ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE PICARD

Mémoire sur les formes quadratiques binaires indéfinies à indéterminées conjuguées

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 1 (1884), p. 9-54

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1884_3_1__9_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

MÉMOIRE
SUR LES
FORMES QUADRATIQUES BINAIRES INDÉFINIES
A INDÉTERMINÉES CONJUGUÉES,

PAR M. ÉMILE PICARD,
PROFESSEUR SUPPLÉANT A LA SORBONNE.

J'ai montré, dans un travail précédent (*Acta math.*, I), comment les formes quadratiques indéfinies à indéterminées conjuguées et à coefficients entiers pouvaient conduire à une classe étendue de groupes discontinus de substitutions linéaires, et ces groupes sont isomorphes aux groupes de substitutions qui transforment ces formes en elles-mêmes. En se bornant d'abord aux formes quadratiques binaires, la question se posait alors de chercher les substitutions fondamentales d'un tel groupe pour une forme quadratique indéfinie donnée. C'est là un problème qui est intimement lié à la théorie arithmétique de ces formes, théorie qui n'a pas encore été développée et dont je me propose d'indiquer dans ce Mémoire quelques points fondamentaux, qui donneront d'ailleurs immédiatement la solution du problème proposé.

On connaît la méthode célèbre par laquelle M. Hermite ramène l'étude arithmétique d'une forme quadratique réelle indéfinie à la réduction continuelle d'une forme définie dépendant de certains paramètres arbitraires, ce qui lui a permis d'établir ces deux théorèmes fondamentaux, qu'à un déterminant donné correspondait un nombre fini de classes et que toutes les substitutions semblables correspondant à une forme pouvaient être obtenues par la combinaison d'un nombre fini de substitutions fondamentales (*Journal de Crelle*, t. 47). Les applications pratiques de cette méthode peuvent être souvent fort délicates, tant à cause du choix des conditions de réduction d'une forme définie que par la difficulté de suivre la variation simultanée des divers paramètres arbitraires. On trouvera, dans le beau Mémoire de M. Selling (*Journal de Crelle*, t. 77), une application de la méthode aux formes ternaires indéfinies, et, dans un important travail (*Annales de l'École Normale*, 1881), M. Charve, après avoir repris la méthode de réduction de M. Selling pour les formes ternaires définies, a fait une application des mêmes principes à l'étude des irrationnelles du troisième degré.

La méthode de M. Hermite peut s'étendre aux formes quadratiques à indéterminées conjuguées, et cette extension est le point de départ de mon étude sur les formes binaires *indéfinies*. Quant aux conditions de réduction d'une forme binaire *définie* à indéterminées conjuguées, elles ont été données par M. Hermite (*Journal de Crelle*, t. 47), et elles sont très convenables pour notre objet, car nous établirons qu'en général, à une forme définie, ne correspondent que deux réduites, et celles-ci diffèrent seulement par le signe des coefficients moyens; j'ajoute que, dans toute cette théorie, nous n'employons que des substitutions dont le déterminant est égal à l'unité. La forme définie, que nous sommes conduits à associer à la forme indéfinie donnée, ne renferme qu'un paramètre arbitraire z, et il suffit de donner à ce paramètre toutes les valeurs complexes de module inférieur à l'unité. Les conditions de réduction de cette forme sont susceptibles d'une interprétation géométrique remarquable, qui permet d'effectuer sans peine la réduction continuelle : elles expriment que le point dont l'affixe est z doit être, à l'intérieur d'un polygone, limité par des arcs de cercle orthogonaux au cercle de rayon 1.

Ce travail est divisé en cinq Chapitres. Dans le premier, je construis la forme définie associée Φ et arrive à la notion de réduite pour les formes indéfinies; j'établis ensuite que le nombre des réduites est limité, mais en supposant que le déterminant de la forme n'est pas une somme de deux carrés. Le second Chapitre est principalement consacré aux représentations géométriques dont j'ai parlé plus haut : je puis alors étendre facilement le théorème sur le nombre limité des réduites aux cas qui avaient été écartés. Dans la troisième Partie j'examine d'abord les diverses circonstances qui peuvent se présenter dans la réduction d'une forme définie; je montre ensuite comment peut s'effectuer la réduction continuelle de la forme Φ et comment cette réduction donnera les substitutions fondamentales du groupe de substitutions semblables. Dans le quatrième Chapitre, je cherche explicitement les substitutions qui réduisent de nouveau la forme Φ, quand celle-ci, pour une variation infiniment petite du paramètre, cesse d'être réduite, et cela dans tous les cas qui peuvent se présenter; je fais ensuite une application numérique complète. Dans la dernière Partie, je reviens sur le groupe dont il a été question au début pour montrer directement qu'il est discontinu.

I.

1. Considérons la forme quadratique binaire à indéterminées conjuguées

$$f(x, y, x_0, y_0) = axx_0 + b\,xy_0 + b_0 x_0 y + c\,yy_0.$$

x et y sont deux indéterminées complexes, dont x_0 et y_0 représentent les conjuguées; les coefficients extrêmes a et c sont réels, et b_0 est conjugué de b; d'une manière générale, nous représenterons dans la suite la quantité conjuguée d'une lettre quelconque par la même lettre affectée de l'indice zéro.

Si l'on effectue sur x et y une substitution linéaire

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \mathrm{MX} + \mathrm{NY}, \\ y = \mathrm{PX} + \mathrm{QY}, \end{cases}$$

en effectuant sur x_0 et y_0 la substitution

$$\begin{aligned} x_0 &= \mathrm{M_0 X_0} + \mathrm{N_0 Y_0}, \\ y_0 &= \mathrm{P_0 X_0} + \mathrm{Q_0 Y_0}, \end{aligned}$$

la forme f se change en une transformée analogue

$$F(X, Y, X_0, Y_0) = AXX_0 + BXY_0 + B_0X_0Y + CYY_0.$$

L'expression $BB_0 - AC$ joue ici le rôle d'invariant, et l'on a

$$BB_0 - AC = (MQ - NP)(M_0Q_0 - N_0P_0)(bb_0 - ac).$$

Les formes f se partagent en formes définies et formes indéfinies suivant le signe de $bb_0 - ac$, que nous désignerons par Δ. On établit en effet immédiatement que f peut s'écrire

$$f = \alpha(VV_0 - \Delta UU_0),$$

α étant une constante réelle; V et U sont des fonctions linéaires de x et y. Par suite, si Δ est négatif, ce qui est le cas de la forme dite *définie*, f peut se ramener à l'une ou l'autre des formes

$$\pm(VV_0 + UU_0);$$

si, au contraire, Δ est positif, la forme est dite *indéfinie* et elle peut se ramener au type

$$VV_0 - UU_0.$$

2. Les résultats précédents donnent tout ce qui concerne l'équivalence algébrique des formes f. Nous allons supposer maintenant que les coefficients M, N, P, Q de la substitution (1) sont des entiers complexes et que ce déterminant $MQ - NP$ est égal à l'unité.

Dans le cas où la forme f est définie, M. Hermite a établi la proposition suivante qui est fondamentale (*Journal de Crelle*, t. 47, p. 358). A toute forme définie à coefficients quelconques (nous supposerons la forme positive, c'est-à-dire a et c positifs) correspond toujours une transformée arithmétiquement équivalente F, telle que l'on ait

$$A \leqq C$$

et, en posant $B = m + ni$,

$$2m \leqq A, \quad -2m \leqq A,$$
$$2n \leqq A, \quad -2n \leqq A.$$

M. Hermite donne le nom de *réduites* aux formes définies F qui vérifient les conditions précédentes.

Nous allons nous occuper ici des formes indéfinies, et nous ferons cette étude en étendant aux formes à indéterminées conjuguées les méthodes de M. Hermite pour les formes réelles, méthodes qui ramènent l'étude des formes indéfinies à la question de la réduction continuelle de formes définies renfermant des paramètres arbitraires.

Commençons par résoudre le problème suivant : *Trouver la transformation linéaire la plus générale, transformant en elle-même*

$$uu_0 - vv_0,$$

Soit donc

$$U = \mathcal{A}u + \mathcal{B}v, \quad V = \mathcal{C}u + \mathcal{D}v$$

une transformation telle que

$$UU_0 - VV_0 = uu_0 - vv_0;$$

on aura

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{A}_0 - \mathcal{C}\mathcal{C}_0 &= 1, \\ \mathcal{A}\mathcal{B}_0 - \mathcal{C}\mathcal{D}_0 &= 0, \\ \mathcal{B}\mathcal{B}_0 - \mathcal{D}\mathcal{D}_0 &= -1; \end{aligned}$$

la seconde équation donne

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{D}_0} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{B}_0}.$$

Désignons par μ ce rapport; en substituant ces valeurs de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ dans la première égalité, on aura

$$\mu\mu_0(\mathcal{D}\mathcal{D}_0 - \mathcal{B}\mathcal{B}_0) = 1 \quad \text{donc} \quad \mu\mu_0 = 1.$$

Les trois équations précédentes peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\mathcal{A} = \mu\mathcal{D}_0, \quad \mathcal{B} = \mu\mathcal{C}_0, \quad \mathcal{D}\mathcal{D}_0 - \mathcal{C}\mathcal{C}_0 = 1, \quad \text{avec} \quad \mu\mu_0 = 1.$$

La transformation la plus générale cherchée est

$$\begin{aligned} U &= \mu\mathcal{D}_0 u + \mu\mathcal{C}_0 v, \\ V &= \mathcal{C}u + \mathcal{D}v. \end{aligned}$$

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ étant deux paramètres complexes quelconques assujettis seulement à vérifier la relation

$$\mathcal{D}\mathcal{D}_0 - \mathcal{C}\mathcal{C}_0 = 1$$

et μ ayant un module égal à l'unité.

3. Ceci posé, considérons *une forme indéfinie* F *à coefficients entiers*. Nous pouvons mettre F sous la forme

$$F = uu_0 - vv_0,$$

où

$$u = \alpha x + \beta y, \quad v = \gamma x + \delta y,$$

les coefficients α, β, γ, δ n'étant pas d'ailleurs nécessairement des entiers. En même temps que la forme indéfinie proposée, j'envisage la forme définie

$$\Phi = UU_0 + VV_0,$$

où U et V sont les expressions linéaires en u et v considérées au paragraphe précédent. En faisant cette substitution, on aura

$$\Phi = (\mathcal{D}_0 u + \mathcal{C} v)(\mathcal{D} u_0 + \mathcal{C} v_0) + (\mathcal{C} u + \mathcal{D} v)(\mathcal{C}_0 u_0 + \mathcal{D}_0 v_0).$$

On doit concevoir d'ailleurs que u et v sont remplacés par leurs valeurs en x et y, et Φ est par conséquent une forme définie aux indéterminées conjuguées x, y et x_0, y_0. Elle renferme les paramètres arbitraires $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, vérifiant la relation indiquée plus haut.

Voici d'abord une première remarque. En effectuant dans Φ une substitution S, on obtiendra une nouvelle forme φ; soit de même f la transformée obtenue en faisant dans F la substitution S. On voit très facilement que φ peut se déduire de f d'après le mode même de formation de Φ au moyen de F.

La forme Φ ne sera pas en général réduite; supposons que, pour certaines valeurs des paramètres, on cherche une substitution à coefficients entiers qui la transforme en une forme réduite; cette substitution réduira Φ tant que les paramètres $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ satisferont à certaines conditions. Si l'on suppose que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ varient d'une manière continue (en satisfaisant, bien entendu, à la relation indiquée), il faudra à un certain moment employer une autre substitution pour réduire Φ, et c'est à ces opérations de réductions successives de la forme Φ, quand $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ varient d'une manière continue, que nous donnons le nom de *réduction continuelle de cette forme*.

On peut procéder de la manière suivante pour effectuer cette réduction continuelle. Faisons dans Φ une substitution qui la réduise et nous aurons alors une forme Φ_1 réduite pour certaines valeurs des paramètres; quand, par suite de la variation des paramètres, Φ_1 cessera d'être réduite, nous chercherons les diverses substitutions qui, suivant les circonstances de cette variation, la réduiront de nouveau; on obtiendra ainsi d'autres formes Φ et l'on opérera sur chacune d'elles comme on a opéré sur Φ_1. Nous reviendrons plus tard avec détail sur cette série d'opérations (nos **11** et **12**).

