyons que cette fonction admet le pôle $\alpha = \alpha_1$ au degré r; pour avoir le résidu de cette fonction relativement à ce pôle, il suffit de prendre le coefficient de

$$\frac{1}{\alpha - \alpha_1}$$

dans le produit des deux développements

$$F(\alpha) = \frac{R_1}{\alpha - \alpha_1} + \frac{R'_1}{(\alpha - \alpha_1)^2} + \ldots + \frac{R_1^{(r-1)}}{(\alpha - \alpha_1)^r} + F_1(\alpha),$$

$$\begin{aligned}\psi_m(z, \alpha) = \psi_m(z, \alpha_1) &+ (\alpha - \alpha_1)\,\psi'_m(z, \alpha_1) + \ldots \\ &+ \frac{(\alpha - \alpha_1)^{r-1}}{1.2\ldots(r-1)}\,\psi_m^{(r-1)}(z, \alpha_1) + \ldots.\end{aligned}$$

On trouve ainsi que ce résidu est égal à

$$R_1\psi_m(z, \alpha_1) + R'_1\psi'_m(z, \alpha_1) + \ldots + \frac{R_1^{(r-1)}}{1.2\ldots(r-1)}\,\psi_m^{(r-1)}(z, \alpha_1);$$

c'est donc par cette somme qu'il faudra remplacer le terme $R_1\psi_m(z, \alpha_1)$ dans la formule de décomposition (8).

5. On obtiendra, par les mêmes méthodes, une formule de décomposition pour le cas où la fonction $F(z)$ admet des points essentiels *isolés;* il suffira, par exemple, si $z = \alpha_1$ est un point singulier essentiel isolé, de supposer dans le paragraphe précédent $r = \infty$. En effet, un point essentiel isolé α_1 est un point tel que, dans un certain domaine de ce point, il n'y ait pas d'autre point singulier; on aura donc, dans

ce domaine,

$$F(z) = F_1(z) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{R_1^{(\nu-1)}}{(z-\alpha_1)^\nu},$$

$F_1(z)$ étant holomorphe dans le voisinage de $z = \alpha_1$. Le résidu de la fonction

$$\Psi(\alpha) = F(\alpha)\,\psi_m(z, \alpha),$$

relatif au point singulier essentiel isolé α_1, sera par suite

(9) $$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{R_1^{(\nu-1)}\,\psi_m^{(\nu-1)}(z, \alpha_1)}{1.2\ldots(\nu-1)},$$

$\psi_m^{(\nu-1)}(z, \alpha)$ désignant, comme précédemment, la dérivée d'ordre $(\nu-1)$ de $\psi_m(z, \alpha)$ par rapport à α; et c'est alors par cette quantité (9) qu'il faudra remplacer le terme $R_1\psi_m(z, \alpha_1)$ dans la formule de décomposition (8).

En particulier, l'expression la plus générale d'une fonction uniforme $F(z)$ vérifiant les relations (2) et n'ayant qu'un point singulier α_1 dans un parallélogramme des périodes, s'obtiendra en ajoutant à la série (9) la fonction entière $\Phi(z)$ définie par la relation (5).

La fonction la plus générale vérifiant les relations (2) et ayant p points singuliers dans un parallélogramme des périodes sera la somme de p fonctions de la forme (9) n'ayant chacune qu'un point singulier et d'une fonction entière de la forme (5).

II. $m < 0$.

6. Supposons maintenant que, dans les relations (2), m soit négatif et faisons

$$m = -\mu,$$

μ étant un entier positif. La fonction $F(z)$ qu'il s'agit de décomposer en éléments simples vérifie alors les deux équations

(10) $$F(z+2K) = F(z), \quad F(z+2iK') = e^{\frac{\mu\pi z}{K}} F(z),$$

Dans l'étude que nous allons faire de ces fonctions, le rôle principal appartient à certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes dont nous allons nous occuper tout d'abord.

7. Désignons par x et y deux variables complexes indépendantes, par μ un entier positif, et considérons la fonction de x et y définie par la série [1]

$$(11)\qquad \chi_\mu(x,y) = \frac{\pi i}{2\mathrm{K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n\pi y i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n(n-1)} \frac{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\mathrm{K}}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\mathrm{K}}} - q^{2n}}$$

ou bien

$$(11')\qquad \chi_\mu(x,y) = \frac{\pi}{2\mathrm{K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n\pi y i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n(n-1)} \cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x-y-2ni\mathrm{K}'),$$

où, suivant les notations de Jacobi, $q = e^{-\pi\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}$. Cette série (11) est convergente pour toutes les valeurs de x et y, à l'exception de celles qui sont données par la formule

$$x - y = 2n\mathrm{K} + 2n'i\mathrm{K}' \quad (n \text{ et } n' \text{ entiers}),$$

et pour lesquelles l'un des termes de la série devient infini.

Si l'on considère x comme une constante et y comme variable, la fonction $\chi_\mu(x,y)$ est une fonction uniforme de y n'ayant à distance finie d'autres points singuliers que des pôles du premier ordre, à savoir les points

$$y = x - 2n\mathrm{K} - 2n'i\mathrm{K}';$$

le résidu de cette fonction relatif au pôle $y = x$ est égal à -1. Elle vérifie les deux équations suivantes, qui s'établissent aisément :

$$(12)\qquad \begin{cases} \chi_\mu(x, y+2\mathrm{K}) = \chi_\mu(x,y), \\ \chi_\mu(x, y+2i\mathrm{K}') = e^{-\frac{\mu\pi y i}{\mathrm{K}}} \chi_\mu(x,y), \end{cases}$$

équations qui montrent que l'on pourrait exprimer cette fonction de y à l'aide des fonctions Θ (*voir* n° **11**).

---

(1) Dans la Note du 17 décembre 1883, j'ai considéré le cas particulier où $\mu = 1$; dans cette Note, la fonction $\chi_1(x,y)$ est désignée par $\chi(x,y)$ sans indice.

