

quatrième série - tome 43 fascicule 1 janvier-février 2010

*ANNALES
SCIENTIFIQUES
de
L'ÉCOLE
NORMALE
SUPÉRIEURE*

Carlos Gustavo MOREIRA & Jean-Christophe YOCCOZ

*Tangences homoclines stables pour des ensembles hyperboliques
de grande dimension fractale*

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

TANGENCES HOMOCLINES STABLES POUR DES ENSEMBLES HYPERBOLIQUES DE GRANDE DIMENSION FRACTALE

PAR CARLOS GUSTAVO MOREIRA* ET JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

RÉSUMÉ. – Soit F_0 un difféomorphisme d'une surface possédant deux fers à cheval Λ, Λ' tels que $W^s\Lambda$ et $W^u\Lambda'$ aient en un point q une tangence quadratique isolée. Nous montrons que, si la somme des dimensions transverses de $W^s\Lambda$ et $W^u\Lambda'$ est strictement plus grande que 1, les difféomorphismes voisins de F_0 tels que $W^s\Lambda$ et $W^u\Lambda'$ soient stablement tangents au voisinage de q forment une partie de densité inférieure strictement positive en F_0 .

ABSTRACT. – Let F_0 be a surface diffeomorphism with two horseshoes Λ, Λ' such that $W^s\Lambda$ and $W^u\Lambda'$ have a quadratic tangency at a point q . We show that, if the sum of the transverse dimension of $W^s\Lambda$ and $W^u\Lambda'$ is larger than one, the set of diffeomorphisms close to F_0 such that $W^s\Lambda$ and $W^u\Lambda'$ have a stable tangency near q has positive density at F_0 .

Introduction

Un ensemble de Cantor régulier est un ensemble de Cantor qui est maximal invariant pour une application dilatante unidimensionnelle. La géométrie transverse du feuilletage stable d'un fer à cheval pour un difféomorphisme d'une surface est ainsi décrite par un ensemble de Cantor régulier.

Dans un article précédent [6], nous avons montré que, si K, K' sont des ensembles de Cantor réguliers, définis respectivement par des applications expansives g, g' , dont l'intersection est non vide et la somme des dimensions est > 1 , alors on peut perturber de façon arbitrairement faible g, g' en des applications \tilde{g}, \tilde{g}' de façon que les ensembles de Cantor réguliers associés \tilde{K}, \tilde{K}' s'intersectent stablement : pour tous $\tilde{g}_1, \tilde{g}'_1$ assez proches de \tilde{g}, \tilde{g}' , les ensembles de Cantor réguliers associés $\tilde{K}_1, \tilde{K}'_1$ ont une intersection non vide.

Le but de cet article est de démontrer un résultat analogue dans le contexte des bifurcations homoclines ou hétéroclines pour les difféomorphismes d'une surface, tant dans un cadre conservatif que dissipatif.

* Avec le support du CNPq.

Les bifurcations homoclines jouent un rôle fondamental dans l'étude de difféomorphismes des surfaces. De nombreux phénomènes dynamiques compliqués sont engendrés par les bifurcations homoclines. C'est le cas par exemple du phénomène de Newhouse, la coexistence générique d'une infinité de puits parmi certains ouverts de difféomorphismes.

Par ailleurs, les bifurcations homoclines sont fréquentes parmi les difféomorphismes non-hyperboliques des surfaces. Il y a une conjecture de J. Palis selon laquelle tout difféomorphisme d'une surface peut être approché par un difféomorphisme hyperbolique ou par un difféomorphisme présentant une tangence homocline. Cette conjecture a été démontrée en topologie C^1 par E. Pujals et M. Sambarino [11].

Plus précisément, soient M une surface de classe C^∞ et F_0 un difféomorphisme de classe C^∞ de M . Rappelons qu'on appelle fer à cheval de F_0 une partie compacte non vide invariante Λ de M qui est aussi hyperbolique, transitive, localement maximale, de type selle, et non réduite à une orbite périodique. De type selle signifie ici que les ensembles stable et instable de Λ sont d'intérieur vide; ceci implique que Λ est totalement discontinu. Considérons deux fers à cheval Λ, Λ' de F_0 . On n'exclut pas qu'on puisse avoir $\Lambda \cap \Lambda' \neq \emptyset$, ou même $\Lambda = \Lambda'$.

On suppose qu'il existe des points périodiques $p \in \Lambda, p' \in \Lambda'$ tels que les courbes $W^s(p)$ et $W^u(p')$ aient en un point q une tangence quadratique. On suppose de plus que q est un point d'intersection isolé de $W^s(\Lambda)$ et $W^u(\Lambda')$.

La figure ci-dessous montre une tangence homocline isolée d'un fer à cheval (dans le cas $\Lambda = \Lambda', p = p'$).

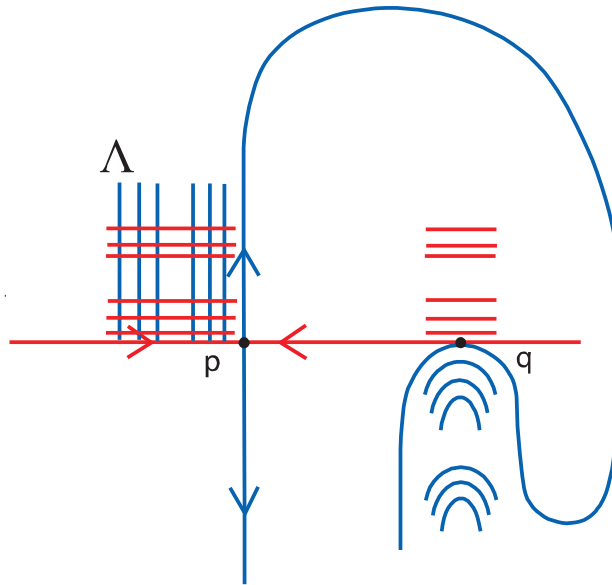


FIG. 1

Dans un voisinage suffisamment petit \mathcal{U} de F_0 dans $\text{Diff}^\infty(M)$, les fers à cheval Λ, Λ' et donc aussi les points périodiques p, p' , ont une continuation hyperbolique. La condition de tangence quadratique entre $W^s(p)$ et $W^u(p')$ près de q définit une hypersurface \mathcal{U}_0 de \mathcal{U} , qui

sépare \mathcal{U} en deux parties \mathcal{U}_- , \mathcal{U}_+ : dans \mathcal{U}_- , $W^s(p)$ et $W^u(p')$ ne se rencontrent pas près de q , tandis que, dans \mathcal{U}_+ , $W^s(p)$ et $W^u(p')$ ont deux intersections transverses au voisinage de q .

Choisissons des variétés locales $W_{loc}^u(p)$, $W_{loc}^s(p')$ et notons d (resp. d') la dimension de Hausdorff de $\Lambda \cap W_{loc}^u(p)$ (resp. $\Lambda' \cap W_{loc}^s(p')$), c'est-à-dire la dimension transverse de $W^s(\Lambda)$ (resp. $W^u(\Lambda')$). Ces dimensions transverses sont bien définies : d (resp. d') est égal à la dimension de Hausdorff de $\Lambda \cap W_{loc}^u(x)$ (resp. $\Lambda' \cap W_{loc}^s(x')$), pour chaque $x \in \Lambda$ (resp. $x' \in \Lambda'$), les applications d'holonomie étant de classe C^1 .

Soient $z \in W_{loc}^u(p) \cap \Lambda$, $z' \in W_{loc}^s(p') \cap \Lambda'$. Les points z, z' peuvent être suivis hyperboliquement dans \mathcal{U} . La condition que $W^s(z), W^u(z')$ présentent au voisinage de q une tangence quadratique définit une hypersurface $\mathcal{T}(z, z')$ contenue dans $\overline{\mathcal{U}}_+$ et même dans \mathcal{U}_+ sauf si $(z, z') = (p, p')$ car on a alors $\mathcal{T}(p, p') = \mathcal{U}_0$ (strictement parlant, il ne faut pas considérer $W^s(z), W^u(z')$ mais $F^{-N}(W_{loc}^s(F^N z)), F^N(W_{loc}^u(F^{-N} z'))$, avec N assez grand). On posera

$$\mathcal{T} = \bigcup_{z, z'} \mathcal{T}(z, z') \subset \mathcal{U}_+ \cup \mathcal{U}_0.$$

On prendra garde que les hypersurfaces $\mathcal{T}(z, z')$ (lorsque z, z' varient) ne sont en général pas disjointes. Pour comprendre le lieu de tangence \mathcal{T} , il est raisonnable d'étudier comment des familles à un paramètre $(F_t)_{|t| \leq t_0}$ transverses à \mathcal{U}_0 le rencontrent. On supposera bien sûr qu'on a $F_t \in \mathcal{U}_+$ pour $t > 0$ et $F_t \in \mathcal{U}_-$ pour $t < 0$. On appelle *densité inférieure* (resp. *supérieure*) du lieu de tangence dans une telle famille le nombre

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \text{Leb}(\{t \in [0, \varepsilon], F_t \in \mathcal{T}\}) \text{ (resp. } \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \text{Leb}(\{t \in [0, \varepsilon], F_t \in \mathcal{T}\})).$$

On appellera de même *densité inférieure* (resp. *supérieure*) du lieu de tangence *stable* le nombre

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \text{Leb}(\{t \in [0, \varepsilon], F_t \in \text{int} \mathcal{T}\}) \text{ (resp. } \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \text{Leb}(\{t \in [0, \varepsilon], F_t \in \text{int} \mathcal{T}\})).$$

La figure ci-dessous représente l'espace des paramètres \mathcal{U} et les hypersurfaces $\mathcal{T}(z, z')$.

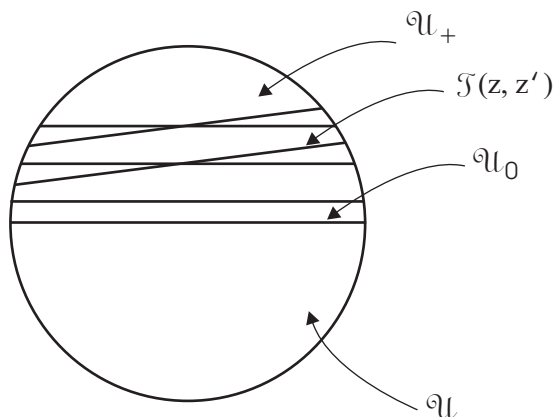


FIG. 2

Supposons d'abord qu'on a $d + d' < 1$. Il résulte alors des travaux de Palis et Takens [8] que, étant donné $d + d' < D < 1$, si \mathcal{U} est suffisamment petit, toute famille transverse à \mathcal{U}_0 rencontre \mathcal{T} suivant un ensemble de dimension de Hausdorff $\leq D$.

À l'extrême inverse, Hall [1] dans un cadre arithmétique et Newhouse [7] dans un cadre dynamique ont introduit indépendamment des conditions (basées sur la notion d'épaisseur) qui garantissent qu'on ait $\mathcal{T} = \overline{\mathcal{U}}_+$ (si \mathcal{U} est suffisamment petit). Par ailleurs, Palis et le second auteur ont montré que, pour $d + d' > 1$, la densité supérieure du lieu de tangence est strictement positive pour presque toute famille (voir [10] pour l'énoncé précis).

Notre résultat principal renforce ce théorème :

THÉORÈME A. – *Supposons $d + d' > 1$. Si \mathcal{U} est assez petit, il existe une partie ouverte et dense \mathcal{U}_0^* de \mathcal{U}_0 telle que toute famille transverse à \mathcal{U}_0 en un point de \mathcal{U}_0^* rencontre $\text{int } \mathcal{T}$ suivant une partie de densité inférieure strictement positive. De plus, une telle famille rencontre $(\text{int } \mathcal{T}) \cup (\mathcal{U} - \mathcal{T})$ suivant une partie de densité totale.*

On démontrera dans la suite ce résultat aussi bien dans le cadre dissipatif que conservatif : dans ce dernier cas, on suppose que F_0 préserve une forme d'aire ω , on note $\text{Diff}_\omega^\infty(M)$ le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ qui préservent ω , et on prend pour \mathcal{U} un voisinage de F_0 dans $\text{Diff}_\omega^\infty(M)$.

Le plan général de la démonstration du théorème A, ainsi que plusieurs concepts fondamentaux, sont identiques à ceux intervenant dans la démonstration du résultat principal de [6]. Il y a cependant plusieurs difficultés spécifiques au cas présent, qui nécessitent de reprendre la démonstration dans son ensemble ; l'origine de ces difficultés est pour une grande partie liée au fait suivant : on veut perturber le difféomorphisme initial dans la C^∞ topologie, alors qu'en général les applications expansives qui définissent les géométries transverses de $W^s(\Lambda)$ et $W^u(\Lambda')$ ne sont pas de classe C^2 .

On commence par rappeler un certain nombre de concepts fondamentaux, en particulier celui de géométrie infinitésimale. Ceci nous permet d'énoncer ce qui constitue en fait l'énoncé central, le théorème B ci-dessous. On montre ensuite comment le théorème A se déduit du théorème B. Le reste de l'article est alors consacré à la démonstration du théorème B, qu'on présentera dans ses grandes lignes avant d'en donner les détails.

Dans le cadre de premières bifurcations, on peut utiliser le théorème A pour renforcer les résultats de [8] et [5] sur la dynamique après la bifurcation. On note $\Omega(F)$ l'ensemble non-errant d'un difféomorphisme F .

Nous disons que $F \in \text{Diff}^\infty(M)$ est stablement hyperbolique s'il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^\infty(M)$ de F tel que $\Omega(G)$ soit hyperbolique pour tout $G \in \mathcal{U}$.

On suppose maintenant que $\Lambda = \Lambda'$, $p = p'$ et $\Omega(F_0) = \tilde{\Lambda} \cup \mathcal{O}(q)$, où $\tilde{\Lambda}$ est un ensemble hyperbolique dont $\Lambda \subset \tilde{\Lambda}$ est une partie ouverte et fermée ; on suppose aussi qu'on peut choisir le voisinage \mathcal{U} de F_0 de telle façon que $\Omega(F)$ soit hyperbolique pour chaque $F \in \mathcal{U}^-$. Alors on démontrera la variante suivante du théorème A :

THÉORÈME \tilde{A} . – *Supposons $d + d' > 1$. Il existe une partie ouverte et dense \mathcal{U}_0^* de \mathcal{U}_0 telle que toute famille transverse \mathcal{U}_0 en un point de \mathcal{U}_0^* rencontre $(\text{int } \mathcal{T}) \cup \mathcal{H}$ suivant une partie de densité totale, où $\mathcal{H} = \{F \in \mathcal{U}, F \text{ est stablement hyperbolique}\}$.*

Dans le théorème A* énoncé un peu plus loin, on renforce les résultats précédents en montrant que, pour un sous-ensemble ouvert et dense (et de « mesure totale ») de la région correspondante des tangences stables, on a en fait un ensemble de dimension de Hausdorff positive de tangences simultanées entre les feuilletages stable et instable de Λ et Λ' .

Nous remercions le rapporteur pour des suggestions ayant mené à de substantielles améliorations de la rédaction.

1. Géométries infinitésimales d'un ensemble de Cantor régulier

1.1. Ensembles de Cantor réguliers

Soient \mathbf{A} un alphabet fini et $\Sigma \subset \mathbf{A}^{\mathbb{Z}}$ un sous-décalage de type fini défini par un ensemble de transition $\mathcal{B} \subset \mathbf{A}^2$. On supposera toujours que Σ est transitif et utilise toutes les lettres de \mathbf{A} .

Un *mot* de Σ est une suite finie d'éléments de \mathbf{A} vérifiant les règles de transition données par \mathcal{B} .

Soit $r \in (1, +\infty]$; on dit qu'une application g de classe C^r est *dilatante de type* Σ si :

- son domaine est une union disjointe $\bigsqcup_{\mathcal{B}} I(a_0, a_1)$ où, pour chaque $(a_0, a_1) \in \mathcal{B}$, $I(a_0, a_1)$ est un sous-intervalle compact de $I(a_0) := [0, 1] \times \{a_0\}$;
- pour chaque $(a_0, a_1) \in \mathcal{B}$, la restriction de g à $I(a_0, a_1)$ est un C^r -difféomorphisme sur $I(a_1)$, vérifiant $|Dg(t)| > 1$ pour tout $t \in I(a_0, a_1)$.

On note Ω_{Σ}^r l'espace des applications dilatantes de classe C^r de type Σ , muni de la C^r -topologie. Une telle application définit l'*ensemble de Cantor régulier*

$$K = \bigcap_{n \geq 0} g^{-n} \left(\bigsqcup_{\mathcal{B}} I(a_0, a_1) \right).$$

La dynamique de g sur K est canoniquement conjuguée au sous-décalage unilatéral $\Sigma^+ \subset \mathbf{A}^{\mathbb{N}}$ défini par \mathcal{B} .

1.2. Linéarisation fibrée. Géométries infinitésimales

Pour $(a_0, a_1) \in \mathcal{B}$, $f_{(a_0, a_1)}$ désigne l'inverse de $g|_{I(a_0, a_1)}$. Pour un mot $\underline{a} = (a_0, \dots, a_n)$ de Σ , on pose

$$f_{\underline{a}} = f_{a_0 a_1} \circ \dots \circ f_{a_{n-1} a_n};$$

c'est un difféomorphisme de $I(a_n)$ sur un sous-intervalle $I(\underline{a})$ de $I(a_0)$.

On notera $K(\theta_0) := K \cap I(\theta_0)$ et, plus généralement, $K(\underline{a}) := K \cap I(\underline{a})$.

Notons Σ^- le sous-décalage unilatéral défini par \mathcal{B} indexé par les entiers négatifs ou nuls.

Nous munissons Σ^- de la distance ultramétrique suivante : pour $\underline{\theta} \neq \tilde{\underline{\theta}} \in \Sigma^-$, on pose

$$d(\underline{\theta}, \tilde{\underline{\theta}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_0 \neq \tilde{\theta}_0 \\ |I(\underline{\theta} \wedge \tilde{\underline{\theta}})| & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\underline{\theta} \wedge \tilde{\underline{\theta}} = (\theta_{-n}, \dots, \theta_0)$ avec $\tilde{\theta}_{-j} = \theta_{-j}$ pour $0 \leq j \leq n$ et $\tilde{\theta}_{-n-1} \neq \theta_{-n-1}$.

Pour $\underline{\theta} = (\theta_m)_{m \leq 0}$ dans Σ^- , $n < 0$, posons

$$k_n^{\underline{\theta}} = B \circ f_{\underline{\theta}^n},$$

où $\underline{\theta}^n = (\theta_{-n}, \dots, \theta_0)$ et B est l'unique application affine de $I(\underline{\theta}^n)$ sur $I(\theta_0)$ telle que k_n^θ préserve l'orientation.

La suite k_n^θ converge vers un difféomorphisme $k^\theta \in \text{Diff}_+^r(I(\theta_0))$ (cf. [12]); la convergence a lieu dans la $C^{r'}$ topologie pour tout $r' < r$, et même dans la C^r -topologie si r est entier ou $+\infty$. La convergence est uniforme en $\underline{\theta} \in \Sigma^-$ et dans un voisinage de g dans Ω_Σ^r .

La *géométrie infinitésimale* de K associé à $\underline{\theta}$ est l'ensemble de Cantor

$$K^\theta = k^\theta(K \cap I(\theta_0)).$$

Les difféomorphismes $k^\theta, \underline{\theta} \in \Sigma^-$, réalisent une linéarisation fibrée de la dynamique puisque les applications $k^{\sigma^{-1}(\underline{\theta})} \circ f_{\theta_{-1}\theta_0} \circ (k^\theta)^{-1}$ sont affines.

On notera $I^\theta(\underline{a}) := k^\theta(I(\underline{a}))$.

1.3. Opérateurs de renormalisation

Pour $a \in \mathbf{A}$, on désigne par $\mathcal{P}^r(a)$ l'espace des C^r -plongements de $I(a)$ dans \mathbb{R} , muni de la C^r -topologie; on pose $\mathcal{P}^r = \bigsqcup_{\mathbf{A}} \mathcal{P}^r(a)$. On appelle \mathcal{A} l'espace des paires $(\underline{\theta}, A)$, où $\underline{\theta} \in \Sigma^-$ et A est un plongement *affine* de $I(\theta_0)$ dans \mathbb{R} ; on a une application naturelle : $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}^r$ qui associe $A \circ k^\theta$ à la paire $(\underline{\theta}, A)$.

Soit $\underline{a} = (a_0, \dots, a_n)$ un mot de Σ ; l'*opérateur de renormalisation* $T_{\underline{a}} : \mathcal{P}^r(a_0) \rightarrow \mathcal{P}^r(a_n)$ est défini par

$$T_{\underline{a}}(h) = h \circ f_{\underline{a}}.$$

Il possède un relèvement à \mathcal{A} (encore noté $T_{\underline{a}}$); lorsque \underline{a} varie parmi les mots de Σ de longueurs $n + 1$, les $T_{\underline{a}}$ constituent les branches inverses de S^n , l'application $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ étant définie par

$$S(\underline{\theta}, A) = (\sigma^{-1}\underline{\theta}, A \circ k^\theta \circ g / I(\theta_{-1}, \theta_0) \circ (k^{\sigma^{-1}(\underline{\theta})})^{-1}).$$

1.4. Configurations relatives. Intersections stables

Soient $(\mathbf{A}, \mathcal{B}, \Sigma, g), (\mathbf{A}', \mathcal{B}', \Sigma', g')$ deux données engendrant des ensembles de Cantor réguliers K, K' . Soit $r \in (1, +\infty]$ tel que g, g' soient de classe C^r , et soient $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ les espaces de plongements associés; on définit aussi $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ comme dans le numéro précédent.

Définitions. – 1. Une paire $(h, h') \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}'$ est une *configuration d'intersection*, si on a $h(K \cap I(a)) \cap h'(K' \cap I(a')) \neq \emptyset$ (où $h \in \mathcal{P}(a), h' \in \mathcal{P}(a'), a \in \mathbf{A}, a' \in \mathbf{A}'$).

2. Une paire $(h, h') \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}'$ est une *configuration d'intersection stable* si pour tout $\tilde{r} \in (1, r]$, toutes $C^{\tilde{r}}$ -applications dilatantes (\tilde{g}, \tilde{g}') de types Σ, Σ' suffisamment $C^{\tilde{r}}$ -proches de (g, g') , tous les plongements $(\tilde{h}, \tilde{h}') \in \mathcal{P}^{\tilde{r}} \times \mathcal{P}'^{\tilde{r}}$ suffisamment $C^{\tilde{r}}$ -proches de (h, h') forment pour les ensembles de Cantor réguliers \tilde{K}, \tilde{K}' définis par \tilde{g}, \tilde{g}' une configuration d'intersection.

Le groupe affine $\text{Aff}(\mathbb{R})$ agit par composition à gauche sur $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{P}, \mathcal{P}'$ et aussi diagonalement sur les produits $\mathcal{A} \times \mathcal{A}', \mathcal{P} \times \mathcal{P}'$; on notera \mathcal{C}, \mathcal{Q} les quotients de ces deux produits par cette action diagonale. L'action diagonale du groupe affine préserve la propriété d'intersection, et celle d'intersection stable. Elle commute avec les opérateurs de renormalisation. Un élément de \mathcal{Q} (resp. \mathcal{C}) est appelé *configuration relative* (resp. *configuration affine relative*) de K, K' .

On peut introduire sur \mathcal{C} les coordonnées naturelles suivantes : on dira que $u = ((\underline{\theta}, A)(\underline{\theta}', A')) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ est *normalisé* si $A(x, \theta_0) \equiv x$; on écrit alors $A'(x', \theta'_0) = sx' + t$ et le quadruplet $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t)$ correspond à l'image de u dans \mathcal{C} .

Pour u comme ci-dessus, $x \in K(\theta_0)$, $x' \in K'(\theta'_0)$, on aura

$$A(k^\underline{\theta}(x)) = A'(k'^{\underline{\theta}'}(x'))$$

si et seulement si

$$t = k^\underline{\theta}(x) - sk'^{\underline{\theta}'}(x') := \pi_{\underline{\theta}, \underline{\theta}', s}(x, x').$$

Les opérateurs de renormalisation agissent par translation sur la variable $\log s$ et par dilatation sur la variable t .

1.5. Critère d'intersection stable

La remarque suivante est élémentaire mais fondamentale. Soit $(h, h') \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}'$; c'est une configuration d'intersection si et seulement si il existe une suite $(h_n, h'_n)_{n \geq 0}$ dans $\mathcal{P} \times \mathcal{P}'$ vérifiant :

- (i) $(h_0, h'_0) = (h, h')$;
- (ii) pour tout $n > 0$, on a $h_n = T_{\underline{a}} h_{n-1}$, $h'_n = T'_{\underline{a}'} h'_{n-1}$ pour certains opérateurs de renormalisation (dépendant de n) $T_{\underline{a}}, T'_{\underline{a}'}$;
- (iii) l'image dans \mathcal{Q} de la suite (h_n, h'_n) est relativement compacte.

Ceci suggère, pour les intersections stables, la définition suivante :

DÉFINITION. – Une partie compacte non vide \mathcal{L} de \mathcal{C} est *récurrente* si pour tout $u \in \mathcal{L}$ il existe $\ell, \ell' \geq 0$ avec $\ell + \ell' > 0$ et $v \in \text{int} \mathcal{L}$ tels que $S^\ell S'^{\ell'}(v) = u$.

On a alors [6] :

PROPOSITION. – Une configuration affine relative qui appartient à une partie compacte récurrente est une configuration d'intersection stable.

1.6. Les ouverts $V_0 \subset V_1 \subset \Omega_\Sigma \times \Omega_{\Sigma'}$

Notons \mathcal{C}_i (resp. \mathcal{C}_s) l'ensemble des configurations affines relatives d'intersection (resp. d'intersection stable). Notons V_1^r l'espace des paires $(g, g') \in \Omega_\Sigma^r \times \Omega_{\Sigma'}^r$, telles que $\mathcal{C}_s \neq \emptyset$; c'est une partie ouverte de $\Omega_\Sigma^r \times \Omega_{\Sigma'}^r$.

Si l'image de $((\underline{\theta}, A), (\underline{\theta}', A'))$ dans \mathcal{C} appartient à \mathcal{C}_s c'est encore le cas des images de $(S(\underline{\theta}, A), (\underline{\theta}', A'))$ et $((\underline{\theta}, A), S'(\underline{\theta}', A'))$; il en résulte que lorsque \mathcal{C}_s est non vide, \mathcal{C}_s rencontre toutes les fibres de \mathcal{C} au-dessus de $\Sigma^- \times \Sigma'^-$.

On note $V_0^r \subset V_1^r$ l'espace des paires $(g, g') \in V_1^r$ qui ont la propriété suivante : pour tous $((\underline{\theta}, A), (\underline{\theta}', A')) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$, il existe une translation $R_t : x \mapsto x + t$ telle que l'image de $((\underline{\theta}, A), (\underline{\theta}', R_t \circ A'))$ appartienne à \mathcal{C}_s .

REMARQUE. – On dit que g est orientable si on peut orienter les intervalles $I(a)$, $a \in \mathbf{A}$ de façon que g préserve l'orientation. Cela revient à dire que les multiplicateurs des orbites périodiques de g sont positifs. Lorsque g, g' sont orientables, on a une partition $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ en deux parties invariantes par les opérateurs de renormalisation. Il est *a priori* possible d'avoir $\mathcal{C}_s \cap \mathcal{C}^+ \neq \emptyset$, $\mathcal{C}_s \cap \mathcal{C}^- = \emptyset$ mais nous n'en connaissons pas d'exemple.

Les propriétés suivantes de V_0^r sont démontrées dans [6] :

1. V_0^r est une partie ouverte. Plus précisément, pour tout $R > 1$, pour tout $(g, g') \in V_0^r$, il existe $\delta > 0$, un voisinage Z de $\text{id}_{\mathbb{R}}$ dans $\text{Diff}^{1+}(\mathbb{R})$, un voisinage W de (g, g') dans $\Omega_{\Sigma}^{1+} \times \Omega_{\Sigma'}^{1+}$, tels que, pour tous $\underline{\theta} \in \Sigma^-$, $\underline{\theta}' \in \Sigma'^-$, tout s vérifiant $R \geq |s| \geq R^{-1}$, il existe un intervalle J avec $|J| \geq \delta$ tel que, pour tous $(\tilde{g}, \tilde{g}') \in W$, $h, h' \in Z$, la configuration

$$(h \circ k^{\underline{\theta}}, A_{s,t} \circ h' \circ k^{\underline{\theta}'})$$

soit d'intersection stable pour tout $t \in J$, où on a posé $A_{s,t}(x) = sx + t$.

On a dans l'énoncé précédent posé $\Omega_{\Sigma}^{1+} = \bigcup_{r>1} \Omega_{\Sigma}^r$, qu'on munit de la topologie limite inductive ; de même pour $\Omega_{\Sigma'}^{1+}$, et $\text{Diff}^{1+}(\mathbb{R})$.

2. Soit $(g, g') \in V_1^r$; si g et g' sont orientables, supposons de plus que \mathcal{C}_s rencontre les deux orientations. Supposons qu'il existe un point périodique p de g , de période n et un point périodique p' de g' , de période n' , tels que le rapport

$$\frac{\text{Log}|Dg^n(p)|}{\text{Log}|Dg'^{n'}(p')|}$$

soit irrationnel. Alors $(g, g') \in V_0^r$.

3. Soit $(g, g') \in V_0^r$. Alors il existe $\hat{d} < 1$, localement uniforme, tel que, pour tout $(h, h') \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}'$, l'ensemble

$$\mathcal{J}_s = \{t \in \mathbb{R}, (R_t \circ h, h') \text{ est une configuration d'intersection stable pour } (g, g')\}$$

soit (ouvert et) dense dans

$$\mathcal{J} = \{t \in \mathbb{R}, (R_t \circ h, h') \text{ est une configuration d'intersection pour } (g, g')\}$$

et, de plus, $HD(\mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_s) \leq \hat{d}$ (en particulier $\mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_s$ est de mesure de Lebesgue nulle).