4. Concevons maintenant que, ayant calculé toutes les substitutions propres à réduire Φ pour toutes les valeurs des paramètres $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, liés par la relation indiquée, on fasse chacune de ces substitutions dans F; on obtiendra ainsi un ensemble E de transformées f. Remarquons immédiatement que cet ensemble E sera toujours le même, quelle que soit la décomposition de F dont on parte. Supposons en effet que, ayant mis d'abord F sous la forme

$$(1)\qquad F = uu_0 - vv_0,$$

où

$$u = \alpha x + \beta y, \quad v = \gamma x + \delta y,$$

on ait un ensemble de formes f. Mais cette décomposition de F n'est pas unique, et l'on aurait pu partir d'une autre expression

$$(2)\qquad F = u'u'_0 - v'v'_0,$$

où

$$u' = \alpha' x + \beta' y, \quad v' = \gamma' x + \delta' y.$$

D'ailleurs on aura évidemment

$$u' = \mathcal{A}'u + \mathcal{B}'v, \quad v' = \mathcal{C}'u + \mathcal{D}'v,$$

la substitution $(\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}', \mathcal{D}')$ transformant en elle-même $uu_0 - vv_0$.

On conclut de là que les formes Φ déduites des expressions (1) et (2) seront identiques et, par suite, les substitutions propres à les réduire.

Je dis maintenant que *si deux formes* F *et* F′ *sont arithmétiquement équivalentes, c'est-à-dire si l'on peut passer de l'une à l'autre par une substitution à coefficients entiers et de déterminant* 1, E *et* E′ *seront identiques, c'est-à-dire composés des mêmes formes*. Désignons en effet par S une substitution permettant de passer de F à F′ et soit T une substitution réduisant Φ pour certaines valeurs de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{M}$. On passera de Φ à Φ' par la substitution S; par suite, la substitution TS^{-1} effectuée sur Φ' la réduira, et l'on retombera manifestement sur la même forme que quand on a effectué sur Φ la substitution T : E et E' sont donc composés identiquement des mêmes formes.

Examinons maintenant plus attentivement le système des formes f déduites d'une forme F, dont nous avons désigné l'ensemble par E. On peut, à leur égard, établir la proposition suivante, qui est fondamentale : *Le nombre des formes f est essentiellement limité et leurs coefficients ont des limites déterminées par l'invariant* Δ.

5. Avant de donner la démonstration du théorème précédent, je ferai une distinction entre deux circonstances qui peuvent se présenter relativement à l'invariant $\Delta = BB_0 - AC$ (que je suppose, bien entendu, différent de zéro) : Δ peut être ou non une somme de deux carrés.

Examinons d'abord le cas où Δ n'est pas une somme de deux carrés; il n'existera pas alors de forme arithmétiquement équivalente à F et dans laquelle le coefficient de xx_0 sera nul. Il est clair, en effet, que, s'il en était ainsi, l'invariant Δ, qui n'a pas changé par la transformation, serait une somme de deux carrés.

Soient

$$f = (\alpha x + \beta y)(\alpha_0 x_0 + \beta_0 y_0) - (\gamma x + \delta y)(\gamma_0 x_0 + \delta_0 y_0)$$

et

$$\begin{aligned}\varphi = {} & [\mathcal{M}_0(\alpha x + \beta y) + \mathcal{C}_0(\gamma x + \delta y)][\mathcal{M}(\alpha_0 x_0 + \beta_0 y_0) + \mathcal{C}(\gamma_0 x_0 + \delta_0 y_0)] \\ & + [\mathcal{C}(\alpha x + \beta y) + \mathcal{M}(\gamma x + \delta y)][\mathcal{C}_0(\alpha_0 x_0 + \beta_0 y_0) + \mathcal{M}_0(\gamma_0 x_0 + \delta_0 y_0)].\end{aligned}$$

Cette dernière forme est réduite pour des valeurs convenables de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{M}$, satisfaisant d'ailleurs à la relation

$$\mathcal{M}\mathcal{M}_0 - \mathcal{C}\mathcal{C}_0 = 1.$$

Or comparons les coefficients de xx_0 dans f et φ; on a

$$\alpha\alpha_0 - \gamma\gamma_0 \quad \text{et} \quad (\mathcal{M}_0\alpha + \mathcal{C}_0\gamma)(\mathcal{M}\alpha_0 + \mathcal{C}\gamma_0) + (\mathcal{C}\alpha + \mathcal{M}\gamma)(\mathcal{C}_0\alpha_0 + \mathcal{M}_0\gamma_0).$$

On peut facilement montrer que la valeur absolue de $\alpha\alpha_0 - \gamma\gamma_0$ est au plus égale à la seconde expression, qui est toujours positive; celle-ci peut en effet s'écrire

$$\alpha\alpha_0 - \gamma\gamma_0 + 2(\mathcal{C}\alpha + \mathcal{D}\gamma)(\mathcal{C}_0\alpha_0 + \mathcal{D}_0\gamma_0)$$

ou

$$\gamma\gamma_0 - \alpha\alpha_0 + 2(\mathcal{D}_0\alpha + \mathcal{C}_0\gamma)(\mathcal{D}\alpha_0 + \mathcal{C}\gamma_0),$$

et, en se servant de l'une ou l'autre forme, suivant que $\alpha\alpha_0 - \gamma\gamma_0$ est positif ou négatif, le résultat apparaît immédiatement. Dans la forme φ, le coefficient de xx_0 étant moindre que $\sqrt{2\Delta}$, il en est de même du coefficient de xx_0 dans f.

On démontrerait de la même manière que la valeur absolue du coefficient de yy_0 dans f est moindre que le coefficient correspondant dans φ. On sait d'ailleurs que, dans une forme définie réduite, le produit des coefficients extrêmes est moindre que deux fois la valeur absolue du déterminant : c'est ce qui se tire immédiatement des inégalités du n° 2. L'invariant de φ étant égal à l'invariant Δ de f changé de signe, on en conclut que, dans la forme f, le produit des coefficients extrêmes est moindre que 2Δ en valeur absolue; or, ces coefficients étant des entiers et ne pouvant être nuls dans l'hypothèse où nous nous sommes placés relativement à Δ, on voit qu'ils sont limités en fonction de Δ.

Si Δ est la somme de deux carrés, le coefficient de xx_0 dans f est toujours moindre que $\sqrt{2\Delta}$, mais la suite de la démonstration précédente n'est pas applicable, car nous allons montrer qu'il existera alors des formes arithmétiquement équivalentes à F et dans lesquelles le coefficient de xx_0 sera nul; on ne pourra plus alors conclure de la limitation du produit des coefficients extrêmes celle du dernier coefficient.

Soit en effet

$$F = Axx_0 + Bxy_0 + B_0x_0y + Cyy_0,$$

avec

$$BB_0 - AC = \alpha^2 + \beta^2,$$

et où nous supposons que A n'est pas nul.

En faisant la substitution

$$x = ax' + by',$$
$$y = cx' + dy',$$

a, b, c, d étant quatre entiers pour lesquels

$$ad - bc = 1,$$

le coefficient de $x'x'_0$ dans la transformée sera

$$Aaa_0 + Bac_0 + B_0a_0c + Ccc_0;$$

en l'égalant à zéro, on obtient l'équation

$$(Aa_0 + Bc_0)(Aa + B_0c) = (\alpha^2 + \beta^2)cc_0,$$

et cette équation sera satisfaite en posant

$$Aa + B_0c = (\alpha + i\beta)c.$$

Soient a et c les deux nombres premiers entre eux vérifiant cette condition; on sait qu'on pourra trouver une infinité d'entiers b et d satisfaisant à l'équation

$$ad - bc = 1,$$

ce qui donnera des substitutions conduisant à des transformées de la forme cherchée.

J'admettrai pour le moment que l'ensemble E des formes f est encore fini quand Δ est la somme de deux carrés : les représentations géométriques dont nous allons faire usage pour traiter de la réduction continuelle des formes Φ nous permettront, dans un instant, d'en donner bien aisément la démonstration.

Nous pouvons donner aux formes f le nom de *réduites;* et, d'après ce qui a été démontré plus haut, *la condition nécessaire et suffisante pour que deux formes soient arithmétiquement équivalentes est qu'elles aient les mêmes réduites.*

II.

6. Nous venons de voir que l'étude des formes indéfinies F se ramenait à la réduction de la forme définie

$$\begin{aligned}\Phi = &[\mathfrak{D}_0(\alpha x + \beta y) + \mathfrak{S}_0(\gamma x + \delta y)][\mathfrak{D}(\alpha_0 x_0 + \beta_0 y_0) + \mathfrak{S}(\gamma_0 x_0 + \delta_0 y_0)]\\ &+ [\mathfrak{S}(\alpha x + \beta y) + \mathfrak{D}(\gamma x + \delta y)][\mathfrak{S}_0(\alpha_0 x_0 + \beta_0 y_0) + \mathfrak{D}_0(\gamma_0 x_0 + \delta_0 y_0)]\end{aligned}$$

pour toutes les valeurs des paramètres complexes $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{D}$ satisfaisant à la relation

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}_0 - \mathfrak{S}\mathfrak{S}_0 = 1.$$

On remarque d'abord que les coefficients de la forme Φ sont des formes quadratiques binaires aux indéterminées conjuguées $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}_0$. Divisons donc par $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_0$ la forme Φ; la nouvelle forme, que nous désignerons toujours par la même lettre, ne renfermera plus qu'un seul arbitraire, qui sera le quotient $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{D}} = z$, et z pourra prendre toutes les valeurs de module égal ou inférieur à l'unité, comme le montre immédiatement la relation à laquelle satisfont $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{D}$.

Nous avons

$$\begin{aligned}\Phi = {} & [\alpha x + \beta y + (\gamma x + \delta y) z_0][\alpha_0 x_0 + \beta_0 y_0 + (\gamma_0 x_0 + \delta_0 y_0) z] \\ & + [(\alpha x + \beta y) z + \gamma x + \delta y][(\alpha_0 x_0 + \beta_0 y_0) z_0 + \gamma_0 x_0 + \delta_0 y_0],\end{aligned}$$

où z est un paramètre complexe arbitraire, qui, je le répète, peut prendre toutes les valeurs de module inférieur ou égal à 1.

Supposons maintenant que la forme F soit une forme réduite, et cherchons par quelles valeurs de z Φ est réduite. Nous avons rappelé (n° **2**) les conditions qui expriment qu'une forme définie est réduite.

Nous aurons d'abord

$$\begin{aligned}& (\alpha + \gamma z_0)(\alpha_0 + \gamma_0 z) + (\alpha z + \gamma)(\alpha_0 z_0 + \gamma_0) \\ & \quad < (\beta + \delta z_0)(\beta_0 + \delta_0 z) + (\beta z + \delta)(\beta_0 z_0 + \delta_0),\end{aligned}$$

en écrivant que le coefficient de $x x_0$ est moindre que celui de $y y_0$.

Voilà une première inégalité à laquelle devra satisfaire z; on peut lui donner une interprétation géométrique remarquable, qui sera fort utile dans toute la suite de ce Mémoire. On peut la mettre sous la forme

$$(\mu) \qquad a z z_0 + b z + b_0 z_0 + a < 0;$$

a étant réel, le terme indépendant de z est, comme on le voit de suite, égal au coefficient de $z z_0$.