Si l'on considère, au contraire, y comme une constante et x comme variable, il se présente des circonstances entièrement différentes. La fonction $\chi_\mu(x,y)$ est alors une fonction uniforme de x n'ayant à distance finie d'autres points singuliers que des pôles du premier ordre, à savoir les points

$$x = y + 2n\mathrm{K} + 2n'i\mathrm{K}';$$

le résidu de cette fonction relatif au pôle $x=y$ est égal à $+1$. Elle vérifie d'abord l'équation

$$\chi_\mu(x+2\mathrm{K},y) = \chi_\mu(x,y), \tag{13}$$

puis l'équation

$$\left\{\begin{aligned} &\chi_\mu(x+2i\mathrm{K}',y)\\ &\quad = e^{\frac{\mu\pi x i}{\mathrm{K}}}\chi_\mu(x,y) - \frac{\pi i}{2\mathrm{K}}\left(1+e^{\frac{\mu\pi x i}{\mathrm{K}}}\right)g_0^{(\mu)}(y) - \frac{\pi i}{\mathrm{K}}e^{\frac{(\mu-1)\pi x i}{\mathrm{K}}}g_1^{(\mu)}(y)\\ &\qquad - \frac{\pi i}{\mathrm{K}}e^{\frac{(\mu-2)\pi x i}{\mathrm{K}}}g_2^{(\mu)}(y) - \ldots - \frac{\pi i}{\mathrm{K}}e^{\frac{\pi x i}{\mathrm{K}}}g_{\mu-1}^{(\mu)}(y), \end{aligned}\right. \tag{14}$$

où les μ fonctions

$$g_0^{(\mu)}(y),\ g_1^{(\mu)}(y),\ \ldots,\ g_{\mu-1}^{(\mu)}(y)$$

sont celles qui ont été définies dans le n° **2**, équation (4).

Pour démontrer cette relation fondamentale (14), remarquons que la série (11) nous donne

$$\chi_\mu(x+2i\mathrm{K}',y) = \frac{\pi i}{2\mathrm{K}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n\pi y i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n(n-1)} \frac{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\mathrm{K}}}+q^{2(n-1)}}{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\mathrm{K}}}-q^{2(n-1)}},$$

ou, en changeant n en $n+1$,

$$\chi_\mu(x+2i\mathrm{K}',y) = \frac{\pi i}{2\mathrm{K}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu(n+1)\pi y i}{\mathrm{K}}} q^{\mu n(n+1)} \frac{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\mathrm{K}}}+q^{2n}}{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\mathrm{K}}}-q^{2n}}. \tag{15}$$

Si nous formons alors la différence

$$\chi_\mu(x+2i\mathrm{K}',y) - e^{\frac{\mu\pi x i}{\mathrm{K}}}\cdot\chi_\mu(x,y), \tag{16}$$

nous voyons que cette différence peut s'écrire

$$(16') \qquad \frac{\pi i}{2K}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu(n+1)\pi y i}{K}} q^{\mu n(n-1)} \frac{\left(e^{\frac{\pi(x-y)i}{K}}+q^{2n}\right)\left(q^{2n\mu}-e^{\frac{\mu\pi(x-y)i}{K}}\right)}{e^{\frac{\pi(x-y)i}{K}}-q^{2n}};$$

en posant, pour un moment,

$$(17) \qquad e^{\frac{\pi(x-y)i}{K}} = t, \quad q^{2n} = u,$$

on voit que, dans la somme (16′), le coefficient de

$$e^{\frac{\mu(n+1)\pi y i}{K}} q^{\mu n(n-1)}$$

s'écrit

$$\frac{(t+u)(u^\mu - t^\mu)}{t-u},$$

c'est-à-dire, en effectuant la division,

$$-(t+u)(t^{\mu-1}+t^{\mu-2}u+\ldots+u^{\mu-1})$$

ou encore

$$-(t^\mu + 2t^{\mu-1}u + 2t^{\mu-2}u^2 + \ldots + 2tu^{\mu-1} + u^\mu).$$

La somme (16′) peut donc s'écrire

$$(16'') \qquad -\frac{\pi i}{2K}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu(n+1)\pi y i}{K}} q^{\mu n(n-1)}(t^\mu + 2t^{\mu-1}u + \ldots + 2tu^{\mu-1} + u^\mu);$$

cette série se partage en $(\mu+1)$ séries qui sont, en remettant pour t et u leurs valeurs (17) : la première,

$$-\frac{\pi i}{2K} e^{\frac{\mu\pi x i}{K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n\pi y i}{K}} q^{\mu n(n-1)} = -\frac{\pi i}{2K} e^{\frac{\mu\pi x i}{K}} g_0^{(\mu)}(y);$$

la deuxième,

$$-\frac{\pi i}{K} e^{\frac{(\mu-1)\pi x i}{K}} e^{\frac{\pi y i}{K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n\pi y i}{K}} q^{\mu n(n-1)+2n} = -\frac{\pi i}{K} e^{\frac{(\mu-1)\pi x i}{K}} g_1^{(\mu)}(y);$$

et ainsi de suite, la $(\nu+1)^{\text{ième}}$,

$$-\frac{\pi i}{K} e^{\frac{(\mu-\nu)\pi x i}{K}} e^{\frac{\nu\pi y i}{K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu n \pi y i}{K}} q^{\mu n(n-1)+2n\nu},$$

c'est-à-dire

$$-\frac{\pi i}{K} e^{\frac{(\mu-\nu)\pi x i}{K}} g_\nu'^{(\mu)}(y);$$

enfin la dernière ou $(\mu+1)^{\text{ième}}$ de ces séries est

$$-\frac{\pi i}{2K} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\mu(n+1)\pi y i}{K}} q^{\mu n(n+1)},$$

c'est-à-dire

$$-\frac{\pi i}{2K} g_0'^{(\mu)}(y),$$

comme on le voit en changeant n en $n-1$.