Pour $R > 1$ on pose $J_R := [-R, -R^{-1}] \cup [R^{-1}, R]$. Le résultat suivant nous sera utile pour démontrer le théorème \tilde{A} :

PROPOSITION. – Soit $(g, g') \in V_0^r$. Pour tous $\varepsilon > 0$, $R > 1$, on peut trouver $\delta > 0$ et un voisinage \mathcal{W} de (g, g') dans $\Omega_{\Sigma}^{1+} \times \Omega_{\Sigma'}^{1+}$, tels que, pour tout $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) \in \Sigma^- \times \Sigma'^- \times J_R$, il existe des ensembles $H, T \subset \mathbb{R}$ tels que :

- i) $t \in H \Rightarrow \text{dist}(K^{\underline{\theta}}, sK'^{\underline{\theta}'} + t) > \delta, \forall (g, g') \in \mathcal{W}$.
- ii) $t \in T \Rightarrow (\tilde{\theta}, \tilde{\theta}', \tilde{s}, \tilde{t}) \in \mathcal{C}_s, \forall (g, g') \in \mathcal{W}, (\tilde{\theta}, \tilde{\theta}', \tilde{s}, \tilde{t}) \in B_{\delta}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t)$.
- iii) $\text{Leb}(\mathbb{R} \setminus (H \cup T)) < \varepsilon$.

Démonstration. – Soit $u = (\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) \in \Sigma^- \times \Sigma'^- \times J_R$. Par la propriété 3. ci-dessus, et par le fait que deux ensembles compacts dans \mathbb{R} qui ne s'intersectent pas sont à une distance strictement positive, il y a un voisinage \mathcal{W}_u de (g, g') , $\delta_u > 0$ et des ensembles $H_u, T_u \subset \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés i), ii) et iii) ci-dessus pour cette valeur de u . Quitte à remplacer δ_u par $\delta_u/2$, les mêmes ensembles \mathcal{W}_u, H_u, T_u ont encore ces propriétés dans un voisinage de u . La proposition suit par compacité de $\Sigma^- \times \Sigma'^- \times J_R$. \square

1.7. Applications expansives associées à un fer à cheval

Soit F_0 un difféomorphisme de classe C^∞ d'une surface M , et soit Λ un fer à cheval de F_0 . Considérons une collection finie $(R_a)_{a \in \mathbf{A}}$ de rectangles disjoints de M induisant une *partition de Markov* de Λ . L'ensemble $\mathcal{B} \subset \mathbf{A}^2$ des transitions admissibles est constitué des paires (a_0, a_1) telles que $F_0(R_{a_0}) \cap R_{a_1} \neq \emptyset$; la dynamique de F_0 sur Λ est topologiquement conjuguée au sous-décalage Σ défini par \mathcal{B} .

On posera

$$W^s(\Lambda, R) = \bigcap_{n \geq 0} F_0^{-n} \left(\bigcup_{\mathbf{A}} R_a \right),$$

$$W^u(\Lambda, R) = \bigcap_{n \leq 0} F_0^{-n} \left(\bigcup_{\mathbf{A}} R_a \right).$$

Il existe un réel $r > 1$ et une collection $(\pi_a : R_a \rightarrow I(a))_{a \in \mathbf{A}}$ de submersions de classe C^r vérifiant la propriété suivante : si $z, z' \in R_{a_0} \cap F_0^{-1}(R_{a_1})$ vérifient $\pi_{a_0}(z) = \pi_{a_0}(z')$, alors on a $\pi_{a_1}(F_0(z)) = \pi_{a_1}(F_0(z'))$. En particulier, les composantes connexes de $W^s(\Lambda, R) \cap R_a$ sont des lignes de niveau de π_a . On définit ensuite une application g de classe C^r par la formule

$$g(\pi_{a_0}(z)) = \pi_{a_1}(F_0(z)),$$

pour $(a_0, a_1) \in \mathcal{B}$, $z \in R_{a_0} \cap F_0^{-1}(R_{a_1})$. L'application g est dilatante de type Σ pour un choix approprié des submersions $(\pi_a : R_a \rightarrow I(a))_{a \in \mathbf{A}}$. L'ensemble de Cantor régulier défini par g décrit la géométrie transverse du feuilletage stable $W^s(\Lambda, R)$.

Quitte à réduire r , si \mathcal{U} est un voisinage suffisamment petit de F_0 dans $\text{Diff}^\infty(M)$, on peut suivre dans \mathcal{U} non seulement le fer à cheval Λ , mais aussi les submersions $(\pi_a)_{a \in \mathbf{A}}$, avec dépendance $C^{r'}$ par rapport aux paramètres, pour tout $r' < r$ (voir [2] et [8, Appendix 1]).

1.8. Énoncé du théorème B

Supposons maintenant que le difféomorphisme F_0 possède deux fers à cheval Λ, Λ' (disjoints ou non). Choisissons pour chacun d'entre eux une partition de Markov et une collection de submersions comme ci-dessus, à ceci près que nous utilisons F_0^{-1} pour Λ' de façon à décrire la géométrie transverse de $W^u(\Lambda', R')$. Nous obtenons ainsi, pour un certain $r > 1$, deux applications g, g' dilatantes de classe C^r de types respectifs Σ, Σ' définis par $\mathcal{B} \subset \mathbf{A}^2, \mathcal{B}' \subset \mathbf{A}'^2$.

On observera que, Σ, Σ' étant fixés, un choix différent de submersions produit des applications dilatantes qui sont C^r -conjuguées aux précédentes, et *ne change donc pas* l'espace des géométries infinitésimales des ensembles de Cantor réguliers considérés. En particulier, la propriété qu'on ait $(g, g') \in V_1$ ne dépend *que de F_0* et pas du choix des submersions qui permettent de construire g et g' .

THÉORÈME B. – *Supposons que la somme des dimensions de Hausdorff des ensembles de Cantor réguliers K, K' définis par g, g' soit > 1 . Alors, si le voisinage \mathcal{U} de F_0 dans $\text{Diff}^\infty(M)$ est suffisamment petit, il existe une partie ouverte et dense \mathcal{U}^* de \mathcal{U} telle que, pour $F \in \mathcal{U}^*$, il existe pour les applications dilatantes associées (g, g') une partie compacte récurrente $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}$ (rencontrant les deux orientations quand (g, g') sont orientables).*

Remarques. – 1. L'énoncé fondamental de [6] est le suivant : soit $r > 1$; il existe dans $(\Omega_\Sigma^r \times \Omega_{\Sigma'}^r) \cap \{HD(K) + HD(K') > 1\}$ une partie ouverte (dans la C^{1+} topologie) et dense (dans la C^r -topologie) pour laquelle il existe une partie compacte récurrente. Mais dans le théorème B la partie \mathcal{U}^* doit être dense dans la C^∞ topologie, alors qu'en général les applications dilatantes ne sont pas de classe C^∞ , et même souvent pas de classe C^2 . Cette différence à première vue peu significative entraîne des changements non triviaux dans la preuve du théorème.

2. Comme pour le théorème A, le théorème B recouvre en fait deux énoncés, l'un dans le cadre dissipatif et l'autre dans le cadre conservatif.

2. Du théorème B au théorème A

2.1. Configuration affine relative associée à une tangence homocline ou hétérocline

On considère comme en 1.8 deux fers à cheval Λ, Λ' pour le difféomorphisme F_0 de la surface M . On introduit pour chacun d'entre eux une partition de Markov et des submersions permettant de construire des applications dilatantes g, g' décrivant respectivement les géométries transverses de $W^s(\Lambda, R), W^u(\Lambda', R')$.

On suppose de plus qu'il existe des points périodiques $p \in \Lambda, p' \in \Lambda'$, et un point $q \in M \setminus (\Lambda \cup \Lambda')$ en lequel $W^s(p)$ et $W^u(p')$ ont une tangence quadratique, q étant qui plus est isolé dans $W^s(\Lambda) \cap W^u(\Lambda')$.

Notons K, K' les ensembles de Cantor réguliers définis par g, g' . Notons \underline{p} (resp. \underline{p}') le point de Σ^- (resp. de Σ'^-), périodique pour σ^{-1} , associé à p (resp. p') : on a $F_0^i(p) \in R_{p_i}$ pour $i \leq 0$ (resp. $F_0^{-i}(p') \in R'_{p'_i}$ pour $i \leq 0$). Notons d'autre part \bar{p} (resp. \bar{p}') le point de K (resp. K') périodique pour g (resp. g') associé à p (resp. p').

Choisissons aussi une transversale γ à $W^s(p)$ (et $W^u(p')$) en q .

Nous définissons une configuration affine relative u par les propriétés suivantes :

- (i) les géométries infinitésimales associées à u sont respectivement \underline{p} et \underline{p}' ;
- (ii) soit $((p, A), (p', A'))$ un élément de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}'$ représentant u ; on a $A(k^{\underline{p}}(\bar{p})) = A'(k'^{\underline{p}'}(\bar{p}'))$. De plus, lorsque $y \in K$ tend vers $\bar{p}, y' \in K'$ tend vers \bar{p}' de façon que $d(y, \bar{p})/d(y', \bar{p}')$ ait une limite finie non nulle, alors

$$\text{Lim} \frac{A'(k'^{\underline{p}'}(y')) - A'(k'^{\underline{p}'}(\bar{p}'))}{A(k^{\underline{p}}(y)) - A(k^{\underline{p}}(\bar{p}))} = -\text{Lim} \frac{d(\gamma_{y'}, q)}{d(\gamma_y, q)}$$

où γ_y (resp. $\gamma_{y'}$) désigne le point d'intersection de la plaque stable associée y (resp. de la plaque instable associée à y') avec la transversale γ près de q .

2.2. Preuve des théorèmes A et \tilde{A} (à partir du théorème B)

2.2.1. – On suppose que le difféomorphisme F_0 considéré dans le numéro précédent vérifie

$$HD(K) + HD(K') > 1.$$

On peut donc appliquer le théorème B. On choisit le voisinage \mathcal{U} de F_0 dans $\text{Diff}^\infty(M)$ (dans $\text{Diff}_\omega^\infty(M)$ dans le cas conservatif) suffisamment petit et on a alors une partie ouverte et dense \mathcal{U}^* pour laquelle existe une partie compacte récurrente \mathcal{L} de \mathcal{C} (rencontrant les deux orientations lorsque g, g' sont orientables).

2.2.2. – On observe que \mathcal{U}^* rencontre l'hypersurface de tangence \mathcal{U}_0 suivant une partie ouverte et *dense* dans \mathcal{U}_0 . En effet, \mathcal{U}_0 est déterminé par la restriction de F au voisinage de q tandis que \mathcal{U}^* est déterminé par les restrictions de F à des voisinages de Λ et Λ' .

Pour des raisons similaires, l'ensemble des $F \in \mathcal{U}_0$, tels que le rapport des logarithmes des valeurs absolues des multiplicateurs des points périodiques p, p' soit irrationnel, est dense dans \mathcal{U}_0 .

D'après la propriété 2. de 1.6, on conclut qu'il existe une partie ouverte et dense \mathcal{U}_0^* de \mathcal{U}_0 (contenue dans $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}^*$) pour laquelle on a $(g, g') \in V_0^r$.

2.2.3. – Considérons une famille à 1-paramètre $(F_t)_{|t| \leq t_0}$ transverse à \mathcal{U}_0 en un point de \mathcal{U}_0^* . Soient $((p, A), (p', A'))$ un élément de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}'$ représentant la configuration affine relative définie en 2.1. Notons \mathcal{I} (resp. \mathcal{I}_s) l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que la configuration $(R_t \circ A \circ k^p, A' \circ k'^{p'})$ (où R_t est la translation $x \mapsto x+t$) soit une configuration d'intersection (resp. d'intersection stable). D'après la propriété 3 de 1.6, \mathcal{I}_s est ouvert et dense dans \mathcal{I} , et $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_s$ est de mesure de Lebesgue nulle.

2.2.4. – Pour terminer la démonstration du théorème A, il suffit de faire appel au théorème I.2 de [5], ou plutôt à sa démonstration (qui donne une conclusion plus forte que l'énoncé présenté dans [5]) : du fait que \mathcal{I}_s est non vide, on conclut que la densité inférieure du lieu de tangence stable est strictement positive (uniformément au voisinage de la famille considérée) ; du fait que $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_s$ est de mesure nulle, on conclut qu'avec densité totale, on a $F_t \in \text{int} \mathcal{I}$ ou $F_t \notin \mathcal{I}$.

2.2.5. – Finalement, on peut terminer la démonstration du théorème \tilde{A} . Soient (g, g') et (F_t) comme ci-dessus.

Si $(g, g') \in V_0^r$, on peut utiliser la proposition de la section 1.6 et les démonstrations des théorèmes I.2 et V.1 de [5] pour montrer l'existence d'ensembles $\hat{H}, \hat{T} \subset \mathbb{R}$ tels que $\hat{H} \cup \hat{T}$ ait densité totale en $t = 0$ et

- pour $t \in \hat{H}$, F_t soit stablement hyperbolique ;
- pour $t \in \hat{T}$, F_t appartienne au lieu de tangence stable.

Cela démontre le théorème \tilde{A} . □

2.3. Tangences multiples

En utilisant la notion d'intersection \tilde{d} -stable de la section 2.5 de [6], qu'on rappelle ci-dessous, on peut énoncer un résultat plus fort :

THÉORÈME A*. – *Supposons $d + d' > 1$, et soit $0 < \tilde{d} < d + d' - 1$. Posons $\mathcal{T}^{(\tilde{d})} := \{F \in \mathcal{U} \mid HD(\{z \in W_{\text{loc}}^u(p) \cap \Lambda, F \in \mathcal{T}(z, z'), \exists z'\}) \geq \tilde{d}\}$. Si \mathcal{U} est assez petit, il existe une partie ouverte et dense $\mathcal{U}_0^{(\tilde{d})}$ de \mathcal{U}_0 telle que toute famille transverse \mathcal{U}_0 en un point de $\mathcal{U}_0^{(\tilde{d})}$ rencontre $\text{int } \mathcal{T}^{(\tilde{d})}$ suivant une partie de densité inférieure strictement positive. De plus, une telle famille rencontre $(\text{int } \mathcal{T}^{(\tilde{d})}) \cup (\mathcal{U} - \mathcal{T})$ suivant une partie de densité totale.*

Définitions (de la section 2.5 de [6]). – 1. Une paire $(h, h') \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}'$ est une configuration d'intersection \tilde{d} -stable si pour tout $\tilde{r} \in (1, r]$, pour toutes applications dilatantes (\tilde{g}, \tilde{g}') de classe $C^{\tilde{r}}$ et types Σ, Σ' suffisamment $C^{\tilde{r}}$ -proches de (g, g') , pour tous plongements $(\tilde{h}, \tilde{h}') \in \mathcal{P}^{\tilde{r}} \times \mathcal{P}'^{\tilde{r}}$ suffisamment $C^{\tilde{r}}$ -proches de (h, h') on a

$$HD(\tilde{h}(K \cap I(a)) \cap \tilde{h}'(K' \cap I(a'))) > \tilde{d}$$

(où $\tilde{h} \in \mathcal{P}^{\tilde{r}}(a)$, $\tilde{h}' \in \mathcal{P}'^{\tilde{r}}(a')$, $a \in \mathbf{A}$, $a' \in \mathbf{A}'$).

2. Une partie compacte non vide \mathcal{L} de \mathcal{C} est \tilde{d} -récurrente si pour tout $((\theta, A), (\theta', A'))$ dont l'image dans \mathcal{C} appartient à \mathcal{L} , il existe des paires $(\underline{a}^1, \underline{a}'^1), \dots, (\underline{a}^k, \underline{a}'^k)$ telles que

- i) la première lettre de \underline{a}^i (resp. \underline{a}'^i) soit θ_0 ;
- ii) les intervalles $I(\underline{a}^i)$ soient disjoints ;
- iii) $(T_{\underline{a}^i}(\theta, A), T'_{\underline{a}'^i}(\theta', A'))$ représente un point de $\text{int } \mathcal{L}$ pour tout $1 \leq i \leq k$;
- iv) $\sum_{i=1}^k |I^\theta(\underline{a}^i)|^{\tilde{d}} > 1$.

Il n'est pas difficile de voir que, si les conditions précédentes sont vérifiées, les conditions déduites de ii) et iv) en échangeant Σ et Σ' le sont aussi.

Dans la section 2.5 de [6] on a remarqué qu'une configuration affine relative qui appartient à une partie compacte \tilde{d} -récurrente non-vide de \mathcal{C} est une configuration d'intersection \tilde{d} -stable. C'est une conséquence du fait suivant, qui peut être démontré avec des techniques usuelles de géométrie fractale :

Considérons, pour $r \geq 1$, une famille finie $\mathcal{J}(r)$ d'intervalles compacts disjoints. On suppose que chaque intervalle de $\mathcal{J}(r+1)$ est contenu dans un intervalle de $\mathcal{J}(r)$ et qu'on a

$$\sup_{r \geq 1} \sup_{\substack{I' \subset I \\ I \in \mathcal{J}(r), I' \in \mathcal{J}(r+1)}} \frac{|I|}{|I'|} < +\infty.$$

Si on a de plus, pour tout $r \geq 1$, $I \in \mathcal{J}(r)$:

$$\sum_{\substack{I' \subset I \\ I' \in \mathcal{J}(r+1)}} \left(\frac{|I'|}{|I|} \right)^{\tilde{d}} \geq 1,$$

alors on a

$$HD\left(\bigcap_{r \geq 1} \bigcup_{I \in \mathcal{J}(r)} I\right) \geq \tilde{d}.$$

En fait, le théorème A* est une conséquence du résultat suivant :

THÉORÈME B*. – Soient g, g' les applications dilatantes associées à F_0 . Supposons que $HD(K) + HD(K') > 1$, où K et K' sont les ensembles de Cantor réguliers définis par g et g' . Soit $0 < \tilde{d} < HD(K) + HD(K') - 1$. Alors, si le voisinage \mathcal{U} de F_0 est suffisamment petit, il existe une partie ouverte et dense $\mathcal{U}^{(\tilde{d})}$ de \mathcal{U} telle que, pour $F \in \mathcal{U}^{(\tilde{d})}$, il existe pour les applications dilatantes associées (g, g') une partie compacte \tilde{d} -récurrente $\mathcal{L}^{(\tilde{d})} \subset \mathcal{C}$ (rencontrant les deux orientations quand g, g' sont orientables).

On peut définir des parties ouvertes $V_0^r(\tilde{d})$ et $V_1^r(\tilde{d})$ comme ci-dessus : $V_1^r(\tilde{d})$ est l'espace des paires $(g, g') \in \Omega_\Sigma^r \times \Omega_{\Sigma'}^r$, telles que l'ensemble $\mathcal{C}_s(\tilde{d})$ des configurations affines relatives d'intersection \tilde{d} -stable soit non-vide, et $V_0^r(\tilde{d}) \subset V_1^r(\tilde{d})$ est l'espace des paires (g, g') telles que pour tous $((\underline{\theta}, A), (\underline{\theta}', A')) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$, il existe une translation $R_t : x \mapsto x + t$ telle que l'image de $((\underline{\theta}, A), (\underline{\theta}', R_t \circ A'))$ appartienne à $\mathcal{C}_s(\tilde{d})$. Ces ensembles satisfont des propriétés analogues à celles de 1.6 : $V_0^r(\tilde{d})$ est ouvert ; de plus, si $(g, g') \in V_1^r(\tilde{d})$ (tel que $\mathcal{C}_s(\tilde{d})$ rencontre les deux orientations lorsque g et g' sont orientables) et s'il existe des points périodiques p de g et p' de g' , de périodes n et n' , tels que $\log |Dg^n(p)| / \log |Dg'^{n'}(p')| \notin \mathbb{Q}$, alors $(g, g') \in V_0^r(\tilde{d})$.

Pour un tel (g, g') et pour $(h, h') \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}'$, l'ensemble $\mathcal{J}_s(\tilde{d}) = \{t \in \mathbb{R}, (R_t \circ h, h')\}$ est une configuration d'intersection \tilde{d} -stable pour (g, g') est dense dans $\mathcal{J} = \{t \in \mathbb{R}, (R_t \circ h, h')\}$ est une configuration d'intersection pour (g, g') ; de plus il existe $d^* < 1$ (localement uniforme) tel que $HD(\mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_s(\tilde{d})) < d^*$. Ces propriétés peuvent être démontrées comme leurs analogues de 1.6, en utilisant les résultats de la section 2.5 de [6].

La preuve du théorème A* à partir du théorème B* est analogue à la preuve du théorème A à partir du théorème B. Comme $\mathcal{U}^{(\tilde{d})} \cap \mathcal{U}_0$ est ouvert et dense dans \mathcal{U}_0 , on peut montrer qu'il existe une partie ouverte et dense $\mathcal{U}_0^{(\tilde{d})} \subset \mathcal{U}^{(\tilde{d})} \cap \mathcal{U}_0$ avec les propriétés suivantes. Pour $F_0 \in \mathcal{U}_0^{(\tilde{d})}$, la paire (g, g') définie en 2.1 appartient $V_0^r(\tilde{d})$. De plus, si $((\underline{p}, A), (\underline{p}', A'))$ est un élément de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ représentant la configuration affine relative définie en 2.1, $\mathcal{J}_s(\tilde{d}) = \{t \in \mathbb{R}, \text{la configuration } (R_t \circ A \circ k^p, A' \circ k'^{p'}) \text{ est une configuration d'intersection } \tilde{d}\text{-stable}\}$ est ouverte et dense dans $\mathcal{J} = \{t \in \mathbb{R}, (R_t \circ A \circ k^p, A' \circ k'^{p'}) \text{ est une configuration d'intersection}\}$, et la différence $\mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_s(\tilde{d})$ est de mesure de Lebesgue nulle (et même de dimension de Hausdorff plus petite que 1).

Pour terminer la démonstration du théorème A*, on observe que dans le théorème I.2 de [5] on peut changer dans l'hypothèse (et dans les conclusions) « intersection stable » par « intersection \tilde{d} -stable ». En fait tout ce qu'on utilise sur les configurations d'intersection stable est le fait qu'elles forment un ouvert dans $\Omega_\Sigma^{1+} \times \Omega_{\Sigma'}^{1+} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P}'$. \square

Pour démontrer le théorème B*, il faut modifier un peu la démonstration du théorème B. On indiquera ces modifications au cours de la preuve du théorème B.

3. Plan de la preuve du théorème B

On explique ici les grandes lignes de la preuve qui sera détaillée dans les prochains chapitres.

3.1. Réductions préliminaires

On commencera par l'observation suivante.

PROPOSITION. – *Supposons qu'il existe des sous-fers à cheval $\Lambda_1 \subset \Lambda, \Lambda'_1 \subset \Lambda'$ tels que l'ensemble \mathcal{C}_1 associé à Λ_1, Λ'_1 possède une partie récurrente \mathcal{L}_1 . Alors \mathcal{C} contient une partie récurrente \mathcal{L} (qui contient l'image de \mathcal{L}_1 par l'application canonique de \mathcal{C}_1 dans \mathcal{C}).*

Ceci va permettre, après une petite perturbation initiale et par des choix appropriés de Λ_1, Λ'_1 , de se ramener, dans la démonstration du théorème B, aux cas particuliers suivants :

- a) les fers à cheval Λ, Λ' sont *disjoints* ;
- b) dans le cadre conservatif, l'*invariant de Birkhoff* de F_0 a un signe constant (non nul) sur Λ et un signe constant (non nul) sur Λ' .

L'*invariant de Birkhoff* est discuté dans l'annexe A.

- c) dans le cadre dissipatif, la fonction $\log |\det DF_0|$ a un signe constant (non nul) sur Λ (si ce signe est positif (resp. négatif), on dit que F_0 est *dilatant* (resp. *contractant*) sur Λ) et un signe constant (non nul) sur Λ' .

Ceci permet de distinguer deux cas :

- c1) F_0 est contractant au voisinage de Λ et F_0^{-1} est contractant au voisinage de Λ' .
- c2) F_0 est dilatant au voisinage de Λ ou F_0^{-1} est dilatant au voisinage de Λ' .

Dans le premier cas, les feuilletages $W^s(\Lambda)$ et $W^u(\Lambda')$ sont en effet transversalement de classe $C^{2+\beta}$, pour un certain $\beta > 0$. Cela permet de fournir une démonstration du théorème B très proche du cas unidimensionnel [6].

Dans le deuxième cas, la régularité des feuilletages n'est *a priori* plus si bonne et il faudra modifier plus en profondeur la démonstration de [6].

Les justifications de ces différentes réductions sont données dans la section 4.

3.2. La propriété de récurrence d'échelles

3.2.1. – Posons $\mathcal{C} = \Sigma^- \times \Sigma'^- \times \mathbb{R}^*$; cet espace est considéré comme un quotient de \mathcal{C} de la façon suivante : pour $(\underline{\theta}, A) \in \mathcal{C}, (\underline{\theta}', A') \in \mathcal{C}'$, on pose $s = \frac{DA'}{DA}$; l'application

$$((\underline{\theta}, A), (\underline{\theta}', A')) \mapsto (\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$$

définit par passage au quotient une projection de \mathcal{C} sur \mathcal{C} .

Pour $R > 1$, on a posé $J_R = [-R, -R^{-1}] \cup [R^{-1}, R]$ et on définit $\mathcal{C}_R = \Sigma^- \times \Sigma'^- \times J_R$.

Le théorème B affirme l'existence d'une partie compacte récurrente dans \mathcal{C} . Une première étape est d'obtenir une propriété de récurrence au niveau de \mathcal{C} , formulée de façon à pouvoir dans une étape ultérieure remonter à \mathcal{C} .

3.2.2. – La formulation de la propriété de récurrence d'échelles fait intervenir, outre diverses constantes, un paramètre $\alpha \in (0, 1]$ qui jouera un rôle important dans la suite. Dans le cas unidimensionnel de [6], on avait $\alpha = 1$. Dans le cas présent, on choisit α de la façon suivante.

Dans le cas dissipatif c1) de 3.1, on prend $\alpha = 1$.

Dans le cas conservatif b) de 3.1, on choisit arbitrairement $\alpha \in (0, 1)$.

Dans le cas dissipatif c2) de 3.1, on choisit $\alpha \in (0, 1)$ de façon à vérifier la propriété suivante : pour une métrique riemannienne appropriée sur M , on a

$$\begin{aligned} \|T_z F_0 / E^s\| &< \|T_z F_0 / E^u\|^{-\alpha}, \\ \|T_{z'} F_0^{-1} / E^u\| &< \|T_{z'} F_0^{-1} / E^s\|^{-\alpha}, \end{aligned}$$

pour tous $z \in \Lambda$, $z' \in \Lambda'$.

Dans tous les cas, ceci garantit qu'il existe $\alpha' > \alpha$ tel que les feuilletages $W^s(\Lambda)$ et $W^u(\Lambda')$ soient transversalement de classe $C^{1+\alpha'}$. Les applications linéarisantes $k^{\underline{a}}, k'^{\underline{a}'}$ seront également de classe $C^{1+\alpha'}$.

3.2.3. – On choisit une fois pour toutes une constante $c_0 > 1$. Pour tout $0 < \rho < 1$, on note alors $\Sigma(\rho)$ l'ensemble des mots \underline{a} de Σ tels que $c_0^{-1}\rho \leq |I(\underline{a})| \leq c_0\rho$. On définit de même $\Sigma'(\rho)$.

La propriété de récurrence d'échelles s'énonce alors comme suit :

Les constantes c_0, R ayant été choisies assez grandes, il existe $c_1, c_2, c_3 > 0, \rho_0 \in (0, 1)$ tels que, pour tout $0 < \rho < \rho_0$, et pour toute collection d'ensembles $(E(\underline{a}, \underline{a}'))_{(\underline{a}, \underline{a}') \in \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho)}$ vérifiant

$$\begin{aligned} E(\underline{a}, \underline{a}') &\subset J_R, \\ \text{Leb}(J_R - E(\underline{a}, \underline{a}')) &< c_1, \end{aligned}$$

on puisse trouver une collection d'ensembles compacts $(E^*(\underline{a}, \underline{a}'))_{\underline{a}, \underline{a}' \in \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho)}$ vérifiant

- (i) $E^*(\underline{a}, \underline{a}')$ est contenu dans un $c_2\rho^\alpha$ -voisinage de $E(\underline{a}, \underline{a}')$ dans J_R ;
- (ii) pour plus de la moitié des paires $(\underline{a}, \underline{a}')$, la mesure de Lebesgue de $E^*(\underline{a}, \underline{a}')$ est plus de la moitié de celle de J_R ;
- (iii) pour chaque $(\underline{a}, \underline{a}') \in \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho)$, et chaque $s \in E^*(\underline{a}, \underline{a}')$, il existe au moins $c_3\rho^{-(d+d')}$ paires $(\underline{b}, \underline{b}') \in \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho)$ telles qu'on ait, pour chaque $\underline{\theta} \in \Sigma^-, \underline{\theta}' \in \Sigma'^-$ se terminant respectivement par $\underline{a}, \underline{a}'$,

$$T_{\underline{b}} T'_{\underline{b}'}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) = (\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{\underline{\theta}'}, \tilde{s})$$

avec $[\tilde{s} - \rho^\alpha, \tilde{s} + \rho^\alpha] \subset E^*(\underline{b}, \underline{b}')$.

REMARQUE 1. – Il est clair que l'action des opérateurs de renormalisation sur \mathcal{C} passe au quotient sur \mathcal{J} . Par ailleurs les paires $(\underline{b}, \underline{b}')$ intervenant dans (iii) doivent bien sûr avoir pour premières lettres les dernières lettres de $(\underline{a}, \underline{a}')$.

REMARQUE 2. – Les constantes sont choisies dans l'ordre suivant : d'abord c_0, R assez grands, puis un entier $m > \max(2, \alpha^{-1})$ donnant la topologie dans laquelle on perturbera F_0 . Finalement, ρ , qui est de l'ordre de la taille de la perturbation en topologie C^0 .

3.2.4. – On verra dans la section 8 que la propriété de récurrence d'échelles est conséquence de la propriété $(H\alpha)$ suivante. Cette propriété ne porte que sur le premier ensemble de Cantor K .