Or l'équation

$$a z z_0 + b z + b_0 z_0 + a = 0$$

représente un *cercle;* on a, en effet, si l'on pose $z = \alpha + i\beta$ et $b = m + ni$,

$$a(\alpha^2 + \beta^2) + 2m\alpha + 2n\beta + a = 0,$$

qui représente un cercle quand on regarde α et β comme coordonnées courantes. On reconnaît de plus immédiatement que *ce cercle coupe* *orthogonalement le cercle ayant l'origine pour centre et l'unité pour rayon.*

Passons aux autres conditions; on aura

$$\begin{aligned}&(\alpha+\gamma z_0)(\beta_0+\delta_0 z)+(\alpha_0+\gamma_0 z)(\beta+\delta z_0)\\&\quad+(\alpha z+\gamma)(\beta_0 z_0+\delta_0)+(\alpha_0 z_0+\gamma_0)(\beta z+\delta)\\&\quad<(\alpha+\gamma z_0)(\alpha_0+\gamma_0 z)+(\alpha z+\gamma)(\alpha_0 z_0+\gamma_0),\end{aligned}$$

et cette inégalité est encore susceptible de se mettre sous la forme (μ). On reconnaîtrait de même, en écrivant les trois autres inégalités qui expriment que la forme est réduite, que celles-ci peuvent se mettre sous la forme (μ).

Avant d'aller plus loin, remarquons qu'à toute valeur de z satisfaisant aux inégalités indiquées correspond une autre valeur qui y satisfait également : c'est $\frac{1}{z_0}$; et si à la première correspond un point à l'intérieur du cercle de rayon 1, il correspondra à la seconde un point à l'intérieur de ce cercle. Cherchons maintenant s'il pourra y avoir sur la circonférence de rayon 1 des points satisfaisant aux cinq inégalités précédentes. On déduit immédiatement des conditions du n° 2,

$$\begin{gathered}A\leq C,\\ 2m\leq A,\quad -2m\leq A,\quad B=m+ni,\\ 2n\leq A,\quad -2n\leq A,\end{gathered}$$

l'inégalité suivante :

$$A^2<2(AC-BB_0).$$

On aura donc ici, en désignant par Δ le déterminant de la forme F,

$$[(\alpha+\gamma z_0)(\alpha_0+\gamma_0 z)+(\alpha z+\gamma)(\alpha_0 z_0+\gamma_0)]^2<2\Delta(1-zz_0)^2.$$

Si z a un module égal à l'unité, le second membre s'annulant, il en sera de même du premier, ce qui entraîne nécessairement,

$$\alpha_0+\gamma_0 z=0 \quad \text{et} \quad \alpha z+\gamma=0$$

et, par suite,

$$\alpha\alpha_0-\gamma\gamma_0=0.$$

Or le coefficient de xx_0, dans la forme

$$F=(\alpha x+\beta y)(\alpha_0 x_0+\beta_0 y_0)-(\gamma x+\delta y)(\gamma_0 x_0+\delta_0 y_0)$$

est précisément $\alpha\alpha_0 - \gamma\gamma_0$. Or nous sommes assurés que, quand l'invariant de F n'est pas une somme de deux carrés, $\alpha\alpha_0 - \gamma\gamma_0$ ne peut être nul; par suite, quand Δ n'est pas une somme de deux carrés, l'ensemble E des points z satisfaisant aux cinq inégalités (μ) n'a aucun point commun avec la circonférence de rayon 1 : cet ensemble se partage en deux parties, l'une complètement intérieure, l'autre complètement extérieure au cercle de rayon 1; il nous suffira évidemment de considérer celle qui est intérieure à ce cercle.

Si $\alpha\alpha_0 - \gamma\gamma_0 = 0$, ce qui exige nécessairement que Δ soit la somme de deux carrés, la valeur $z = -\frac{\gamma}{\alpha}$, dont le module est 1, satisfait aux cinq inégalités (μ), et l'ensemble E a un point commun avec la circonférence limite. Nous allons étudier ce cas d'une manière plus approfondie.

7. Partons, à cet effet, de la forme

$$F = bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0,$$

dans laquelle le coefficient de xx_0 est nul, et où nous pouvons supposer $c > 0$. Nous l'écrirons

$$F = \frac{1}{c}(bx + cy)(b_0x_0 + cy_0) - \frac{bb_0}{c}xx_0,$$

et cette expression aura la forme $uu_0 - vv_0$ en posant

$$u = \frac{1}{\sqrt{c}}(bx + cy), \quad v = \frac{b}{\sqrt{c}}x;$$

par suite,

$$\begin{aligned}\Phi = &\left[\frac{1}{\sqrt{c}}(bx + cy) + \frac{b}{\sqrt{c}}xz_0\right]\left[\frac{1}{\sqrt{c}}(b_0x_0 + cy_0) + \frac{b_0}{\sqrt{c}}x_0z\right] \\ &+ \left[\frac{1}{\sqrt{c}}(bx+cy)z + \frac{b}{\sqrt{c}}x\right]\left[\frac{1}{\sqrt{c}}(b_0x_0 + cy_0)z_0 + \frac{b_0}{\sqrt{c}}x_0\right].\end{aligned}$$

Cette forme devra être réduite pour que F soit elle-même une forme réduite. Les cinq inégalités de condition deviennent ici

$$2bb_0(1+z)(1+z_0) < c^2(1+zz_0),$$

$$\pm[bc(1+z_0) + b_0c(1+z) + bcz_0(z+1) + b_0cz(z_0+1)] < 2bb_0(1+z)(1+z_0),$$

où l'on prend successivement le signe $+$ et le signe $-$,

$$\pm\left[\frac{bc(1+z_0)-b_0c(1+z)}{i}+\frac{bcz_0(z+1)-b_0cz(z_0+1)}{i}\right]<2bb_0(1+z)(1+z_0).$$

Voyons à quelles conditions on pourra trouver des valeurs de z satisfaisant à ces cinq inégalités.

Je prends d'abord la deuxième et la troisième inégalité, qui peuvent s'écrire, en posant $b=m+ni$ et $z=\alpha+i\beta$,

$$\text{(I)}\quad (m^2+n^2-mc)(\alpha^2+\beta^2)+2(m^2+n^2-mc)\alpha-2nc\beta+m^2+n^2-mc>0,$$

$$\text{(II)}\quad (m^2+n^2+mc)(\alpha^2+\beta^2)+2(m^2+n^2+mc)\alpha+2nc\beta+m^2+n^2+mc>0,$$

α et β désignant des coordonnées courantes; les premiers membres de ces inégalités, égalés à zéro, représentent deux cercles passant par le point $\alpha=-1$, $\beta=0$, et orthogonaux au cercle de rayon 1. On aura pareillement, pour la quatrième et la cinquième inégalité :

$$\text{(III)}\quad (\alpha^2+\beta^2)(m^2+n^2-nc)+2\alpha(m^2+n^2-nc)+2mc\beta+m^2+n^2-nc>0,$$

$$\text{(IV)}\quad (\alpha^2+\beta^2)(m^2+n^2+nc)+2\alpha(m^2+n^2-nc)-2mc\beta+m^2+n^2+nc>0.$$

Je supposerai d'abord qu'aucune des quantités m et n ne soit nulle, ce qui arrivera nécessairement si le discriminant de la forme qui est m^2+n^2 n'est pas un carré parfait. Nous allons établir que les inégalités précédentes ne pourront être vérifiées simultanément, si l'on a à la fois

$$\text{Valeur absolue de }(mc)>m^2+n^2,$$
$$\text{Valeur absolue de }(nc)>m^2+n^2.$$

Plaçons-nous, en effet, dans ces hypothèses : les coordonnées des centres des cercles (I) et (II) étant respectivement

$$\alpha_1=-1,\quad \beta_1=\frac{nc}{m^2+n^2-mc},$$

$$\alpha_2=-1,\quad \beta_2=\frac{-nc}{m^2+n^2+mc}.$$

On voit que β_1 et β_2 seront de même signe; par suite, les deux cercles seront du même côté de l'axe réel. Pour les cercles (III et IV), on a

$$\alpha_3 = -1, \quad \beta_3 = \frac{-mc}{m^2+n^2-nc},$$

$$\alpha_4 = -1, \quad \beta_4 = \frac{mc}{m^2+n^2+nc},$$

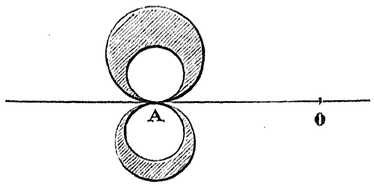
et β_3 et β_4 sont encore de même signe. De plus, le signe de β_1 et β_2, puis celui de β_3 et β_4 sont différents; comparons, en effet, β_1 et β_2 : leur produit sera

$$\frac{n}{m^2+n^2+nc}\,\frac{m}{m^2+n^2-mc}\,c^2.$$

Or $\frac{n}{m^2+n^2+nc}$ est positif, puisque la valeur absolue de nc est supérieure à m^2+n^2 et $\frac{m}{m^2+n^2-mc}$ est au contraire négatif; β_1 et β_4 sont donc bien de signes contraires.

Cherchons maintenant quels points du plan satisfont aux inégalités (I) et (II). Si m est positif, le cercle (I) comprendra le cercle (II) à son intérieur et les points du plan intérieurs à (I) et extérieurs à (II) satisfont aux deux inégalités. Si m est négatif, le cercle (I) est contenu dans le cercle (II), et ce sont encore les points du plan contenus entre les deux cercles qui satisfont aux deux inégalités (partie ombrée dans la *fig.* 1, au-dessus de l'axe AO).

Fig. 1



On aura de même les points du plan satisfaisant aux inégalités (III) et (IV); les cercles (III) et (IV) sont situés de l'autre côté de AO et la partie ombrée au-dessous de AO donne les points cherchés. Les deux parties ombrées n'ayant d'autre point commun que le point A, on voit que, dans l'hypothèse où les valeurs absolues de mc et nc sont supérieures à m^2+n^2 ou Δ, la forme F n'est pas réduite. *On en conclut que* *l'entier c est nécessairement limité en fonction de l'invariant* Δ. Cette remarque complète le théorème établi au n° 5, d'après lequel les *formes réduites sont en nombre fini*, proposition qui n'avait été établie que quand Δ n'était pas une somme de deux carrés [1].

Nous avons toutefois supposé que Δ n'était pas un carré parfait; faisons maintenant cette dernière hypothèse : supposons que m ou n soit nul, cas que nous avions pu écarter tout à l'heure.

Soit $n = 0$. Les deux premières inégalités précédentes deviennent

$$(m^2 - mc)(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 1) > 0,$$
$$(m^2 + mc)(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 1) > 0,$$

inégalités qui ne pourront évidemment être vérifiées que si la valeur absolue de mc est inférieure à m^2; c est donc encore limité en fonction de Δ et le théorème du n° 5 est, par suite, établi, quel que soit Δ, supposé seulement, bien entendu, différent de zéro.

III.

8. Avant de revenir au calcul de l'ensemble des réduites d'une forme indéfinie donnée, nous avons à examiner les diverses circonstances qui peuvent se présenter dans la réduction d'une forme définie.

Nous avons rappelé plus haut (n° 2) qu'à toute forme définie à coefficients quelconques correspondait une forme réduite arithmétiquement équivalente. En désignant par

$$axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0,$$

cette réduite, que nous supposons positive ($a > 0$, $c > 0$), nous avons

---

[1] Sans entrer dans un examen attentif des positions que peuvent prendre les différents cercles, on peut remarquer immédiatement que le polygone correspondant à F doit être un triangle dont un des sommets est le point $\alpha = -1$, $\beta = 0$. Le côté opposé à ce sommet est obtenu en écrivant que le coefficient de xx_0 est égal à celui de yy_0; si donc z traverse ce côté, on réduira de nouveau la forme Φ en employant la substitution $(x, y, -y, x)$. La forme indéfinie

$$cxx_0 - b_0xy_0 - bx_0y$$

est donc réduite; on a, par suite, $c \leq \sqrt{2\Delta}$, ce qui fournit une seconde démonstration du théorème, dans le cas où Δ est une somme de deux carrés.

dit que l'on aurait

$$a \leqq c, \quad 2(m) \leqq a, \quad 2(n) \leqq a,$$

en posant $b = m + ni$ et la parenthèse (m) désignant la valeur absolue de m.