La différence (16) est donc

$$-\frac{\pi i}{2K} e^{\frac{\mu\pi x i}{K}} g_0'^{(\mu)}(y) - \frac{\pi i}{K} e^{\frac{(\mu-1)\pi x i}{K}} g_1'^{(\mu)}(y) - \ldots$$
$$-\frac{\pi i}{K} e^{\frac{(\mu-\nu)\pi x i}{K}} g_\nu'^{(\mu)}(y) - \ldots - \frac{\pi i}{2K} g_0'^{(\mu)}(y);$$

ce qui démontre la formule (14).

Dans le cas particulier où $\mu=1$, la fonction $\chi_\mu(x,y)$ devient

$$\chi_1(x,y) = \frac{\pi i}{2K} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{n\pi y i}{K}} q^{n(n-1)} \frac{e^{\frac{\pi(x-y)i}{K}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(x-y)i}{K}} - q^{2n}}$$

ou, sous la deuxième forme,

$$\chi_1(x,y) = \frac{\pi}{2K} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{n\pi y i}{K}} q^{n(n-1)} \cot \frac{\pi}{2K}(x-y-2niK');$$

cette fonction vérifie les relations

$$\chi_1(x, y+2K) = \chi_1(x, y), \quad \chi_1(x, y+2iK') = e^{-\frac{\pi y i}{K}} \chi_1(x, y),$$

$$\chi_1(x+2K, y) = \chi_1(x, y),$$

$$\chi_1(x+2iK', y) = e^{\frac{\pi x i}{K}} \chi_1(x, y) - \frac{\pi i}{2K}\left(1 + e^{\frac{\pi x i}{K}}\right) g_0^{(1)}(y),$$

où

$$g_0^{(1)}(y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{n\pi y i}{K}} q^{n(n-1)} = \frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{\frac{\pi y i}{2K}} H_1(y).$$

On conclut de la dernière de ces formules la conséquence suivante : si l'on fait $y = K$, on a

$$H_1(y) = 0;$$

donc la fonction

$$\chi_1(x, K)$$

vérifie les deux relations

$$\chi_1(x+2K, K) = \chi_1(x, K),$$
$$\chi_1(x+2iK', K) = e^{\frac{\pi x i}{K}} \chi_1(x, K),$$

car le terme complémentaire

$$-\frac{\pi i}{2K}\left(1 + e^{\frac{\pi x i}{K}}\right) g_0^{(1)}(y)$$

est nul pour $y = K$. D'autre part, la fonction $g_0^{(1)}(x)$ vérifie les deux relations

$$g_0^{(1)}(x+2K) = g_0^{(1)}(x), \quad g_0^{(1)}(x+2iK') = e^{-\frac{\pi x i}{K}} g_0^{(1)}(x);$$

et cette fonction $g_0^{(1)}(x)$ s'annule aux points

$$x = K + 2nK + 2n'iK',$$

qui sont les pôles de $\chi_1(x, K)$. Le produit

$$g_0^{(1)}(x) \chi_1(x, K)$$

est donc une fonction *entière* de x *doublement périodique*, c'est-à-dire une constante P.

On a donc

$$\chi_1(x, \mathrm{K}) = \frac{\mathrm{P}}{g_0^{(1)}(x)} = \frac{\mathrm{P}\sqrt[4]{q}\, e^{-\frac{\pi x i}{2\mathrm{K}}}}{\mathrm{H}_1(x)};$$

en multipliant les deux membres par $x - \mathrm{K}$, puis faisant $x = \mathrm{K}$, on trouve

$$1 = \frac{\mathrm{P}\, i \sqrt[4]{q}}{\mathrm{H}'(0)},$$

équation qui donne P.

L'expression que nous venons de trouver pour $\chi_1(x, \mathrm{K})$ s'obtiendrait facilement en appliquant, à la fonction $\frac{1}{g_0^{(1)}(x)}$, la formule de décomposition en éléments simples que nous allons maintenant établir.

8. Supposons que l'on ait une fonction uniforme $\mathrm{F}(z)$ satisfaisant aux relations (10) et admettant, dans un parallélogramme des périodes, les p pôles simples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ avec les résidus respectifs $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots, \mathrm{R}_p$. Pour obtenir une formule de décomposition de cette fonction en éléments simples, considérons le produit

$$\Phi(y) = \mathrm{F}(y)\chi_\mu(x, y);$$

la fonction $\Phi(y)$ ainsi définie admet les deux périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$; en effet, chacun des facteurs $\mathrm{F}(y)$ et $\chi_\mu(x, y)$ admet la période $2\mathrm{K}$, et lorsqu'on augmente y de $2i\mathrm{K}'$ le premier facteur est multiplié par $e^{\frac{\mu\pi y i}{\mathrm{K}}}$, le second par $e^{-\frac{\mu\pi y i}{\mathrm{K}}}$, et leur produit ne change pas. La fonction $\Phi(y)$ étant doublement périodique, la somme des résidus de cette fonction relatifs aux pôles situés dans un parallélogramme des périodes est égale à zéro. Je puis supposer que le point x est dans le même parallélogramme des périodes que les pôles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$; la fonction $\Phi(y)$ aura alors, dans ce parallélogramme, les pôles

$$x, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_p$$

avec les résidus suivants :

Au point $y = x$,

$$-\mathrm{F}(x);$$

aux points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$,

$$R_1\chi_\mu(x, \alpha_1),\ R_2\chi_\mu(x, \alpha_2),\ \ldots,\ R_p\chi_\mu(x, \alpha_p).$$

Puisque la somme de tous ces résidus est nulle, on a l'équation

$$F(x) = R_1\chi_\mu(x, \alpha_1) + R_2\chi_\mu(x, \alpha_2) + \ldots + R_p\chi_\mu(x, \alpha_p) \tag{18}$$

qui fournit la formule de décomposition cherchée.