PROPRIÉTÉ $(H\alpha)$. – Il existe $\eta > 0$, $\rho_1 \in (0, 1)$ tels que, pour tous $0 < \rho < \rho_1$, $1 \leq \xi \leq \rho^{-\alpha}$ et toute partie X de $\Sigma(\rho)$ vérifiant

$$\#(\Sigma(\rho) - X) < \eta\rho^{-d},$$

on puisse trouver $\underline{a}^0, \underline{a}^1 \in X$ tels qu'on ait, pour tout $\Phi \in \mathbb{R}$ et tous $\underline{\theta}^0 \in \Sigma^-$, $\underline{\theta}^1 \in \Sigma'^-$ se terminant par $\underline{a}^0, \underline{a}^1$

$$\#\left\{ \underline{b} \in \Sigma(\rho), \left| \sin \left[\frac{1}{2} \xi \log \frac{|I^{\underline{\theta}^0}(\underline{b})|}{|I^{\underline{\theta}^1}(\underline{b})|} + \Phi \right] \right| \geq \eta \right\} \geq \eta\rho^{-d}.$$

Lorsque $\alpha = 1$, et donc les k^θ sont de classe C^2 , il est facile de voir (cf. section 10.7.2) que $(H1)$ résulte de la propriété beaucoup plus simple

$(H'1)$ Il existe $\underline{\theta}^0, \underline{\theta}^1 \in \Sigma^-$, se terminant par la même lettre θ_0 , et $x_0 \in I(\theta_0)$ tels que l'on ait

$$D \log D[k^{\underline{\theta}^1} \circ (k^{\underline{\theta}^0})^{-1}](x_0) \neq 0.$$

Ceci étant, la première étape de la preuve du théorème B (après réductions préliminaires) est d'effectuer si nécessaire une première perturbation du difféomorphisme de façon à vérifier la propriété $(H\alpha)$ (ou $(H'1)$ lorsque $\alpha = 1$). Ceci garantira la propriété de récurrence d'échelles. La section 9 traite le cas conservatif et relie dans ce cas la propriété $(H\alpha)$ à l'invariant de Birkhoff. La section 10 traite de la propriété $(H\alpha)$ dans le cas dissipatif. Dans les deux sections, des formes normales décrites respectivement dans les annexes A et B sont mises en œuvre.

REMARQUE. – Les hypothèses $(H\alpha)$ sont moins restrictives lorsque α est plus petit. Si F_0 est contractant au voisinage de Λ et F_0^{-1} est dilatant au voisinage de Λ' (ou F_0 est dilatant au voisinage de Λ et F_0^{-1} est contractant au voisinage de Λ'), on est dans le cas c2) de 3.1 et on choisit $\alpha < 1$, mais il est suffisant de vérifier la propriété $(H'1)$, ce qui rend la démonstration un peu plus simple dans ce cas que dans le cas général c2).

3.3. Définitions des ensembles $E(\underline{a}, \underline{a}')$

3.3.1. *Le théorème de Marstrand.* – On rappelle que, pour $u = ((\underline{\theta}, A)(\underline{\theta}', A')) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}'$ normalisé, $x \in K(\theta_0)$, $x' \in K'(\theta'_0)$, on aura

$$A(k^\theta(x)) = A'(k'^{\theta'}(x'))$$

si et seulement si

$$t = k^\theta(x) - sk'^{\theta'}(x') = \pi_{\underline{\theta}, \underline{\theta}', s}(x, x').$$

Munissons chaque $K(a)$ (resp. $K'(a')$) de la mesure de Hausdorff d -dimensionnelle (resp. d' -dimensionnelle) et notons $\mu_{\underline{\theta}, \underline{\theta}', s}$ (pour $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) \in \mathcal{U}$) l'image par $\pi_{\underline{\theta}, \underline{\theta}', s}$ de la mesure produit sur $K(\theta_0) \times K'(\theta'_0)$. C'est une mesure finie sur l'image de $K(\theta_0) \times K'(\theta'_0)$. D'après le théorème de Marstrand [4], la mesure $\mu_{\underline{\theta}, \underline{\theta}', s}$ est, pour chaque $\underline{\theta} \in \Sigma^-$, $\underline{\theta}' \in \Sigma'^-$, absolument

continue par rapport à la mesure de Lebesgue pour presque tout s . On notera $\chi_{\underline{\theta}, \underline{\theta}', s}$ la densité (définie pour presque tout s). D'après la preuve de Kaufman ([3], [9]), on a même

$$\int_{J_R} \|\chi_{\underline{\theta}, \underline{\theta}', s}\|_{L^2}^2 ds \leq c_4(R),$$

avec une constante $c_4(R)$ indépendante de $\underline{\theta}, \underline{\theta}'$.

Soient $\underline{a}, \underline{a}'$ deux mots tels que les longueurs $|I(\underline{a})|, |I(\underline{a}')|$ soient comparables; on a $T_{\underline{a}} T_{\underline{a}'}'(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) = (\underline{\theta}_1, \underline{\theta}'_1, s_1)$ avec

$$|\log |s_1| - \log |s|| = |\omega(\underline{a}, \underline{a}', \underline{\theta}, \underline{\theta}')| \leq c^*$$

d'où

$$\int_{J_R} \|\chi_{T_{\underline{a}} T_{\underline{a}'}'}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)\|_{L^2}^2 ds \leq c'_4(R) := c_4(e^{c^*} R).$$

3.3.2. *Les ensembles $E(\underline{a}, \underline{a}')$.* – Fixons $0 < \rho \ll 1$. On se donne aussi un entier $m > \alpha^{-1}$ assez grand (la perturbation de F_0 qu'on effectue dans la suite étant petite dans la $C^{m/2}$ -topologie).

On va appliquer la propriété de récurrence d'échelles, qu'on peut supposer satisfaite d'après 3.2.4.

Pour $\underline{\theta} \in \Sigma^-, \underline{\theta}' \in \Sigma'^-$, on définit d'abord un ensemble $E(\underline{\theta}, \underline{\theta}')$ formé des $s \in J_R$ vérifiant (pour c_5 assez grand; voir ci-dessous)

$$\begin{aligned} \|\chi_{\underline{\theta}, \underline{\theta}', s}\|_{L^2}^2 &\leq c_5, \\ \sum_{\underline{b}, \underline{b}'} \|\chi_{T_{\underline{b}} T_{\underline{b}'}'}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)\|_{L^2}^2 &\leq c_5 \hat{\rho}^{-(d+d')}, \end{aligned}$$

où, dans la deuxième inégalité, $\hat{\rho}$ prend les valeurs $\hat{\rho} = \rho^{1/m}, \rho^{2/m}, \dots, \rho^{(m-1)/m}$ et la somme s'effectue sur les $\underline{b} \in \Sigma(\hat{\rho}), \underline{b}' \in \Sigma'(\hat{\rho})$, commençant respectivement par θ_0, θ'_0 .

Compte tenu des inégalités de 3.3.1 ci-dessus, on peut choisir c_5 assez grand pour qu'on ait, pour tous $\underline{\theta} \in \Sigma^-, \underline{\theta}' \in \Sigma'^-$

$$\text{Leb}(J_R - E(\underline{\theta}, \underline{\theta}')) \leq c_1,$$

où c_1 est la constante intervenant dans la propriété de récurrence d'échelles.

On posera ensuite, pour $\underline{a} \in \Sigma(\rho), \underline{a}' \in \Sigma'(\rho)$,

$$E(\underline{a}, \underline{a}') = \cup E(\underline{\theta}, \underline{\theta}'),$$

l'union étant prise sur les $\underline{\theta}, \underline{\theta}'$ se terminant respectivement par $\underline{a}, \underline{a}'$.

3.3.3. *Une partie de \mathcal{J} avec de bonnes propriétés de récurrence.* – La propriété de récurrence d'échelles, appliquée aux ensembles $E(\underline{a}, \underline{a}') \subset J_R$, fournit des ensembles compacts $E^*(\underline{a}, \underline{a}') \subset J_R$, pour $\underline{a} \in \Sigma(\rho), \underline{a}' \in \Sigma'(\rho)$, qui vérifient les conclusions (i), (ii) de 3.2.3.

Il est alors naturel de définir une partie $\tilde{\mathcal{L}} \subset \mathcal{J}_R$ de la façon suivante : $\tilde{\mathcal{L}}$ est constitué des triplets $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$ tels qu'il existe $\underline{a} \in \Sigma(\rho), \underline{a}' \in \Sigma'(\rho)$ terminant respectivement $\underline{\theta}, \underline{\theta}'$ et vérifiant $s \in E^*(\underline{a}, \underline{a}')$. Pour des raisons techniques (voir sections 5.1, 6.4.3 et 6.4.4), nous imposons à $\underline{\theta}$ une condition supplémentaire de non-récurrence dans sa partie terminale : on demande qu'il existe un mot $\underline{b} \in \Sigma(\rho^{D+1/2})$ terminant $\underline{\theta}$ (où $D > 2\alpha^{-1}$ est fixé) et vérifiant

- (i) aucun mot de $\Sigma(\rho^{\frac{1}{2m}})$ n'apparaît plus d'une fois dans \underline{b} ;

(ii) un mot de $\Sigma(\rho^{\frac{1}{4m}})$ qui termine \underline{b} n'apparaît nulle part ailleurs dans \underline{b} .

On notera Σ_{nr}^- l'ensemble des mots $\underline{\theta}$ qui vérifient ces conditions.

Il est clair que $\tilde{\mathcal{L}}$ est une partie compacte de ϕ_R .

3.4. Construction de la partie récurrente \mathcal{L} de \mathcal{C}

Ce qui suit est une version simplifiée, dépouillée de certaines complications techniques, de la construction de \mathcal{L} .

3.4.1. *Les ensembles $L(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$.* – L'ensemble $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}$ a pour projection dans ϕ l'ensemble $\tilde{\mathcal{L}}$ défini en 3.3.3. Les ensembles $L(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$ seront les fibres de \mathcal{L} au-dessus de $\tilde{\mathcal{L}}$.

On choisit une constante $0 < c_6 \ll 1$ et on pose

$$N = \lfloor c_6 \rho^{-\frac{1}{m}(d+d'-1)} \rfloor.$$

L'ensemble $L(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$ (pour $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) \in \tilde{\mathcal{L}}$) est alors constitué des $t \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe N paires $(\underline{b}^i, \underline{b}'^i)_{1 \leq i \leq N}$ dans $\Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho)$, commençant par (θ_0, θ'_0) , et vérifiant les propriétés suivantes (en posant $T_{\underline{b}^i} T'_{\underline{b}'^i}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t) = (\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i, t_i)$) :

- (i) pour $i \neq j$, \underline{b}^i et \underline{b}^j n'ont pas de mot initial commun dans $\Sigma(\rho^{1/m})$;
- (ii) pour $1 \leq i \leq N$, $|\tilde{s}_i - s_i| \leq \frac{3}{4}\rho^\alpha$, on a $(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, \tilde{s}_i) \in \tilde{\mathcal{L}}$ (et donc $\underline{\theta}^i \in \Sigma_{nr}^-$);
- (iii) pour $1 \leq i \leq N$, on a $|t_i| \leq 1 + R$.

La propriété (i) exprime une « indépendance » des divers opérateurs $T_{\underline{b}^i}$ employés qui sera mise à profit dans la suite ; la propriété (ii) exprime une récurrence au niveau de ϕ qui est permise par la conclusion (ii) de la propriété de récurrence d'échelles. La propriété (iii), qui est la plus significative et la plus délicate à obtenir, exprime qu'à défaut d'un retour dans $L(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i)$, la coordonnée t_i ne s'en trouve pas trop loin.

Grâce à la définition des $E(\underline{a}, \underline{a}')$, et à la conclusion (i) de la propriété de récurrence d'échelles, nous serons en mesure de démontrer le résultat suivant dans la section 5 :

PROPOSITION. – *Si c_6 a été choisi assez petit, il existe $c_7 > 0$ tel qu'on ait $\text{Leb}(L(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)) \geq c_7$ pour tout $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) \in \tilde{\mathcal{L}}$.*

3.4.2. *Un argument heuristique.* – La fin de la démonstration consiste à rendre correct l'argument heuristique incomplet qui suit. On a construit \mathcal{L} et on dispose d'opérateurs de renormalisation $T_{\underline{b}^i} T'_{\underline{b}'^i}$, $1 \leq i \leq N$ qui vérifient les conclusions (i), (ii), (iii) du numéro précédent (dont on conserve les notations).

Comme on a $|t_i| \leq 1 + R$ d'après (iii) et $\text{Leb}(L(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i)) \geq c_7$ d'après la proposition et (ii), il y a une « probabilité » au moins égale à $c_7(1 + R)^{-1}$ que t_i appartienne à $L(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i)$, c'est-à-dire que $T_{\underline{b}^i} T'_{\underline{b}'^i}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t)$ appartienne à \mathcal{L} (à ce niveau de discussion, il est inutile de distinguer \mathcal{L} de son intérieur !). Si ces événements, lorsque $1 \leq i \leq N$, étaient « indépendants » (cf. la conclusion (i) de 3.4.1), la « probabilité » pour qu'aucun indice i n'ait la propriété de récurrence dans \mathcal{L} serait :

$$(1 - c_7(1 + R)^{-1})^N \leq \exp[-c_8 \rho^{-\frac{1}{m}(d+d'-1)}].$$

Ceci représente la « probabilité d'échec » pour un élément fixé $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t) \in \mathcal{L}$. On choisit ensuite une partie finie Δ de \mathcal{L} , qui est ρ^D -dense et de cardinal de l'ordre $\rho^{-D'}$,

$D' = D(d + d' + 2)$; la « probabilité » qu'au moins un point de Δ ne puisse être ramené dans \mathcal{L} par renormalisation est alors inférieure à

$$\bar{c}\rho^{-D'} \exp[-c_8\rho^{-\frac{1}{m}(d+d'-1)}].$$

Si ρ est assez petit, cette « probabilité » est extrêmement faible; on est donc essentiellement sûr que tous les points de Δ peuvent être ramenés dans \mathcal{L} par des opérateurs de renormalisation appropriés. Comme Δ a été choisi ρ^D -dense dans \mathcal{L} , on vérifie par continuité des opérateurs qu'en fait tout point de \mathcal{L} peut être ramené dans \mathcal{L} .

3.4.3. – Pour la preuve du théorème B*, nous allons modifier la définition des ensembles $L(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$. Soit $\tilde{d} < d + d' - 1$. On prend $\tilde{d} < d^* < d + d' - 1$ et m assez grand de façon que $(1 - \frac{1}{m})(d + d' - 1) > d^*$. Soit $M = \lfloor \rho^{-d^*} \rfloor$. L'ensemble $\bar{L}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$ (pour $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) \in \tilde{\mathcal{L}}$) est constitué des $t \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe des paires $(\underline{b}_k^\ell, \underline{b}_k^{\ell'})$, $1 \leq \ell \leq N$, $1 \leq k \leq M$ dans $\Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho)$ telles que les conditions (ii), (iii) de 3.4.1 soient satisfaites pour tous ℓ, k . La condition (i) est remplacée par

(i') pour tout $1 \leq k \leq M$ et pour $i \neq j$, \underline{b}_k^i et \underline{b}_k^j n'ont pas de mot initial commun dans $\Sigma(\rho^{1/m})$

(ii') pour $(\ell, k) \neq (\ell', k')$, $I(\underline{b}_k^\ell) \cap I(\underline{b}_{k'}^{\ell'}) = \emptyset$.

On aura encore une estimation du type $\text{Leb}(\bar{L}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)) \geq \bar{c}_7$ pour tout $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) \in \tilde{\mathcal{L}}$. On note $\bar{\mathcal{L}}$ l'ensemble dont la fibre au-dessus de $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) \in \tilde{\mathcal{L}}$ est $\bar{L}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$.

On modifie l'argument heuristique de 3.4.2 comme suit : pour chaque point d'une partie finie ρ^D -dense $\bar{\Delta}$ de $\bar{\mathcal{L}}$, et pour chaque $k \leq M$, on veut qu'il existe $\ell \leq N$ tel que $T_{\underline{b}_k^\ell} T_{\underline{b}_k^{\ell'}}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t)$ appartienne à $\tilde{\mathcal{L}}$. Par rapport à 3.4.2, la « probabilité d'échec » est multipliée par $M \leq \rho^{-d^*}$, mais reste très petite. On peut alors conclure que $\bar{\mathcal{L}}$ est une partie compacte \tilde{d} -récurrente de \mathcal{C} .

3.5. La famille de perturbations

Il s'agit de rendre correct l'argument heuristique ci-dessus en construisant une famille de perturbations aléatoires dont on montrera qu'avec grande probabilité le compact \mathcal{L} construit ci-dessus est récurrent.

On considère une partition $\tilde{\Sigma}_1$ de Λ en rectangles dont les deux côtés sont approximativement de taille $\rho^{2/m}$. Un rectangle désigne ici une partie de Λ formée des points ayant un itinéraire prescrit durant un certain intervalle de temps; le mot de Σ prescrivant l'itinéraire est dit associé au rectangle. Parmi les rectangles de $\tilde{\Sigma}_1$, on ne conserve que ceux pour lesquels aucun mot $\in \Sigma(\rho^{\frac{1}{2m}})$ n'apparaît plus d'une fois dans le mot associé. On appelle Σ_1 l'ensemble des mots associés.

Pour chaque $\underline{a} \in \Sigma_1$, on désigne par $R(\underline{a})$ le rectangle associé; on construit un champ de vecteurs $X_{\underline{a}}$ qui a les propriétés suivantes :

– sur $R(\underline{a})$, $X_{\underline{a}}$ est constant, de taille de l'ordre de $\rho^{1+1/m}$ approximativement dirigé dans la direction instable;

– $X_{\underline{a}}$ est de taille $\rho^{1/m}$ dans la $C^{m/2}$ -topologie.

Bien sûr la dernière condition nous garantit que le temps un du flot de $X_{\underline{a}}$ sera, si m est assez grand et ρ assez petit, dans un voisinage prescrit à l'avance de id_M dans la C^∞ -topologie.

On munit $\Omega = [-1, +1]^{\Sigma_1}$ de la mesure de Lebesgue normalisée ; pour $\underline{\omega} \in \Omega$, on pose

$$X_{\underline{\omega}} = -c_X \sum_{\underline{a}} \omega(\underline{a}) X_{\underline{a}},$$

$$F^{\underline{\omega}} = F \circ \Phi^{\underline{\omega}},$$

où c_X est une grande constante qui sera choisie ultérieurement (avant ρ mais après α et m) et $\Phi^{\underline{\omega}}$ désigne le temps un du flot de $X_{\underline{\omega}}$. On notera que la « somme » définissant $X_{\underline{\omega}}$ ne comporte en chaque point de $\bigcup R(\underline{a})$ qu'au plus un terme non nul.

Il s'agit maintenant d'examiner soigneusement comment le fer à cheval Λ , l'ensemble de Cantor régulier K et ses géométries infinitésimales dépendent des paramètres de perturbation $\underline{\omega}$.

L'argument probabiliste suit de très près l'argument heuristique de 3.4.2 ; la variante la plus importante est la suivante. Il s'avère que prendre une partie \mathcal{L} indépendante des paramètres de perturbation $\underline{\omega}$ ne fonctionne pas tout à fait. Il est nécessaire, dans la définition de $L(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$ de 3.4.1, de faire dépendre $L(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$ de *certaines* (pas toutes !) des coordonnées de $\underline{\omega}$ (le choix de ces coordonnées dépendant lui-même de $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$) ; par contre, la base $\tilde{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{L}(\underline{\omega})$ est indépendante de $\underline{\omega}$. L'argument probabiliste est détaillé dans la section 6. La dépendance par rapport au paramètre $\underline{\omega}$ est examinée dans la section 7.

4. Réductions préliminaires

4.1. Passage à un sous-fer à cheval

Considérons un fer à cheval Λ muni d'une partition de Markov permettant d'identifier Λ à un sous-décalage de type fini Σ . Considérons un sous-fer à cheval $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$. Comme $\tilde{\Lambda}$ est localement maximal, il existe un entier M et une partie $\tilde{\mathbf{A}}$ de l'ensemble $\Sigma^{(M)}$ des mots de Σ de longueur M tels que l'ensemble $\tilde{\Sigma}$ des éléments de Σ associés aux points de $\tilde{\Lambda}$ soit exactement constitué des suites dont tous les sous-mots de longueur M appartiennent à $\tilde{\mathbf{A}}$. L'ensemble $\tilde{\mathbf{A}}$ constitue l'alphabet permettant de voir $\tilde{\Sigma}$ comme un sous-décalage de type fini.

On a alors une application canonique $j : \tilde{\Sigma}^- \rightarrow \Sigma^-$ qui associe à une géométrie infinitésimale de \tilde{K} (ensemble de Cantor régulier associé à la géométrie transverse de $W^s(\tilde{\Lambda})$) une géométrie infinitésimale de K ; on notera aussi $j : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ l'application naturelle déduite de la précédente.

Considérons d'autre part un autre fer à cheval Λ' ; notons \mathcal{C} (resp. $\tilde{\mathcal{C}}$) l'espace des configurations affines relatives de K, K' (resp. de \tilde{K}, K').

PROPOSITION. – *Soit $\tilde{\mathcal{L}}$ une partie compacte récurrente de $\tilde{\mathcal{C}}$; il existe une partie compacte récurrente de \mathcal{C} qui contient $j(\tilde{\mathcal{L}})$.*

Démonstration. – Pour $0 < \varepsilon \ll 1$, on définit \mathcal{L} comme l'ensemble des paires $((\underline{\theta}, A), (\underline{\theta}', A'))$ telles qu'il existe $\tilde{\underline{\theta}} \in \tilde{\Sigma}^-$ vérifiant $d(\underline{\theta}, j\tilde{\underline{\theta}}) \leq \varepsilon$ et $((\tilde{\underline{\theta}}, A), (\underline{\theta}', A')) \in \tilde{\mathcal{L}}$. C'est une partie compacte contenant $j(\tilde{\mathcal{L}})$ (on a fait l'abus de langage sans danger d'identifier \mathcal{C} et $\tilde{\mathcal{C}}$ à $\mathcal{A} \times \mathcal{A}'$ et $\tilde{\mathcal{A}} \times \mathcal{A}'$).

Il existe $N \geq 1$, des compacts $\tilde{\mathcal{L}}_i \subset \tilde{\mathcal{L}}, 1 \leq i \leq N$, vérifiant $\bigcup \tilde{\mathcal{L}}_i = \tilde{\mathcal{L}}$ et des opérateurs de renormalisation $\tilde{T}_{\underline{a}^i} T'_{\underline{a}'^i}, 1 \leq i \leq N$ qui envoient $\tilde{\mathcal{L}}_i$ dans $\text{int } \mathcal{L}$.

Soient $((\underline{\theta}, A), (\underline{\theta}', A')) \in \mathcal{L}, \tilde{\theta}$ comme ci-dessus, et $i \in [1, N]$ tel que $((\tilde{\theta}, A), (\theta', A')) \in \tilde{\mathcal{L}}_i$; notons \underline{a}^i le mot de Σ associé au mot \tilde{a}^i de $\tilde{\Sigma}$. Il est clair que l'image dans \mathcal{C} de $\tilde{T}_{\underline{a}^i} T'_{\underline{a}^i}((\tilde{\theta}, A), (\theta', A'))$ est égale à l'image $T_{\underline{a}^i} T'_{\underline{a}^i}((j\tilde{\theta}, A), (\theta', A'))$. Comme $d(\underline{\theta} \underline{a}^i, j\tilde{\theta} \underline{a}^i) < d(\underline{\theta}, j\tilde{\theta}) \leq \varepsilon$, il est alors immédiat, par compacité, qu'on aura $T_{\underline{a}^i} T'_{\underline{a}^i}((\underline{\theta}, A), (\underline{\theta}', A')) \in \text{int} \mathcal{L}$ si ε a été choisi assez petit. \square

REMARQUE. – On peut démontrer de façon analogue que, si $\tilde{\mathcal{L}}$ est une partie compacte \tilde{d} -récurrente de $\tilde{\mathcal{C}}$, alors il existe une partie compacte \tilde{d} -récurrente de \mathcal{C} qui contient $j(\tilde{\mathcal{L}})$.

4.2. Réduction au cas hétérocline

4.2.1. – Rappelons une estimation très utile pour évaluer la dimension de Hausdorff d d'un ensemble de Cantor régulier K , défini par une application dilatante de type Σ .

Soit $a \in \mathbf{A}$. Supposons qu'on ait une partition finie

$$K(a) = \cup K(\underline{a}^i),$$

où les \underline{a}^i sont des mots de Σ commençant par a . On a alors :

$$C^{-1} \leq \sum_i |I(\underline{a}^i)|^d \leq C,$$

où C ne dépend que de K .

4.2.2.

PROPOSITION. – Soit Λ un fer à cheval et soit $L \subset \Lambda$ une partie fermée invariante distincte de Λ . Il existe alors, pour tout $\varepsilon > 0$, un fer à cheval $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$ vérifiant $\tilde{\Lambda} \cap L = \emptyset$ et $HD(\tilde{K}) \geq HD(K) - \varepsilon$.

(On a noté K, \tilde{K} les ensembles de Cantor réguliers qui décrivent la géométrie transverse de $W^s(\Lambda), W^s(\tilde{\Lambda})$.)

Démonstration. – Soient $M > 0$ et $\underline{a}^0 = (a_{-M}, \dots, a_0, \dots, a_M)$ un mot de Σ tel que le rectangle associé ne rencontre pas L . Fixons $\tilde{M} \gg M$ et définissons $\tilde{\Sigma}$ (et donc $\tilde{\Lambda}$) comme l'ensemble des suites de Σ dont tous les sous-mots de longueur \tilde{M} contiennent \underline{a}^0 . Il est clair que $\tilde{\Lambda}$ est transitif et localement maximal, disjoint de L . Notons d (resp. \tilde{d}) la dimension de Hausdorff de K (resp. \tilde{K}). Fixons $\bar{M} \geq \tilde{M}$; étant donné un mot \underline{a} de Σ , de longueur \bar{M} , on lui associe un mot $\tilde{\underline{a}}$ de $\tilde{\Sigma}$ de même longueur qui ne diffère de \underline{a} que sur au plus $\lfloor 2\bar{M}/\tilde{M} \rfloor$ intervalles de longueur $\leq 2(M + C)$, intervalles ne dépendant que de \bar{M} et de la première lettre de \underline{a} .

Chaque mot $\tilde{\underline{a}}$ est alors associé à au plus

$$(\#\mathbf{A})^{4\bar{M}\tilde{M}^{-1}(M+C)}$$

mots distincts \underline{a} , et les longueurs des intervalles correspondants vérifient :

$$|I(\underline{a})| \leq C^{4\bar{M}\tilde{M}^{-1}(M+C)} |I(\tilde{\underline{a}})|.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
C_K^{-1} &\leq \sum |I(\underline{a})|^d \\
&\leq \frac{a}{C^{4d\bar{M}\tilde{M}^{-1}(M+C)}} (\#\mathbf{A})^{4\bar{M}\tilde{M}^{-1}(M+C)} \sum |I(\tilde{a})|^d \\
&\leq (\max_{\tilde{a}} |I(\tilde{a})|)^{d-\bar{d}} (\bar{C}^d \#\mathbf{A})^{4\bar{M}\tilde{M}^{-1}(M+C)} \sum_{\tilde{a}} |I(\tilde{a})|^{\bar{d}} \\
&\leq C_{\tilde{K}} (\max_{\tilde{a}} |I(\tilde{a})|)^{d-\bar{d}} (\bar{C}^d \#\mathbf{A})^{4\bar{M}\tilde{M}^{-1}(M+C)}.
\end{aligned}$$

Dans cette formule, on a $\max_{\tilde{a}} |I(\tilde{a})| \leq 2^{-\beta\bar{M}}$ pour une constante $\beta > 0$. On en déduit, en faisant $\bar{M} \rightarrow +\infty$, qu'on a

$$d - \bar{d} \leq \bar{\beta}^{-1} \bar{M}^{-1} (M + C) < \varepsilon$$

si \tilde{M} est assez grand. □

4.2.3. – Soient Λ, Λ' les fers à cheval de l'énoncé du théorème B, et soient K, K' les ensembles de Cantor réguliers décrivant respectivement les géométries transverses de $W^s(K), W^u(K')$. On veut se ramener au cas où Λ, Λ' sont *disjoints*.

Si $\Lambda \cap \Lambda' = \emptyset$, il n'y a rien à faire. Si $\emptyset \neq \Lambda \cap \Lambda' \neq \Lambda$, on applique la proposition précédente avec $L = \Lambda \cap \Lambda'$ et ε suffisamment petit; on aura alors $\tilde{\Lambda} \cap \Lambda' = \emptyset$ et $HD(\tilde{K}) + HD(K') > 1$. S'il existe une partie compacte récurrente pour $(\tilde{\Lambda}, \Lambda')$, il en existe aussi, d'après la proposition 4.1, pour (Λ, Λ') .

Si $\emptyset \neq \Lambda \cap \Lambda' \neq \Lambda'$, on procède de même. Si enfin $\Lambda = \Lambda'$, on choisit une partie fermée invariante non vide $L \subset \Lambda$ distincte de Λ (par exemple une orbite périodique); on applique une première fois la proposition précédente pour trouver $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda - L$ avec $HD(\tilde{K}) \geq HD(K) - \varepsilon$, puis une seconde (avec $\tilde{\Lambda}$ comme L) pour trouver $\tilde{\Lambda}' \subset \Lambda' - \tilde{\Lambda}$ avec $HD(\tilde{K}') \geq HD(K') - \varepsilon$. On a alors $\tilde{\Lambda} \cap \tilde{\Lambda}' = \emptyset$ et $HD(\tilde{K}) + HD(\tilde{K}') > 1$ si ε est assez petit, ce qui permet de conclure.

4.3. Réductions dissipative et conservative

4.3.1. Sommes de Birkhoff sur un sous-fer à cheval

PROPOSITION. – Soient Λ un fer à cheval, p un point périodique de Λ , m sa période et φ une fonction continue sur Λ . On suppose qu'on a

$$\sum_{0 \leq i < m} \varphi(F^i(p)) \neq 0.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fer à cheval $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$ et un entier $N > 0$ tels qu'on ait

$$HD(\tilde{K}) \geq HD(K) - \varepsilon$$

et la somme de Birkhoff $\sum_{0 \leq i < N} \varphi \circ F^i$ ait un signe constant sur $\tilde{\Lambda}$.