Désignons par Δ la quantité positive $ac - bb_0$. On tire des inégalités précédentes (*voir* Hermite, *loc. cit.*)

$$ac \leqq 2\Delta.$$

Il est facile de trouver dans quelles circonstances deux formes réduites peuvent être arithmétiquement équivalentes. Supposons que

$$a' x x_0 + b' x y_0 + b'_0 x_0 y + c' y y_0$$

soit une nouvelle forme réduite, arithmétiquement équivalente à la première. Nous pouvons évidemment supposer que

$$a' \leqq a.$$

On passera de la première forme à la seconde en remplaçant x et y respectivement par $\alpha x + \beta y$ et $\gamma x + \delta y$, α, β, γ et δ étant quatre entiers complexes, pour lesquels on a

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

On aura donc

$$\begin{aligned}
a' &= a\alpha\alpha_0 + b\alpha\gamma_0 + b_0\alpha_0\gamma + c\gamma\gamma_0,\\
b' &= a\alpha\beta_0 + b\alpha\delta_0 + b_0\beta_0\gamma + c\gamma\delta_0,\\
c' &= a\beta\beta_0 + b\beta\delta_0 + b_0\beta_0\delta + c\delta\delta_0,
\end{aligned}$$

et l'on peut écrire

$$aa' = (a\alpha_0 + b\gamma_0)(a\alpha + b_0\gamma) + \Delta\gamma\gamma_0;$$

or

$$aa' \leqq a^2 \leqq ac \leqq 2\Delta,$$

et comme, d'après l'expression de aa', on a

$$aa' \geqq \Delta\gamma\gamma_0$$

on en conclut de suite

$$\gamma\gamma_0 \leqq 2.$$

Faisons successivement les différentes hypothèses

$$\gamma\gamma_0 = 0, 1, 2.$$

9. 1° Soit $\gamma = 0$; alors

$$\alpha\delta = 1, \quad a' = a\alpha\alpha_0, \quad b' = a\alpha\beta_0 + b\alpha\delta_0.$$

On aura donc

$$a' = a,$$

et les quatre hypothèses suivantes peuvent seules être faites :

$$\begin{array}{lll} \alpha = 1, & \delta = 1, & b' = a\beta_0 + b, \\ \alpha = -1, & \delta = -1, & b' = -a\beta_0 + b, \\ \alpha = i, & \delta = -i, & b' = ai\beta_0 - b, \\ \alpha = -i, & \delta = +i, & b' = -ai\beta_0 - b. \end{array}$$

Si l'on a

$$2(m) < a, \quad 2(n) < a,$$

aucune de ces inégalités ne devenant une égalité, l'une au moins des quantités $2(m')$ et $2(n')$ (nous posons $b' = m' + n'i$) sera supérieure à a si l'on n'a pas $\beta = 0$.

Alors $b' = \pm b$ et l'on a $c' = c$. On en conclut que la seule forme réduite, arithmétiquement équivalente à

(I) $$axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0,$$

est

(II) $$axx_0 - bxy_0 - b_0x_0y + cyy_0,$$

et l'on passe de l'une à l'autre par la substitution $(x, y, ix, -iy)$.

Supposons que, l'égalité étant possible, on ait

$$2(m) \leq a, \quad 2(n) \leq a.$$

Reprenons l'expression

$$b' = a\alpha\beta_0 + b\alpha\delta_0 = \frac{\alpha}{\delta}(a\beta_0\delta + b) = \pm(a\beta_0\delta + b),$$

puisque, $\alpha\delta = 1$; d'ailleurs,

$$c' = a\beta\beta_0 + b\beta\delta_0 + b_0\beta_0\delta + c.$$

Soit $\beta_0\delta = p + qi$; nous aurons

$$b' = \pm[ap + m + i(aq + n)],$$
$$c' = ap^2 + 2mp + aq^2 + 2nq + c.$$

Or la valeur absolue de $2ap+2m$ étant au plus égale à a, on doit avoir $p=0$ ou $p^2=1$, et l'on vérifie de suite que, dans l'un et l'autre cas, on a

$$ap^2+2mp=0 \quad \text{et de même} \quad aq^2+2nq=0.$$

Nous avons donc

$$c'=c,$$

et de la valeur de b' on conclut que $b'=\pm b$, ce qui est le cas considéré plus haut, ou $b'=\pm b_0$. Ainsi, quand on a, soit $2(m)=a$, soit $2(n)=a$, la forme (I) n'est plus seulement équivalente à la réduite (II), mais aussi à la réduite

$$\text{(III)} \qquad axx_0+b_0xy_0+bxy_0+cyy_0$$

et à celle qui s'en déduit par le changement de signe des coefficients moyens.

2° Soit $\gamma\gamma_0=1$,

$$a'=a\alpha\alpha_1+b\alpha\gamma_0+b_0\alpha_0\gamma+c.$$

Or

$$a'\leqq a\leqq c,$$

donc

$$a\alpha\alpha_0+b\alpha\gamma_0+b_0\alpha_0\gamma\leqq 0.$$

Posons $\alpha\gamma_0=p+qi$; cette inégalité devient

$$a(p^2+q^2)+2mp-2nq\leqq 0,$$

et, puisque

$$2(m)\leqq a, \quad 2(n)\leqq a,$$

on en conclut

$$ap^2+2mp=0, \quad aq^2-2nq=0,$$

d'où l'on déduit

$$a'=a=c.$$

Si $p=q=0$, on a $\alpha=0$ et, comme $b'=b_0\beta_0\gamma+a\gamma\delta_0$, il faudra $\delta=0$ ou $\delta\delta_0=1$, et il vient

$$b'=b_0 \quad \text{ou} \quad b'=-b_0.$$

En examinant successivement les cas où $p^2=1$ et $q^2=1$, on arrive toujours aux mêmes conclusions; quand on a

$$a=c,$$

la forme (I) est équivalente aux réduites (II) et (III).

3° Il nous reste à faire l'hypothèse $\gamma\gamma_0 = 2$.

Comme $aa' \geqq \Delta\gamma\gamma_0$ et que $aa' \leqq a^2 \leqq ac \leqq 2\Delta$, on en conclut

$$a' = a = c = \sqrt{2\Delta};$$

de plus, aa' étant égal à 2Δ,

$$a\alpha + b_0\gamma = 0, \quad \text{d'où} \quad b_0 = -a\frac{\alpha}{\gamma},$$

et, comme $bb_0 - a^2 = -\Delta$, on a

$$\alpha\alpha_0 = 1,$$

donc

$$b_0 = \pm a(1 \pm i);$$

la forme est dans ce cas

$$axx_0 \pm \frac{a}{2}(1 \pm i)xy_0 \pm \frac{a}{2}(1 \mp i)x_0y + ayy_0.$$

Soit, par exemple, $\alpha = -1$, $\gamma = 1 + i$, on aura

$$axx_0 + \frac{a}{2}(1-i)xy_0 + \frac{a}{2}(1+i)x_0y + ayy_0;$$

les valeurs de a', b', c' donnent

$$a' = a - \frac{a}{2}(1-i) - \frac{a}{2}(1+i) + a = a,$$

$$b' = -a\beta_0 - \frac{a}{2}(1-i)\delta_0 + ai\beta_0 + a(1+i)\delta_0.$$

On a d'ailleurs

$$\delta + \beta(1+i) = -1$$

et, en remplaçant δ par sa valeur, on trouve

$$b' = -\frac{a}{2} - \frac{3ai}{2}3a\beta_0,$$

et l'on voit que, pour aucune valeur de β, b' ne satisfait aux conditions requises. Il se trouve ainsi établi que l'hypothèse $\gamma\gamma_0 = 2$ est inadmissible. Il résulte de cette discussion, dont nous n'avons fait qu'indiquer rapidement la marche, que *si*

$$(\alpha) \qquad a < c, \quad 2(m) < a, \quad 2(n) < a,$$

la forme réduite f

$$f = axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0$$

sera équivalente seulement à la forme réduite

$$axx_0 - bxy_0 - b_0x_0y + cyy_0.$$

Dans le cas où une ou plusieurs des inégalités précédentes deviendraient des inégalités, la forme f sera de plus équivalente aux deux formes réduites

$$axx_0 + b_0xy_0 + bx_0y + cyy_0,$$
$$axx_0 - b_0xy_0 - bx_0y + cyy_0.$$

10. Revenons maintenant à la forme définie Φ (n° 6), qui contient le paramètre arbitraire z; si nous supposons que nous sommes partis d'une forme réduite F, la forme Φ sera réduite pour les valeurs de z, situées à l'intérieur d'un polygone curviligne convenable, polygone que nous avons appris à former (n° 6). Pour un point quelconque z à l'intérieur de ce polygone, la forme Φ réduite peut-elle être équivalente à une autre réduite que celle qui s'obtient par le changement de signe des coefficients moyens? D'après ce qui vient d'être dit, il faudrait qu'une des inégalités (α) devînt une inégalité, et cela pour tous les points à l'intérieur du polygone et par conséquent pour toute valeur de z. Cherchons à quelles conditions cette circonstance pourra se présenter.

Prenons d'abord le cas où l'on aurait $a = c$, qui devient ici

$$(\alpha+\gamma z_0)(\alpha_0+\gamma_0 z)+(\alpha z+\gamma)(\alpha_0 z_0+\gamma_0) = (\beta+\delta z_0)(\beta_0+\delta_0 z)(\beta z+\delta)(\beta_0+\delta_0),$$

d'où l'on tire, ceci étant une identité,

$$\alpha\alpha_0 + \gamma\gamma_0 = \beta\beta_0 + \delta\delta_0, \quad \alpha\gamma_0 = \beta\delta_0;$$

δ et γ ne pouvant être nuls à la fois, nous pouvons poser

$$\frac{\alpha}{\delta_0} = \frac{\beta}{\gamma_0} = \mu,$$

d'où, en substituant,

$$\mu\mu_0(\delta\delta_0 - \gamma\gamma_0) = \delta\delta_0 - \gamma\gamma_0 \quad \text{ou} \quad (\mu\mu_0 - 1)(\delta\delta_0 - \gamma\gamma_0) = 0.$$

Or la forme *indéfinie* $F = Axx_0 + Bxy_0 + B_0x_0y + Cyy_0$ peut s'écrire

$$F = (\alpha x + \beta y)(\alpha_0 x_0 + \beta_0 y_0) - (\gamma x + \delta y)(\gamma_0 x_0 + \delta_0 y_0);$$

donc

$$A = \alpha\alpha_0 - \gamma\gamma_0, \quad B = \alpha\beta_0 - \gamma\delta_0, \quad C = \beta\beta_0 - \delta\delta_0.$$

Soit d'abord

$$\delta\delta_0 - \gamma\gamma_0 = 0,$$

on en déduit

$$A = C, \quad B = \delta_0\gamma(\mu\mu_0 - 1)$$

et enfin

$$BB_0 = AC;$$

le discriminant de la forme est alors nul, cas que nous laissons de côté.

Soit maintenant $\mu\mu_0 = 1$; on aura

$$A = -C \quad \text{et} \quad B = 0;$$

le discriminant de la forme est alors A^2, c'est-à-dire un carré parfait. Sa forme F est

$$A(xx_0 - yy_0).$$

Passons maintenant aux autres inégalités. En supposant que C soit différent de zéro, après avoir multiplié la forme par C, nous pourrons l'écrire

$$(Cy + Bx)(Cy_0 + B_0x_0) - \Delta\, xx_0,$$

L'égalité $2m = a$, avec les notations du numéro précédent, devient ici

$$\begin{aligned}(B + \sqrt{\Delta}.z_0)C + (B_0 + \sqrt{\Delta}.z)C + (Bz + \sqrt{\Delta}.z)Cz_0 + (B_0z + \sqrt{\Delta})Cz \\ = (B + \sqrt{\Delta}.z_0)(B_0 + \sqrt{\Delta}.z) + (Bz + \sqrt{\Delta})(B_0z_0 + \sqrt{\Delta}),\end{aligned}$$

et ceci sera une identité si

$$(B + B_0)C = BB_0 + \Delta, \quad B_0 = C,$$

d'où

$$\Delta = C^2;$$

donc A est nul, et la forme est

$$C(xy_0 + x_0y + yy_0).$$

Nous avons supposé C différent de zéro; or on reconnaît bien aisément qu'il est impossible que C soit nul, et la forme précédente est la seule pour laquelle, quel que soit z, l'égalité $2m = a$ soit vérifiée.