Mais il importe de remarquer que, tandis que dans la formule de décomposition (8) les résidus étaient indépendants des pôles correspondants, il existe actuellement μ *relations* entre les résidus $R_1, R_2, \ldots, R_p$ et les pôles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. En effet, considérons l'une quelconque des μ fonctions $g_\nu^{(\mu)}(y)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, (\mu - 1)$, définies par les équations (4), et formons le produit

$$F(y)\, g_\nu^{(\mu)}(y); \tag{19}$$

ce produit est une fonction doublement périodique de y, car $F(y)$ et $g_\nu^{(\mu)}(y)$ admettent la période $2K$ et lorsque y augmente de $2iK'$, $F(y)$ est multiplié par $e^{\frac{\mu\pi y i}{K}}$ et $g_\nu^{(\mu)}(y)$ par $e^{-\frac{\mu\pi y i}{K}}$. La somme des résidus de cette fonction (19) relatifs aux pôles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ situés dans un parallélogramme des périodes est donc égale à zéro; ce qui donne la relation

$$R_1 g_\nu^{(\mu)}(\alpha_1) + R_2 g_\nu^{(\mu)}(\alpha_2) + \ldots + R_p g_\nu^{(\mu)}(\alpha_p) = 0; \tag{20}$$

en faisant successivement $\nu = 0, 1, 2 \ldots (\mu - 1)$, on obtient ainsi μ relations entre les résidus et les pôles correspondants.

9. Ces relations (20) permettent de vérifier que la fonction (18) satisfait effectivement aux équations (10). En effet, on a d'abord

$$F(x + 2k) = F(x),$$

puisque chacune des fonctions

$$\chi_\mu(x, \alpha_1),\ \chi_\mu(x, \alpha_2),\ \ldots,\ \chi_\mu(x, \alpha_p)$$

admet la période $2K$. Puis, si l'on forme la différence

$$F(x + 2iK') - e^{\frac{\mu\pi x i}{K}} F(x),$$

on voit, d'après la relation (14), que cette différence peut s'écrire comme il suit :

$$\begin{aligned}&-\frac{\pi i}{2\mathrm{K}}\left(1+e^{\frac{\mu\pi x i}{\mathrm{K}}}\right)[\mathrm{R}_1 g_0^{(\mu)}(\alpha_1)+\mathrm{R}_2 g_0^{(\mu)}(\alpha_2)+\ldots+\mathrm{R}_p g_0^{(\mu)}(\alpha_p)]\\&\quad-\frac{\pi i}{\mathrm{K}}e^{\frac{(\mu-1)\pi x i}{\mathrm{K}}}[\mathrm{R}_1 g_1^{(\mu)}(\alpha_1)+\mathrm{R}_2 g_1^{(\mu)}(\alpha_2)+\ldots+\mathrm{R}_p g_1^{(\mu)}(\alpha_p)]-\ldots\\&\quad-\frac{\pi i}{\mathrm{K}}e^{\frac{\pi x i}{\mathrm{K}}}[\mathrm{R}_1 g_{\mu-1}^{(\mu)}(\alpha_1)+\mathrm{R}_2 g_{\mu-1}^{(\mu)}(\alpha_2)+\ldots+\mathrm{R}_p g_{\mu-1}^{(\mu)}(\alpha_p)];\end{aligned}$$

cette différence est donc nulle, puisque chacune des quantités entre crochets est nulle en vertu des équations (20). La fonction $\mathrm{F}(x)$ définie par la relation (18) vérifie donc aussi la seconde des équations (10).

On passe du cas que nous venons de traiter, où tous les pôles α_1, α_2, ..., α_p sont simples, à celui où certains de ces pôles deviendraient des pôles de degré supérieur ou même des points essentiels isolés, par une méthode analogue à celle qui a été employée précédemment (n° 4). Par exemple, si la fonction $\mathrm{F}(z)$ qui satisfait aux relations (10) a, dans un parallélogramme des périodes, un seul point singulier α, que je suppose, pour plus de généralité, un point essentiel, on aura, dans le voisinage de ce point,

$$\mathrm{F}(z)=\mathrm{F}_1(z)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\mathrm{R}_n}{(z-\alpha)^n},$$

$\mathrm{F}_1(z)$ étant holomorphe dans le voisinage de α. D'autre part, dans le voisinage de $z=\alpha$, on a

$$\chi_\mu(x,z)=\chi_\mu(x,\alpha)+\frac{z-\alpha}{1}\chi'_\mu(x,\alpha)+\ldots+\frac{(z-\alpha)^n}{1.2\ldots n}\chi_\mu^{(n)}(x,\alpha)+\ldots,$$

où $\chi_\mu^{(n)}(x,z)$ désigne la dérivée $\dfrac{d^n\chi_\mu(x,z)}{dz^n}$; le produit $\mathrm{F}(z)\chi_\mu(x,z)$ est alors une fonction doublement périodique de z ayant, dans un parallélogramme élémentaire, les deux seuls points singuliers

$$z=x,\quad z=\alpha,$$

avec les résidus suivants :

Pour x,

$$-\mathrm{F}(x)$$

et pour α,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{R_n}{1.2\ldots(n-1)} \chi_\mu^{(n-1)}(x, \alpha);$$

comme la somme de ces résidus est nulle, on a l'expression de $F(x)$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{R_n}{1.2\ldots(n-1)} \chi_\mu^{(n-1)}(x, \alpha). \tag{21}$$

Les coefficients $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ vérifient alors les μ équations

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{R_n}{1.2\ldots(n-1)} \frac{d^n g_\nu^{(\mu)}(\alpha)}{d\alpha^n} = 0, \tag{22}$$

où $\nu = 0, 1, 2, \ldots, (\mu - 1)$. Cette équation (22) est obtenue, comme précédemment l'équation (20), en écrivant que le résidu de la fonction doublement périodique

$$F(z) g_\nu^{(\mu)}(z),$$

relatif au seul point singulier α, est nul.

Si la fonction $F(z)$ admet, dans un parallélogramme, p points singuliers, elle est la somme de p séries, telles que (21), dont les coefficients vérifient des relations analogues à (20).

On remarquera l'analogie qu'il y a entre ces formules et celles qui se présentent dans la théorie des fonctions uniformes d'un point analytique (x, y). (*Acta mathematica*, t. I.)