Démonstration. – Fixons $M \gg 1$ et une partition

$$\Sigma^+ = \bigcup_{1 \leq i \leq s} \Sigma^+(\underline{a}^i)$$

de façon qu'on ait

$$c^{-1}2^{-M} \leq |I(\underline{a}^i)| \leq c2^{-M}$$

pour $1 \leq i \leq s$; notons $\Lambda(\underline{a}^i)$ le cylindre associé à $\Sigma^+(\underline{a}^i)$. Distinguons 3 cas.

a) Supposons que l'ensemble I^+ des indices i tels qu'on ait

$$\sum_{0 \leq j < |\underline{a}^i|} \varphi \circ F^j(x) > M^{1/2}, \forall x \in \Lambda(\underline{a}^i)$$

ait au moins $s/3$ éléments. On dit alors qu'un mot $\underline{\omega}$ de Σ de longueur M^2 est *bon* s'il possède des sous-mots *disjoints* $\underline{\omega}^1, \dots, \underline{\omega}^r$ de la forme $\underline{a}^i, i \in I^+$ et dont la somme des longueurs est $\geq M^2 - M^{4/3}$. Le fer à cheval $\tilde{\Lambda}$ est alors associé au sous-décalage $\tilde{\Sigma} \subset \Sigma$ formé des suites dont tous les sous-mots de longueur M^2 sont bons. Il est immédiat de voir que $\tilde{\Lambda}$ est transitif et localement maximal, et donc un fer à cheval. Il est aussi clair qu'on a, par définition de I^+ et $\tilde{\Lambda}$, pour tout $z \in \tilde{\Lambda}$:

$$\sum_{0 \leq j < M^2} \varphi \circ F^j(z) \geq c^{-1}M^{3/2} - c'M^{4/3} \geq \frac{1}{2}c^{-1}M^{3/2}$$

si M est assez grand. On a

$$|I^+| \geq \frac{s}{3} \geq c^{-1}2^{Md}$$

(avec $d = HD(K)$). Donc, pour $\bar{M} \gg M^2$, il y a au moins

$$(c^{-1}2^{Md})^{\frac{\bar{M}}{M+c'}}$$

mots \underline{a} de Σ , vérifiant $2^{-\bar{M}} \leq |I(\underline{a})|$, et dont tous les sous-mots de longueur M^2 sont bons.

On obtient alors

$$HD(\tilde{K}) \geq \frac{Md - c''}{M + c'} \geq d - \varepsilon$$

si M est assez grand.

b) Si l'ensemble I^- des indices i tels qu'on ait

$$\sum_{0 \leq j < |\underline{a}^i|} \varphi \circ F^j(x) < -M^{1/2}, \forall x \in \Lambda(\underline{a}^i)$$

a au moins $s/3$ éléments, on procède de façon symétrique.

c) Supposons enfin qu'au moins $s/3$ indices i n'appartiennent pas à $I^+ \cup I^-$. Notons I^0 l'ensemble de ces indices. Pour $i \in I^0, z \in \Lambda(\underline{a}^i)$ on aura

$$\sum_{0 \leq j < |\underline{a}^i|} \varphi \circ F^j(z) = o(M)$$

(car l'oscillation de cette somme de Birkhoff sur un $\Lambda(\underline{a}^i)$ est $o(M)$). Cette fois-ci, on dit qu'un mot $\underline{\omega}$ de longueur M^2 est *bon* s'il possède des sous-mots *disjoints* $\underline{\omega}^1, \dots, \underline{\omega}^M, \tilde{\omega}^1, \dots, \tilde{\omega}^r$, dont la somme des longueurs est $\geq M^2 - M^{4/3}$, et vérifiant :

(i) pour $1 \leq \ell \leq r, \tilde{\omega}^\ell$ est de la forme $\underline{a}^i, i \in I^0$;

- (ii) pour $1 \leq k \leq M$, $\underline{\omega}^k$ est le mot $\underline{p}^{\varepsilon^2 M}$, où \underline{p} est le mot de longueur m associé au point périodique p , $\underline{p}^{\varepsilon^2 M}$ est sa répétition $\varepsilon^2 M$ fois. (On peut toujours supposer que ε est l'inverse d'un entier ; on choisit alors M comme un grand multiple du carré de cet entier.)

À nouveau, il est facile de vérifier que le décalage $\tilde{\Sigma}$, constitué des suites de Σ dont tous les sous-mots de longueur M^2 sont bons, définit un sous-fer à cheval $\tilde{\Lambda}$ de Λ .

Supposons par exemple que $\Phi_0 := \sum_{0 \leq i < m} \varphi \circ F^i(p) > 0$. Pour tout $z \in \tilde{\Lambda}$, on aura alors

$$\sum_{0 \leq i < M^2} \varphi \circ F^i(z) \geq \frac{1}{2} \varepsilon^2 M^2 \Phi_0$$

si M est assez grand. Par ailleurs, on a

$$|I^0| \geq s/3 \geq c^{-1} 2^{Md};$$

par conséquent, pour $\overline{M} \gg M^2$, il y a au moins

$$(c^{-1} 2^{Md})^{\frac{\overline{M}(1-\varepsilon^2 m)}{M+c'}}$$

mots \underline{a} de Σ , vérifiant $2^{-\overline{M}} \leq |I(\underline{a})|$, et dont tous les sous-mots de longueur M^2 sont bons. On conclut que l'on a

$$HD(\tilde{K}) \geq \frac{(Md - c')(1 - \varepsilon^2 m)}{M + c'} \geq d - \varepsilon$$

si M est assez grand (et ε assez petit). \square

4.3.2. *Réduction dissipative.* – Soient Λ, Λ' des fers à cheval disjoints vérifiant l'hypothèse $HD(K) + HD(K') > 1$ du théorème B. Choisissons une forme d'aire ω sur M et considérons, par rapport à cette forme, la fonction $\varphi = \log |\det DF|$. Soit p (resp. p') un point périodique de F dans Λ (resp. Λ') ; notons m (resp. m') sa période.

Quitte à effectuer une perturbation arbitrairement petite, nous pouvons supposer que $|\det DF^m(p)|$ et $|\det DF^{m'}(p')|$ sont différents de 1. Les hypothèses de la proposition précédente sont alors vérifiées et on peut trouver des sous-fers à cheval $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda, \tilde{\Lambda}' \subset \Lambda'$ vérifiant encore

$$HD(\tilde{K}) + HD(\tilde{K}') > 1$$

ainsi qu'un entier N tel que $\log |\det DF^N|$ soit de signe constant sur $\tilde{\Lambda}$ et aussi sur $\tilde{\Lambda}'$.

Les fonctions $\log |\det DF|$ et $\frac{1}{N} \log |\det DF^N|$ étant cohomologues, et l'addition d'un cobord à $\log |\det DF|$ étant équivalente à un changement de forme d'aire, on peut donc choisir la forme d'aire de façon que les signes de $\log |\det DF|$ sur $\tilde{\Lambda}$ et $\tilde{\Lambda}'$ soient constants (non nuls).

4.3.3. *Réduction conservative.* – Soient à nouveau Λ, Λ' des fers à cheval disjoints vérifiant l'hypothèse $HD(K) + HD(K') > 1$ du théorème B. On suppose maintenant que F et ses perturbations préservent une forme d'aire ω .

Comme rappelé dans l'annexe A, on peut alors trouver une famille *continue* de cartes $C^\infty(\Psi_z)_{z \in \Lambda}$ de $(\mathbb{R}^2, 0)$ dans (M, z) telle que

- (i) $\Psi_z^* \omega = dx \wedge dy, \forall z \in \Lambda$;
- (ii) $T_0 \Psi_z(\frac{\partial}{\partial x}) \in E_z^u, T_0 \Psi_z(\frac{\partial}{\partial y}) \in E_z^s$;

(iii) pour tout $z \in \Lambda$, on a

$$\Psi_{F(z)}^{-1} \circ F \circ \Psi_z(x, y) = (\lambda(z)x(1 + a(z)xy), \lambda(z)^{-1}y(1 - a(z)xy)) + O(x^4 + y^4).$$

De plus, si $(\tilde{\Psi}_z)_{z \in \Lambda}$ est une autre famille vérifiant les mêmes propriétés, le changement de coordonnée est de la forme

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\mu(z)x(1 + b(z)xy), (\mu(z))^{-1}y(1 - b(z)xy)) + O(x^4 + y^4)$$

de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(z) &= \mu(F(z))\lambda(z)\mu(z)^{-1}, \\ \tilde{a}(z) &= a(z) + b(F(z)) - b(z). \end{aligned}$$

L'invariant de Birkhoff $a(z) \in C(\Lambda)$ joue maintenant dans le cas conservatif le rôle de la fonction $\log |\det DF|$ dans le cas dissipatif. Après une première perturbation arbitrairement petite qui garantit, pour un point périodique donné à l'avance, qu'on a

$$\sum_{i=0}^{m-1} a(F^i(p)) \neq 0,$$

on applique la proposition de 4.3.1. Celle-ci fournit un fer à cheval $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$ et un nombre entier N tels que la somme de Birkhoff $\sum_{i=0}^{N-1} a \circ F^i$ est de signe constant sur $\tilde{\Lambda}$ et on a encore $HD(\tilde{K}) + HD(K') > 1$. On procède de même pour Λ' . Comme à nouveau la somme de Birkhoff $\sum_{i=0}^{N-1} a \circ F^i$ est cohomologue à a , on peut choisir la famille continue de cartes $(\tilde{\Psi}_z)_{z \in \tilde{\Lambda}}$ de façon que \tilde{a} ait un signe constant sur $\tilde{\Lambda}$.

5. Mesure des fibres $L_\omega(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$

5.1. – Nous rappelons la construction de la partie $\tilde{\mathcal{L}}$ de \mathcal{L} introduite en 3.3.2, 3.3.3.

Pour $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) \in \mathcal{L}$, $\chi_{\underline{\theta}, \underline{\theta}', s}$ est la densité de la mesure image par

$$\pi_{\underline{\theta}, \underline{\theta}', s}(x, x') = k^{\underline{\theta}}(x) - sk^{\underline{\theta}'}(x')$$

de la mesure de Hausdorff produit sur $K(\theta_0) \times K'(\theta'_0)$. On définit $E(\underline{\theta}, \underline{\theta}')$ comme l'ensemble des $s \in J_R$ vérifiant :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \|\chi_{\underline{\theta}, \underline{\theta}', s}\|_{L^2}^2 \leq c_5, \\ (2) \quad & \sum_{(\underline{b}, \underline{b}')} \|\chi_{T_{\underline{b}} T_{\underline{b}'}}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)\|_{L^2}^2 \leq c_5 \hat{\rho}^{-(d+d')} \end{aligned}$$

où dans (2), $\hat{\rho}$ prend les valeurs $\rho^{1/m}, \rho^{2/m}, \dots, \rho^{(m-1)/m}$ et $(\underline{b}, \underline{b}')$ décrit les paires de $\Sigma(\hat{\rho}) \times \Sigma'(\hat{\rho})$ commençant par (θ_0, θ'_0) . On pose ensuite

$$(3) \quad E(\underline{a}, \underline{a}') = \bigcup_{(\underline{\theta}, \underline{\theta}')} E(\underline{\theta}, \underline{\theta}'),$$

où $\underline{a} \in \Sigma(\rho)$, $\underline{a}' \in \Sigma'(\rho)$ et $(\underline{\theta}, \underline{\theta}')$ décrit les paires de $\Sigma^- \times \Sigma'^-$ se terminant par $(\underline{a}, \underline{a}')$. L'entier m est fixé une fois pour toutes, et doit vérifier $m \geq 3, m > \alpha^{-1}$. Le réel $\alpha \in (0, 1]$ désigne ici le paramètre intervenant dans la propriété de récurrence d'échelles.

On observera que les hypothèses 3.2.2, 3.2.4 qui permettent de démontrer la propriété de récurrence d'échelles sont moins restrictives lorsque le paramètre α est plus petit. Cela veut

dire qu'on peut toujours choisir le paramètre α au plus égal à $1/2$, ce que nous faisons dans la suite.

On suppose satisfaite (après si nécessaire une perturbation initiale) la propriété de récurrence d'échelles.

Ceci étant, en choisissant c_5 assez grand, on garantit que la condition

$$(4) \quad \text{Leb}(J_R - E(\underline{a}, \underline{a}')) \leq c_1$$

qui intervient dans la propriété de récurrence d'échelles est satisfaite. Celle-ci nous fournit donc, pour $\underline{a} \in \Sigma(\rho)$, $\underline{a}' \in \Sigma'(\rho)$ des ensembles compacts non vides $E^*(\underline{a}, \underline{a}') \subset J_R$ qui vérifient les conclusions (i), (ii) de 3.2.3.

On a d'autre part défini en 3.3.3 une partie Σ_{nr}^- de Σ^- ; la seule chose qui nous concerne pour l'instant est la propriété évidente suivante :

LEMME. – Soit $\underline{\theta} \in \Sigma_{nr}^-$, le nombre de mots $\underline{b} = (b_0, b_1, \dots, b_k) \in \Sigma(\rho)$ tels que $\theta_0 = b_0$, et $\tilde{\underline{\theta}} = (\dots, \theta_{-n}, \dots, \theta_0 = b_0, b_1, \dots, b_k) \notin \Sigma_{nr}^-$ est $o(\rho^{-d})$ (quand $\rho \rightarrow 0$).

L'ensemble compact $\tilde{\mathcal{L}} \subset \mathcal{L}$ est constitué des triplets $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$ tels que $\underline{\theta} \in \Sigma_{nr}^-$ et $s \in E^*(\underline{a}, \underline{a}')$, où $\underline{a} \in \Sigma(\rho)$, $\underline{a}' \in \Sigma'(\rho)$ terminent respectivement $\underline{\theta}, \underline{\theta}'$.

5.2. – Contrairement à la base $\tilde{\mathcal{L}} \subset \mathcal{L}$, la fibre de \mathcal{L} au-dessus de $\tilde{\mathcal{L}}$ dépendra du paramètre de perturbation $\underline{\omega} \in [-1, +1]^{\Sigma^1} =: \Omega$.

Il est cependant préférable de traiter d'abord le cas non perturbé $\underline{\omega} = 0$.

Avec une constante c_6 qui sera dans la suite choisie assez petite, on pose

$$(5) \quad N = \lfloor c_6 \rho^{-\frac{1}{m}(d+d'-1)} \rfloor.$$

La fibre $L(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) \subset \mathbb{R}$ (pour $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) \in \tilde{\mathcal{L}}$) est constituée des t pour lesquels il existe N paires $(\underline{b}^1, \underline{b}'^1) \dots, (\underline{b}^N, \underline{b}'^N) \in \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho)$ qui (en posant $T_{\underline{b}^i} T_{\underline{b}'^i}'(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t) = (\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i, t_i)$) ont les propriétés suivantes :

- (6) pour $i \neq j$, \underline{b}^i et \underline{b}^j n'ont pas de mot initial commun dans $\Sigma(\rho^{1/m})$;
- (7) pour $|\tilde{s}_i - s_i| \leq \frac{3}{4}\rho^\alpha$, on a $(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, \tilde{s}_i) \in \tilde{\mathcal{L}}$ (et donc $\underline{\theta}^i \in \Sigma_{nr}^-$);
- (8) $|t_i| \leq 1 + R$.

Le but de ce chapitre est de montrer la :

PROPOSITION. – Si c_6 est assez petit, il existe $c_7 > 0$ tel qu'on ait

$$\text{Leb}(L(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)) \geq c_7$$

pour tout $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) \in \tilde{\mathcal{L}}$.

5.3. – Preuve de la proposition.

5.3.1. – Fixons $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) \in \tilde{\mathcal{L}}$. Par définition de $\tilde{\mathcal{L}}$, il existe une paire $(\underline{a}, \underline{a}') \in \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho)$ terminant $(\underline{\theta}, \underline{\theta}')$ tel que $s \in E^*(\underline{a}, \underline{a}')$. Par la conclusion (i) de la propriété de récurrence d'échelles, il existe $\tilde{s} \in E(\underline{a}, \underline{a}')$ tel que

$$(9) \quad |s - \tilde{s}| \leq c_2 \rho^\alpha.$$

Vu la définition (3) de $E(\underline{a}, \underline{a}')$, il existe $(\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{\underline{\theta}}') \in \Sigma^- \times \Sigma'^-$ se terminant par $(\underline{a}, \underline{a}')$ tel que

$$(10) \quad \tilde{s} \in E(\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{\underline{\theta}}').$$

Les relations (1), (2) ci-dessus sont donc vérifiées par $(\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{\underline{\theta}}', \tilde{s})$.

D'après la conclusion (ii) de la propriété de récurrence d'échelles, il existe au moins $c_3 \rho^{-(d+d')}$ paires $(\underline{b}, \underline{b}') \in \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho)$ (avec $b_0 = \theta_0, b'_0 = \theta'_0$) telles que, si on pose

$$T_{\underline{b}} T'_{\underline{b}'}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) = (\hat{\underline{\theta}}, \hat{\underline{\theta}}', \hat{s}),$$

on ait $[\hat{s} - \rho^\alpha, \hat{s} + \rho^\alpha] \subset E^*(\underline{b}, \underline{b}')$. Si on tient compte du lemme sur Σ_{nr}^- ci-dessus, on conclut qu'au moins la moitié des paires $(\underline{b}, \underline{b}')$ précédentes vérifient de surcroît $\hat{\underline{\theta}} \in \Sigma_{nr}^-$ et donc $(\hat{\underline{\theta}}, \hat{\underline{\theta}}', \hat{s}_1) \in \tilde{\mathcal{L}}$ pour $|\hat{s} - \hat{s}_1| \leq \rho^\alpha$.

On notera Γ_m l'ensemble de ces paires $(\underline{b}, \underline{b}')$. On a donc

$$(11) \quad \#\Gamma_m \geq \frac{1}{2} c_3 \rho^{-(d+d')}.$$

5.3.2. – Par rapport à la situation analogue de [6], la démonstration est rendue plus compliquée par le fait que l'application $\underline{\theta} \mapsto k^{\underline{\theta}}$ n'est pas lipschitzienne, mais seulement h"olderienne d'exposant $\alpha > \frac{1}{m}$. Ceci explique que nous considérons une succession d'échelles se déduisant les unes des autres par un facteur $\rho^{\frac{1}{m}}$. Nous définissons, par récurrence descendante sur $1 \leq \ell \leq m$, une partie Γ_ℓ de $\Sigma(\rho^{\ell/m}) \times \Sigma'(\rho^{\ell/m})$. Nous venons de définir Γ_m . Pour $\ell < m$, la définition dépend d'une constante c'_5 assez grande : Γ_ℓ est constituée des paires $(\underline{b}, \underline{b}')$ qui vérifient

$$(12) \quad \|\chi_{T_{\underline{b}} T'_{\underline{b}'}}(\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{\underline{\theta}}', \tilde{s})\|_{L^2}^2 \leq c'_5;$$

$$(13) \quad \text{il existe au moins } c_5'^{-1} \rho^{-\frac{1}{m}(d+d')} \text{ paires dans } \Gamma_{\ell+1} \text{ commençant par } (\underline{b}, \underline{b}').$$

Compte tenu de la relation (2) (pour $(\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{\underline{\theta}}', \tilde{s})$), il existe au plus $cc_5 c_5'^{-1} \rho^{-\ell(d+d')/m}$ paires dans $\Sigma(\rho^{\ell/m}) \times \Sigma'(\rho^{\ell/m})$ qui ne vérifient pas (12). D'autre part, il existe au plus $c \rho^{-(d+d')/m}$ paires dans $\Sigma(\rho^{(\ell+1)/m}) \times \Sigma'(\rho^{(\ell+1)/m})$ prolongeant une paire donnée de $\Sigma(\rho^{\ell/m}) \times \Sigma'(\rho^{\ell/m})$. On conclut que si c'_5 est assez grand, on aura par récurrence descendante à partir de (11) :

$$(14) \quad \#\Gamma_\ell \geq c_9 \rho^{-\frac{\ell}{m}(d+d')}.$$

5.3.3. – Pour des mots $\underline{c}, \underline{c}'$ de Σ, Σ' commençant respectivement par θ_0, θ'_0 , notons $J(\underline{c}, \underline{c}')$ (resp. $\tilde{J}(\underline{c}, \underline{c}')$) l'intervalle de \mathbb{R} image du rectangle $I(\underline{c}) \times I'(\underline{c}')$ par $\pi_{\underline{\theta}, \underline{\theta}', \underline{s}}$ (resp. par $\pi_{\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{\underline{\theta}}', \tilde{\underline{s}}}$).

Pour $1 \leq \ell < \ell' \leq m$, $(\underline{b}, \underline{b}') \in \Gamma_\ell$, notons $\Gamma_{\ell'}(\underline{b}, \underline{b}')$ l'ensemble des paires $(\underline{c}, \underline{c}') \in \Gamma_{\ell'}$ qui commencent par $(\underline{b}, \underline{b}')$; notons $K(\underline{b}, \underline{b}') \subset J(\underline{b}, \underline{b}')$ l'union sur $\Gamma_m(\underline{b}, \underline{b}')$ des intervalles $J(\underline{c}, \underline{c}')$.

LEMME. – Il existe $c_{10} > 0$ tel qu'on ait, pour $1 \leq \ell \leq m$, $(\underline{b}, \underline{b}') \in \Gamma_\ell$:

$$|K(\underline{b}, \underline{b}')| \geq c_{10}|J(\underline{b}, \underline{b}')|.$$

5.3.4. – Les deux résultats élémentaires qui suivent sont utilisés dans la preuve du lemme et prouvés en [6, p. 70].

SOUS-LEMME 1. – Soient $(J_\alpha)_{\alpha \in A}$, $(J'_\alpha)_{\alpha \in A}$ deux familles d'intervalles et $\varepsilon > 0$, $\lambda > 1$, $\nu > 0$ des constantes vérifiant :

- (i) pour tout $\alpha \in A$, on a $\varepsilon < |J_\alpha| < \lambda\varepsilon$ et $\varepsilon < |J'_\alpha|$;
- (ii) pour tout $\alpha \in A$, les centres de J_α, J'_α sont distants d'au plus $\nu\varepsilon$.

On a alors

$$\text{Leb}\left(\bigcup J'_\alpha\right) \geq (\lambda(4\nu + 4))^{-1} \text{Leb}\left(\bigcup J_\alpha\right).$$

SOUS-LEMME 2. – Soient $(J_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'intervalles, et $0 < \nu < 1$; pour chaque $\alpha \in A$, soit K_α une partie de J_α vérifiant $\text{Leb}(K_\alpha) \geq \nu \text{Leb}(J_\alpha)$. On a alors

$$\text{Leb}\left(\bigcup_\alpha K_\alpha\right) \geq \frac{1}{2} \nu \text{Leb}\left(\bigcup_\alpha J_\alpha\right).$$

5.3.5. – *Preuve du Lemme.* Elle se fait par récurrence descendante sur ℓ ; le cas $\ell = m$ est tautologique (avec $c_{10} = c_{10}(m) = 1$) et on suppose donc $\ell < m$.

L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne, pour toute partie $X \subset K \times K'$

$$\text{Leb}(\pi_{\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{\underline{\theta}}', \tilde{\underline{s}}}(X)) \geq [\mu_d \times \mu'_d(X)]^2 \|\chi_{\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{\underline{\theta}}', \tilde{\underline{s}}}\|_{L^2}^{-2}.$$

Soit $(\underline{b}, \underline{b}') \in \Gamma_\ell$. On applique l'inégalité précédente en remplaçant $(\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{\underline{\theta}}', \tilde{\underline{s}})$ par $T_{\underline{b}}T_{\underline{b}'}(\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{\underline{\theta}}', \tilde{\underline{s}})$ et en prenant pour X la version renormalisée par $T_{\underline{b}}T'_{\underline{b}'}$ de l'union des rectangles $I(\underline{c}) \times I(\underline{c}')$, lorsque $(\underline{c}, \underline{c}')$ décrit $\Gamma_{\ell+1}(\underline{b}, \underline{b}')$. D'après (12) et (13) on obtient

$$(15) \quad \left| \bigcup_{\Gamma_{\ell+1}(\underline{b}, \underline{b}')} \tilde{J}(\underline{c}, \underline{c}') \right| \geq c_{11} |\tilde{J}(\underline{b}, \underline{b}')|.$$

On va ensuite comparer les mesures de $\bigcup \tilde{J}(\underline{c}, \underline{c}')$ et $\bigcup J(\underline{c}, \underline{c}')$ en utilisant le sous-lemme 1. Comme on a $d(\underline{\theta}, \tilde{\underline{\theta}}) \leq c\rho$, la C^1 -distance entre $k^{\underline{\theta}}$ et $k^{\tilde{\underline{\theta}}}$ est au plus de l'ordre de ρ^α .

De même entre $k^{\theta'}$ et $k^{\tilde{\theta}'}$. On a aussi $|s - \tilde{s}| \leq c_2 \rho^\alpha$. La C^1 -distance entre $\pi_{\underline{\theta}, \underline{\theta}', s}$ et $\pi_{\underline{\tilde{\theta}}, \underline{\tilde{\theta}'}, \tilde{s}}$ est donc au plus de l'ordre de ρ^α . On rappelle que $\alpha > \frac{1}{m}$. Le sous-lemme 1 (avec $\varepsilon \sim \rho^{1/m}$) donne donc ;

$$(16) \quad \left| \bigcup_{\Gamma_{\ell+1}(\underline{b}, \underline{b}')} J(\underline{c}, \underline{c}') \right| \geq c \left| \bigcup_{\Gamma_{\ell+1}(\underline{b}, \underline{b}')} \tilde{J}(\underline{c}, \underline{c}') \right|,$$

$$(17) \quad \left| \bigcup_{\Gamma_{\ell+1}(\underline{b}, \underline{b}')} J(\underline{c}, \underline{c}') \right| \geq c'_{11} \left| \tilde{J}(\underline{b}, \underline{b}') \right|.$$

Par l'hypothèse de récurrence, pour $(\underline{c}, \underline{c}') \in \Gamma_{\ell+1}(\underline{b}, \underline{b}')$, on a

$$(18) \quad |K(\underline{c}, \underline{c}')| \geq c_{10}(\ell + 1) |J(\underline{c}, \underline{c}')|,$$

ce qui donne, d'après le sous-lemme 2 :

$$(19) \quad \left| \bigcup_{\Gamma_{\ell+1}(\underline{b}, \underline{b}')} K(\underline{c}, \underline{c}') \right| \geq \frac{1}{2} c_{10}(\ell + 1) \left| \bigcup_{\Gamma_{\ell+1}(\underline{b}, \underline{b}')} J(\underline{c}, \underline{c}') \right| \geq \frac{1}{2} c'_{11} c_{10}(\ell + 1) |J(\underline{b}, \underline{b}')|,$$

soit l'inégalité du lemme avec $c_{10}(\ell) = \frac{1}{2} c'_{11} c_{10}(\ell + 1)$. \square

5.3.6. *Fin de la preuve de la proposition.* – On observe d'abord que, si un réel t appartient à au moins N ensembles $K(\tilde{\underline{b}}^i, \tilde{\underline{b}}'^i)$, avec $(\tilde{\underline{b}}^i, \tilde{\underline{b}}'^i) \in \Gamma_1$, alors $t \in L(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$. En effet par définition de $K(\tilde{\underline{b}}^i, \tilde{\underline{b}}'^i)$, il existe $(\underline{b}^i, \underline{b}'^i) \in \Gamma_m$, commençant par $(\tilde{\underline{b}}^i, \tilde{\underline{b}}'^i)$, tel que $t \in J(\underline{b}^i, \underline{b}'^i)$; cette dernière propriété implique la relation (8). En effet, en écrivant $T_{\underline{b}^i} T'_{\underline{b}'^i}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t) = (\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i, t_i)$, on obtient $s_i \in J_R$ par définition de Γ_m et $t_i \in \pi_{\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i}([0, 1] \times [0, 1])$ d'où (8). La relation (7) est conséquence de la définition de Γ_m . La relation (6) résulte du fait élémentaire suivant : pour $s \in J_R$, $\hat{\underline{\theta}} \in \Sigma^-$, $\hat{\underline{\theta}}' \in \Sigma'^-$, $\hat{\rho} > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\underline{b} \in \Sigma(\hat{\rho})$, le nombre de $\underline{b}' \in \Sigma'(\hat{\rho})$ tels que $\pi_{\hat{\underline{\theta}}, \hat{\underline{\theta}}', s}^{-1}(t)$ rencontre $I(\underline{b}) \times I'(\underline{b}')$ est universellement borné ; donc, quitte à remplacer N par une fraction de lui-même, on peut supposer que les $\tilde{\underline{b}}^i$ sont distincts. Il reste à voir que, lorsque c_6 est assez petit, l'ensemble où la fonction

$$\chi = \sum_{\Gamma_1} \chi_{K(\underline{b}, \underline{b}')}$$

est $\geq c_6 \rho^{-\frac{1}{m}(d+d'-1)}$ est de mesure $> c_7 > 0$.