Pour que $2m = -a$, la forme F doit être

$$C(-xy_0 - x_0y + yy_0)$$

et, pour les deux autres cas,

$$2n = \pm a,$$

on devra avoir

$$F = A(xx_0 \pm xy_0 \pm x_0 y).$$

Remarquons d'ailleurs que, abstraction faite des facteurs A et C, qui ne pourront être égaux qu'à ± 1, si dans la forme proposée les trois coefficients A, B, C n'ont pas de facteur réel commun, les trois formes précédentes sont arithmétiquement équivalentes.

Il résulte des remarques précédentes et de ce que nous avons vu (n° 8) que, si la forme indéfinie F n'est pas équivalente à la forme

$$xx_0 - yy_0,$$

la forme définie correspondante Φ ne sera, pour une valeur arbitraire du paramètre z, équivalente qu'à deux formes réduites, celles-ci ne différant l'une de l'autre que par le changement de signe des coefficients moyens.

11. Expliquons maintenant avec plus de détails comment peut s'effectuer cette réduction continuelle de la forme Φ. Pour plus de simplicité, supposons que la forme F dont nous partons soit réduite : la forme correspondante Φ sera réduite pour certaines valeurs du paramètre z. Ces valeurs seront représentées par les points à l'intérieur d'un certain polygone P, dont les côtés sont des arcs de cercle orthogonaux au cercle de rayon 1; ce polygone aura au plus cinq côtés. Supposons maintenant que le point z sorte de ce polygone : la forme Φ cesse d'être réduite; une substitution convenable la réduira de nouveau, et cette substitution pourra d'ailleurs varier avec le point par lequel le point z sort du polygone et même suivant la direction de sa trajectoire, si le point de sortie est un sommet du polygone. La forme Φ se transformera ainsi en Φ_1 et soit F_1 ce que devient F par cette substitution. Φ_1 sera définie pour les valeurs de z comprises à l'intérieur d'un polygone P_1, qui n'aura de commun avec le premier qu'un côté ou même qu'un sommet; ces polygones ne peuvent avoir en effet de point intérieur commun, car, pour une valeur de z intérieure à P, la forme Φ n'est équivalente qu'à

une seule autre réduite, qui s'obtient en changeant dans cette forme les signes des coefficients moyens (nº 8); le polygone P_1 coïnciderait alors avec P, et la forme F_1 se tirerait de F par le même changement de signe. Nous pouvons considérer comme n'en faisant qu'une ces deux réduites équivalentes correspondant à la substitution $(x, y, ix, -iy)$, et alors notre polygone P_1 n'a qu'un côté ou qu'un sommet commun avec P; nous appellerons *polygones contigus* au polygone P les différents polygones qui lui sont adjacents, et les différentes réduites correspondantes F_1 seront dites les réduites *contiguës* à F. On peut continuer ainsi indéfiniment la formation des polygones P et nous pouvons faire dès maintenant la remarque que ces polygones, tous intérieurs comme nous l'avons expliqué précédemment au cercle de rayon 1, *ne recouvrent ce cercle qu'une seule fois;* deux polygones ne peuvent en effet avoir de points intérieurs communs: c'est ce qu'on verrait en répétant le raisonnement que nous avons fait précédemment relativement à P et P_1.

Partant d'abord de F, nous la joindrons à toutes ses contiguës, en ne gardant que celles qui sont distinctes et différentes de F : nous formons ainsi un premier groupe (A). Prenons maintenant les formes contiguës à (A); parmi celles-ci se trouveront le groupe (A) et un second groupe (B), dont nous ne conservons que les formes distinctes entre elles et distinctes des formes de (A). Nous continuerons de même en prenant les formes contiguës à (A) et (B), parmi lesquelles se trouvent (A) et (B) eux-mêmes et un troisième groupe (C), dont nous ne conservons que les formes distinctes entre elles et de celles qui entrent dans (A) et (B). On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on ne trouve plus de nouvelles formes réduites, ce qui arrivera necessairement, puisque le nombre des réduites est limité (nº 5). On obtiendra de cette manière toutes les réduites arithmétiquement équivalentes à F.

En effectuant, comme il vient d'être dit, la réduction continuelle de Φ, nous obtenons dans le plan du paramètre z un nombre fini de polygones qui forment un *continuum* de points, et à chacun desquels correspond une forme réduite (si, comme nous l'avons dit plus haut, on considère comme identiques deux formes ne différant que par le signe du coefficient moyen). Désignons par π le polygone formé de tous ces polygones : nous l'appellerons le *polygone fondamental.*

12. Si, en continuant d'effectuer la réduction continuelle de Φ, z sort du polygone π, on rencontrera nécessairement une réduite déjà obtenue; z ayant traversé d'une manière déterminée le périmètre de π, désignons par f cette réduite et soit

$$f = uu_0 - vv_0$$

la forme sous laquelle elle s'est rencontrée quand nous avons effectué la réduction continuelle à l'intérieur du polygone fondamental; soit encore

$$\Phi = (u + vz_0)(u_0 + v_0 z) + (uz + v)(u_0 z_0 + v_0) \tag{1}$$

la forme correspondante Φ. Quand z, passant du polygone P, qui est inférieur à π et correspond à la forme f, traverse de la manière déterminée le périmètre de π, il faut employer une certaine substitution à coefficients entiers pour réduire Φ, et celle-ci devient, en désignant par u' et v' les transformées de u et v par cette substitution,

$$(u' + v'z_0)(u'_0 + v'_0 z) + (u'z + v')(u'_0 z_0 + v'_0);$$

or on a identiquement

$$uu_0 - vv_0 = u'u'_0 - v'v'_0;$$

donc (n° 2) u' et v' sont de la forme

$$u' = \mu\mathcal{A}_0 u + \mathcal{C}_0 v,$$
$$v' = \mathcal{C} u + \mathcal{A} v$$

avec

$$\mu\mu_0 = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}\mathcal{A}_0 - \mathcal{C}\mathcal{C}_0 = 1.$$

La forme Φ devient donc

$$\begin{aligned}[][u(\mu\mathcal{A}_0 + \mathcal{C}z) + v(\mu\mathcal{C}_0 + \mathcal{A}z_0)][u_0(\mu_0\mathcal{A} + \mathcal{C}_0 z) + v_0(\mu_0\mathcal{C} + \mathcal{A}z_0)]\\ + [u(\mu\mathcal{A}_0 z + \mathcal{C}) + v(\mu\mathcal{C}_0 z + \mathcal{A})][u_0(\mu_0\mathcal{A}z_0 + \mathcal{C}_0) + v_0(\mu_0\mathcal{C}z_0 + \mathcal{A}_0)],\end{aligned}$$

et cette forme pourra s'écrire, après division par un facteur positif,

$$(u + vz'_0)(u_0 + v_0 z') + (uz' + v)(u_0 z'_0 + v_0), \tag{2}$$

en posant

$$z' = \frac{\mathcal{A}_0 z + \mathcal{C}\mu_0}{\mathcal{C}_0 z + \mathcal{A}\mu_0}; \tag{S}$$

les formes (1) et (2) sont identiques, sauf le changement de z en z'; le polygone π', transformé du polygone π par la substitution (S), correspondra comme lui à toutes les formes réduites, arithmétiquement équivalentes à la forme initiale. On remarque d'ailleurs que la substitution (S) laisse invariable le cercle de rayon 1 et qu'à un point z à l'intérieur du cercle correspond un point z' qui est également à l'intérieur du même cercle.

Une substitution (S) fera, en général, correspondre un côté du polygone π à un autre côté de ce même polygone. Supposons en effet que, z sortant de π par le côté ab, on rencontre une réduite qui était représentée à l'intérieur du polygone fondamental par un polygone que nous avons appelé p. Or il arrivera, en général, que p aura un côté cd commun avec π et correspondant à ab; car, dans le cas contraire, si cd est le côté de p correspondant à ab par la substitution (S), le polygone contigu à p le long de cd serait à l'intérieur du polygone fondamental et devrait, par conséquent, coïncider avec le polygone intérieur à π et ayant ab pour côté, puisque ces deux polygones représentent la même réduite. Le polygone p_1 aurait donc deux polygones contigus qui correspondraient à la même réduite, et la substitution S transformerait p_1 en lui-même, circonstances possibles, mais qui évidemment ne se présenteront pas en général. Si donc le polygone p_1, ayant pour côté ab, ne se trouve pas dans ce cas exceptionnel, la substitution S fera correspondre au côté ab de π un autre côté cd du même polygone.

En sortant successivement du polygone π par les différents côtés de ce polygone, on obtiendra différentes substitutions (S). *Le groupe* G, *dont ces substitutions sont les substitutions fondamentales, est, d'après ce qui précède, évidemment discontinu.* Si, pour chaque réduite de F, les réduites contiguës le long des côtés du polygone correspondant sont différentes, c'est-à-dire si le cas exceptionnel signalé plus haut ne se rencontre pour aucune réduite, les diverses substitutions fondamentales (S) feront correspondre deux à deux les côtés du polygone π, et il est clair d'ailleurs que ces substitutions seront deux à deux inverses de l'autre. Le réseau des polygones obtenus en transformant π par les substitutions de G couvre alors une seule fois le cercle de rayon 1, c'est-à-dire que tout polygone transformé de π par une substitution du groupe ne peut avoir avec lui d'autre point commun que des points de son périmètre.

Il en serait autrement dans le cas que j'ai appelé précédemment le cas exceptionnel. La substitution S correspondante transforme en lui-même le polygone p_1 que nous venons de considérer : le polygone π et le polygone transformé par la substitution S ont en commun p_1.

On voit comment une forme binaire indéfinie donnée conduit à un de ces groupes discontinus qui ont été appelés *fuchsiens* par M. Poincaré, et comment l'opération de la réduction continuelle de la forme associée Φ donne les substitutions fondamentales de ce groupe. Celui-ci est isomorphe au groupe des substitutions linéaires à coefficients entiers qui transforme en elle-même toute forme arithmétiquement équivalente à la forme proposée; c'est ce qu'il suffira d'établir pour une réduite quelconque F. Soit p le polygone qui dans π correspond à la réduite F : toute substitution du groupe G transformant p en un autre polygone p' pour lequel la réduite correspondante est la même, la substitution qui réduira Φ, quand z passera de p en p', transformera précisément la forme F en elle-même. Réciproquement, à toute substitution transformant F en elle-même correspondra de la manière indiquée plus haut la substitution S du groupe G. Aux substitutions fondamentales du groupe G correspondent d'ailleurs les substitutions fondamentales du groupe Γ, et ainsi se trouve résolue l'importante question de la recherche des substitutions fondamentales du groupe des substitutions à coefficients entiers et de déterminant 1, transformant en elle-même une forme quadratique binaire indéfinie à indéterminées conjuguées.

Je ferai une dernière remarque, relative au cas exceptionnel. A la substitution S du groupe G, transformant en lui-même le polygone p_1, correspond une substitution transformant en elle-même la réduite représentée par le polygone p_1. Si l'on effectue cette dernière substitution sur la forme associée Φ, celle-ci ne cessera pas d'être réduite pour tout point du polygone p_1; cette substitution ne peut donc être que $(x, y, ix, -iy)$, et la réduite qui correspond à p_1 n'a pas alors de coefficient moyen. Ainsi les seules réduites pour lesquelles se produit le cas exceptionnel ont la forme

IV.

13. Pour que les calculs qui viennent d'être indiqués puissent être pratiquement effectués, il faut pouvoir trouver les substitutions qui réduisent de nouveau la forme Φ quand celle-ci, pour une variation infiniment petite du paramètre, cesse d'être réduite. Considérons donc la forme *définie* positive Φ, que nous écrirons

$$axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0,$$

les coefficients dépendant du paramètre z. Pour certaines valeurs de ce paramètre, la forme est réduite, et nous supposons que l'on ait les inégalités

$$(1) \qquad a < c, \quad 2(m) < a, \quad 2(n) < a,$$

en posant, comme plus haut, $b = m + ni$ et (m) désignant la valeur absolue de m.