10. Revenons, pour un instant, au cas où la fonction $F(z)$ satisfaisant aux équations (10) est *méromorphe;* comme nous l'avons vu, le nombre de ses pôles, dans un parallélogramme des périodes, surpasse de μ unités celui de ses zéros. Soient alors

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$$

les zéros situés dans un parallélogramme, et

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu+\mu}$$

les infinis; la somme $\Sigma\beta$ des zéros et la somme $\Sigma\alpha$ des infinis sont liées par la relation

$$(23)\qquad \Sigma\beta - \Sigma\alpha + \mu K = 2nK + 2n'iK'.$$

Pour le démontrer, il suffit d'appliquer la relation (3) à la fonction $\frac{1}{F(z)}$, qui satisfait aux relations (2) où m serait remplacé par μ.

En particulier, si le nombre des zéros est égal à l'unité ($\nu = 1$), cette relation devient, en désignant par β le zéro unique,

$$(23')\qquad \beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\mu+1} - \mu K + 2nK + 2n'iK'.$$

La fonction $F(z)$ est alors de la forme

$$F(z) = R_1\chi_\mu(z, \alpha_1) + R_2\chi_\mu(z, \alpha_2) + \ldots + R_{\mu+1}\chi_\mu(z, \alpha_{\mu+1}),$$

les résidus $R_1, R_2, \ldots, R_{\mu+1}$ vérifiant les μ relations

$$(24)\qquad R_1 g_\nu^{(\mu)}(\alpha_1) + R_2 g_\nu^{(\mu)}(\alpha_2) + \ldots + R_{\mu+1} g_\nu^{(\mu)}(\alpha_{\mu+1}) = 0,$$

où $\nu = 0, 1, 2, \ldots, (\mu - 1)$. En écrivant que la fonction $F(z)$ admet le zéro β, on a de plus l'équation

$$(24')\qquad R_1\chi_\mu(\beta, \alpha_1) + R_2\chi_\mu(\beta, \alpha_2) + \ldots + R_{\mu+1}\chi_\mu(\beta, \alpha_{\mu+1}) = 0.$$

Les μ équations (24) et l'équation (24′) étant linéaires et homogènes en $R_1, R_2, \ldots, R_{\mu+1}$, il faut, puisque ces résidus ne sont pas tous nuls, que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \chi_\mu(\beta, \alpha_1) & \chi_\mu(\beta, \alpha_2) & \ldots & \chi_\mu(\beta, \alpha_{\mu+1}) \\ g_0^{(\mu)}(\alpha_1) & g_0^{(\mu)}(\alpha_2) & \ldots & g_0^{(\mu)}(\alpha_{\mu+1}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ g_{\mu-1}^{(\mu)}(\alpha_1) & g_{\mu-1}^{(\mu)}(\alpha_2) & \ldots & g_{\mu-1}^{(\mu)}(\alpha_{\mu+1}) \end{vmatrix},$$

soit egal à zéro; et cette condition transcendante $D = 0$ doit être identique à la relation (23′). Or ceci résulte de l'identité

$$(25)\qquad D = C.e^{\frac{\mu\pi i}{2K}(\Sigma\alpha - \beta)} \frac{H(\Sigma\alpha - \beta - \mu K)\prod_{i,j} H(\alpha_i - \alpha_j)}{H(\beta - \alpha_1)H(\beta - \alpha_2)\ldots H(\beta - \alpha_{\mu+1})},$$

où $\Sigma\alpha$ désigne la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\mu+1}$ et C une constante, le produit $\prod\limits_{i,j}$ étant étendu à toutes les combinaisons des quantités α deux à deux. Cette identité se démontre facilement en considérant successivement le déterminant D comme fonction de β, α_1, α_2, ..., $\alpha_{\mu+1}$. Comme fonction de β, ce déterminant vérifie les équations (10) : il a pour infinis les points α_1, α_2, ..., $\alpha_{\mu+1}$ et par suite, d'après (23′), pour zéro le point

$$\Sigma\alpha - \mu K.$$

Comme fonction de α_j, au contraire, ce même déterminant vérifie les équations (2) où $m = \mu$; il a pour pôle le seul point β, pour zéros les points

$$\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_{j-1}, \ \alpha_{j+1}, \ \ldots, \ \alpha_{\mu+1},$$

et, par suite, d'après (3), le point

$$\beta - \alpha_1 - \ldots - \alpha_{j-1} - \alpha_{j+1} - \ldots - \alpha_{\mu+1} + \mu K.$$

On conclut de là la forme (25) de ce déterminant. En multipliant les deux membres de l'identité (25) par $(\beta - \alpha_{\mu+1})$; puis, faisant $\beta = \alpha_{\mu+1}$, on retrouve l'identité (6). En effet, le déterminant D se réduit alors au mineur relatif au terme $\chi_\mu(\beta, \alpha_{\mu+1})$, qui n'est autre chose que le déterminant Δ de la formule (6) dans lequel on aurait remplacé z_1, z_2, ..., z_m par α_1, α_2, ..., α_μ; cette remarque permet d'exprimer la constante C de la formule (25) en fonction de la constante A de la formule (6).

En supposant que deux ou plusieurs des quantités α_1, α_2, ..., α_{p+1} deviennent égales, on déduira de la formule (25) d'autres formules plus particulières, ainsi que nous l'avons fait pour l'identité (6).

11. Nous avons vu que la fonction $\chi_\mu(x, y)$ considérée comme fonction de y vérifie les équations (12) et que le résidu de cette fonction relatif au pôle $y = x$ est -1. On en conclut que la fonction $\chi_m(\alpha, z)$ peut servir d'élément de décomposition d'une fonction $F(z)$ satisfaisant aux relations (2) *où m est positif*.