Considérons une partition de la droite réelle en intervalles $(J_\alpha)_{\alpha \in A_0}$ de longueur $\rho^{1/m}$. Avec $c'_6 \ll 1$, considérons la partie $A_1 \subset A_0$ formée des α tels que J_α contienne le centre de $J(\underline{b}, \underline{b}') \in \Gamma_1$, pour au moins $c'_6 \rho^{-\frac{1}{m}(d+d'-1)}$ paires $(\underline{b}, \underline{b}') \in \Gamma_1$, et notons Γ_1^* l'ensemble des paires $(\underline{b}, \underline{b}') \in \Gamma_1$ telles que le centre de $J(\underline{b}, \underline{b}')$ appartienne à l'un des J_α , $\alpha \in A_1$. On a

$$(20) \quad \#(\Gamma_1 - \Gamma_1^*) \leq c c'_6 \rho^{-\frac{1}{m}(d+d')},$$

et donc, au vu de (14)

$$(21) \quad \#\Gamma_1^* \geq \frac{1}{2} c_9 \rho^{-\frac{1}{m}(d+d')},$$

si c'_6 est assez petit. On procède maintenant comme en 5.3.5 pour montrer

$$(15') \quad \left| \bigcup_{\Gamma_1^*} \tilde{J}(\underline{b}, \underline{b}') \right| \geq \hat{c}_{11},$$

$$(17') \quad \left| \bigcup_{\Gamma_1^*} J(\underline{b}, \underline{b}') \right| \geq \hat{c}'_{11}.$$

Comme les $J(\underline{b}, \underline{b}')$ sont des intervalles de longueur approximative $\rho^{1/m}$, l'estimation (17') entraîne

$$(22) \quad \left| \bigcup_{\alpha \in A_1} J_\alpha \right| \geq \bar{c}_{11}.$$

Pour chaque $\alpha \in A_1$, désignons par χ_α la somme des $\chi_{K(\underline{b}, \underline{b}')}$, lorsque $(\underline{b}, \underline{b}')$ décrit les éléments de Γ_1 tels que le centre de $J(\underline{b}, \underline{b}')$ appartienne à J_α . On a d'après le lemme

$$(23) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \chi_\alpha &= \sum |K(\underline{b}, \underline{b}')| \\ &\geq c_{10} \sum |J(\underline{b}, \underline{b}')| \\ &\geq cc_{10}c'_6\rho^{-\frac{1}{m}(d+d')}. \end{aligned}$$

D'autre part le support de χ_α est localisé dans un intervalle \hat{J}_α de même centre que J_α et de rayon $c\rho^{\frac{1}{m}}$. Si on prend $c_6 \ll c_{10}c'_6$, on aura $\chi_\alpha > N$ sur une partie K_α de \hat{J}_α de mesure $\geq c'_7\rho^{\frac{1}{m}}$. On combine finalement (22) et le sous-lemme 2 pour obtenir l'estimation recherchée

$$\left| \bigcup_{A_1} K_\alpha \right| \geq c_7. \quad \square$$

5.4. Le cas général $\underline{\omega} \neq \underline{0}$

Rappelons que l'espace des paramètres est $\Omega = [-1, +1]^{\Sigma_1}$, où Σ_1 est une collection de rectangles disjoints dont les deux côtés sont de taille approximative $\rho^{2/m}$ (cf. 3.5).

Soit $\underline{\theta} \in \Sigma^-$; on associe à $\underline{\theta}$ le morceau de variété instable

$$W^u(\underline{\theta}) := \bigcap_{i \geq 0} F^i(R_{\theta_{-i}}).$$

Soit alors r un entier tel que $F^{-r}(W^u(\underline{\theta}))$ soit approximativement de longueur $\rho^{1/m}$. On note $\Sigma_1(\underline{\theta})$ l'ensemble des rectangles de Σ_1 qui rencontrent $F^{-r}(W^u(\underline{\theta}))$. À la partition de Σ_1 en $\Sigma_1(\underline{\theta})$ et son complémentaire est associée une décomposition :

$$\begin{aligned} \underline{\omega} &= (\underline{\omega}', \underline{\omega}''), \\ \Omega &= \Omega' \times \Omega'', \\ \Omega' &= [-1, +1]^{\Sigma_1(\underline{\theta})} \\ \Omega'' &= [-1, +1]^{\Sigma_1 \setminus \Sigma_1(\underline{\theta})}. \end{aligned}$$

La fibre $L_{\underline{\omega}}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$ ne dépend en fait que de la composante $\underline{\omega}''$ de $\underline{\omega}$; nous posons $\underline{\omega}^* = (\underline{0}, \underline{\omega}'')$. Ceci étant, on définit $L_{\underline{\omega}}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$ comme en 5.2, à ceci près que l'opérateur $T_{\underline{b}^i}$ ($1 \leq i \leq N$) doit être pris pour la valeur $\underline{\omega}^*$ (au lieu de $\underline{0}$) du paramètre.

Il s'agit alors à nouveau de montrer, lorsque c_6 est assez petit, qu'on a

$$\text{Leb}(L_{\underline{\omega}}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)) \geq c_7 > 0.$$

5.5. Un lemme de perturbation

Pour minorer la mesure de $L_{\underline{\omega}}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$, on va suivre la méthode exposée en 5.3, en vérifiant que le passage de $\underline{0}$ à $\underline{\omega}$ n'affecte pas les étapes successives. Le lemme ci-dessous justifie cette démarche ; sa démonstration est repoussée à un chapitre ultérieur.

LEMME. – Pour $\underline{\theta} \in \Sigma^-$, $\underline{\omega} \in \Omega$, $z \in I(\theta_0) \cap K$, $\bar{\rho} \geq \rho$, $\underline{a} \in \Sigma(\bar{\rho})$ (commençant par θ_0), on a :

- (i) $|k^{\underline{\theta}, \underline{\omega}}(z^{\underline{\omega}}) - k^{\underline{\theta}}(z)| \leq c_{12}c_X \rho^{1 - \frac{1}{m}}$,
- (ii) $|\text{Log} \frac{|k^{\underline{\theta}, \underline{\omega}}(I(\underline{a}))|}{|k^{\underline{\theta}}(I(\underline{a}))|}| \leq c_{12}c_X \rho^{1 - \frac{1}{m}}$.

(On a désigné par c_X la constante (assez grande) qui intervient dans la construction de la famille de perturbations ; on a désigné par $z^{\underline{\omega}}$ la continuation hyperbolique de $z \in K$; enfin, la constante c_{12} est bien sûr indépendante de c_X , $\underline{\theta}$, $\underline{\omega}$, z , ρ , $\bar{\rho}$, \underline{a} .)

5.6. L'estimation de mesure pour $\underline{\omega} \neq \underline{0}$

Comparons les s -composantes de $T_b T_{b'}'(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$ pour les valeurs $\underline{0}$ et $\underline{\omega}^*$ du paramètre ; en vertu du lemme ci-dessus, partie (ii), on aura

$$|s(\underline{0}) - s(\underline{\omega}^*)| \leq cc_{12}c_X \rho^{1 - \frac{1}{m}}.$$

Rappelons qu'on a choisi $\alpha \leq \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{m}$.

Comme on avait (pour les paires $(\underline{b}, \underline{b}') \in \Gamma_m$)

$$[\hat{s} - \rho^\alpha, \hat{s} + \rho^\alpha] \subset E^*(\underline{b}, \underline{b}')$$

(avec $\hat{s} = s(\underline{0})$), on aura

$$[s(\underline{\omega}^*) - \frac{3}{4}\rho^\alpha, s(\underline{\omega}^*) + \frac{3}{4}\rho^\alpha] \subset E^*(\underline{b}, \underline{b}'),$$

dès que ρ est assez petit.

L'ensemble Σ_{nr}^- ne dépend pas des paramètres. Nous gardons pour toutes les valeurs des paramètres les ensembles Γ_ℓ , $1 \leq \ell \leq m$, définis pour $\underline{\omega} = 0$. Considérons ensuite l'estimation (15) dans la preuve du lemme 5.3.3 ; quand on remplace l'intervalle $\tilde{J}(\underline{c}, \underline{c}')$ avec $(\underline{c}, \underline{c}') \in \Gamma_{\ell+1}(\underline{b}, \underline{b}')$ par sa version perturbée $\tilde{J}^{\omega^*}(\underline{c}, \underline{c}')$, on change d'après la partie (i) du lemme de perturbation les positions relatives dans $\tilde{J}(\underline{b}, \underline{b}')$ des extrémités par au plus $cc_{12}c_X \rho^{1 - \frac{1}{m}}$. D'après le sous-lemme 1, on obtiendra pour les $\tilde{J}^{\omega^*}(\underline{c}, \underline{c}')$ la même estimation (15), avec une constante c_{11} un peu moins bonne. Le reste de la démonstration du lemme 5.3.3 est inchangé et on obtient donc l'estimation de ce lemme avec une constante c_{10} un peu moins bonne.

Dans la partie finale (5.3.6) de la preuve, on conserve le même Γ_1^* . Les extrémités des intervalles $J(\underline{b}, \underline{b}')$, $\tilde{J}(\underline{b}, \underline{b}')$ (pour $(\underline{b}, \underline{b}') \in \Gamma_1$) peuvent être d'après le lemme de perturbation déplacées par au plus $cc_{12}c_X \rho^{1 - \frac{1}{m}}$ lorsqu'on remplace $\underline{0}$ par $\underline{\omega}^*$, mais ceci n'affecte pas l'argument grâce au sous-lemme 1. \square

5.7. – Pour le théorème B*, on a expliqué en 3.4.3 comment modifier la définition de $L(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$ pour obtenir un ensemble $\bar{L}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$. Pour $\omega \in \Omega$, on définit de façon analogue un ensemble $\bar{L}_\omega(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$. On veut maintenant montrer que, si c_6 est assez petit,

$$\text{Leb}(\bar{L}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)) \geq \bar{c}_7 > 0$$

et plus généralement

$$\text{Leb}(\bar{L}_\omega(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)) \geq \bar{c}_7 > 0.$$

On va indiquer comment modifier la preuve de la proposition de 5.2 pour la première estimation. La seconde est prouvée de la même façon, cf. 5.4, 5.5, 5.6.

On définit, pour chaque $(\underline{c}, \underline{c}') \in \Gamma_{m-1}$, l'ensemble $\bar{J}(\underline{c}, \underline{c}')$ des $t \in J(\underline{c}, \underline{c}')$ qui appartiennent au moins à $c_6 \rho^{-\frac{d+d'-1}{m}}$ intervalles $J(\underline{b}, \underline{b}')$, pour des paires $(\underline{b}, \underline{b}') \in \Gamma_m$ commençant par $(\underline{c}, \underline{c}')$. Pour $1 \leq j \leq m-2$, $(\underline{a}, \underline{a}') \in \Gamma_j$, on définit inductivement l'ensemble $\bar{J}(\underline{a}, \underline{a}')$ des $t \in J(\underline{a}, \underline{a}')$ qui appartiennent au moins à $c_6 \rho^{-\frac{d+d'-1}{m}}$ ensembles $\bar{J}(\underline{c}, \underline{c}')$ pour des paires $(\underline{c}, \underline{c}') \in \Gamma_{j+1}$ commençant par $(\underline{a}, \underline{a}')$. En appliquant $(m-1)$ fois l'argument expliqué en 5.3.6, on montre qu'on a, pour tout $1 \leq j \leq m-1$, $(\underline{a}, \underline{a}') \in \Gamma_j$

$$|\bar{J}(\underline{a}, \underline{a}')| > \bar{c}_{10}(j) \cdot |J(\underline{a}, \underline{a}')|.$$

En appliquant une dernière fois cet argument, on montre que l'ensemble \bar{J} des t qui appartiennent au moins à $c_6 \rho^{-\frac{d+d'-1}{m}}$ ensembles $\bar{J}(\underline{a}, \underline{a}')$, pour des paires $(\underline{a}, \underline{a}') \in \Gamma_1$, vérifie

$$|\bar{J}| \geq \bar{c}_7 > 0.$$

Montrons que $\bar{J} \subset \bar{L}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$. La constante d^* définie en 3.4.3 vérifie $\frac{d^*}{m-1} < \frac{d+d'-1}{m}$, donc $\rho^{-\frac{d^*}{m-1}} < c_6 \rho^{-\frac{d+d'-1}{m}}$ pour ρ assez petit. Pour $t \in \bar{J}$, on construit donc comme suit les paires $(\underline{b}_k^\ell, \underline{b}'_k^\ell)$ de la définition de $\bar{L}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$: on associe les paires $(\underline{a}, \underline{a}') \in \Gamma_1$ telles que $t \in \bar{J}(\underline{a}, \underline{a}')$ aux indices ℓ , $1 \leq \ell \leq N = \lfloor c_6 \rho^{-\frac{d+d'-1}{m}} \rfloor$; pour chaque tel $(\underline{a}, \underline{a}')$, on trouve par construction $M = \lfloor \rho^{-d^*} \rfloor = \lfloor (\rho^{-\frac{d^*}{m-1}})^{m-1} \rfloor$ intervalles $J(\underline{b}, \underline{b}')$ contenant t tels que $(\underline{b}, \underline{b}') \in \Gamma_m$ commence par $(\underline{a}, \underline{a}')$; ces paires $(\underline{b}, \underline{b}')$ sont les $(\underline{b}_k^\ell, \underline{b}'_k^\ell)$. Les propriétés (i'), (i'') de 3.4.3 sont alors clairement vérifiées.

6. Construction d'une partie compacte récurrente

6.1. – On a défini en 3.4.1 ou 5.2, pour $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) \in \tilde{\mathcal{L}}$, une partie $L_\omega(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$ (cf. 5.4 pour la dépendance en ω). On aura aussi besoin d'un agrandissement $L_\omega^+(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$ de $L_\omega(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$, défini de façon analogue à $L_\omega(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$ où les relations (ii), (iii) de 3.4.1 ((7), (8) de 5.2) sont remplacées par les relations plus faibles

(ii') pour $|\tilde{s}_i - s_i| \leq \frac{2}{3} \rho^\alpha$, on a $(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, \tilde{s}_i) \in \tilde{\mathcal{L}}$;

(iii') $|t_i| \leq 2(1 + R)$.

Nous définissons alors

$$\mathcal{L}_\omega^0 = \{(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t) \in \tilde{\mathcal{L}} \times \mathbb{R}, t \in L_\omega^+(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)\},$$

$$\mathcal{L}_\omega^1 = \{(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t) \in \tilde{\mathcal{L}} \times \mathbb{R} \mid \exists (\underline{\theta}^0, \underline{\theta}'^0, s_0, t_0) \in \mathcal{L}_\omega^0$$

$$\text{tel que } d(\underline{\theta}, \underline{\theta}^0) \leq 2\rho^D, d(\underline{\theta}', \underline{\theta}'^0) \leq 2\rho^D, |s - s_0| \leq \rho, |t - t_0| \leq \rho\},$$

où D est l'exposant $> 2\alpha^{-1}$ intervenant dans la définition de Σ_{nr}^- (cf. 3.3.3).

Parallèlement, pour $u = (\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t) \in \tilde{\mathcal{L}} \times \mathbb{R}$, nous définissons :

$$\begin{aligned} \Omega^0(u) &= \{\underline{\omega} \in \Omega \mid \exists (\underline{b}, \underline{b}') \in \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho) \text{ tel que } b_0 = \theta_0, b'_0 = \theta'_0, \\ &\quad T_{\underline{b}}^{\underline{\omega}} T_{\underline{b}'}^{\prime} u = (\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{\underline{\theta}}', \tilde{s}, \tilde{t}) \in \mathcal{L}_{\underline{\omega}}^0 \text{ et } (\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{\underline{\theta}}', \tilde{s}_1) \in \tilde{\mathcal{L}} \text{ pour } |\tilde{s} - \tilde{s}_1| < \frac{1}{2}\rho^\alpha\}, \\ \Omega^1(u) &= \{\underline{\omega} \in \Omega \mid (\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t) \in \mathcal{L}_{\underline{\omega}}^1\}. \end{aligned}$$

La proposition qui suit contient l'estimation cruciale de probabilité et sera démontrée dans la fin de ce chapitre.

PROPOSITION. – *Supposons que la constante c_X intervenant dans la famille de perturbations est assez grande. Il existe alors $c_8 > 0$ tel qu'on ait, pour tout $u \in \tilde{\mathcal{L}} \times \mathbb{R}$*

$$\mathbf{P}(\Omega_1(u) \setminus \Omega_0(u)) \leq \exp(-c_8 \rho^{-\frac{1}{m}(d+d'-1)})$$

(où \mathbf{P} est la mesure de Lebesgue normalisée sur Ω).

6.2. – On choisit dans $\tilde{\mathcal{L}} \times [-2(1+R), 2(1+R)]$ une partie Δ qui est ρ^D -dense et vérifie

$$\#\Delta \leq c\rho^{-D(d+d'+2)}.$$

D'après la proposition, si ρ est assez petit, il existe $\underline{\omega}^0 \in \Omega$ tel qu'on ait, pour tout $u \in \Delta$, soit $\underline{\omega}^0 \in \Omega^0(u)$, soit $\underline{\omega}^0 \notin \Omega^1(u)$. On fixe un tel $\underline{\omega}^0$.

On définit

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t) \in \tilde{\mathcal{L}} \times \mathbb{R} \mid \exists (\underline{\theta}^0, \underline{\theta}'^0, s_0, t_0) \in \mathcal{L}_{\underline{\omega}^0}^0 \\ &\quad \text{tel que } d(\underline{\theta}, \underline{\theta}^0) \leq \rho^D, d(\underline{\theta}', \underline{\theta}'^0) \leq \rho^D, |s - s_0| \leq \frac{\rho}{2}, |t - t_0| \leq \frac{\rho}{2}\}. \end{aligned}$$

On a donc $\mathcal{L}_{\underline{\omega}^0}^0 \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{L}_{\underline{\omega}^0}^1$. On va montrer que \mathcal{L} est une partie compacte récurrente pour $F^{\underline{\omega}^0}$.

6.3. \mathcal{L} est récurrente pour $F^{\underline{\omega}^0}$

6.3.1. – Soit $u = (\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t) \in \mathcal{L}$. Soit $u_0 \in \mathcal{L}_{\underline{\omega}^0}^0$ proche de u comme dans la définition de \mathcal{L} ; soit $u_1 = (\underline{\theta}^1, \underline{\theta}'^1, s_1, t_1) \in \Delta$, ρ^D -proche de u . Comme $D > 1$, on aura $u_1 \in \mathcal{L}_{\underline{\omega}^0}^1$, c'est-à-dire $\underline{\omega}^0 \in \Omega^1(u_1)$. Ceci entraîne, d'après le choix de $\underline{\omega}^0$, qu'on a $\underline{\omega}^0 \in \Omega^0(u_1)$: il existe donc $(\underline{b}, \underline{b}') \in \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho)$ tel que

$$T_{\underline{b}}^{\underline{\omega}^0} T_{\underline{b}'}^{\prime}(u_1) = \tilde{u}_1 = (\tilde{\underline{\theta}}^1, \tilde{\underline{\theta}}'^1, \tilde{s}_1, \tilde{t}_1) \in \mathcal{L}_{\underline{\omega}^0}^0, (\tilde{\underline{\theta}}^1, \tilde{\underline{\theta}}'^1, \tilde{s}_1) \in \tilde{\mathcal{L}} \text{ pour } |\tilde{s}_1 - \hat{s}_1| < \frac{1}{2}\rho^\alpha.$$

6.3.2. – Vérifions que $\tilde{u} := T_{\underline{b}}^{\omega_0} T'_{\underline{b}'} u = (\underline{\theta}, \underline{\theta}', \underline{\tilde{s}}, \underline{\tilde{t}}) \in \text{int } \mathcal{L}$.

On compare les coordonnées de \tilde{u} et \tilde{u}_1 . On a

$$d(\underline{\theta}, \underline{\theta}^1) \leq \rho^D \Rightarrow d(\underline{\tilde{\theta}}, \underline{\tilde{\theta}}^1) \leq c\rho^{D+1},$$

et de même $d(\underline{\theta}', \underline{\theta}'^1) \leq c\rho^{D+1}$. Comme l'appartenance à Σ_{nr}^- ne dépend que d'un mot final dans $\Sigma(\rho^{D+1/2})$, on a $\tilde{\theta} \in \Sigma_{nr}^-$ puisque $\underline{\theta}^1 \in \Sigma_{nr}^-$. La C^1 -distance à l'identité de $k^{\underline{\theta}} \circ (k^{\underline{\theta}^1})^{-1}$ et $k^{\underline{\theta}'} \circ (k^{\underline{\theta}'^1})^{-1}$ est $\leq c\rho^{D\alpha}$, avec $D\alpha > 2$. On a donc

$$\begin{aligned} |\tilde{s} - \tilde{s}_1| &\leq c\rho^{D\alpha} \\ |\tilde{t} - \tilde{t}_1| &\leq c\rho^{D\alpha-1}. \end{aligned}$$

On obtient donc, d'après la propriété de \tilde{u}_1 ci-dessus, qu'on a $(\underline{\tilde{\theta}}^1, \underline{\tilde{\theta}}'^1, \underline{\tilde{s}}) \in \tilde{\mathcal{L}}$ pour $|\tilde{s} - \underline{\tilde{s}}| < \frac{1}{4}\rho^\alpha$, donc aussi $(\underline{\tilde{\theta}}, \underline{\tilde{\theta}}', \underline{\tilde{s}}) \in \tilde{\mathcal{L}}$ pour $|\tilde{s} - \underline{\tilde{s}}| < \frac{1}{4}\rho^\alpha$ (cf. définition de $\tilde{\mathcal{L}}$). On conclut finalement qu'on a $\tilde{u} \in \text{int } \mathcal{L}$. Ceci termine de prouver que \mathcal{L} est récurrente pour F^{ω_0} .

6.3.3. – Pour le théorème B*, on a défini en 3.4.3 (voir aussi 5.7), pour $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) \in \tilde{\mathcal{L}}$ une partie $\bar{L}_\omega(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$. On définit $\bar{L}_\omega^+(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) \supset \bar{L}_\omega(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$ de façon analogue $L_\omega^+(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$: on remplace ii), iii) par ii'), iii') de 6.1. Nous définissons alors, comme en 6.1,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_\omega^0 &= \{(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t) \in \tilde{\mathcal{L}} \times \mathbb{R}, \quad t \in \bar{L}_\omega^+(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)\}, \\ \bar{\mathcal{L}}_\omega^1 &= \{(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t) \in \tilde{\mathcal{L}} \times \mathbb{R} \mid \exists(\underline{\theta}^0, \underline{\theta}'^0, s_0, t_0) \in \bar{\mathcal{L}}_\omega^0 \quad \text{tel que} \\ &\quad d(\underline{\theta}, \underline{\theta}^0) \leq 2\rho^D, \quad d(\underline{\theta}', \underline{\theta}'^0) \leq 2\rho^D, \quad |s - s_0| \leq \rho, \quad |t - t_0| \leq \rho\}. \end{aligned}$$

Pour $u = (\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t) \in \tilde{\mathcal{L}} \times \mathbb{R}$, nous définissons $\bar{\Omega}_1^1(u) = \{\omega \in \Omega \mid (\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t) \in \bar{\mathcal{L}}_\omega^1\}$ et $\bar{\Omega}_0^0(u) = \{\omega \in \Omega \mid \exists(\underline{b}^i, \underline{b}'^i) \in \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho), 1 \leq i \leq M = \lfloor \rho^{-d^*} \rfloor \text{ tels que } b_0^i = \theta_0, b_0'^i = \theta_0', T_{\underline{b}^i}^{\omega} T'_{\underline{b}'^i} u = (\underline{\tilde{\theta}}^i, \underline{\tilde{\theta}}'^i, \underline{\tilde{s}}_i, \underline{\tilde{t}}_i) \in \mathcal{L}_\omega^0 \text{ et } (\underline{\tilde{\theta}}, \underline{\tilde{\theta}}', s^*) \in \tilde{\mathcal{L}} \text{ pour } |s^* - \underline{\tilde{s}}_i| < \frac{1}{2}\rho^\alpha\}$. On a alors la proposition suivante, analogue à celle de 6.1 :

PROPOSITION. – *Supposons que la constante c_X intervenant dans la famille de perturbations est assez grande. Il existe alors $\bar{c}_8 > 0$ tel qu'on ait, pour tout $u \in \bar{\mathcal{L}} \times \mathbb{R}$*

$$\mathbf{P}(\bar{\Omega}_1(u) \setminus \bar{\Omega}_0(u)) \leq \exp(-\bar{c}_8 \rho^{-\frac{1}{m}(d+d'-1)}).$$

Si l'on prend un ω_0 (comme en 6.2), pour lequel on a, pour tout $u \in \Delta$, soit $\omega_0 \in \bar{\Omega}_0(u)$, soit $\omega_0 \notin \bar{\Omega}_1(u)$, il est facile de voir que $\bar{\mathcal{L}} := \{(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t) \in \tilde{\mathcal{L}} \times \mathbb{R} \mid \exists(\underline{\theta}^0, \underline{\theta}'^0, s, t) \in \bar{\mathcal{L}}_{\omega_0}^0 \text{ tel que } d(\underline{\theta}, \underline{\theta}^0) \leq \rho^D, d(\underline{\theta}', \underline{\theta}'^0) \leq \rho^D, |s - s_0| \leq \rho/2, |t - t_0| \leq \rho/2\}$ est une partie compacte \bar{d} -récurrente pour F^{ω_0} (on utilise ici $d^* > \bar{d}$).

6.4. Preuve de l'estimation de probabilité

6.4.1. – Soient $u = (\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t) \in \tilde{\mathcal{L}} \times \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega^1(u)$. Il existe donc $(\underline{\theta}^0, \underline{\theta}'^0, s_0) \in \tilde{\mathcal{L}}$ et $t_0 \in L_\omega^+(\underline{\theta}^0, \underline{\theta}'^0, s_0)$ tels que $d(\underline{\theta}, \underline{\theta}^0) \leq 2\rho^D, d(\underline{\theta}', \underline{\theta}'^0) \leq 2\rho^D, |s - s_0| \leq \rho, |t - t_0| \leq \rho$.

Comme $d(\underline{\theta}, \underline{\theta}^0) \leq 2\rho^D$, on a $\Sigma_1(\underline{\theta}) = \Sigma_1(\underline{\theta}^0)$; la décomposition $\Omega = \Omega' \times \Omega''$ est donc la même pour $\underline{\theta}$ et $\underline{\theta}^0$, et l'ensemble $L_\omega^+(\underline{\theta}^0, \underline{\theta}'^0, s_0)$ ne dépend que de la composante ω'' de ω . On conclut qu'on a $\Omega' \times \{\omega''\} \subset \Omega^1(u)$. On fixera donc dans la suite u et $\omega'' \in \Omega''$ tels

que $(\underline{0}, \underline{\omega}'') =: \underline{\omega}^* \in \Omega^1(u)$. Il s'agira de montrer que l'ensemble $\Omega'(u)$ des $\underline{\omega}' \in \Omega'$ tels que $(\underline{\omega}', \underline{\omega}'') \in \Omega^0(u)$ vérifie

$$\mathbf{P}_{\Omega'}(\Omega' \setminus \Omega'(u)) \leq \exp(-c_8 \rho^{-\frac{1}{m}(d+d'-1)}).$$

6.4.2. – Soit $u_0 = (\underline{\theta}^0, \underline{\theta}'^0, s_0, t_0)$ comme ci-dessus. Il existe donc des paires $(\underline{b}^1, \underline{b}'^1), \dots, (\underline{b}^N, \underline{b}'^N) \in \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho)$ telles que les images

$$T_{\underline{b}^i}^{\underline{\omega}^*} T_{\underline{b}'^i}^{\omega'}(u_0) =: u^i =: (\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, \tilde{s}_i, \tilde{t}_i)$$

vérifient les conditions (i), (ii'), (iii') de la définition de $L_{\underline{\omega}^*}^+(\underline{\theta}^0, \underline{\theta}'^0, s_0)$.

Pour $\underline{\omega}' \in \Omega'$, on pose (avec $\underline{\omega} = (\underline{\omega}', \underline{\omega}'')$)

$$u^i(\underline{\omega}') := T_{\underline{b}^i}^{\underline{\omega}} T_{\underline{b}'^i}^{\omega'}(u) = (\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i(\underline{\omega}'), t_i(\underline{\omega}')).$$

De l'inégalité $d(\underline{\theta}, \underline{\theta}^0) \leq 2\rho^D$, on déduit $d(\underline{\theta}^i, \tilde{\theta}^i) \leq c\rho^{D+1} \ll \rho^{D+\frac{1}{2}}$, et de même $d(\underline{\theta}'^i, \tilde{\theta}'^i) \leq c\rho^{D+1}$. Comme $\tilde{\theta}^i \in \Sigma_{nr}^-$, on a aussi $\underline{\theta}^i \in \Sigma_{nr}^-$; de plus, les fibres de $\tilde{\mathcal{L}}$ au-dessus de $(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i)$ et $(\tilde{\theta}^i, \tilde{\theta}'^i)$ sont égales.

La distance dans la C^1 -topologie entre $k^{\underline{\theta}, \underline{\omega}^*}$ et $k^{\underline{\theta}^0, \underline{\omega}^*}$ d'une part, entre $k^{\underline{\theta}', \underline{\omega}'}$ et $k^{\underline{\theta}'^0, \underline{\omega}'}$ d'autre, est au plus de l'ordre de $\rho^{D\alpha} \ll \rho^2$; on a donc

$$|\tilde{s}_i - s_i(\underline{0})| \leq |s - s_0| + o(\rho^2).$$

Par ailleurs, d'après le lemme 5.5, partie (ii), on a :

$$|s_i(\underline{0}) - s_i(\underline{\omega}')| \leq c_{12} c_X \rho^{1-1/m}.$$

Comme on a $\alpha < 1 - \frac{1}{m}$ et $(\tilde{\theta}^i, \tilde{\theta}'^i, s'_i) \in \tilde{\mathcal{L}}$ pour $|s'_i - \tilde{s}_i| \leq \frac{2}{3}\rho^\alpha$, on aura aussi (si ρ est assez petit) $(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s'_i) \in \tilde{\mathcal{L}}$ pour $|s'_i - s_i(\underline{\omega}')| \leq \frac{1}{2}\rho^\alpha$ (quel que soit $\underline{\omega}' \in \Omega'$).

On aura donc $\underline{\omega}' \in \Omega'(u)$ si $t_i(\underline{\omega}') \in L_{\underline{\omega}^*}^+(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i(\underline{\omega}'))$ pour au moins un indice $i \in [1, N]$.

6.4.3. – Rappelons que $\tilde{\Sigma}_1$ est une collection de rectangles formant une partition de Λ , dont les côtés sont de taille approximative $\rho^{2/m}$; que Σ_1 est constituée des rectangles de $\tilde{\Sigma}_1$ pour lesquels aucun sous-mot de $\Sigma(\rho^{1/2m})$ n'apparaît plus d'une fois dans le mot associé; et que $\Sigma_1(\underline{\theta})$ est constitué des rectangles de Σ_1 qui rencontrent $F^{-r}(W^u(\underline{\theta}))$, l'entier $r > 0$ étant tel que la longueur de $F^{-r}(W^u(\underline{\theta}))$ soit approximativement $\rho^{1/m}$.