1° Supposons que, pour certaines valeurs de z, on ait $2(m) = a$, les autres inégalités subsistant. Soit, par exemple, $2m = a$, ce sera l'équation d'un cercle. Quand z traversera ce cercle, la seconde des inégalités (1) changera de sens : je dis que la substitution à employer pour réduire de nouveau la forme est

$$x = \mathrm{X} - \mathrm{Y}, \quad y = \mathrm{Y}.$$

On a en effet, après cette substitution, la nouvelle forme

$$a'xx_0 + b'xy_0 + b'_0x_0y + c'yy_0,$$

où

$$a' = a, \quad b' = b - a, \quad c' = a - b - b_0 + c.$$

On aura $a' < c'$, car cette inégalité revient à $2m < c$, qui est vérifiée, puisque $2m$ est infiniment peu supérieur à a et que $a < c$.

On a d'autre part

$$m' = m - a, \quad n' = n;$$

par suite, $2(n') < a$, et la seconde inégalité s'écrira $(2m - 2a) < a$;

elle est vérifiée, puisque $2m = a + \varepsilon$, ε étant une quantité positive très petite.

Si l'on avait eu $2m = -a$, il eût fallu employer la substitution

$$x = X + Y, \quad y = Y.$$

On reconnaît de la même manière que, si $2n = \pm a$, il faut employer la substitution

$$x = X \pm i Y, \quad y = Y;$$

on prendra le signe $+$ si $2n = a$, le signe $-$ si $2n = -a$.

Dans le cas où les deux inégalités $2(m) < a$, $2(n) < a$ changeraient de sens à la fois, il suffit de faire le produit des deux substitutions correspondant à chaque cas isolément; supposons, par exemple, que, par suite de la variation du paramètre, on ait

$$2m = a + \varepsilon, \quad 2n = a + \eta,$$

ε et η étant des quantités positives très petites, on devra employer la substitution

$$x = X + (-1 + i)Y, \quad y = Y;$$

mais ceci suppose essentiellement que l'*inégalité* $a < c$ ne cesse pas d'être vérifiée quand on fait subir au paramètre la variation infiniment petite.

2° Si l'on suppose que, les inégalités $2(m) < a$, $2(n) < a$ subsistant, l'inégalité

$$a < c$$

change de sens, on aura à employer la substitution

$$x = -Y, \quad y = X.$$

3° Supposons maintenant que, l'*inégalité* $2(n) < a$ ne cessant d'être vérifiée, les inégalités

$$a < c \quad \text{et} \quad 2(m) < a$$

changent de sens. Soient, par exemple, après la variation infiniment petite du paramètre,

$$a = c + \varepsilon, \quad 2m = a + \eta,$$

ε et η étant des quantités positives très petites. Nous allons voir que la substitution

$$x = X, \quad y = -X + Y$$

réduira de nouveau la forme proposée. Les coefficients a', b', c', après la transformation, sont en effet

$$a' = a - 2m + c = c - \eta, \quad b' = m + ni - c, \quad c' = c.$$

On voit que $a' < c'$ et que $2(n') < a'$; quant à l'inégalité $2(m') < a'$, elle peut s'écrire

$$2(m - c) < c - \eta.$$

Or

$$2m - 2c = \varepsilon + \eta - c;$$

par suite, l'inégalité devient $c - \varepsilon - \eta < c - \eta$, évidemment vérifiée.

Si, après la variation infiniment petite, on avait eu

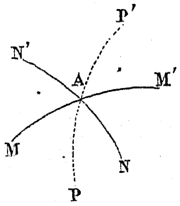
$$a = c + \varepsilon, \quad 2m = -a - \eta,$$

on devra employer la substitution

$$x = X, \quad y = X + Y.$$

Le cas que nous venons d'examiner se présentera quand les cercles NAN' et MAM' (*fig.* 2), représentés par les équations $a = c$ et $2m = a$,

Fig. 2.



par exemple, coïncideront et que le paramètre z traversera ce cercle, ou bien quand, les cercles précédents se coupant, z passera de l'angle MAN, pour lequel on a

$$a < c, \quad 2m < a,$$

à l'angle opposé par le sommet. Il est supposé dans l'analyse précédente qu'aucun des deux cercles $2n = a$, $2n = -a$ ne passe par le point A.

Supposons maintenant que z, restant toujours dans le voisinage de A, sorte de l'angle MAN en traversant seulement AN, la substitution à employer sera (2°)

$$(x,\ y,\ -y,\ x),$$

et la forme deviendra

$$ayy_0 - byx_0 - b_0xy_0 + cxx_0; \tag{2}$$

elle sera réduite tant que $c < a$ et que $2m < c$. Or le cercle représenté par l'équation $2m - c = 0$ passe évidemment par le point A; il est, de plus, dans l'angle M'AN.

Supposons maintenant que z, restant toujours dans le voisinage de A, sorte de l'angle NAP, en traversant AP. On devra employer, pour réduire de nouveau la forme (2), la substitution

$$(x,\ y,\ x+y,\ y),$$

ce qui donne

$$cxx_0 + (c - b_0)xy_0 + (c - b)x_0y + (c + a - b - b_0)yy_0, \tag{3}$$

et cette forme sera réduite tant que

$$2m > c \quad \text{et} \quad 2m < a,$$

c'est-à-dire tant que z sera dans l'angle M'AP. Nous revenons maintenant à l'angle M'AN', et, en continuant de tourner autour du point A, on rencontrerait successivement les angles N'AP' et MAP', puis enfin on reviendrait à l'angle initial MAN.

Nous savons donc effectuer la réduction continuelle de notre forme définie dans le voisinage de tout point pour lequel on n'a pas à la fois

$$a = c, \quad 2(m) = a, \quad 2(n) = a.$$

14. Plaçons-nous maintenant dans cette dernière hypothèse. Soit A un point par lequel passent les trois cercles

$$a = c, \quad 2m = a, \quad 2n = a.$$

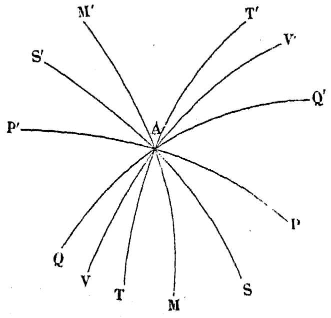
Nous allons, comme précédemment, tourner autour du point A en appliquant ce que nous avons dit en premier et second lieu; on forme ainsi autour du point un certain nombre d'angles, et, quand on est revenu au point de départ, la réduction complète se trouve effectuée.

La *fig.* 3 peut présenter différentes dispositions : un exemple particulier suffira pour montrer bien nettement la marche à suivre dans tous les cas :

QAQ′ est représenté par l'équation			$2m = a$,
PAP′	»	»	$2n = a$,
MAM′	»	»	$a = c$,

et ces cercles ont au point A des tangentes distinctes.

Fig. 3.



Nous supposons que dans l'angle PAQ on ait

$$a < c, \quad 2m < a, \quad 2n < a.$$

On se rappellera, d'ailleurs, qu'en tournant autour du point A, nous allons toujours rester dans le voisinage de ce point.

Nous partons d'un point z dans l'angle PAQ : la forme est alors réduite. Nous traversons AP : la substitution à employer pour réduire la forme est (nº **13**) $(x, y, x + iy, y)$, ce qui donne

$$(2) \quad axx_0 + xy_0(-ai + b) + x_0y(ai + b_0) + [a + (b - b_0)i + c]yy_0;$$

cette forme sera réduite (dans le voisinage de A) si

$$2n < c, \quad 2n > a, \quad 2m < a.$$

Or le cercle $2n = c$ passe par le point A et est nécessairement compris dans l'angle PAM. Soit S′AS ce cercle; la forme (2) sera réduite quand z sera dans l'angle PAS.

Traversons AQ. La substitution à employer sera $(x, y, -y, x)$, ce qui conduit à la nouvelle forme

$$(3) \qquad ayy_0 - xy_0(ai + b_0) - x_0y(-ai + b) + (a - 2n + c)xx_0,$$

qui sera réduite si

$$2n > c, \quad 2m + 2n < a + c, \quad a < c.$$

Or ce cercle $2m + 2n = a + c$ passe dans l'angle SAQ', car pour un point de AQ' on a

$$2m + 2n - a - c > 0,$$

tandis que pour un point de AS on a

$$2m + 2n - a - c < 0;$$

mais ce cercle peut passer dans l'angle Q'AM ou dans l'angle MAS. Supposons que la première circonstance se présente : soit donc TAT' le cercle représenté par l'équation

$$2m + 2n = a + c;$$

la forme (3) sera réduite tant que z sera dans l'angle SAM.

Traversons AM : la substitution à employer sera

$$(x, y, x - iy, y),$$

et la forme (3) deviendra

$$(4) \quad (a - 2n + c)xx_0 + xy_0[-m + i(c - n)] + x_0y[-m - i(c - n)] + cyy_0;$$

elle sera réduite si

$$2n > a, \quad c < a, \quad 2m + 2n < a + c;$$

on en conclut que z devra être dans l'angle MAT.

Traversons AT : on devra faire usage de la substitution

$$(x, y, x + y, y),$$

et la forme (4) deviendra

$$(5) \quad \begin{cases} (a - 2n + c)xx_0 + xy_0[a - 2n + c - m + i(c - n)] + \ldots \\ \qquad + (a - 2n + c + c - 2m)yy_0; \end{cases}$$

elle sera réduite si

$$2n < c, \quad c < a, \quad 2m + 2n > a + c.$$

Or considérons le cercle $2m = c$: je dis qu'il passera dans l'angle TAQ′; on a en effet, pour un point de AQ′,

$$2m - c = a - c > 0,$$

et pour un point de AT,

$$2m - c = a - 2n < 0.$$

Soit donc AV le cercle $2m = c$: la forme (5) sera réduite quand z sera dans l'angle TAV.

Traversons AV : il faudra faire la substitution $(x, y, -y, x)$, et l'on aura la forme

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &(a - 2n + c + c - 2m) x x_0 \\ &\quad - y x_0 [a - 2n + c - m + i(c - n)] - \ldots + (a - 2n + c) y y_0; \end{aligned} \right.$$

elle sera réduite si

$$2m > c, \quad 2m < a, \quad 2n > a;$$

z devra, par conséquent, être dans l'angle VAQ′.

Nous venons de décrire deux angles droits autour du point A; en continuant, on rencontre successivement les angles opposés par le sommet à ceux que nous venons de parcourir, et l'on retrouve enfin l'angle initial QAP, ce qui achève la réduction continuelle de la forme Φ autour du point A.