En effet on a, d'après (12),

$$(26) \qquad \begin{cases} \chi_m(\alpha, z + 2K) = \chi_m(\alpha, z) \\ \chi_m(\alpha, z + 2iK') = e^{-\frac{m\pi z i}{K}} \chi_m(\alpha, z) \end{cases}$$

et de plus pour $z = \alpha$,

$$\lim (z - \alpha) \chi_m(\alpha, z) = -1.$$

Supposons alors une fonction $F(z)$ vérifiant les relations (2) où m est positif et ayant, dans un parallélogramme des périodes, les pôles simples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ de résidus respectifs $R_1, R_2, \ldots, R_p$. La somme

$$F(z) + R_1 \chi_m(\alpha_1, z) + R_2 \chi_m(\alpha_2, z) + \ldots + R_p \chi_m(\alpha_p, z),$$

vérifiera ces mêmes relations (2) et sera une *fonction entière de* z, $G(z)$. On aura donc la formule

$$F(z) = -R_1 \chi_m(\alpha_1, z) - \ldots - R_p \chi_m(\alpha_p, z) + G(z);$$

ce qui fournit une autre décomposition de $F(z)$, dans le cas où m est *positif*, en une partie entière $G(z)$ et une somme d'éléments simples.

A ce sujet, nous ferons la remarque suivante; on pourra toujours déterminer les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_m$ qui figurent dans $\psi_m(z, \alpha)$, de telle façon que l'on aît

$$\psi_m(z, \alpha) = -\chi_m(\alpha, z);$$

cela résulte de ce que la fonction de z

$$\chi_m(\alpha, z),$$

qui vérifie les équations (26), admet, dans un parallélogramme des périodes, un seul pôle simple $z = \alpha$ et, par suite, $m + 1$ zéros. Ces zéros, c'est-à-dire les $(m + 1)$ valeurs de z,

$$z_1, z_2, \ldots z_{m+1},$$

pour lesquelles la fonction $\chi_m(\alpha, z)$ s'annule dans un parallélogramme des périodes, ne nous sont pas connus; nous savons seulement, en vertu des équations (3), que ces zéros vérifient la relation

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_{m+1} = \alpha + mK + 2nK + 2n'iK'.$$

Il suffira alors, dans l'expression de $\psi_m(z, \alpha)$, de remplacer les constantes

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

par $z_1, z_2, \ldots, z_m$ pour que cette fonction $\psi_m(z, \alpha)$ devienne identique à $-\chi_m(\alpha, z)$.

III.

12. On peut étendre les résultats précédents à certaines fonctions d'un point analytique (x, y) : c'est ce que je vais indiquer rapidement.

Pour cela, je remarque d'abord que, si, dans la fonction $F(z)$ qui vérifie les relations (2), on remplace l'argument z par l'intégrale elliptique de première espèce correspondante

$$z = \int_0^x \frac{dx}{y},$$

où

$$y^2 = A_0 x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4,$$

cette fonction $F(z)$ devient une fonction du point analytique (x, y) qui ne change pas quand le point (x, y) décrit le cycle correspondant à la période $2K$ et qui se reproduit multipliée par

$$e^{-\frac{m\pi z\sqrt{-1}}{K}} \tag{27}$$

quand (x, y) décrit le cycle correspondant à la période $2K'\sqrt{-1}$. Si l'on pose

$$u(x, y) = \frac{\pi\sqrt{-1}}{K}\int_0^x \frac{dx}{y}.$$

de telle façon que la première période de l'intégrale $u(x, y)$ soit $2\pi\sqrt{-1}$, la quantité (27) s'écrit

$$e^{-mu(x, y)}.$$

13. Soit, d'une façon générale,

$$F(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe algébrique de genre $p \geq 1$, et

$$u^{(1)}(x, y),\ u^{(2)}(x, y),\ \ldots,\ u^{(p)}(x, y)$$

les intégrales abéliennes normales de première espèce correspondantes;

désignons par

$$\begin{array}{llllll} \Omega_1^{(i)} = 0, & \Omega_3^{(i)} = 0, & \ldots, & \Omega_{2i-1}^{(i)} = 2\pi\sqrt{-1}, & \ldots, & \Omega_{2p-1}^{(i)} = 0, \\ \Omega_2^{(i)} = 2\alpha_{i1}, & \Omega_4^{(i)} = 2\alpha_{i2}, & \ldots, & \Omega_{2i}^{(i)} = 2\alpha_{ii}, & \ldots, & \Omega_{2p}^{(i)} = 2\alpha_{ip} \end{array}$$

les $2p$ périodes normales de l'intégrale abélienne $u^{(i)}(x, y)$, et par $\Theta(u_i)$ la fonction Θ de p variables formée avec les périodes normales.

Cette fonction admet, par rapport à chaque variable, la période $2\pi\sqrt{-1}$; elle vérifie de plus p relations telles que

$$\Theta(u_1 + 2\alpha_{11}, u_2 + 2\alpha_{21}, \ldots, u_p + 2\alpha_{p1}) = e^{-u_1 - \alpha_{11}}\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_p),$$

d'une manière générale

$$\Theta(u_i + 2\alpha_{ik}) = e^{-u_k - \alpha_{kk}}\Theta(u_i),$$

où $k = 1, 2, \ldots, p$.

La fonction

$$\Theta_1(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \Theta_1(u_i) = \Theta(u_i - \alpha_{ii}) = \Theta(u_1 - \alpha_{11}, u_2 - \alpha_{22}, \ldots, u_p - \alpha_{pp})$$

admet donc la période $2\pi\sqrt{-1}$ par rapport à chaque variable et vérifie de plus les p relations

$$\Theta_1(u_i + 2\alpha_{ik}) = e^{-u_k}\Theta_1(u_i),$$

où $k = 1, 2, \ldots, p$.

D'après un théorème de Riemann, la fonction

$$\Theta[u^{(i)}(x, y) - G_i]$$

admet p zéros $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)$ vérifiant les relations

$$\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - G_i \equiv C_i,$$

où les C_i sont des constantes indépendantes des G_i. (*Voir* Briot, *Fonctions abéliennes.*) La fonction

$$\Theta_1[u^{(i)}(x, y)] = \Theta[u^{(i)})x, y) - \alpha_{ii}]$$

admet donc en particulier p zéros

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)$$

vérifiant les p relations

$$\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - \alpha_{ii} \equiv C_i,$$

où $i = 1, 2, \ldots, p$.