À chacun des mots \underline{b}^i , $1 \leq i \leq N$, est associé un segment $I^{\underline{\theta}}(\underline{b}^i) \subset W^u(\underline{\theta})$; on notera \underline{a}^i le rectangle de $\tilde{\Sigma}_1$ qui contient $F^{-r}(I^{\underline{\theta}}(\underline{b}^i))$ (segment de longueur $\sim \rho^{1+1/m} \ll \rho^{2/m}$). Comme on a $\underline{\theta}^i \in \Sigma_{nr}^-$, on a $\underline{a}^i \in \Sigma_1$ et donc aussi $\underline{a}^i \in \Sigma_1(\underline{\theta})$; pour $i \neq j$ on a $\underline{a}^i \neq \underline{a}^j$ d'après la propriété i) de 3.4.1. On notera simplement ω_i la coordonnée $\omega_{\underline{a}^i}$ de $\underline{\omega}$.

Nous écrivons

$$\underline{\omega}' = (\omega_1, \dots, \omega_N, \tilde{\omega}')$$

et fixerons $\tilde{\omega}' \in [-1, +1]^{\Sigma_1(\underline{\theta}) \setminus \{\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^N\}}$. Nous poserons

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &:= ((\underline{0}, \tilde{\omega}'), \underline{\omega}''), \\ L^i &:= L_{\hat{\omega}}(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i(\hat{\omega})) \\ &= L_{\underline{\omega}}(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i(\hat{\omega})). \end{aligned}$$

6.4.4. *Lemme de perturbation.* – Par définition de Σ_{nr}^- , nous pouvons choisir un élément $\bar{\theta}$ de Σ^- qui vérifie $d(\underline{\theta}, \bar{\theta}) \leq c\rho^D$ et tel que le mot final de $\underline{\theta}$ (et de $\bar{\theta}$) $(\theta_{-r}, \dots, \theta_0)$ n'apparaît pas autre part dans $\bar{\theta}$.

Nous posons alors, pour $1 \leq i \leq N$:

$$T_{\underline{b}^i}^{\underline{\omega}'} T_{\underline{b}'^i}'(\bar{\theta}, \underline{\theta}', s, t) = (\bar{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, \bar{s}_i(\underline{\omega}'), \bar{t}_i(\underline{\omega}'))$$

(où $\underline{\omega}''$ est fixé).

Le lemme suivant, comme le lemme 5.5, sera démontré ultérieurement.

LEMME. – Pour $\underline{\omega}''$ fixé, la coordonnée $\bar{t}_i(\underline{\omega}')$ ne dépend que de ω_i (ni de $\underline{\omega}'$ ni de ω_j , $j \neq i$). On a de plus

$$c_{13}^{-1} c_X \leq \left| \frac{d\bar{t}_i}{d\omega_i} \right| \leq c_{13} c_X.$$

6.4.5. – On a $d(\underline{\theta}^0, \bar{\theta}) \leq c\rho^D$, $d(\underline{\theta}'^0, \underline{\theta}') \leq c\rho^D$, $|s - s_0| \leq \rho$, $|t - t_0| \leq \rho$ donc après application de $T_{\underline{b}^i}^{\underline{\omega}''} T_{\underline{b}'^i}'$ on obtient

$$|\tilde{t}_i - \bar{t}_i(\underline{0})| \leq cR.$$

Par la propriété (iii') des $(\underline{b}^i, \underline{b}'^i)$, on a

$$|\tilde{t}_i| \leq 2(1 + R),$$

d'où

$$|\bar{t}_i(\underline{0})| \leq 2(1 + R) + cR.$$

D'autre part, on a montré au chapitre précédent que $|L^i| \geq c_7$. Comme L^i ne dépend pas de ω_i , on déduit du lemme de perturbation 6.4.4, si c_X est assez grand, qu'on a

$$\mathbf{P}(\bar{t}_i(\omega_i) \in L^i) \geq c'_8.$$

Dans la fin de la démonstration, nous allons montrer que

$$\bar{t}_i(\omega_i) \in L^i \implies t_i(\underline{\omega}') \in L_{\underline{\omega}'}^+(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i(\underline{\omega}')).$$

Ceci entraînera alors

$$\mathbf{P}(\Omega_1(u) - \Omega_0(u)) \leq (1 - c'_8)^N,$$

soit l'estimation probabiliste requise.

6.4.6. – Supposons que $\underline{\omega}' = (\omega_1, \dots, \omega_N, \underline{\omega}')$ vérifie $\bar{t}_i(\omega_i) \in L^i$. Il existe donc N paires $(\underline{c}, \underline{c}')$ dans $\Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho)$ telles que les images

$$T_{\underline{c}}^{\underline{\omega}^{(i)}} T_{\underline{c}'^i}'(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i(\hat{\omega}), \bar{t}_i(\omega_i)) = (\underline{\Theta}, \underline{\Theta}', \hat{S}, \hat{T})$$

vérifient les conditions (i), (ii), (iii) de la définition de L^i dans 3.4.1.

Le paramètre $\underline{\omega}^{(i)}$ est ici celui obtenu à partir de $\hat{\omega}$ en annulant les coordonnées dans $\Sigma_1(\underline{\theta}^i)$.

Pour voir que $t_i(\underline{\omega}') \in L_{\underline{\omega}'}^+(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i(\underline{\omega}'))$, on va considérer les images

$$T_{\underline{c}}^{\underline{\omega}^{(i)}} T_{\underline{c}'^i}'(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i(\underline{\omega}'), t_i(\underline{\omega}')) = (\underline{\Theta}, \underline{\Theta}', S, T)$$

(où $\underline{\omega}^{(i)}$ est obtenu à partir de $\underline{\omega}$ en annulant les coordonnées dans $\Sigma_1(\underline{\theta}^i)$) et vérifier les propriétés (i), (ii'), (iii') de la définition de L^+ .

6.4.7. – On applique une première fois le lemme de perturbation 5.5. pour obtenir

$$|s_i(\hat{\omega}) - s_i(\underline{\omega}')| \leq cc_X \rho^{1 - \frac{1}{m}}$$

puis une seconde fois pour conclure que :

$$|S - \hat{S}| \leq cc_X \rho^{1 - \frac{1}{m}} \ll \frac{1}{12} \rho^\alpha,$$

ce qui garantit (ii') pour S à partir de (ii) pour \hat{S} .

6.4.8. – Il reste à comparer T et \hat{T} , ce que nous allons faire en comparant successivement les t -composantes de :

$$\begin{aligned} T_{\underline{c}}^{\hat{\omega}(i)} T_{\underline{c}'}'(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i(\hat{\omega}), \bar{t}_i(\omega_i)), \\ T_{\underline{c}}^{\hat{\omega}(i)} T_{\underline{c}'}'(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i(\hat{\omega}), t_i(\omega')), \\ T_{\underline{c}}^{\hat{\omega}(i)} T_{\underline{c}'}'(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i(\omega'), t_i(\omega')), \\ T_{\underline{c}}^{\omega(i)} T_{\underline{c}'}'(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}'^i, s_i(\omega'), t_i(\omega')), \end{aligned}$$

que nous notons respectivement $\hat{T}, \check{T}, \tilde{T}, T$.

Le lemme de perturbation ci-dessous sera démontré ultérieurement :

LEMME. – On a

$$\begin{aligned} |\bar{s}_i(\omega') - \bar{s}_i(\hat{\omega})| &\leq cc_X \rho^{1 + \frac{1}{m}}, \\ |T - \tilde{T}| &\leq cc_X \rho^{\frac{1}{m}}. \end{aligned}$$

Ceci étant, comme on a $d(\underline{\theta}, \bar{\theta}) \leq c\rho^D$, la C^1 -distance de $k^{\underline{\theta}}, k^{\bar{\theta}}$ est au plus de l'ordre de $\rho^{D\alpha}$. On a donc

$$\begin{aligned} |\bar{t}_i(\omega_i) - t_i(\omega')| &\leq c\rho^{D\alpha-1}, \\ |s_i(\hat{\omega}) - \bar{s}_i(\hat{\omega})| &\leq c\rho^{D\alpha}, \\ |s_i(\omega') - \bar{s}_i(\omega')| &\leq c\rho^{D\alpha}. \end{aligned}$$

De la première relation, on tire

$$|\hat{T} - \check{T}| \leq c\rho^{D\alpha-2};$$

les deux suivantes, avec le lemme, donnent

$$|s_i(\omega') - s_i(\hat{\omega})| \leq cc_X \rho^{1 + \frac{1}{m}},$$

d'où

$$|\tilde{T} - \check{T}| \leq cc_X \rho^{1/m}.$$

Compte tenu de la deuxième relation du lemme, on obtient $|T - \hat{T}| = o(1)$: la relation (iii') pour T est donc conséquence de la relation (iii) pour \hat{T} . Ceci termine (modulo la preuve des lemmes de perturbation) la démonstration de la proposition 6.1. \square

6.4.9. – On va indiquer maintenant comment démontrer la proposition 6.3.3, qu'on a utilisée pour démontrer le théorème B*.

Soient $u \in (\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t) \in \tilde{\mathcal{L}} \times \mathbb{R}$ et $\underline{\omega} \in \overline{\Omega}^1(u)$. Il existe donc $(\underline{\theta}^0, \underline{\theta}'^0, s_0) \in \tilde{\mathcal{L}}$ et $t_0 \in \overline{L}_{\underline{\omega}}^+(\underline{\theta}^0, \underline{\theta}'^0, s_0)$ tels que $d(\underline{\theta}, \underline{\theta}^0) \leq 2\rho^D$, $d(\underline{\theta}', \underline{\theta}'^0) \leq 2\rho^D$, $|s - s_0| \leq \rho$, $|t - t_0| \leq \rho$. Comme ci-dessus, on a $\Omega' \times \{\underline{\omega}''\} \subset \overline{\Omega}^1(u)$. Il s'agira de montrer que l'ensemble $\overline{\Omega}'^1(u)$ des $\underline{\omega}' \in \Omega'$ tels que $(\underline{\omega}', \underline{\omega}'') \in \overline{\Omega}^0(u)$ vérifie

$$\mathbf{P}_{\Omega'}(\Omega' \setminus \overline{\Omega}'^1(u)) \leq \exp(-\bar{c}_8 \rho^{-\frac{1}{m}(d+d'-1)}).$$

Soit $u_0 = (\underline{\theta}^0, \underline{\theta}'^0, s_0, t_0)$ comme ci-dessus. Il existe donc des paires $(\underline{b}_k^\ell, \underline{b}'_k^\ell) \in \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho)$, $1 \leq \ell \leq N$, $1 \leq k \leq M$ telles que les images

$$T_{\underline{b}_k^\ell}^{\underline{\omega}^*} T'_{\underline{b}'_k^\ell}(u_0) =: (\tilde{\theta}_k^\ell, \tilde{\theta}'_k{}^\ell, \tilde{s}_k^\ell, \tilde{t}_k^\ell)$$

(avec $\underline{\omega}^* = (0, \underline{\omega}'')$) vérifient les conditions (i'), (i''), (ii'), (iii') de la définition de $\overline{L}_{\underline{\omega}^*}^+(\underline{\theta}^0, \underline{\theta}'^0, s_0)$.

Pour $\underline{\omega}' \in \Omega'$, on pose (avec $\underline{\omega} = (\underline{\omega}', \underline{\omega}'')$)

$$T_{\underline{b}_k^\ell}^{\underline{\omega}} T'_{\underline{b}'_k^\ell}(u) = (\theta_k^\ell, \theta_k{}^\ell, s_k^\ell(\underline{\omega}'), t_k^\ell(\underline{\omega}')).$$

Pour chaque $k \leq M$, on appelle X_k l'ensemble des $\underline{\omega}' \in \Omega'$ tels que $t_k^\ell(\underline{\omega}') \in \overline{L}_{\underline{\omega}^*}^+(\theta_k^\ell, \theta_k{}^\ell, s_k^\ell(\underline{\omega}'))$ pour au moins un indice $\ell \in [1, N]$. On a $\overline{\Omega}'^1(u) \supset \bigcap_{k \leq M} X_k$. Or, on peut montrer comme ci-dessus que $\mathbf{P}(\Omega' \setminus X_k) \leq \exp(-\bar{c}_8 \rho^{-\frac{1}{m}(d+d'-1)})$ pour chaque $k \leq M$, ce qui permet de conclure au vu de la taille de M .

6.4.10. – REMARQUE. – L'argument précédent permet de montrer que les ensembles de difféomorphismes ne satisfaisant pas les conclusions des théorèmes A ou B sont non seulement d'intérieur vide, comme l'affirment ces théorèmes, mais de codimension infinie. Considérons en effet une famille $(F_\mu)_{\mu \in [-1, 1]^r}$ dans $\text{Diff}^\infty(M)$. On suppose que F_μ possède deux fers à cheval $\Lambda_\mu, \Lambda'_\mu$ auxquels on associe des ensembles de Cantor réguliers K_μ, K'_μ définis par des applications (g_μ, g'_μ) comme ci-dessus. On suppose qu'on a, pour tout μ , $HD(K_\mu) + HD(K'_\mu) > 1$.

Considérons une partie $\tilde{\Delta}$ de $[-1, 1]^r$ qui est ρ^D -dense, avec $\#\tilde{\Delta} \leq C\rho^{-Dr}$. Pour chaque $\mu \in [-1, 1]^r$, on considère une famille de perturbations F_μ^ω comme ci-dessus; les familles $\mu \rightarrow F_\mu^\omega$ sont lisses et proches de la famille initiale. Mais l'estimation de probabilité exponentielle permet encore de trouver ω_0 de façon que, pour tout $u \in \Delta$, $\mu \in \tilde{\Delta}$, on ait soit $\omega_0 \in \Omega_\mu^0(u)$, soit $\omega_0 \notin \Omega_\mu^1(U)$. On peut alors, pour chaque $\mu_0 \in \tilde{\Delta}$, construire une partie compacte récurrente \mathcal{L}_{μ_0} pour $(g_{\mu_0}^{\omega_0}, g_{\mu_0}^{\prime\omega_0})$. Cette partie est encore récurrente pour $(g_\mu^{\omega_0}, g_\mu^{\prime\omega_0})$ si $|\mu - \mu_0| < \rho^D$. On conclut que dans l'ensemble des familles (F_μ) comme ci-dessus, la propriété d'avoir un compact récurrent non vide \mathcal{L}_μ , pour toutes les valeurs du paramètre μ , est ouverte et dense.

Dans le cadre du théorème A, on observe que pour une famille générique, il existe pour tout paramètre μ des points périodiques de g_μ, g'_μ tels que le rapport des logarithmes de leurs multiplicateurs soit irrationnel. On conclut que le complémentaire $\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_0^*$ de l'ensemble \mathcal{U}_0^* apparaissant dans le théorème A est de codimension infinie.

7. Preuve des lemmes de perturbation

7.1. – Nous présentons dans ce chapitre la preuve des lemmes de perturbation 5.5, 6.4.4 et 6.4.8. Il s'agit d'évaluer l'effet de la perturbation sur la géométrie du système.

Rappelons qu'on a

$$F^\omega := F \circ \Phi^\omega,$$

Φ^ω étant le temps 1 du flot d'un champ de vecteurs X^ω défini par

$$X^\omega := -c_X \sum_{\Sigma_1} \omega(\underline{a}) X_{\underline{a}}.$$

Dans cette formule, Σ_1 est un ensemble de rectangles disjoints $R(\underline{a})$ de Λ dont les côtés sont approximativement de taille $\rho^{2/m}$ (on spécifiera des propriétés supplémentaires de Σ_1 lorsqu'elles seront nécessaires), $\omega = (\omega(\underline{a}))_{\underline{a} \in \Sigma_1} \in \Omega := [-1, +1]^{\Sigma_1}$ est le paramètre, c_X est une constante assez grande (cf. 6.4.5); pour chaque $\underline{a} \in \Sigma_1$, $X_{\underline{a}}$ est un champ de vecteurs s'écrivant

$$X_{\underline{a}}(x, y) = \rho^{1+\frac{1}{m}} \chi_{\underline{a}}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

On a désigné ici par (x, y) des coordonnées dans le rectangle de la partition de Markov qui contient \underline{a} , telles que $\frac{\partial}{\partial y}$ soit essentiellement dirigé dans la direction instable, et en tous cas partout transverse à la direction stable. La fonction $\chi_{\underline{a}}$ est identiquement égale à 1 dans un $\eta_0 \rho^{2/m}$ -voisinage de $R(\underline{a})$, et identiquement nulle en dehors d'un $\eta_1 \rho^{2/m}$ -voisinage de $R(\underline{a})$ (avec $0 < \eta_0 \ll \eta_1 \ll 1$); on impose aussi que sa C^j -norme soit de l'ordre de $\rho^{-2j/m}$. Ceci entraîne que F^ω sera C^j -proche de F tant que $j < \frac{m+1}{2}$.

7.2. – Commençons par des résultats préliminaires.

7.2.1. – LEMME. – Soient $\underline{\omega} \in \Omega$, $q \in K$ et $q(\underline{\omega})$ la continuation hyperbolique de q . On a

$$d(q(\underline{\omega}), q) \leq cc_X \rho^{1+1/m}.$$

Démonstration. – C'est un cas particulier du lemme de poursuite. □

7.2.2. – LEMME. – Soient $\underline{\omega} \in \Omega$, $\underline{\theta} \in \Sigma^-$, $p \in W^u(\underline{\theta})$. Notons $p(\underline{\omega})$ le point de $W^u(\underline{\theta}, \underline{\omega})$ qui a même ordonnée que p . Pour tout $n \geq 0$, on a

$$d((F^\omega)^{-n}(p(\underline{\omega})), F^{-n}(p)) \leq cc_X \rho^{1+1/m}.$$

Démonstration. – C'est à nouveau une conséquence facile du lemme de poursuite. □

7.2.3. – LEMME. – Soient $\underline{\omega} \in \Omega, \underline{\theta} \in \Sigma^-, p \in W^u(\underline{\theta}), \tilde{p} \in W^u(\underline{\theta}, \underline{\omega}), q \in W^u(\underline{\theta}) \cap \Lambda$. Supposons qu'on ait

$$d(p, q) \leq c' \rho^{2/m}, d(p, \tilde{p}) \leq cc_X \rho^{1+1/m}$$

(avec c' assez petit). Alors, on aura

$$\|D_p F - D_{\tilde{p}} F^\omega\| \leq cc_X \rho^{1+1/m}$$

et une même estimation pour l'angle entre les tangentes à $W^u(\underline{\theta})$ et $W^u(\underline{\theta}, \underline{\omega})$ en p, \tilde{p} respectivement.

Démonstration. – L'hypothèse sur p, \tilde{p} entraîne qu'on a

$$d(F^{-n}(p), (F^\omega)^{-n}(\tilde{p})) \leq cc_X \rho^{1+\frac{1}{m}}$$

pour tout $n \geq 0$. Comme l'orbite négative de p par F reste $c' \rho^{2/m}$ proche de Λ , on aura que F^ω au voisinage de $(F^\omega)^{-n}(\tilde{p})$ est égal à F ou à la composition de F par une translation verticale. On aura en particulier

$$\|D_{p_n} F - D_{\tilde{p}_n} F^\omega\| \leq cc_X \rho^{1+1/m}$$

(avec $p_n = F^{-n}(p), \tilde{p}_n = (F^\omega)^{-n}(\tilde{p})$) pour $n \geq 0$ ce qui entraîne les deux estimations du lemme. \square

7.3. Preuve de l'estimation (i) dans le lemme 5.5

PROPOSITION. – Soient $\underline{\theta} \in \Sigma^-, \underline{\omega} \in \Omega, z \in I(\theta_0) \cap K$; notons z^ω la continuation hyperbolique de z . On a :

$$|k^{\underline{\theta}, \underline{\omega}}(z^\omega) - k^{\underline{\theta}}(z)| \leq cc_X \rho^{1-1/m}.$$

Démonstration. – Notons (\hat{x}, \hat{y}) les coordonnées de l'image de z dans $W^u(\underline{\theta}), (x, y)$ et (x', y') celles des images des extrémités de $I(\theta_0)$. Notons $(\hat{x}_n, \hat{y}_n), (x_n, y_n), (x'_n, y'_n)$ les coordonnées des images par F^{-n} des points précédents (images appartenant à $W^u(\sigma^{-n}(\underline{\theta}))$); notons enfin $(\hat{x}_n(\underline{\omega}), \hat{y}_n(\underline{\omega}), (x_n(\underline{\omega}), y_n(\underline{\omega}), (x'_n(\underline{\omega}), y'_n(\underline{\omega}))$ les mêmes quantités pour F^ω .

Définissons

$$\Delta_n := \frac{\hat{y}_n - y_n}{y'_n - y_n}, \Delta_n(\underline{\omega}) := \frac{\hat{y}_n(\underline{\omega}) - y_n(\underline{\omega})}{y'_n(\underline{\omega}) - y_n(\underline{\omega})}$$

de sorte qu'on a

$$k^{\underline{\theta}}(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n,$$

$$k^{\underline{\theta}, \underline{\omega}}(z^\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n(\underline{\omega}).$$

D'après le lemme 7.2.1, on a, pour $\underline{\omega} \in \Omega$:

$$|\hat{x}_n - \hat{x}_n(\underline{\omega})| \leq cc_X \rho^{1+1/m},$$

$$|\hat{y}_n - \hat{y}_n(\underline{\omega})| \leq cc_X \rho^{1+1/m}.$$

D'après le lemme 7.2.2, la même majoration vaut pour $|x_n - x_n(\underline{\omega})|, |x'_n - x'_n(\underline{\omega})|, |y_n - y_n(\underline{\omega})|, |y'_n - y'_n(\underline{\omega})|$. On aura donc

$$|\Delta_n(\underline{\omega}) - \Delta_n| \leq cc_X \rho^{1-1/m}$$

tant que $|y_n - y'_n|$ est au moins de l'ordre de $\rho^{2/m}$. Pour les valeurs supérieures de n , notons $\{x = \psi_n(y)\}$ l'équation de $W^u(\sigma^{-n}(\underline{\theta}))$ et $\varphi_n(y)$ la seconde coordonnée de $F^{-1}(\psi_n(y), y)$. On a

$$\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = \frac{\int_0^1 D\varphi_n(y_n + t(\hat{y}_n - y_n))dt}{\int_0^1 D\varphi_n(y_n + t(y'_n - y_n))dt}$$

et une formule similaire pour $\Delta_{n+1}(\underline{\omega})/\Delta_n(\underline{\omega})$. D'après le lemme 7.2.3 qui permet de comparer ψ_n et $\psi_n^{\underline{\omega}}$, on a

$$|D\varphi_n(y_n + t(\hat{y}_n - y_n)) - D\varphi_n^{\underline{\omega}}(y_n(\underline{\omega}) + t(\hat{y}_n(\underline{\omega}) - y_n(\underline{\omega})))| \leq cc_X \rho^{1+1/m}$$

et la même estimation avec $y'_n, y'_n(\underline{\omega})$ au lieu de $\hat{y}_n, \hat{y}_n(\underline{\omega})$. On a donc (dès que $|y_n - y'_n|$ est au plus de l'ordre de $\rho^{2/m}$) :

$$\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} - \frac{\Delta_{n+1}(\underline{\omega})}{\Delta_n(\underline{\omega})} \leq cc_X \rho^{1+1/m}.$$

Ceci entraîne qu'on a maintenant

$$|\Delta_n(\underline{\omega}) - \Delta_n| \leq cc_X \rho^{1-1/m}$$

tant que $n \leq \rho^{-2/m}$. Comme on a par ailleurs, pour tout n_0

$$|\Delta_{n_0} - \lim_n \Delta_n| \leq c|y_{n_0} - y'_{n_0}|,$$

$$|\Delta_{n_0}(\underline{\omega}) - \lim_n \Delta_n(\underline{\omega})| \leq c|y_{n_0}(\underline{\omega}) - y'_{n_0}(\underline{\omega})|,$$

avec les membres de droite décroissant géométriquement, on obtient l'estimation recherchée. \square

7.4. Preuve de l'estimation (ii) dans le lemme 5.5

PROPOSITION. – Soient $\underline{\theta} \in \Sigma^-$, $\underline{\omega} \in \Omega$ et \underline{a} un mot de Σ commençant par θ_0 . On a :

$$|\log |k^{\underline{\theta}, \underline{\omega}}(I(\underline{a}))| - \log |k^{\underline{\theta}}(I(\underline{a}))|| \leq cc_X \rho^{1-1/m}.$$

Démonstration. – On désigne toujours par $(x, y), (x', y')$ les coordonnées des images des extrémités de $I(\theta_0)$ dans $W^u(\underline{\theta})$, et on désigne par $(u, v), (u', v')$ celle des extrémités de $I(\underline{a})$ dans $W^u(\underline{\theta})$. Les conventions pour $(u_n, v_n), (u_n(\underline{\omega}), v_n(\underline{\omega})), \dots$ sont les mêmes que précédemment. On pose

$$\bar{\Delta}_n(\underline{\omega}) = \frac{v'_n(\underline{\omega}) - v_n(\underline{\omega})}{y'_n(\underline{\omega}) - y_n(\underline{\omega})},$$

de sorte qu'on a

$$\frac{|k^{\underline{\theta}, \underline{\omega}}(I(\underline{a}))|}{|k^{\underline{\theta}}(I(\underline{a}))|} = \frac{|I^{\underline{\theta}, \underline{\omega}}(\underline{a})|}{|I^{\underline{\theta}}(\underline{a})|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\bar{\Delta}_n(\underline{\omega})}{\bar{\Delta}_n(\underline{0})}.$$

D'après le lemme 7.2.2, on a

$$|v'_n(\underline{\omega}) - v'_n| \leq cc_X \rho^{1+1/m},$$

avec la même estimation pour $|y_n(\underline{\omega}) - y_n|, |y'_n - y'_n(\underline{\omega})|, |v_n(\underline{\omega}) - v_n|, \dots$

On aura donc

$$(*) \quad \left| \log \frac{|v'_n(\underline{\omega}) - v_n(\underline{\omega})|}{|v'_n - v_n|} \right| \leq cc_X \rho^{1-1/m},$$

tant que $|v'_n - v_n|$ est au moins de l'ordre de $\rho^{2/m}$; lorsque $|v'_n - v_n|$ est au contraire petit devant $\rho^{2/m}$, on obtient comme en 7.3 :

$$\left| \log \frac{|v'_{n+1}(\underline{\omega}) - v_{n+1}(\underline{\omega})|}{|v'_n(\underline{\omega}) - v_n(\underline{\omega})|} - \log \frac{|v'_{n+1} - v_{n+1}|}{|v'_n - v_n|} \right| \leq cc_X \rho^{1+1/m}.$$

On obtient donc encore (*) pour $n \leq \rho^{-2/m}$.

De la même façon, pour $n \leq \rho^{-2/m}$, on obtient

$$\left| \log \frac{|y'_n(\underline{\omega}) - y_n(\underline{\omega})|}{|y'_n - y_n|} \right| \leq cc_X \rho^{1-1/m}.$$

Par ailleurs, on a, pour $n_0 \geq 0$

$$\begin{aligned} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Delta}_n(\underline{\omega}) - \bar{\Delta}_{n_0}(\underline{\omega}) \right| &\leq c |y'_{n_0}(\underline{\omega}) - y_{n_0}(\underline{\omega})|, \\ \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Delta}_n(\underline{0}) - \bar{\Delta}_{n_0}(\underline{0}) \right| &\leq c |y'_{n_0} - y_{n_0}|, \end{aligned}$$

ce qui aboutit à l'estimation désirée. \square

7.5. Preuve du lemme 6.4.4 et de la première assertion du lemme 6.4.8

Le contexte pour ces deux résultats est le même. On se donne $\bar{\theta} \in \Sigma^-$, $\theta' \in \Sigma'^-$, $s \in J_R$, $t \in \mathbb{R}$, $\underline{\omega} \in \Omega$, $\underline{b} \in \Sigma(\rho)$, $\underline{b}' \in \Sigma'(\rho)$ avec $b_0 = \bar{\theta}_0$, $b'_0 = \theta'_0$. On pose

$$T_{\underline{b}}^{\underline{\omega}} T_{\underline{b}'}^{\theta'}(\underline{\theta}, \theta', s, t) = (\hat{\theta}, \hat{\theta}', \hat{s}(\underline{\omega}), \hat{t}(\underline{\omega})).$$

On suppose qu'il existe un mot final $\underline{d} = (\theta_{-r}, \dots, \theta_0)$ de $\underline{\theta}$ dans $\Sigma(\rho^{1/m})$ qui n'apparaît qu'une seule fois dans $\hat{\underline{\theta}}$. La famille Σ_1 de rectangles disjoints de taille approximative $\rho^{2/m}$ qui sert de support à la perturbation vérifie ici les propriétés suivantes : chacun des rectangles rencontre $F^{-r}(W^u(\underline{\theta}))$, et leur union contient $F^{-r}(W^u(\underline{\theta}) \cap \Lambda)$.

Finalement, en écrivant $\underline{b} = (b_0, \dots, b_k)$, on note R_0 le rectangle de Σ_1 qui contient $F^{-r-k}(W^u(\hat{\underline{\theta}})) \subset F^{-r}(W^u(\underline{\theta}))$ et ω_0 la coordonnée correspondante de $\underline{\omega}$.

PROPOSITION. – *Les coordonnées $\hat{s}(\underline{\omega})$, $\hat{t}(\underline{\omega})$ ne dépendent pas des coordonnées de $\underline{\omega}$ autres que ω_0 . De plus, on a*

$$\begin{aligned} c^{-1} c_X &\leq \left| \frac{d\hat{t}}{d\omega_0} \right| \leq cc_X, \\ |\hat{s}(\omega_0) - \hat{s}(0)| &\leq cc_X \rho^{1+1/m}. \end{aligned}$$

Démonstration. – Les propriétés de \underline{d} et Σ_1 impliquent qu'aucune variété instable locale $W^u(\sigma^{-n}(\underline{\theta}))$, $n > r$, ne rencontre un rectangle de Σ_1 . Comme $(F^{\underline{\omega}})^{-1} = (\Phi^{\underline{\omega}})^{-1} \circ F^{-1}$, il en résulte que les variétés instables $W^u(\sigma^{-n}(\underline{\theta}))$, $n \geq r$, sont indépendantes de $\underline{\omega}$; il en est de même de l'application $k^{\sigma^{-r}(\underline{\theta})}$.

Notons q, q' les images des extrémités de $I(\hat{\theta}_0)$ dans $W^u(\hat{\underline{\theta}})$ avant perturbation. Les points $F^{-i}(q), F^{-i}(q')$ pour $0 \leq i < r + k$ ne sont contenus dans aucun rectangle de Σ_1 (toujours d'après les propriétés de Σ_1 et \underline{d}) et les points $F^{-(r+k)}(q), F^{-(r+k)}(q')$ sont contenus dans R_0 .