15. Je me propose maintenant d'appliquer à un exemple numérique les considérations qui ont été exposées dans ce Mémoire.

Prenons la forme indéfinie

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathrm{F} = x x_0 - 2 y y_0.$$

Nous pouvons prendre comme forme définie correspondante

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi &= (x + \sqrt{2} z_0 y)(x_0 + \sqrt{2} y_0 z) + (x z + \sqrt{2} y)(x_0 z_0 + \sqrt{2} y_0) \\ &= x x_0 (1 + z z_0) + 2\sqrt{2} z x y_0 + 2\sqrt{2} z_0 x_0 y + y y_0 (2 z z_0 + 2); \end{aligned} \right.$$

cette forme sera réduite si z satisfait aux conditions suivantes :

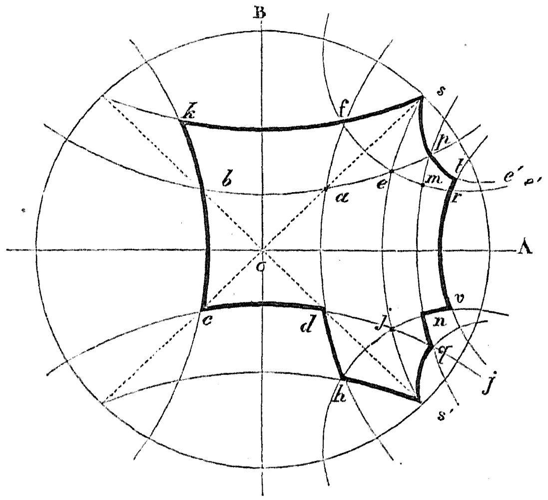
$$\pm 4\alpha\sqrt{2} < 1 + \alpha^2 + \beta^2,$$
$$\pm 4\beta\sqrt{2} < 1 + \alpha^2 + \beta^2,$$

en posant $z = \alpha + i\beta$. Le point z devra donc être à l'intérieur du quadrilatère curviligne formé par les quatre cercles

$$1 + \alpha^2 + \beta^2 \pm 4\alpha\sqrt{2} = 0, \quad 1 + \alpha^2 + \beta^2 \pm 4\beta\sqrt{2} = 0.$$

Soit *abcd* (voir *fig.* 4) ce quadrilatère. Quand z traverse le côté *ad*, la

Fig. 4.



substitution à employer pour réduire la forme est

$$(x, y, x - y, y),$$

et la forme Φ devient

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & xx_0(1 + zz_0) + xy_0(2\sqrt{2}z - 1 - zz_0) \\ & \qquad + x_0y(2\sqrt{2}z_0 - 1 - zz_0) + yy_0[3zz_0 - 2\sqrt{2}(z + z_0) + 3]. \end{aligned} \right.$$

Elle sera réduite tant que

$$\begin{gathered} \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\sqrt{2} + 1 > 0, \\ \pm 4\beta\sqrt{2} < 1 + \alpha^2 + \beta^2, \\ 3(1 + \alpha^2 + \beta^2) > 4\alpha\sqrt{2}, \\ 1 + \alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha\sqrt{2} < 0; \end{gathered}$$

la troisième inégalité est toujours vérifiée, et les quatre autres montrent que z doit être à l'intérieur du quadrilatère *adej*, l'équation de *ej* étant

$$\alpha^2 + \beta^2 + 1 - 2\alpha\sqrt{2} = 0.$$

A ce quadrilatère correspond la réduite

$$\text{(II)} \qquad xx_0 - xy_0 - x_0y - yy_0 \quad (adej)$$

et aussi, comme nous l'avons expliqué (n° 8), la réduite qui ne diffère de celle-là que par le changement de signe des coefficients moyens

$$xx_0 + xy_0 + x_0y - yy_0.$$

En traversant le côté *cb*, nous aurions été conduit aux deux mêmes réduites.

Traversons le côté *ab* : la substitution à employer pour réduire de nouveau la forme sera

$$(x, y, x + iy, y),$$

et la forme Φ devient

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & xx_0(1 + zz_0) + xy_0[2\sqrt{2}z - i(1 + zz_0)] \\ & \qquad + x_0y[2\sqrt{2}z_0 + i(1 + zz_0)] + yy_0[3zz_0 + 3 + 2\sqrt{2}i(z - z_0)]; \end{aligned} \right.$$

elle sera réduite tant que z sera à l'intérieur du quadrilatère *abkf*, le côté *kf* étant représenté par l'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 + 1 - 2\sqrt{2}\beta = 0;$$

les réduites indéfinies correspondantes sont

$$\text{(III)} \qquad xx_0 \pm ixy_0 \mp ixy_0 - yy_0 \quad (abkf).$$

En traversant *cd*, on eût obtenu les deux mêmes réduites.

Pour achever de trouver les réduites contiguës à la forme F, il faut sortir du quadrilatère *abcd* par les sommets en allant dans les angles opposés.

Prenons *a* et passons dans l'angle *fae*. La substitution à employer dans ce cas est (n° 13)

$$[x, y, x + (-1 + i)y, y],$$

et la forme Φ devient

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & xx_0(1 + zz_0) + xy_0[2\sqrt{2}z - (1 + i)(1 + zz_0)] \\ & \qquad + x_0y[2\sqrt{2}z_0 - (1 - i)(1 + zz_0)] \\ & \qquad + yy_0[4(1 + zz_0) + 2\sqrt{2}z(-1 + i) + 2\sqrt{2}z_0(-1 - i)], \end{aligned} \right.$$

forme qui sera réduite si

$$3(1+\alpha^2+\beta^2)-4\alpha\sqrt{2}-4\beta\sqrt{2}>0$$

et le premier membre de cette équation représente un cercle passant par les sommets e et f de deux quadrilatères déjà considérés. Il faut de plus

$$1+\alpha^2+\beta^2+4\alpha\sqrt{2}<0, \quad 1+\alpha^2+\beta^2-4\beta\sqrt{2}<0,$$

et les deux autres inégalités sont vérifiées d'elles-mêmes; z sera donc à l'intérieur du triangle aef. Les réduites correspondantes seront

$$\text{(IV)} \qquad xx_0 \pm xy_0(1+i) \pm x_0y(1-i) \quad (aef),$$

les signes supérieurs et inférieurs étant, bien entendu, pris ensemble.

En passant de même par le sommet d dans l'angle jdh, on en obtient le triangle jdh comme polygone continu, et les réduites correspondantes sont

$$\text{(V)} \qquad xx_0 \pm xy_0(1-i) \pm x_0y(1+i) \quad (jdh);$$

en traversant en b et c, on obtient les mêmes réduites (IV) et (V). Les réduites de (II) à (V) donne donc le Tableau complet des réduites contiguës à la réduite F.

Prenons maintenant le triangle aef et les réduites correspondantes, nous allons chercher leurs contiguës. Nous avons à partir de la forme (4).

En traversant ef, nous devons employer la substitution $(x, y, -y, x)$, et la nouvelle forme qu'il est inutile d'écrire sera réduite si le point z est à l'intérieur du triangle sef, s étant le point de rencontre des deux cercles ej et fk, qui est, comme le montrent immédiatement les équations sur la circonférence de rayon 1; les deux circonférences sont tangentes intérieurement en ce point et à la bissectrice os de l'angle des axes.

Les réduites correspondantes sont

$$\text{(VI)} \qquad \pm xy_0(1-i) \pm x_0y(1+i) + yy_0 \quad (sef).$$

Ceci est bien d'accord avec ce que nous avons vu plus haut d'une manière générale : quand le coefficient de xx_0 dans une réduite est nul, le polygone correspondant a un point sur la circonférence de rayon 1 (n° 7).

Cherchons les autres polygones contigus au triangle aef. Nous avons déjà rencontré le quadrilatère *aedj*; pénétrons dans ce quadrilatère et traversons *ej* : il faudra employer la substitution $(x, y, -y, x)$, et la forme (2) deviendra

$$xx_0[3(\alpha^2+\beta^2+1)-4\alpha\sqrt{2}]$$
$$+xy_0(1+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\sqrt{2}+2\beta\sqrt{2}\,i)+\ldots+yy_0(1+\alpha^2+\beta^2).$$

Cette forme sera réduite tant que le point (α, β) sera dans le quadrilatère limité par *ej*, *ee'*, *jj'* et le cercle dont l'équation est

$$S(\alpha^2+\beta^2+1)-8\alpha\sqrt{2}=0;$$

il est représenté par *mn*.

Nous traversons maintenant *em*. En employant la substitution $(x, y, x+iy, y)$, la forme devient

$$xx_0[3(\alpha^2+\beta^2+1)-4\alpha\sqrt{2}]$$
$$+xy_0\{1+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\sqrt{2}+i[-3(\alpha^2+\beta^2+1)+4\alpha\sqrt{2}+2\beta\sqrt{2}]\}+\ldots$$
$$+yy_0[4(1+\alpha^2+\beta^2)-4\alpha\sqrt{2}-4\beta\sqrt{2}].$$

On voit facilement qu'elle sera réduite tant que le point (α, β) sera dans le triangle *emp*, *mp* étant le prolongement de *mn*.

Nous traversons enfin *ep* : il nous faut employer la substitution $(x, y, -y, x)$, et la nouvelle forme sera réduite quand le point z sera à l'intérieur du triangle *sep*; le cercle *sp* est représenté par l'équation

$$3(1+\alpha^2+\beta^2)-4\alpha\sqrt{2}-2\beta\sqrt{2}=0.$$

Écrivons les réduites correspondant aux divers polygones que nous venons de rencontrer :

(VII) $$-xx_0\pm yx_0\pm y_0x+yy_0 \quad (emjn),$$

(VIII) $$-xx_0\pm xy_0(1+i)\pm x_0y(1-i) \quad (emp),$$

(IX) $$\pm xy_0(1-i)\pm x_0y(1+i)-yy_0 \quad (eps).$$

Si, étant dans le triangle *emp*, nous traversons *mp*, nous devrons employer la substitution $(x, y, x+y, y)$, et l'on obtient la forme

$$xx_0[3(\alpha^2+\beta^2+1)-\alpha\sqrt{2}]$$
$$+xy_0\{4(1+\alpha^2+\beta^2)-6\alpha\sqrt{2}+i[-3(\alpha^2+\beta^2+1)+4\alpha\sqrt{2}+2\beta\sqrt{2}]\}+\ldots$$
$$+yy_0[9(1+\alpha^2+\beta^2)-12\alpha\sqrt{2}-4\beta\sqrt{2}];$$

elle sera réduite quand z sera à l'intérieur du triangle quadrilatère $(mprt)$, le cercle rt ayant pour équation

$$11(1+\alpha^2+\beta^2)-16\alpha\sqrt{2}=0,$$

et l'on a la réduite correspondante

$$\text{(X)}\qquad -xx_0 \pm ixy_0 \mp ix_0y + yy_0 \quad (mprt).$$

Si nous traversons maintenant mr, en employant la substitution

$$(x, y, x-iy, y),$$

la nouvelle forme définie sera réduite quand z sera dans le quadrilatère $mrnv$, l'équation du cercle nv étant

$$11(\alpha^2+\beta^2+1)-16\alpha\sqrt{2}=0,$$

c'est-à-dire que rv est le prolongement de rt.

La réduite correspondante est

$$\text{(XI)}\qquad -xx_0 + 2yy_0 \quad (mrnv).$$

Nous achèverons d'obtenir les réduites arithmétiquement équivalent à F, en revenant dans le triangle dhj et en traversant hj, ce qui nous donne les réduites

$$\text{(XII)}\qquad \pm xy_0(1+i) \pm x_0y(1-i) + yy_0 \quad (hs'j);$$

le polygone correspondant est le triangle $hs'j$, symétrique de fes par rapport à $o\alpha$. Traversons encore js', ce qui nous donnera le triangle jqs' symétrique de esp, avec les réduites

$$\text{(XIII)}\qquad \pm xy_0(1+i) \pm x_0y(1-i) - yy_0 \quad (jqs').$$

Enfin, pour terminer, traversons jq : nous obtenons le triangle jqn et les réduites

$$\text{(XIV)}\qquad -xx_0 \pm xy_0(1-i) \pm x_0y(1+i) \quad (jqn).$$

Nous avons obtenu, de (II) à (XIV), *vingt-cinq formes réduites arithmétiquement équivalentes à la réduite initiale* $F = xx_0 - 2yy_0$. Ce sont d'ailleurs les seules, comme on le reconnaît, en cherchant les réduites contiguës à chacune de celles-là; nous ne ferons pas ici ce calcul, qui n'est qu'une simple vérification.

16. Aux réduites précédentes correspondent quatorze polygones : leur ensemble constitue un polygone π, que nous avons appelé (n° **11**) le polygone fondamental [1]; son périmètre est marqué sur la figure par un gros trait. Il nous faut trouver maintenant les substitutions fondamentales du groupe Γ (n° **12**).