Ces théorèmes étant rappelés, nous allons nous occuper des fonctions $\Phi(x, y)$ du point analytique (x, y) qui possèdent les propriétés suivantes :

1° Lorsque le point (x, y) décrit un cycle correspondant à un groupe de périodes de rang impair

$$\Omega_{2i-1}^{(1)}, \ \Omega_{2i-1}^{(2)}, \ \ldots, \ \Omega_{2i-1}^{(p)},$$

la fonction $\Phi(x, y)$ ne change pas;

2° Lorsque le point (x, y) décrit un cycle correspondant à un groupe de périodes de rang pair

$$\Omega_{2i}^{(1)}, \ \Omega_{2i}^{(2)}, \ \ldots, \ \Omega_{2i}^{(p)},$$

la fonction $\Phi(x, y)$ se reproduit multipliée par

$$e^{-mu^{(i)}(x, y)},$$

m étant un entier.

Si nous désignons par la notation

$$[\Phi(x, y)]_k$$

ce que devient la fonction $\Phi(x, y)$ quand le point (x, y) décrit le cycle correspondant au groupe de périodes

$$\Omega_k^{(1)}, \ \Omega_k^{(2)}, \ \ldots, \ \Omega_k^{(p)},$$

les deux propriétés précédentes se traduiront par les $2p$ équations

$$(28) \qquad \begin{cases} [\Phi(x, y)]_{2i-1} = \Phi(x, y), \\ [\Phi(x, y)]_{2i} \ \ = e^{-mu^{(i)}(x, y)}\Phi(x, y), \end{cases}$$

où $i = 1, 2, \ldots, p$.

Je supposerai le nombre entier m différent de zéro, positif ou négatif, pour me placer dans le cas analogue à celui des fonctions doublement périodiques de troisième espèce. J'ai étudié précédemment les fonctions d'un point analytique analogues aux fonctions doublement périodiques de première [1] et de deuxième [2] espèce. Deux cas sont encore à distinguer ici, suivant que m est positif ou négatif.

14. Le nombre *m étant supposé positif*, imaginons d'abord que les seuls points singuliers de la fonction $\Phi(x, y)$ soient des pôles ou des points critiques algébriques, à savoir ceux de la fonction algébrique y de x. Alors la fonction $\Phi(x, y)$ a, sur toute la surface de Riemann, un nombre de zéros dépassant de mp unités le nombre des infinis. En effet, le quotient

$$\frac{\Phi(x, y)}{\Theta_1^m[u^{(i)}(x, y)]} = \mathrm{R}(x, y) \tag{29}$$

est une *fonction uniforme* du point (x, y) n'ayant d'autres points singuliers que des pôles et des points critiques algébriques, à savoir ceux de la fonction y de x. Cela résulte des équations

$$\begin{aligned} \{\Theta_1[u^{(i)}(x, y)]\}_{2i-1} &= \Theta_1[u^{(i)}(x, y)], \\ \{\Theta_1[u^{(i)}(x, y)]\}_{2i} &= e^{-u^{(i)}(x, y)}\Theta_1[u^{(i)}(x, y)] \end{aligned}$$

rappelées précédemment (n° 13).

Le quotient (29) $\mathrm{R}(x, y)$ est donc une fonction rationnelle de x et y, et par suite il admet autant de zéros que d'infinis; comme la fonction $\Theta_1[u^{(i)}(x, y)]$ admet p zéros, sa puissance $m^{\text{ième}}$ en admet mp, et, par conséquent, la fonction

$$\Phi(x, y) = \mathrm{R}(x, y)\Theta_1^m[u^{(i)}(x, y)]$$

a un nombre de zéros dépassant de mp unités le nombre de ses infinis.

Soient

$$(\alpha_1, \beta_1), \ (\alpha_2, \beta_2), \ \ldots, \ (\alpha_q, \beta_q)$$

les infinis de $\Phi(x, y)$ au nombre de q, et

$$(a_1, b_1), \ (a_2, b_2), \ \ldots, \ (a_{q+mp}, b_{q+mp})$$

les zéros de cette même fonction au nombre de $(q + mp)$. Nous voulons dire par là que la fonction $\Phi(x, y)$ est infinie pour $x = \alpha_1$,

---

(1) *Acta mathematica*, t. I : *Sur les fonctions uniformes d'un point analytique* (x, y).

(2) *Journal de M. Resal*, 3e série, t. IX : *Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce.*

$y = \beta_1$, ... et nulle pour $x = a_1$, $y = b_1$, ... Ces infinis et ces zéros sont liés par les p relations

$$(30) \qquad \Sigma u^{(i)}(a, b) - \Sigma u^{(i)}(\alpha, \beta) - m\alpha_{ii} \equiv m C_i,$$

où $i = 1, 2, \ldots, p$; la notation $\Sigma u^{(i)}(a, b)$ désignant la somme

$$u^{(i)}(a_1, b_1) + u^{(i)}(a_2, b_2) + \ldots + u^{(i)}(a_{q+mp}, b_{q+mp})$$

étendue à tous les zéros, $\Sigma u^{(i)}(\alpha, \beta)$ la somme analogue étendue à tous les infinis, et les constantes C_i étant des constantes connues [1]. Le signe $\equiv$, employé dans la relation (30), exprime que l'égalité a lieu à des multiples près des modules de périodicité de l'intégrale $u^{(i)}(x, y)$.