En notant $q(\underline{\omega}), q'(\underline{\omega})$ la continuation hyperbolique de q, q' , on conclut que les points $F^{-i}(q(\underline{\omega})), F^{-i}(q'(\underline{\omega}))$ pour $i \geq 0$ sont indépendants des coordonnées de $\underline{\omega}$ autres que ω_0 , ce qui démontre la première assertion de la proposition puisque $k^{\sigma^{-r}(\underline{\theta})}$ est indépendant de $\underline{\omega}$.

Examinons maintenant la dépendance par rapport à ω_0 . Les points $q(\underline{\omega})$, $q'(\underline{\omega})$ sont situés sur des petits segments horizontaux Γ, Γ' (de longueur $cc_X \rho^{1+1/m}$), cf. lemme 7.2.1 centrés en q, q' respectivement. Pour $0 \leq i \leq r+k$, notons Γ_i, Γ'_i les morceaux de $F^{-i}(\Gamma), F^{-i}(\Gamma')$ de longueur $cc_X \rho^{1+1/m}$ autour de $F^{-i}(q), F^{-i}(q')$. Pour $i < r+k$, Γ_i et Γ'_i ne rencontrent aucun rectangle de Σ_1 donc contiennent $F^{-i}(q(\underline{\omega})), F^{-i}(q'(\underline{\omega}))$ respectivement. Par contre, $(\Phi^{\underline{\omega}})^{-1}$ coïncide au voisinage de $\Gamma_{r+k}, \Gamma'_{r+k}$ avec la translation verticale τ de longueur $c_X \omega_0 \rho^{1+1/m}$. Les points $F^{-(r+k)}(q(\underline{\omega})), F^{-(r+k)}(q'(\underline{\omega}))$ sont donc les intersections de la courbe $W^u(\sigma^{-r}(\underline{\theta}))$ (indépendante de $\underline{\omega}$) avec les courbes $\tau(\Gamma_{r+k}), \tau(\Gamma'_{r+k})$ respectivement.

La coordonnée verticale $y(\underline{\omega}) = y(\omega_0)$ de $F^{-(r+k)}(q(\underline{\omega}))$ vérifie donc

$$c^{-1} c_X \rho^{1+1/m} \leq \frac{dy}{d\omega_0} \leq cc_X \rho^{1+1/m}.$$

Comme $k^{\sigma^{-r}(\underline{\theta})}$ ne dépend pas de $\underline{\omega}$, on en déduit

$$c^{-1} c_X \leq \frac{d\hat{t}}{d\omega_0} \leq cc_X.$$

Notons de même $y'(\omega_0)$ la coordonnée verticale de $F^{-(r+k)}(q'(\underline{\omega}))$. Pour comparer $\hat{s}(\omega_0)$ et $\hat{s}(0)$, il faut estimer le rapport

$$\chi = \frac{k(y(\omega_0)) - k(y'(\omega_0))}{k(y(0)) - k(y'(0))}$$

où $k = k^{\sigma^{-r}(\underline{\theta})}$. Posons

$$\chi_0 = \frac{y(\omega_0) - y'(\omega_0)}{y(0) - y'(0)}.$$

Comme les points $y(0), y(\omega_0), y'(0), y'(\omega_0)$ sont au plus distants de $cc_X \rho^{1+1/m}$, on a

$$\left| \text{Log} \frac{\chi}{\chi_0} \right| \leq cc_X \rho^{1+1/m}.$$

D'autre part, les courbes $\Gamma_{r+k}, \Gamma'_{r+k}$ sont $\rho^{1+1/m}$ proches dans la C^1 -topologie. Ceci permet de comparer les points d'intersection de $\Gamma_{r+k}, \tau(\Gamma_{r+k}), \Gamma'_{r+k}, \tau(\Gamma'_{r+k})$ avec $W^u(\sigma^{-r}(\underline{\theta}))$ et d'obtenir

$$|\text{Log} \chi_0| \leq cc_X \rho^{1+1/m}.$$

Ceci entraîne la dernière estimation de la proposition. \square

7.6. Preuve de la deuxième assertion du lemme 6.4.8

On va d'abord démontrer un résultat dont le contexte est le même que dans la section précédente. On en déduira ensuite facilement la deuxième assertion du lemme 6.4.8.

On se donne donc $\underline{\theta} \in \Sigma^-, \underline{\theta}' \in \Sigma', s \in J_R, t \in \mathbb{R}, \underline{b} \in \Sigma(\rho), \underline{b}' \in \Sigma'(\rho)$ avec $b_0 = \theta_0, b'_0 = \theta'_0$ comme précédemment, et on pose

$$T_{\underline{b}} T'_{\underline{b}'}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t) = (\hat{\underline{\theta}}, \hat{\underline{\theta}'}, \hat{s}, \hat{t}).$$

On suppose à nouveau qu'il existe un mot final $\underline{d} = (\theta_{-r}, \dots, \theta_0)$ de $\underline{\theta}$ dans $\Sigma(\rho^{1/m})$ n'apparaissant qu'une fois dans $\hat{\underline{\theta}}$.

La famille Σ_1 de rectangles disjoints de taille approximative $\rho^{2/m}$ qui sert de support à la perturbation vérifie les propriétés suivantes : chacun des rectangles rencontre $F^{-r}(W^u(\underline{\theta}))$

et l'un, noté R_0 , contient $F^{-r-k}(W^u(\hat{\theta}))$; on a noté à nouveau ω_0 la coordonnée correspondante.

On se donne de plus $\underline{c} \in \Sigma(\rho)$, $\underline{c}' \in \Sigma'(\rho)$ avec $c_0 = \hat{\theta}_0$, $c'_0 = \hat{\theta}'_0$ et on pose

$$T_{\underline{c}}^{\omega} T_{\underline{c}'}'(\hat{\theta}, \hat{\theta}', \hat{s}, \hat{t}) = (\underline{\Theta}, \underline{\Theta}', S(\underline{\omega}), T(\underline{\omega})).$$

On suppose que le mot final \underline{d} de $\underline{\theta}$ n'apparaît qu'une fois dans $\underline{\Theta}$.

PROPOSITION. – Les fonctions $S(\underline{\omega}), T(\underline{\omega})$ ne dépendent pas des coordonnées de $\underline{\omega}$ distinctes de ω_0 . On a de plus

$$\left| \frac{dT}{d\omega_0} \right| \leq cc_X \rho^{1/m}.$$

Démonstration. – Notons Q, Q' les images des extrémités de $I(\Theta_0)$ dans $W^u(\Theta)$ avant perturbation. Les points $F^{-i}(Q), F^{-i}(Q')$ pour $i \geq 0$ ne sont contenus dans aucun rectangle de Σ_1 distinct de R_0 . Leurs continuations hyperboliques sont donc indépendantes des coordonnées de $\underline{\omega}$ distinctes de ω_0 , et la première assertion de la proposition en résulte.

La continuation hyperbolique $Q(\omega_0)$ est située sur un petit segment horizontal Γ^* (de longueur $cc_X \rho^{1+1/m}$, cf. lemme 7.2.1) centré en Q . Pour $0 \leq i < r+k+\hat{k}$ (avec $\underline{c} = (c_0, \dots, c_{\hat{k}})$), notons Γ_i^* le morceau de $F^{-i}(\Gamma^*)$ de longueur $cc_X \rho^{1+1/m}$ autour de $F^{-i}(Q)$. Pour $0 \leq i < r+k+\hat{k}$, Γ_i^* contient $F^{-i}(Q(\omega_0))$. Le point $F^{-(r+k+\hat{k})}(Q(\omega_0))$ est donc l'intersection de $W^u(\sigma^{-r}(\underline{\theta}))$ avec la courbe $\tau(\Gamma_{r+k+\hat{k}}^*)$, où τ désigne comme en 7.5 la translation verticale de longueur $c_X \omega_0 \rho^{1+1/m}$.

Notons $y(\omega_0), y'(\omega_0), y^*(\omega_0)$ les coordonnées verticales respectives de $F^{-(r+k)}(q(\omega_0)), F^{-(r+k)}(q'(\omega_0)), F^{-(r+k+\hat{k})}(Q(\omega_0))$ (où q, q' ont été définis en 7.5). Comme les courbes $\Gamma_{r+k}, \Gamma'_{r+k}, \Gamma_{r+k+\hat{k}}^*$ sont $\rho^{1+1/m}$ proches dans la C^1 -topologie, il résulte du théorème des fonctions implicites qu'on a

$$\left| \frac{dy}{d\omega_0} - \frac{dy^*}{d\omega_0} \right| + \left| \frac{dy'}{d\omega_0} - \frac{dy^*}{d\omega_0} \right| \leq cc_X \rho^{2+2/m}.$$

Comme $k^{\sigma^{-r}(\underline{\theta})}$ est indépendant de $\underline{\omega}$, ceci fournit, compte tenu des changements d'échelles, l'estimation de la proposition. \square

7.7. Preuve de la deuxième assertion de 6.4.8

La composante $\underline{\theta} \in \Sigma^-$ dans le lemme 6.4.8 ne satisfait pas toujours les hypothèses de la proposition ci-dessus : le mot final \underline{d} pourrait apparaître plus d'une fois. Toutefois, on sait que $\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}$ et $\underline{\Theta}$ appartiennent Σ_{nr}^- . Cela permet d'approcher $\underline{\theta}$ par un élément $\bar{\underline{\theta}}$ vérifiant les hypothèses de la proposition : on a

$$d(\underline{\theta}, \bar{\underline{\theta}}) \leq c\rho^D$$

et \underline{d} (mot final commun $\underline{\theta}$ et $\bar{\underline{\theta}}$) n'apparaît qu'une fois dans $\bar{\underline{\Theta}} := (\dots, \bar{\theta}_{-n}, \dots, \bar{\theta}_0, b_1, \dots, c_{\hat{k}})$.

On compare les t -composantes de $T_{\underline{c}} T_{\underline{c}'}' T_{\underline{b}} T_{\underline{b}'}'$ en $\underline{\theta}$ et $\bar{\underline{\theta}}$ (pour les mêmes valeurs de ω, θ', s, t). Comme on a

$$d(\underline{\theta b}, \bar{\underline{\theta b}}) \leq c\rho^{D+1},$$

les applications $k^{\underline{\theta b}}, k^{\bar{\underline{\theta b}}}$ sont C^0 distantes d'au plus $c\rho^{(D+1)\alpha}$, ce qui donne

$$|T - \bar{T}| \leq c\rho^{(D+1)\alpha-1} \ll \rho^{1/m}.$$

Cette estimation, jointe à celle de la proposition, termine la preuve de la deuxième assertion du lemme 6.4.8. \square

8. De la propriété $(H\alpha)$ à la propriété de récurrence d'échelles

8.1. – Dans [6, p. 85–95], on trouvera la preuve de la propriété de récurrence d'échelles pour $\alpha = 1$ sous l'hypothèse $(H'1)$ de 3.2.4; il est facile de vérifier que $(H'1)$ n'est exploitée qu'à travers sa conséquence $(H1)$.

Passer du cas $\alpha = 1$ au cas général $\alpha \in (0, 1]$ n'exige que des modifications minimales que nous allons indiquer en reprenant les grandes étapes de la preuve de [6].

8.2. – On suppose que g ou g' a un point périodique dont la valeur propre est négative (l'autre cas est plus simple). On pose

$$\begin{aligned} Z &= \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho) \times \{-1, +1\}, \\ A &= \mathbf{A} \times \mathbf{A}' \times \{-1, +1\}; \end{aligned}$$

pour $(\underline{a}, \underline{a}', u) \in Z$, on pose

$$\begin{aligned} \alpha(\underline{a}, \underline{a}', u) &= (a_0, a'_0, uw) \\ \omega(\underline{a}, \underline{a}', u) &= (a_n, a'_n, u), \end{aligned}$$

où a_0, a'_0 sont les premières lettres de $\underline{a}, \underline{a}'$, a_n, a'_n en sont les dernières, et on a $w = +1$ ou -1 suivant que $f_{\underline{a}}$ et $f'_{\underline{a}'}$ ont ou non la même orientation.

On introduit, pour $i \in A$

$$N_i = \#\{\lambda \in Z, \alpha(\lambda) = i\}.$$

On considère ensuite la matrice stochastique

$$p_{\bar{\lambda}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega(\lambda) \neq \alpha(\bar{\lambda}) \\ N_i^{-1} & \text{si } \omega(\lambda) = \alpha(\bar{\lambda}) = i. \end{cases}$$

Notons $(p^\lambda)_{\lambda \in Z}$ le vecteur propre positif à gauche de cette matrice, normalisé par $\Sigma p^\lambda = 1$; toutes ses coordonnées sont d'ordre $\rho^{d+d'}$.

Pour $\lambda = (\underline{a}, \underline{a}', u), \bar{\lambda} = (\underline{b}, \underline{b}', v) \in Z$ tels que $\omega(\lambda) = \alpha(\bar{\lambda})$, posons

$$a_{\bar{\lambda}} = \log |I^{\underline{\theta}'}(\underline{b}')| - \log |I^{\underline{\theta}}(\underline{b})|$$

où on a choisi arbitrairement $\underline{\theta} \in \Sigma^-, \underline{\theta}' \in \Sigma'^-$ se terminant respectivement par $\underline{a}, \underline{a}'$. Ayant muni \mathbb{C}^Z de la norme hermitienne

$$\|z\|^2 = \sum_Z p^\lambda |z_\lambda|^2,$$

on considère, pour $\xi \geq 1$, l'opérateur $w = U_\xi(z)$ défini par

$$w_\lambda := \sum_{\bar{\lambda} \in Z} p_{\bar{\lambda}}^\lambda e^{i\xi a_{\bar{\lambda}}} z_{\bar{\lambda}}$$

qui est de norme ≤ 1 .

8.3. – La première étape [6, prop. p. 87, cor. p. 89] est le résultat abstrait suivant, où on désigne par $V_\delta(E)$ le δ -voisinage d'une partie $E \subset \mathbb{R}$

Soient $0 < \kappa_0 < 1, \bar{\rho} \in (0, 1)$. Supposons qu'on ait

$$(\hat{H}(\bar{\rho})) \quad \|U_\xi\| \leq \kappa_0 \quad \text{pour } 1 \leq \xi \leq \bar{\rho}^{-1}.$$

Il existe alors $0 < \kappa_4 < 1, \varepsilon_1 > 0, 0 < \tau < 1, \Delta > 0$ dépendant uniquement de κ_0 (pas de $\bar{\rho}$) tels que, pour toute famille $(E_\lambda)_{\lambda \in Z}$ de parties mesurables de \mathbb{R} vérifiant

$$|V_{\Delta\bar{\rho}}(E_\lambda)| \leq \varepsilon_1, \quad \forall \lambda \in Z$$

quand on pose, pour $\lambda \in Z$ avec $\omega(\lambda) = i$:

$$\hat{n}_\lambda(x) = N_i^{-1} \#\{\bar{\lambda}, \alpha(\bar{\lambda}) = i, [x - 2\bar{\rho}, x + 2\bar{\rho}] \cap (E_{\bar{\lambda}} - a_{\bar{\lambda}}) \neq \emptyset\}$$

$$\hat{E}_\lambda = \{x, \hat{n}_\lambda(x) > \tau\};$$

alors on a

$$\sum_Z p^\lambda |V_{\Delta\bar{\rho}}(\hat{E}_\lambda)| \leq \kappa_4 \sum_Z p^\lambda |V_{\Delta\bar{\rho}}(E_\lambda)|.$$

Par rapport à [6], on s'est contenté de fixer $\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 2$ et d'écrire $\bar{\rho}$ au lieu de ρ ; la preuve est inchangée.

8.4. – Revenons dans le contexte (cf. 3.2.3) de la propriété de récurrence d'échelles. Posons $r = \log R$ et donnons-nous une collection d'ensembles $E(\underline{a}, \underline{a}') \subset J_R$, pour $(\underline{a}, \underline{a}') \in \Sigma(\rho) \times \Sigma'(\rho)$. Pour $\lambda = (\underline{a}, \underline{a}', u) \in Z$, posons

$$F(\lambda) = \{x, ue^x \in E(\underline{a}, \underline{a}')\} \subset [-r, +r],$$

$$E_0(\lambda) = [-r, +r] \setminus V_{\Delta\bar{\rho}}(F(\lambda)).$$

On définit ensuite inductivement (pour $c_3 > 0$ assez petit)

$$E_{n+1}(\lambda) = E_0(\lambda) \cup \hat{E}_n(\lambda),$$

où $\hat{E}_n(\lambda)$ est formé des $x \in [-r, +r]$ pour lesquels moins de $c_3 \rho^{-(d+d')}$ indices $\bar{\lambda} \in Z$ vérifient $\alpha(\bar{\lambda}) = \omega(\lambda)$ et

$$[x + a_{\bar{\lambda}} - 2\bar{\rho}, x + a_{\bar{\lambda}} + 2\bar{\rho}] \subset [-r, +r] \setminus E_n(\lambda).$$

(Les $\hat{E}_n(\lambda)$ sont une version «à bord» des $\hat{E}_n(\lambda)$.) Comme en [6, lemme 6.6, p. 91], on obtient

$$\sum_\lambda p^\lambda |V_{\Delta\bar{\rho}}(\hat{E}_n(\lambda))| \leq \kappa_5 \sum_\lambda p^\lambda |V_{\Delta\bar{\rho}}(E_n(\lambda))|,$$

avec une constante $\kappa_5 \in (0, 1)$. Il suffit alors de poser

$$E_\infty(\lambda) = \bigcup_{n \geq 0} E_n(\lambda),$$

$$F_\infty(\lambda) = [-r, +r] \setminus E_\infty(\lambda),$$

$$E^*(\underline{a}, \underline{a}') = \{e^x, x \in F_\infty(\underline{a}, \underline{a}', +1)\} \cup \{-e^x, x \in F_\infty(\underline{a}, \underline{a}', -1)\},$$

pour obtenir $F_\infty(\lambda) \subset V_{\Delta\bar{\rho}}(F(\lambda))$ et

$$\sum p^\lambda |V_{\Delta\bar{\rho}}(E_\infty(\lambda))| \leq (1 - \kappa_5)^{-1} \max_Z |V_{\Delta\bar{\rho}}(E_0(\lambda))| \leq (1 - \kappa_5)^{-1} (2\Delta\bar{\rho} + \bar{c}_1)$$

avec

$$\bar{c}_1 = \max_Z |[-r, +r] - F(\lambda)|.$$

On prend $\bar{\rho} = \rho^\alpha$. La propriété (i) des $E^*(\underline{a}, \underline{a}')$ dans 3.2.3 résulte de $F_\infty(\lambda) \subset V_{\Delta\bar{\rho}}(F(\lambda))$.

Si l'on prend c_1 assez petit, \bar{c}_1 et $\bar{\rho}$ sont petits, et donc

$$\sum p^\lambda |V_{\Delta\bar{\rho}}(E_\infty(\lambda))| \leq (1 - \kappa_5)^{-1} (2\Delta\bar{\rho} + \bar{c}_1)$$

est petit. Comme tous les p^λ sont d'ordre $\rho^{d+d'}$ (et alors du même ordre que $1/|Z|$), l'estimation précédente implique $\frac{1}{|Z|} \sum_{\lambda \in Z} |E_\infty(\lambda)| \leq \frac{1}{|Z|} \sum_{\lambda \in Z} |V_{\Delta\bar{\rho}}(E_\infty(\lambda))|$, qui est petit, d'où on obtient la propriété (ii) des $E^*(\underline{a}, \underline{a}')$ dans 3.2.3.

Pour la propriété (iii), on observe d'abord que par construction de $F_\infty(\lambda)$

$$\#\{\bar{\lambda} \in Z, \alpha(\bar{\lambda}) = \omega(\lambda), [x - 2\rho^\alpha, x + 2\rho^\alpha] \subset F_\infty(\bar{\lambda}) - a_{\bar{\lambda}}^{\bar{\lambda}}\} \geq c_3 \rho^{-(d+d')}.$$

D'autre part, si $\underline{\theta}^0, \underline{\theta}^1 \in \Sigma^-$ se terminent par le même mot $\underline{a} \in \Sigma(\rho)$, on a, pour tout mot $\underline{b} \in \Sigma(\rho)$ commençant par la dernière lettre de \underline{a} :

$$|\log |I^{\underline{\theta}^0}(\underline{b})| - \log |I^{\underline{\theta}^1}(\underline{b})|| \leq \frac{1}{2} \rho^\alpha$$

(sous la condition 3.2.2), et une estimation similaire sur K' . On obtient donc les trois propriétés requises pour les $E^*(\underline{a}, \underline{a}')$.

8.5. – Il reste à montrer comment la propriété ($\hat{H}(\bar{\rho})$) de 8.3 se déduit (avec $\bar{\rho} = \rho^\alpha$) de (H_α). On suit ici [6, p. 92]. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $1 \leq \xi \leq \rho^{-\alpha}$, $z \in \mathbb{C}^Z$, $\eta_0 \ll 1$ tels qu'on ait, avec $w = U_\xi(z)$:

$$\begin{aligned} 1 &= \|z\|^2 = \sum p^\lambda |z_\lambda|^2, \\ 1 - \eta_0 &\leq \|w\|^2 = \sum p^\lambda |w_\lambda|^2. \end{aligned}$$

Comme on a toujours

$$|w_\lambda|^2 \leq \sum p^{\bar{\lambda}} |z_{\bar{\lambda}}|^2$$

et que tous les p^λ sont du même ordre $\rho^{d+d'}$, il doit exister $\eta_1 = \eta_1(\eta_0) \ll 1$, $\tilde{Z} \subset Z$ tels qu'on ait

$$\begin{aligned} \#(Z - \tilde{Z}) &\leq \eta_1 \rho^{-(d+d')}, \\ |w_\lambda|^2 &\geq (1 - \eta_1) \sum p^{\bar{\lambda}} |z_{\bar{\lambda}}|^2, \forall \lambda \in \tilde{Z}. \end{aligned}$$

Lorsque $\omega(\lambda) = \alpha(\bar{\lambda})$, posons $Z_{\bar{\lambda}}^{\bar{\lambda}} = \exp(i\xi a_{\bar{\lambda}}^{\bar{\lambda}}) z_{\bar{\lambda}}$; on a, pour tout $\lambda \in Z$:

$$-|w_\lambda|^2 + \sum_{\alpha(\bar{\lambda})=\omega(\lambda)} p^{\bar{\lambda}} |z_{\bar{\lambda}}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha(\bar{\lambda}_0)=\omega(\lambda) \\ \alpha(\bar{\lambda}_1)=\omega(\lambda)}} p^{\bar{\lambda}_0} p^{\bar{\lambda}_1} |Z_{\bar{\lambda}_0}^{\bar{\lambda}_0} - Z_{\bar{\lambda}_1}^{\bar{\lambda}_1}|^2.$$

Il doit donc exister $\eta_2 \ll 1$ tels qu'on ait, pour $\lambda \in \tilde{Z}$

$$\sum_{\substack{\alpha(\bar{\lambda}_0)=\omega(\lambda) \\ \alpha(\bar{\lambda}_1)=\omega(\lambda)}} |Z_{\bar{\lambda}_0}^{\bar{\lambda}_0} - Z_{\bar{\lambda}_1}^{\bar{\lambda}_1}|^2 \leq \eta_2 \rho^{-2(d+d')}$$

(en effet, tous les $p^{\bar{\lambda}'}$ sont d'ordre $\rho^{d+d'}$).

On introduit la moyenne

$$Z_\lambda = N_{\omega(\lambda)}^{-1} \sum_{\alpha(\bar{\lambda})=\omega(\lambda)} Z_\lambda^{\bar{\lambda}}$$

et on écrit

$$z_{\bar{\lambda}} = \exp(-i\xi a_{\bar{\lambda}}) Z_\lambda + \tilde{Z}_\lambda^{\bar{\lambda}}.$$

On voit que $|Z_\lambda|$ est d'ordre 1 et qu'il existe $\eta_3 \ll 1$ tel qu'on ait, pour $\lambda \in \tilde{Z}$:

$$\sum_{\alpha(\bar{\lambda})=\omega(\lambda)} |\tilde{Z}_\lambda^{\bar{\lambda}}|^2 \leq \eta_3 \rho^{-(d+d')}.$$

Finalement pour $\lambda_0, \lambda_1 \in \tilde{Z}, \bar{\lambda} \in Z$ tels que $\omega(\lambda_0) = \omega(\lambda_1) = \alpha(\bar{\lambda})$, on compare les deux expressions pour $z_{\bar{\lambda}}$ ci-dessus : il existe $\eta_4 \ll 1$ tel qu'on ait

$$\sum_{\alpha(\bar{\lambda})=\omega(\lambda_0)} \left| \exp(ia_{\lambda_0}^{\bar{\lambda}} \xi) - \frac{Z_{\lambda_1}}{Z_{\lambda_0}} \exp(ia_{\lambda_1}^{\bar{\lambda}} \xi) \right|^2 \leq \eta_4 \rho^{-(d+d')}.$$

Il existe donc $\Phi \in \mathbb{R}, \eta_5 \ll 1$ tels qu'on ait

$$\left| \sin\left(\frac{1}{2}\xi(a_{\lambda_0}^{\bar{\lambda}} - a_{\lambda_1}^{\bar{\lambda}}) + \Phi\right) \right| < \eta_5$$

pour tout $\bar{\lambda}$ vérifiant $\alpha(\bar{\lambda}) = \omega(\lambda_0)$ sauf au plus $\eta_5 \rho^{-(d+d')}$ d'entre eux. On peut choisir λ_0, λ_1 de la forme

$$\lambda_0 = (\underline{a}^0, \underline{a}', u), \lambda_1 = (\underline{a}^1, \underline{a}', u)$$

et on aura (compte tenu de la définition des $a_{\bar{\lambda}}^{\bar{\lambda}}$),

$$\left| \sin\left(\frac{1}{2}\xi(a_{\lambda_0}^{\bar{\lambda}} - a_{\lambda_1}^{\bar{\lambda}}) + \Phi\right) \right| = \left| \sin\left(\frac{1}{2}\xi \log \frac{|I^{\theta^1}(\underline{b})|}{|I^{\theta^0}(\underline{b})|} + \Phi\right) \right|,$$

où $\bar{\lambda} = (\underline{b}, \underline{b}', v)$ et $\theta^0, \theta^1 \in \Sigma^-$ se terminent respectivement par \underline{a}^0 et \underline{a}^1 . Cela contredit alors la propriété $(H\alpha)$.

9. La propriété $(H\alpha)$ dans le cas conservatif

9.1. – Nous allons montrer dans ce chapitre que, dans le cas conservatif, si l'invariant de Birkhoff hyperbolique de F/Λ a un signe constant, alors la propriété $(H\alpha)$ est satisfaite pour tout $\alpha \in (0, 1)$.

Pour ceci, il va nous falloir estimer précisément les quantités $\log \frac{|I^{\theta^0}(\underline{b})|}{|I^{\theta^1}(\underline{b})|}$, pour certains $\theta^0, \theta^1 \in \Sigma^-, \underline{b} \in \Sigma(\rho)$; la proposition qui suit a exactement cet objectif.

9.2. – On se donne un système de cartes locales $(\phi_p)_{p \in \Lambda}$ de type II (cf. annexe A) : c'est une famille continue de cartes locales centrées en p de classe C^∞ dans lesquelles $F_p = \phi_{F(p)}^{-1} \circ F \circ \phi_p$ est de la forme

$$F_p(x, y) = (\lambda(p)x(1 + xyu_p(x, y)), \lambda(p)^{-1}y(1 - xyv_p(x, y))),$$

l'invariant de Birkhoff hyperbolique étant alors $u_p(0, 0) = v_p(0, 0)$. La forme d'aire préservée est $dx \wedge dy$.

On se donne $0 < \rho \ll 1$, puis $0 < \delta \ll 1$ tel que $\delta > \rho \log \rho^{-1}$. On se donne aussi $\underline{\theta}^0, \underline{\theta}^1 \in \Sigma^-$ tels que

$$d(\underline{\theta}^0, \underline{\theta}^1) \leq \delta,$$

ainsi que deux mots $\underline{b}, \underline{b}'$ dans $\Sigma(\rho)$, ayant pour première lettre la lettre finale (commune) de $\underline{\theta}^0$ et $\underline{\theta}^1$. On note p, \hat{p} les extrémités de l'image de $I(\underline{b})$ dans $W^u(\underline{\theta}^0)$, p', \hat{p}' celles de $I(\underline{b}')$, et q, \hat{q}, q', \hat{q}' les mêmes extrémités dans $W^u(\underline{\theta}^1)$.

PROPOSITION. – Notons (X', Y') les coordonnées de q' dans la carte ϕ_p . On a

$$\log \frac{|I^{\theta^0}(\underline{b})|}{|I^{\theta^1}(\underline{b})|} - \log \frac{|I^{\theta^0}(\underline{b}')|}{|I^{\theta^1}(\underline{b}')|} = 2X'Y' \sum_{i=0}^{N-1} u_i + O(\delta),$$

où N est le plus petit entier tel que $\theta_{-m}^0 \neq \theta_{-m}^1$, et u_i est l'invariant de Birkhoff en $F^{-i}(p)$.

Nous montrerons d'abord comment la propriété $(H\alpha)$ résulte de l'estimation précédente, avant de donner la preuve de cette proposition.

9.3. Preuve de la propriété $(H\alpha)$

On se donne $0 < \alpha < 1$, $0 < \eta \ll 1$, $0 < \rho \ll 1$, $1 \leq \xi \leq \rho^{-\alpha}$. On choisit et fixe δ tel que

$$\eta \ll \xi \delta \log \delta^{-1} \ll 1, \rho \log \rho^{-1} < \delta.$$

Soit $X \subset \Sigma(\rho)$ une partie vérifiant

$$\#(\Sigma(\rho) - X) < \eta \rho^{-d}.$$

On peut trouver $\underline{\theta}^0, \underline{\theta}^1 \in \Sigma^-$ tels que

$$c^{-1}\delta \leq d(\underline{\theta}^0, \underline{\theta}^1) \leq \delta$$

et dont les mots finaux respectifs $\underline{a}^0, \underline{a}^1$ dans $\Sigma(\rho)$ appartiennent à X .