La variable z doit sortir de π successivement par les différents côtés de ce polygone. Commençons par sf : la réduite correspondant à sfe est

$$xy_0(1-i) + x_0y(1+i) + yy_0.$$

En traversant sf, on doit employer la substitution $(x, y, x-y, y)$, ce qui donne la réduite

$$xy_0(1-i) + x_0y(1+i) - yy_0, \tag{1}$$

c'est-à-dire la même que pour le triangle sep. D'autre part, on passe de sef à sep en traversant se au moyen de la substitution

$$(x, y, x-iy, y);$$

par suite, le produit des deux substitutions

$$(x, y, x-iy, y)(x, y, x+y, y),$$

ou la substitution

$$[x, y, x+(1-i)y, y],$$

transformera en elle-même la réduite (1). D'autre part, on peut passer de la forme $F = xx_0 - 2yy_0$ à la réduite (1) par la substitution

$$[x, y, (-1+i)y+iy, x-iy];$$

donc la transformée par cette dernière substitution de la substitution précédente transformera en elle-même la forme F. Nous avons donc une première substitution fondamentale du groupe Γ relatif à F; ce sera

$$[x, y, (-2i+1)x - 2(1+i)y, -(1-i)x + (1+2i)y]. \tag{I}$$

La substitution correspondante du groupe G (n° **12**) transformera sp

---

[1] Le polygone π n'est pas le polygone fondamental du groupe G (n° **12**), au sens employé par M. Poincaré dans ses recherches sur les groupes fuchsiens; mais, pour avoir ce dernier polygone, il suffit de retrancher du polygone π les portions des quadrilatères $abcd$ et $mrnv$, qui sont au-dessous de OA.

en sf. Elle fait correspondre aussi les deux côtés pt et kf, ce qui ne donne aucune substitution nouvelle.

Supposons maintenant que nous sortions du polygone π par le côté kb. La réduite correspondant à $(abkf)$ est

$$xx_0 - ixy_0 + ix_0y - yy_0.$$

En traversant bk, on doit employer la substitution $(x, y, x+y, y)$, ce qui donne la réduite

$$xx_0 + (1-i)xy_0 + (1+i)x_0y, \tag{2}$$

qui est la même que pour jdh.

Ceci donne pour (2) une substitution linéaire, la transformant en elle-même, substitution qui est

$$[x, y, ix - 2(1-i)y, -iy];$$

la substitution semblable correspondante pour $\mathrm{F}x$ se trouve immédiatement

$$(x, y, ix, -iy). \tag{II}$$

Nous sortons maintenant du polygone π par le côté bc. Nous nous trouvons pour ce côté dans ce que j'ai appelé (n° 12), le cas *exceptionnel;* car, en traversant bc, nous obtenons la réduite

$$xx_0 + xy_0 + x_0y - yy_0, \tag{3}$$

qui correspond au polygone $adej$ contigu à $abcd$, et n'ayant aucun côté commun avec le polygone π. La substitution correspondante relative à F est encore la substitution (II). De même, le côté cd donne la même substitution.

En continuant à parcourir le périmètre du polygone, nous rencontrons $s'h$. Un calcul tout semblable à celui que nous avons fait pour sp montre que $s'h$ correspond à $s'q$, et la substitution correspondante est pour F

$$[x, y, (2i+1)x - 2(1-i)y, -(1+i)x + (1-2i)y]. \tag{III}$$

Les deux côtés tr et nq se correspondent; reportons-nous en effet à la forme Φ relative au polygone $mprt$; en traversant rt, il faut employer la substitution

$$(x, y, x+y, y),$$

et on a la réduite

$$-xx_0 - xy_0(1-i) - x_0y(1+i),$$

qui correspond aussi à jqn.

La substitution semblable est la même que celle qui est donnée par les côtés rv et nv; on se trouve alors dans le polygone $mrnv$, et, la réduite correspondante $-xx_0 + 2yy_0$ ayant son coefficient moyen nul, nous sommes de nouveau dans le cas exceptionnel; en sortant par rv, nous retombons sur la réduite donnée par *emjn*. La substitution semblable correspondante pour F est

$$(\text{IV}) \qquad (x, y, -3ix - 4iy, 2ix + 3iy).$$

En résumé, *toutes les substitutions à coefficients entiers et de déterminant* 1 *peuvent être obtenues en combinant de toutes les manières possibles les substitutions fondamentales qui suivent :*

$$(x, y, ix, -iy),$$
$$(x, y, -3ix - 4iy, 2ix + 3iy),$$
$$[x, y, (-2i+1)x - 2(1+i)y, -(1-i)x + (1+2i)y],$$
$$[x, y, (+2i+1)x - 2(1-i)y, -(1+i)x + (1-2i)y].$$

V.

17. Les résultats exposés dans les Chapitres précédents doivent former le point de départ de toute la théorie arithmétique des formes quadratiques binaires indéfinies à indéterminées conjuguées; on saura notamment reconnaître si deux formes données sont arithmétiquement équivalentes, puisque (n° 5) la condition nécessaire et suffisante est que les réduites de ces deux formes coïncident.

Mais je ne m'arrête pas dans ce Mémoire à traiter les différentes questions arithmétiques, qui seraient la généralisation de celles que l'on résout dans la théorie des formes binaires réelles. Je veux seulement montrer directement, en terminant, comment les substitutions semblables d'une forme donnée conduisent à un groupe discontinu relatif à une variable complexe, groupe qui est d'ailleurs isomorphe au groupe Γ que nous avons antérieurement considéré.

Soit donnée la forme indéfinie

$$axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0$$

et

$$(s) \qquad (x, y, Mx + Py, Qx + Ry)$$

une substitution semblable de la forme de déterminant 1, et à coefficients entiers; je considère la substitution effectuée sur la variable complexe z

$$(\Sigma) \qquad \left(z, \frac{Mz + P}{Qz + R}\right).$$

Si l'on considère toutes les substitutions semblables S, les substitutions correspondantes Σ formeront évidemment un groupe. Nous allons montrer que ce groupe est *discontinu* pour tout point z du plan qui n'est pas situé sur le cercle représenté par l'équation

$$(I) \qquad azz_0 + bz + b_0z_0 + c = 0.$$

Supposons a positif : nous allons faire la démonstration en supposant z à l'intérieur du cercle, c'est-à-dire que

$$azz_0 + bz + b_0z_0 + c < 0.$$

Entre les coefficients M, P, Q, R de la substitution (S), existent les relations

$$\begin{aligned}
aMM_0 + bMQ_0 + b_0M_0Q + cQQ_0 &= a, \\
aMP_0 + bMR_0 + b_0QP_0 + cQR_0 &= b, \\
aPP_0 + bPR_0 + b_0P_0R + cRR_0 &= c;
\end{aligned}$$

et comme la substitution inverse de S est

$$(x, y, Rx - Py, -Qx + My),$$

on en conclut que ce système est entièrement équivalent au suivant :

$$\begin{aligned}
aRR_0 - bRQ_0 - b_0R_0Q + cQQ_0 &= a, \\
-aRP_0 + bRM_0 + b_0QP_0 - cQM_0 &= b, \\
aPP_0 - bPM_0 - b_0P_0M + cMM_0 &= c.
\end{aligned}$$

On conclut immédiatement de ces équations que, quand l'une des lettres M, P, Q, R est donnée, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de substitutions correspondantes S. Soit, par exemple, donné Q : la première équation du second système pouvant s'écrire

$$(1) \qquad \left(-\frac{a}{Qb_0}+R\right)\left(-\frac{Q_0 b}{a}+R_0\right)=1+\Delta\frac{QQ_0}{a^2},$$

où

$$\Delta = bb_0 - ac > 0,$$

on voit qu'à une valeur de Q ne peut correspondre qu'un nombre fini de valeurs pour $-Q_0 b + aR_0$, et par conséquent pour R_0. D'ailleurs, R_0 ne pouvant avoir qu'un nombre fini de valeurs, la première et la dernière équation du premier système montrent de la même manière que M et P n'ont également qu'un nombre limité de valeurs.

Ceci posé, nous ferons voir que *le groupe est discontinu,* en faisant voir que, quand le module de Q grandit indéfiniment, le point correspondant Z se rapproche indéfiniment de la circonférence (I). Partons à cet effet de l'identité

$$aXX_0 + bXY_0 + b_0X_0Y + cYY_0 = axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0,$$

où

$$X = Mx + Py, \quad Y = Qx + Ry,$$

d'où l'on tire, en posant $Z = \frac{Mz+P}{Qz+R}$,

$$aZZ_0 + bZ + b_0Z_0 + c = \frac{1}{\operatorname{mod}^2(Qz+R)}(azz_0 + bz + b_0z_0 + c).$$

Nous montrerons que le point Z se rapproche indéfiniment du cercle (I) en montrant que, quand Q croît indéfiniment, mod $(Qz + R)$ croît lui-même sans limite.

Nous supposons le point z à l'intérieur du cercle : c'est ce qu'exprimera l'inégalité

$$\operatorname{mod}^2(az + b_0) < \Delta.$$

On a, d'autre part, en écrivant $Qz + R = \frac{Q}{a}(az + b_0) + R - \frac{Qb_0}{a}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{mod}(Qz+R) &> \operatorname{mod}\left(R - \frac{Qb_0}{a}\right) - \operatorname{mod}\left[\frac{Q}{a}(az+b_0)\right] \\ &> \operatorname{mod}\left(R - \frac{Qb_0}{a}\right)\left[1 - \frac{\operatorname{mod}\frac{Q}{a}}{\operatorname{mod}\left(R - \frac{Qb_0}{a}\right)}\operatorname{mod}(az+b_0)\right],\end{aligned}$$

que nous écrirons enfin sous la forme

$$\operatorname{mod}(Qz+R) > \left(1+\Delta\frac{QQ_0}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1-\frac{1}{\Delta}\operatorname{mod}^2(az+b_0)-\dfrac{1}{\Delta\left(1+\Delta\dfrac{QQ_0}{a^2}\right)}}{1+\operatorname{mod}\dfrac{\frac{Q}{a}}{R-\frac{Qb_0}{a}}\operatorname{mod}(az+b_0)}.$$

Considérons maintenant le quotient qui figure dans le second membre. Quand Q augmente indéfiniment, le numérateur a pour limite une quantité positive différente de zéro, d'après l'inégalité à laquelle satisfait z, et il en est de même du dénominateur. Il est donc établi que, quand Q a un module très grand, le point correspondant Z est très rapproché de la circonférence (I). Le groupe est donc *discontinu*, car, dans ces conditions, il ne pourra y avoir de point Z aussi rapproché qu'on voudra du point z, et le théorème est établi.

18. Prend-on, par exemple, la forme $xx_0 - 2yy_0$ que nous avons étudiée précédemment, elle conduit à un groupe discontinu dont les substitutions fondamentales sont, d'après ce que nous avons vu (n° **16**), les quatre substitutions

$$Z = -z, \qquad Z = \frac{-3z-4}{2z+3},$$

$$Z = \frac{(1-2i)z-2(1+i)}{-(1-i)z+(1+2i)}, \quad Z = \frac{(1+2i)z-2(1-i)}{-(1+i)z+(1-2i)}.$$

19. Je termine cette étude en donnant la résolution en nombres entiers de l'équation

$$tt_0 - \mathrm{D}\,uu_0 = 1,$$

où D est un entier positif, équation qui est la généralisation immédiate de l'équation de Pell.

Cette équation se rattache immédiatement à la recherche des substitutions semblables et de déterminant 1, de la forme quadratique binaire

$$xx_0 - \mathrm{D}yy_0.$$

Soit $(x, y, Mx + Py, Qx + Ry)$ une telle substitution, on aura

$$MM_0 - DQQ_0 = 1, \quad MP_0 - DQR_0 = 0, \quad PP_0 - DRR_0 = -D.$$

On conclut de là

$$\frac{P_0}{DQ} = \frac{R_0}{M}.$$

Soit μ la valeur commune de ces rapports; puisque $MR - PQ = 1$, on aura

$$\mu_0(MM_0 - DQQ_0) = 1, \quad \text{donc} \quad \mu = 1,$$

et les relations entre M, P, Q et R peuvent se mettre sous la forme

$$MM_0 - DQQ_0 = 1, \quad P_0 = DQ, \quad R_0 = M.$$

On voit donc qu'à toute solution de l'équation $tt_0 - Duu_0 = 1$ correspondra une substitution semblable de la forme quadratique considérée, et réciproquement.

On cherchera donc les substitutions semblables fondamentales de la forme

$$xx_0 - Dyy_0,$$

et les coefficients de x, dans toute substitution formée avec elles, donneront toutes les solutions de l'équation de Pell généralisée.