Pour démontrer cette relation (30), appelons

$$(x_1, y_1), \ (x_2, y_2), \ \ldots, \ (x_p, y_p)$$

les p zéros de $\Theta_1[u^{(i)}(x, y)]$; la fonction rationnelle $R(x, y)$ admet alors les zéros

$$(a_1, b_1), \ (a_2, b_2), \ \ldots, \ (a_{q+mp}, b_{q+mp}),$$

les infinis

$$(\alpha_1, \beta_1), \ (\alpha_2, \beta_2), \ \ldots, \ (\alpha_q, \beta_q)$$

et les infinis

$$(x_1, y_1), \ (x_2, y_2), \ \ldots, \ (x_p, y_p),$$

chacun au degré m. Donc, d'après le théorème d'Abel, on a la relation

$$\Sigma u^{(i)}(a, b) - \Sigma u^{(i)}(\alpha, \beta) - m[u^{(i)}(x_1, y_1) + u^{(i)}(x_2, y_2) + \ldots + u^{(i)}(x_p, y_p)] \equiv 0;$$

mais, d'après un théorème de Riemann rappelé précédemment (n° **13**), on a aussi

$$u^{(i)}(x_1, y_1) + u^{(i)}(x_2, y_2) + \ldots + u^{(i)}(x_p, y_p) - \alpha_{ii} \equiv C_i;$$

la relation (30) est donc démontrée.

Il existe en particulier des fonctions $G(x, y)$ du point (x, y) vérifiant les équations (28) et ne devenant pas infinies; ces fonctions admettent donc mp zéros satisfaisant aux p équations

$$\Sigma u^{(i)}(a, b) - m\alpha_{ii} \equiv m C_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

---

(1) *Voir* Briot, *Théorie des fonctions abéliennes*, n^{os} 81 et suiv.

L'expression générale $G(x, y)$ de ces fonctions est

$$(31)\quad G(x,y) = \Theta_1[u^{(i)}(x,y) - h_i^{(1)}]\,\Theta_1[u^{(i)}(x,y) - h_i^{(2)}]\ldots\Theta_1[u^{(i)}(x,y) - h_i^{(m)}],$$

où les mp lettres

$$h_i^{(1)},\ h_i^{(2)},\ \ldots,\ h_i^{(m)}\quad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

désignent des constantes arbitraires liées par les p relations

$$h_i^{(1)} + h_i^{(2)} + \ldots + h_i^{(m)} \equiv 0, \quad \text{où} \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p.$$

Il serait facile de donner une décomposition en éléments simples de la fonction $\Phi(x, y)$ qui satisfait aux relations (28) où m est positif comme précédemment. Pour cela, considérons la fonction

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ \alpha, & \beta \end{pmatrix} = \frac{\Theta[u^{(i)}(x,y) - u^{(i)}(a,b) + h_i]}{\Theta[u^{(i)}(x,y) - u^{(i)}(\alpha,\beta) + h_i]},$$

où

$$h_i = C_i - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k);$$

cette fonction du point (x, y) a un seul zéro, le point (a, b), et un seul pôle, le point (α, β). L'élément de la décomposition sera alors la fonction

$$\Psi(x, y \mid \alpha, \beta) = C\begin{pmatrix} a, & b \\ \alpha, & \beta \end{pmatrix} \prod_{k=1}^{k=m} \Theta_1[u^{(i)}(x,y) - h_i^{(k)}],$$

où C est une constante indépendante de (x, y) et où les constantes $h_i^{(k)}$ satisfont aux p relations

$$(32)\quad u^{(i)}(a, b) - u^{(i)}(\alpha, \beta) + h_i^{(1)} + h_i^{(2)} + \ldots + h_i^{(m)} \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Cette fonction n'a qu'un infini (α, β) et vérifie les relations (28); on achèvera de la déterminer en choisissant la constante C de telle façon que son résidu relatif au pôle (α, β) soit égal à l'unité.

Si alors la fonction $\Phi(x, y)$ à décomposer admet q pôles simples

$$(\alpha_1, \beta_1),\ (\alpha_2, \beta_2),\ \ldots,\ (\alpha_q, \beta_q)$$

de résidus respectifs

$$R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_q,$$

on aura

$$\Phi(x, y) = R_1\Psi(x, y \mid \alpha_1, \beta_1) + \ldots + R_q\Psi(x, y \mid \alpha_q, \beta_q) + G(x, y),$$

$G(x, y)$ désignant une fonction entière de la forme (31). Nous avons ainsi une formule de décomposition qui est semblable à la formule (8), et que l'on étendra de la même façon que cette formule (8) au cas où il y a des pôles multiples.

15. Supposons enfin m négatif, $m = -\mu$. La fonction $\Phi(x, y)$ qui vérifie les relations (28) possède alors un nombre d'infinis dépassant de μp unités le nombre des zéros; et si l'on appelle

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ \ldots,\ (a_q, b_q)$$

les zéros,

$$(\alpha_1, \beta_1),\ (\alpha_2, \beta_2),\ \ldots,\ (\alpha_{q+\mu p}, \beta_{q+\mu p})$$

les infinis, ces quantités sont liées par les p relations

$$\Sigma u^{(i)}(\alpha, \beta) - \Sigma u^{(i)}(a, b) - \mu\alpha_{ii} \equiv \mu C_i, \quad \text{où} \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Pour le voir, il suffit d'appliquer la relation (30) à la fonction

$$\frac{1}{\Phi(x, y)},$$

qui vérifie les équations (28), où m est positif et égal à μ.

Dans le cas de $m > 0$, les résidus de la fonction $\Phi(x, y)$ sont indépendants des pôles; au contraire, dans le cas actuel, $m = -\mu$, il y a entre les pôles et les résidus correspondants des relations que l'on obtient comme il suit. On considère le produit

$$\Phi(x, y)\, G_\mu(x, y),$$

où $G_\mu(x, y)$ est une des fonctions (31), dans laquelle m serait remplacé par μ; ce produit est une fonction rationnelle de x, y; et par suite ses résidus sont liés aux pôles correspondants par p relations connues; ce qui donne les relations annoncées entre les résidus de $\Phi(x, y)$ et les pôles correspondants.

Il resterait à former, dans le cas actuel, $m < 0$, un élément de décomposition qui fût analogue à la fonction $\chi_\mu(z, \alpha)$; c'est ce qu'il ne m'a pas été possible de faire jusqu'à présent.