Soient $\underline{b}, \underline{b}'$ des mots de $\Sigma(\rho)$ qui commencent par $\theta_0^0 = \theta_0^1$; supposons de plus que la partie initiale commune à $\underline{b}, \underline{b}'$ est de longueur bornée. Quand on applique la proposition de 9.2, on a alors

$$c^{-1} \leq |Y'| \leq c.$$

Comme F préserve les aires et $d(\underline{\theta}^0, \underline{\theta}^1) \sim \delta$, on a aussi, d'après le choix de la métrique sur Σ^-

$$c^{-1}\delta \leq |X'| \leq c\delta.$$

Comme de plus l'invariant de Birkhoff a par hypothèse un signe constant sur Λ , la proposition 9.2 donne (comme $N \sim \log \delta^{-1}$) :

$$c^{-1}\delta \log \delta^{-1} \leq \left| \log \frac{|I^{\theta^0}(\underline{b})|}{|I^{\theta^1}(\underline{b})|} - \log \frac{|I^{\theta^0}(\underline{b}')|}{|I^{\theta^1}(\underline{b}')|} \right| \leq c\delta \log \delta^{-1}.$$

Au vu du choix de δ , on a donc

$$\eta \ll \left| \xi \left(\log \frac{|I^{\theta^0}(b)|}{|I^{\theta^1}(b)|} - \log \frac{|I^{\theta^0}(b')|}{|I^{\theta^1}(b')|} \right) \right| \ll 1$$

(pour toute paire (b, b') telle que $I(b), I(b')$ ne soient pas trop proches), ce qui permet bien de conclure que l'hypothèse $(H\alpha)$ est vérifiée. \square

9.4. Preuve de la proposition 9.2

Pour $0 \leq i < N$, les coordonnées des points $F^{-i}(p), F^{-i}(\hat{p}), F^{-i}(p'), F^{-i}(\hat{p}'), F^{-i}(q), F^{-i}(\hat{q}), F^{-i}(q'), F^{-i}(\hat{q}')$ dans la carte locale $\phi_{F^{-i}(p)}$ sont respectivement notées $(x_i, y_i), (\hat{x}_i, \hat{y}_i), (x'_i, y'_i), (\hat{x}'_i, \hat{y}'_i), (X_i, Y_i), (\hat{X}_i, \hat{Y}_i), (X'_i, Y'_i), (\hat{X}'_i, \hat{Y}'_i)$. On a bien sûr

$$\begin{aligned} x_i &= \hat{x}_i = x'_i = \hat{x}'_i = 0, \\ y_i &= Y_i = 0. \end{aligned}$$

Nous allons d'abord estimer les birapports :

$$Cr(i) := \frac{\hat{Y}'_i - Y'_i}{\hat{Y}'_i - Y'_i} \frac{\hat{y}_i - y_i}{\hat{y}'_i - y'_i},$$

et pour cela introduire

$$\Delta_i := \frac{Cr(i)}{Cr(i-1)}, \quad 0 < i < N.$$

Comme $F_{F^{-i}(p)}$ est linéaire sur $\{x = 0\}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\hat{y}_i - y_i}{\hat{y}'_i - y'_i} &= \frac{\hat{y}_{i-1} - y_{i-1}}{\hat{y}'_{i-1} - y'_{i-1}}, \\ \Delta_i &= \frac{\hat{Y}'_i - Y'_i}{\hat{Y}'_{i-1} - Y'_{i-1}} \frac{\hat{Y}_{i-1} - Y_{i-1}}{\hat{Y}_i - Y_i}. \end{aligned}$$

Posons

$$\Gamma_i = \frac{\hat{Y}_{i-1} - Y_{i-1}}{\hat{Y}_i - Y_i}, \quad \Gamma'_i = \frac{\hat{Y}'_{i-1} - Y'_{i-1}}{\hat{Y}'_i - Y'_i}.$$

En écrivant $\lambda_i = \lambda_{F^{-i}(p)}, v_i = v_{F^{-i}(p)}$, nous avons :

$$\Gamma_i = \lambda_i^{-1} \left(1 - \frac{\hat{X}_i \hat{Y}_i^2 v_i(\hat{X}_i, \hat{Y}_i) - X_i Y_i^2 v_i(X_i, Y_i)}{\hat{Y}_i - Y_i} \right).$$

Notons $\{x = \psi_i(y)\}$ l'équation de $W^u(F^{-i}(q))$ dans la carte $\phi_{F^{-i}(p)}$ et posons

$$\tilde{v}_i(y) := y^2 \psi_i(y) v_i(\psi_i(y), y).$$

On a donc

$$\Gamma_i = \lambda_i^{-1} (1 - D\tilde{v}_i(\tilde{Y}_i)),$$

pour un certain \tilde{Y}_i entre Y_i et \hat{Y}_i ; de façon similaire, il existe \tilde{Y}'_i entre Y'_i et \hat{Y}'_i tel que

$$\Gamma'_i = \lambda_i^{-1} (1 - D\tilde{v}_i(\tilde{Y}'_i)).$$

Il nous faut maintenant estimer $D\tilde{v}_i(\tilde{Y}_i)$ et $D\tilde{v}_i(\tilde{Y}'_i)$. La dérivée de \tilde{v}_i est donnée par :

$$\begin{aligned} D\tilde{v}_i(y) &= 2y\psi_i(y)v_i(\psi_i(y), y) + y^2 D\psi_i(y)v_i(\psi_i(y), y) \\ &\quad + y^2 \psi_i(y) D_y v_i(\psi_i(y), y) \\ &\quad + y^2 \psi_i(y) D\psi_i(y) D_x v_i(\psi_i(y), y). \end{aligned}$$

Or le feuilletage instable $W^u(\Lambda)$ est de classe C^1 et on a donc $D\psi_i = O(X_i)$, d'où

$$|D\tilde{v}_i(y) - 2y\psi_i(y)v_i(\psi_i(y), y)| \leq cX_i y^2.$$

En posant $\tilde{X}_i = \psi_i(\tilde{Y}_i)$, $\tilde{X}'_i = \psi_i(\tilde{Y}'_i)$, on a alors :

$$\begin{aligned} \log(\lambda_i \Gamma_i) &= -2\tilde{X}_i \tilde{Y}_i v_i(\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i) + O(X_i \tilde{Y}_i^2), \\ \log(\lambda_i \Gamma'_i) &= -2\tilde{X}'_i \tilde{Y}'_i v_i(\tilde{X}'_i, \tilde{Y}'_i) + O(X_i \tilde{Y}'_i{}^2), \end{aligned}$$

car $X_i, \tilde{X}_i, X'_i, \tilde{X}'_i$ sont du même ordre.

On a d'une part, comme $Y_i = 0$, $\hat{Y}_i = O(\rho)$:

$$\begin{aligned} \sum_{0 < i < N} \tilde{X}_i \tilde{Y}_i &= O(\rho), \\ \sum_{0 < i < N} \log(\lambda_i \Gamma_i) &= O(\rho). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \sum_{0 < i < N} X_i \tilde{Y}_i{}^2 &= O(X_0(Y'_0 + \hat{Y}'_0)^2) = O(\delta), \\ \sum_{0 < i < N} \tilde{X}_i^2 \tilde{Y}'_i &= O(X_{N-1}^2(Y'_{N-1} + \hat{Y}'_{N-1})) = O(\delta), \\ \sum_{0 < i < N} (\tilde{X}'_i \tilde{Y}'_i - X'_i Y'_i) &= \sum_{0 < i < N} (\tilde{Y}'_i \Psi_i(\tilde{Y}'_i) - Y'_i \Psi_i(Y'_i)) \\ &= O\left(\sum_{0 < i < N} |\tilde{Y}'_i - Y'_i|\right) \\ &= O(\rho), \end{aligned}$$

d'où on conclut que

$$\sum_{0 < i < N} \log(\lambda_i \Gamma'_i) = -2 \sum_{0 < i < N} X'_i Y'_i v_i(0, 0) + O(\delta).$$

D'après la définition des cartes de type II, on a $X'_i Y'_i - X'_{i-1} Y'_{i-1} = O(X_i^2 Y_i^2)$. Comme N , $\log \delta^{-1}$ et $\log X_0^{-1}$ sont du même ordre, on a

$$|X'_i Y'_i - X'_0 Y'_0| \leq ci X_0^2 \text{ pour } 0 < i < N$$

et en particulier les $X'_i Y'_i$ sont tous du même ordre. On en déduit

$$\sum_{0 < i < N} \log(\lambda_i \Gamma'_i) = -2X'_0 Y'_0 \sum_{0 < i < N} v_i(0, 0) + O(\delta).$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} \log \frac{Cr(N-1)}{Cr(0)} &= \sum_{0 < i < N} \log \Delta_i \\ &= \sum_{0 < i < N} \log \Gamma_i / \Gamma'_i \\ &= 2X'_0 Y'_0 \sum_{0 < i < N} v_i(0, 0) + O(\delta). \end{aligned}$$

Comme $X'_0 = O(\delta)$, on a

$$Cr(0) = 1 + O(\delta),$$

et donc

$$\log Cr(N-1) = 2X'_0 Y'_0 \sum_{0 < i < N} v_i(0, 0) + O(\delta).$$

Il suffit maintenant d'observer qu'on a, comme $Y'_{N-1} = O(\delta)$:

$$\frac{|I^{\theta^1}(\underline{b})|}{|I^{\theta^1}(\underline{b}')|} = \frac{|\hat{Y}_{N-1} - Y_{N-1}|}{|\hat{Y}'_{N-1} - Y'_{N-1}|} (1 + O(\delta)),$$

car les valeurs pertinentes de $Dk\sigma^{-N+1}(\theta^1)$ sont $O(\delta)$ proches les unes des autres, et

$$\frac{|I^{\theta^0}(\underline{b})|}{|I^{\theta^0}(\underline{b}')|} = \frac{|\hat{y}_{N-1} - y_{N-1}|}{|\hat{y}'_{N-1} - y'_{N-1}|},$$

par linéarité de F sur les variétés instables $W^u(\sigma^{-i}\theta^0)$ dans les cartes $\phi_{F^{-i}(p)}$. On obtient ainsi la conclusion recherchée. \square

10. La propriété $(H\alpha)$ dans le cas dissipatif

10.1. – Nous considérons d'abord le cas (le plus délicat) où F est dilatant sur Λ . Soit $\alpha \in (0, 1)$ tel qu'on ait, pour tout $z \in \Lambda$

$$\|T_z F / E^s\| < \|T_z F / E^u\|^{-\alpha}.$$

On choisit un point périodique p de Λ de période n et un point $q \in \Lambda$ homocline à p , qui appartient à la même feuille $W^u(\theta^*)$ que p , mais tel que $F(q) \notin W^u(\sigma^{-(n-1)}(\theta^*))$.

On choisit un système de cartes semi-locales $(\phi_\theta)_{\theta \in \Sigma^-}$ de type III (cf. Annexe B) : pour chaque $\theta \in \Sigma^-$, ϕ_θ est un plongement de classe C^∞ d'un voisinage de $\{0\} \times [-1, +1] \subset \mathbb{R}^2$ dans M envoyant $\{0\} \times [-1, +1]$ sur $W^u(\theta)$; ce plongement dépend continûment de θ dans la C^∞ -topologie ; la représentation

$$F_\theta^{-1} = \phi_{\sigma^{-1}(\theta)}^{-1} \circ F^{-1} \circ \phi_\theta$$

de F^{-1} dans ce système vérifie (pour $\theta \in \Sigma^-$, $y \in [-1, +1]$)

$$\begin{aligned} D_{(0,y)} F_\theta^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) &= \lambda(\theta) \frac{\partial}{\partial y}, \\ D_{(0,y)} F_\theta^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) &= \mu(\theta) \frac{\partial}{\partial x} + B(\theta, y) \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

où B est affine en y , de pente $\beta(\theta)$ et on a $|\mu(\theta)| > 1$, $|\lambda(\theta)\mu(\theta)| < 1$ pour $\theta \in \Sigma^-$.

Lorsque $\phi_{\underline{\theta}}(0, y) = z \in \Lambda$, on a défini dans l'annexe B, formule (16), une quantité

$$E(z) = E(\underline{\theta}, y) = \sum_{m>0} \beta(\underline{\theta}(m)) \lambda^{-1}(\underline{\theta}(m)) (\mu^{(m)}(\underline{\theta}(m)))^{-1}$$

où $F^m(z) \in W^u(\underline{\theta}(m))$ pour $m > 0$ et $\mu^{(m)}(\underline{\theta}(m)) = \mu(\underline{\theta}(1)) \dots \mu(\underline{\theta}(m))$. Cette quantité représente la vitesse de variation de la direction stable dans le système de cartes considéré (Annexe B, formule (15)).

Nous allons voir successivement que

PROPOSITION 1. – *La propriété « $E(p) \neq E(q)$ » est ouverte et dense par rapport à F .*

PROPOSITION 2. – *Si on a $E(p) \neq E(q)$, alors la propriété $(H\alpha)$ est vérifiée.*

10.2. Preuve de la proposition 1

On commence par observer qu'en vertu de la section B.6 de l'annexe B, la propriété « $E(p) \neq E(q)$ » est intrinsèque, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du système de cartes semi-locales de type III considéré.

Il en résulte que la propriété « $E(p) \neq E(q)$ » est ouverte : si F' est un difféomorphisme proche de F (dans la C^∞ -topologie), on peut trouver pour F' un système de cartes semi-locales $(\phi'_{\underline{\theta}})_{\underline{\theta} \in \Sigma^-}$ de type III tel que, pour tout $\underline{\theta} \in \Sigma^-$, les plongements $\phi_{\underline{\theta}}, \phi'_{\underline{\theta}}$ soient proches dans la C^∞ -topologie ; les fonctions $\lambda'(\underline{\theta}), \mu'(\underline{\theta}), \beta'(\underline{\theta})$ sont alors C^0 -proches respectivement de $\lambda(\underline{\theta}), \mu(\underline{\theta}), \beta(\underline{\theta})$ et $E'(p'), E'(q')$ sont proches de $E(p), E(q)$ (où p', q' sont les continuations hyperboliques de p, q).

Pour prouver la densité, nous supposons que $E(p) = E(q)$ et construisons une perturbation F' de F telle que $E'(p') \neq E'(q')$.

Soit $\hat{\underline{\theta}} \in \Sigma^-$ l'élément tel que $F(q) \in W^u(\hat{\underline{\theta}})$. Observons qu'on a $F^n(p) \notin W^u(\hat{\underline{\theta}})$ pour $n > 0$ et $F^n(q) \notin W^u(\hat{\underline{\theta}})$ pour $n > 1$. Fixons une fonction $\chi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (i) on ait $\chi(x, y) \equiv 1$ au voisinage de $\{0\} \times [-1, +1]$;
- (ii) le support de χ soit compact et contenu dans le domaine (ouvert) de $\phi_{\hat{\underline{\theta}}}$;
- (iii) l'image $\phi_{\hat{\underline{\theta}}}(\text{supp}\chi)$ ne rencontre aucune feuille $W^u(\underline{\theta}), \underline{\theta} \neq \hat{\underline{\theta}}$ contenant un point de l'orbite de p ou de l'orbite de q .

Pour b assez petit, on définit alors :

$$K(x, y) = (x, y + bxy\chi(x, y)),$$

$$(F')^{-1} = \begin{cases} F^{-1} & \text{hors de } \phi_{\hat{\underline{\theta}}}(\text{supp}\chi) \\ F^{-1} \circ \phi_{\hat{\underline{\theta}}} \circ K \circ (\phi_{\hat{\underline{\theta}}})^{-1} & \text{dans } \phi_{\hat{\underline{\theta}}}(\text{supp}\chi). \end{cases}$$

Pour b assez petit, K est un difféomorphisme arbitrairement proche de l'identité et F' est donc un difféomorphisme arbitrairement proche de F . D'après la conclusion (iii) et la forme de K , le point p est encore périodique (de même période) pour F' , le point q est encore homocline à p pour F' , et les feuilles $W^u(\underline{\theta})$ qui rencontrent l'orbite de p ou q sont les mêmes pour F et F' ; de plus F et F' coïncident au voisinage de chacune de ces feuilles sauf pour $\underline{\theta} = \hat{\underline{\theta}}$.

Au vu de l'annexe B, on en déduit qu'on peut trouver pour F' un système de cartes semi-locales de type III $(\phi'_{\underline{\theta}})_{\underline{\theta} \in \Sigma^-}$ tel qu'on ait $\phi'_{\underline{\theta}} = \phi_{\underline{\theta}}$ pour tout $\underline{\theta} \in \Sigma^-$ tel que $W^u(\underline{\theta})$ rencontre

l'orbite de p ou l'orbite de q . Quand on calcule par rapport à ce système, pour ces valeurs de $\underline{\theta}$, les quantités $\lambda'(\underline{\theta}), \mu'(\underline{\theta}), \beta'(\underline{\theta})$ relatives à F' , on obtient

$$\begin{aligned}\lambda'(\underline{\theta}) &= \lambda(\underline{\theta}), \\ \mu'(\underline{\theta}) &= \mu(\underline{\theta}), \\ \beta'(\underline{\theta}) &= \beta(\underline{\theta}), \text{ si } \underline{\theta} \neq \hat{\underline{\theta}} \\ \beta'(\hat{\underline{\theta}}) &= \beta(\hat{\underline{\theta}}) + b\lambda(\hat{\underline{\theta}}).\end{aligned}$$

Quand on introduit ces formules dans le calcul de $E'(p), E'(q)$, on obtient

$$\begin{aligned}E'(p) &= E(p), \\ E'(q) &= E(q) + b(\mu(\hat{\underline{\theta}}))^{-1},\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la proposition 1. \square

10.3. Preuve de la proposition 2

Nous supposons $E(p) \neq E(q)$ et voulons montrer que la propriété $(H\alpha)$ est vérifiée.

Soient V_p, V_q des voisinages respectifs de p, q dans Λ tels qu'on ait, pour $w \in V_p, w' \in V_q$:

$$|E(w) - E(w')| \geq c > 0.$$

Donnons-nous donc $0 < \eta \ll 1, 0 < \rho \ll 1, 1 \leq \xi \leq \rho^{-\alpha}$, et une partie $X \subset \Sigma(\rho)$ vérifiant

$$\#(\Sigma(\rho) - X) \leq \eta\rho^{-d}.$$

Choisissons $\delta_0 > 0$ tel que

$$\eta\xi^{-1} \ll \delta_0 \ll \xi^{-1},$$

puis $\underline{\theta}^0, \underline{\theta}^1 \in \Sigma^-$, proches de $\underline{\theta}^*$, de façon que les mots terminaux de $\underline{\theta}^0, \underline{\theta}^1$ dans $\Sigma(\rho)$ appartiennent à X et que la distance de $W^u(\underline{\theta}^0), W^u(\underline{\theta}^1)$ soit de l'ordre de δ_0 . Considérons ensuite des mots $\underline{b}, \underline{b}'$ de $\Sigma(\rho)$ tels que les images de $I(\underline{b})$ dans $W^u(\underline{\theta}^\varepsilon), \varepsilon = 0, 1$, soient contenues dans V_p et celles de $I(\underline{b}')$ dans V_q . On observera que V_p, V_q sont indépendants de η, ρ, ξ, X et que le nombre de paires $(\underline{b}, \underline{b}')$ considérées est donc $\geq c\rho^{-2d}$.

On notera w, \hat{w} les extrémités de $I(\underline{b})$ dans $W^u(\underline{\theta}^0), w', \hat{w}'$ les extrémités de $I(\underline{b}')$ dans $W^u(\underline{\theta}^1)$ et z, \hat{z}, z', \hat{z}' les mêmes extrémités dans $W^u(\underline{\theta}^1)$. Pour $i \geq 0$, les coordonnées de $F^{-i}(w), F^{-i}(\hat{w}), F^{-i}(w'), F^{-i}(\hat{w}'), F^{-i}(z), F^{-i}(\hat{z}), F^{-i}(z'), F^{-i}(\hat{z}')$ dans la carte semi-locale $\phi_{\sigma^{-i}(\underline{\theta}^0)}$ seront respectivement notées (tant qu'elles existent) $(x_i, y_i), (\hat{x}_i, \hat{y}_i), (x'_i, y'_i), (\hat{x}'_i, \hat{y}'_i), (X_i, Y_i), (\hat{X}_i, \hat{Y}_i), (X'_i, Y'_i), (\hat{X}'_i, \hat{Y}'_i)$.

On a bien sûr

$$x_i = \hat{x}_i = x'_i = \hat{x}'_i = 0,$$

pour tout $i \geq 0$ et $X_0, \hat{X}_0, X'_0, \hat{X}'_0$ sont d'ordre δ_0 . Comme F est dilatant sur Λ , on peut trouver $\kappa > 0$, ne dépendant que de F , et $M > 0$ tels que $X_M = O(\delta_0^\kappa), y_M - y'_M = O(\delta_0^{1+\kappa})$. On va alors montrer l'estimation suivante.

PROPOSITION 3. – *Quitte à diminuer $\kappa > 0$ (ne dépendant que de F), on a*

$$\log \frac{|\hat{y}_M - y_M|}{|\hat{Y}_M - Y_M|} - \log \frac{|\hat{y}'_M - y'_M|}{|\hat{Y}'_M - Y'_M|} = -X_0(E(w) - E(w')) + O(\delta_0^{1+\kappa}).$$

En admettant momentanément cette estimation, on conclut la preuve de la proposition 2 comme suit. D'après l'estimation de $y_M - y'_M$, on a

$$\begin{aligned} \log \frac{|I^{\theta^0}(\underline{b})|}{|I^{\theta^0}(\underline{b}')|} &= \log \frac{|\hat{y}_M - y_M|}{|\hat{y}'_M - y'_M|} \\ \log \frac{|I^{\theta^1}(\underline{b})|}{|I^{\theta^1}(\underline{b}')|} &= \log \frac{|\hat{Y}_M - Y_M|}{|\hat{Y}'_M - Y'_M|} + O(\delta_0^{1+\kappa}), \end{aligned}$$

car les valeurs pertinentes de $Dk^{\sigma^{-M}(\theta^1)}$ sont $O(\delta_0^{1+\kappa})$ proches les unes des autres. On conclut qu'on a

$$\log \frac{|I^{\theta^0}(\underline{b})|}{|I^{\theta^1}(\underline{b})|} - \log \frac{|I^{\theta^0}(\underline{b}')|}{|I^{\theta^1}(\underline{b}')|} = -X_0(E(w) - E(w')) + O(\delta_0^{1+\kappa}).$$

Le terme $X_0(E(w) - E(w'))$ est d'ordre δ_0 ; vu le choix qu'on a fait pour δ_0 , ceci termine la preuve de la proposition 2. \square

10.4. Preuve de la proposition 3

Choisissons un entier $L > 0$ tel que $y'_L - y_L$ et X_L soient du même ordre. Comme F est dilatant sur Λ , il existe $\kappa > 0$ ne dépendant que de F tel que $X_L = O(\delta_0^{\frac{1}{2}(1+\kappa)})$.

On va montrer que :

LEMME 1. – On a

$$\log \frac{|\hat{y}_L - y_L|}{|\hat{Y}_L - Y_L|} - \log \frac{|\hat{y}'_L - y'_L|}{|\hat{Y}'_L - Y'_L|} = -X_L(E(F^{-L}w) - E(F^{-L}w')) + O(X_L^2).$$

LEMME 2. – On a

$$\log \frac{|\hat{Y}_M - Y_M|}{|\hat{Y}'_M - Y'_M|} = \log \frac{|\hat{Y}_L - Y_L|}{|\hat{Y}'_L - Y'_L|} + O(X_L^2).$$

Comme $\frac{\hat{y}_i - y_i}{\hat{y}'_i - y'_i}$ est indépendant de i , on en déduira que

$$\log \frac{|\hat{y}_M - y_M|}{|\hat{Y}_M - Y_M|} - \log \frac{|\hat{y}'_M - y'_M|}{|\hat{Y}'_M - Y'_M|} = -X_L(E(F^{-L}w) - E(F^{-L}w')) + O(X_L^2).$$

D'après la formule (17) de l'annexe B, on a

$$E(F^{-L}w) - E(F^{-L}w') = (\mu^{(L)}(\theta^0))^{-1}(E(w) - E(w')).$$

Comme on a d'autre part

$$X_0 = X_L(\mu^{(L)}(\theta^0))^{-1} + O(X_L^2),$$

on obtiendra l'estimation de la proposition 3.

10.5. Preuve du lemme 1

Dans la carte $\phi_{\sigma^{-L}(\underline{\theta}^0)}$, notons $\{x = \psi(y)\}$ l'équation de $W^u(\sigma^{-L}(\underline{\theta}^1))$; notons aussi

$$y = y_L + Wx + \varphi(x),$$

$$y = \hat{y}_L + \hat{W}x + \hat{\varphi}(x),$$

les équations respectives de $W^s(F^{-L}(w))$, $W^s(F^{-L}(\hat{w}))$, les fonctions φ et $\hat{\varphi}$ s'annulant à l'ordre 2 en 0. Comme les feuilletages stables et instables sont de classe C^1 , on a

$$D\psi = O(X_L),$$

$$D^2\psi = O(X_L),$$

$$D^2(\hat{\varphi} - \varphi) = O(\hat{y}_L - y_L).$$

On a donc

$$(\hat{\varphi} - \varphi)(X_L) = O(X_L^2(\hat{y}_L - y_L)),$$

et

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\hat{X}_L) - \hat{\varphi}(X_L) &= O(X_L(\hat{X}_L - X_L)) \\ &= O(X_L^2(\hat{y}_L - y_L)), \end{aligned}$$

d'où

$$\hat{Y}_L - Y_L = \hat{y}_L - y_L + \hat{W}\hat{X}_L - WX_L + O(X_L^2(\hat{y}_L - y_L)).$$

On écrit

$$\hat{W}\hat{X}_L - WX_L = (\hat{W} - W)X_L + \hat{W}(\hat{X}_L - X_L),$$

avec

$$\hat{X}_L - X_L = D\psi(\tilde{Y}_L)(\hat{Y}_L - Y_L),$$

pour un \tilde{Y}_L entre Y_L et \hat{Y}_L et, d'après la formule (15) de l'annexe B :

$$\hat{W} - W = (\hat{y}_L - y_L)(E(F^{-L}(w)) + O(\rho^\alpha)).$$

[En effet, avec les notations de la formule (15), on a $(\mu^{(N)})^{-1} = O((\lambda^{(N)})^\alpha) = O(\rho^\alpha)$, car $\hat{y}_L - y_L = O(\rho)$.]

Comme on a $\delta_0 \gg \eta\rho^\alpha$ et $\delta_0 = o(X_L)$, on a $\rho^\alpha = o(X_L)$. On obtient donc

$$(1 - \hat{W}D\psi(\tilde{Y}_L)) \frac{\hat{Y}_L - Y_L}{\hat{y}_L - y_L} = 1 + X_L E(F^{-L}(w)) + O(X_L^2),$$

et de façon analogue

$$(1 - \hat{W}'D\psi(\tilde{Y}'_L)) \frac{\hat{Y}'_L - Y'_L}{\hat{y}'_L - y'_L} = 1 + X'_L E(F^{-L}(w')) + O(X_L'^2),$$

avec \tilde{Y}'_L entre Y'_L et \hat{Y}'_L . Or on a

$$\hat{W} - \hat{W}' = O(y'_L - y_L),$$

$$D\psi(\tilde{Y}_L) = O(X_L),$$

$$D\psi(\tilde{Y}'_L) = O(X_L),$$

$$D\psi(\tilde{Y}_L) - D\psi(\tilde{Y}'_L) = O(X_L(y'_L - y_L)),$$

$$X'_L - X_L = O(X_L(y'_L - y_L)),$$

donc on obtient l'estimation du lemme 1 en divisant l'une par l'autre les deux estimations ci-dessus. \square

10.6. Preuve du lemme 2

Pour $L \leq i \leq M$, on va comparer les rapports

$$\Gamma_i = \frac{\hat{Y}_{i+1} - Y_{i+1}}{\hat{Y}_i - Y_i}, \Gamma'_i = \frac{\hat{Y}'_{i+1} - Y'_{i+1}}{\hat{Y}'_i - Y'_i}.$$

Notons ici $\{x = \psi_i(y)\}$ l'équation de $W^u(\sigma^{-i}(\underline{\theta}^1))$ dans la carte $\phi_{\sigma^{-i}(\underline{\theta}^0)}$ et $G_i(x, y)$ la y -composante de $F_{\sigma^{-i}(\underline{\theta}^0)}^{-1}(x, y)$. Posons aussi

$$g_i(y) = G_i(\psi_i(y), y),$$

de sorte qu'on a

$$Y_{i+1} = g(Y_i), \hat{Y}_{i+1} = g(\hat{Y}_i),$$

$$\Gamma_i = \int_0^1 Dg(Y_i + t(\hat{Y}_i - Y_i)) dt,$$

et de même

$$\Gamma'_i = \int_0^1 Dg(Y'_i + t(\hat{Y}'_i - Y'_i)) dt.$$

Comme le feuilletage instable est de classe C^1 , on a

$$D\psi_i = O(X_i), D^2\psi_i = O(X_i).$$

D'autre part, soient $\tilde{Y}_i, \tilde{Y}'_i$ des points respectivement situés entre Y_i, \hat{Y}_i pour le premier, Y'_i, \hat{Y}'_i pour le second. On a

$$Dg_i = D\psi_i \frac{\partial}{\partial x} G_i + \frac{\partial}{\partial y} G_i,$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial x} G_i(\psi_i(\tilde{Y}_i), \tilde{Y}_i) - \frac{\partial}{\partial x} G_i(\psi_i(\tilde{Y}'_i), \tilde{Y}'_i) = O(Y'_i - Y_i),$$

$$D\psi_i(\tilde{Y}_i) - D\psi_i(\tilde{Y}'_i) = O(X_i(Y'_i - Y_i)),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} G_i(\psi_i(\tilde{Y}_i), \tilde{Y}_i) - \frac{\partial}{\partial y} G_i(\psi_i(\tilde{Y}'_i), \tilde{Y}'_i) = O(X_i(Y'_i - Y_i)),$$

où on a, dans la dernière estimation, utilisé que $\frac{\partial}{\partial y} G_i(x, y) = \lambda(\sigma^{-i}\underline{\theta}) + \beta(\sigma^{-i}\underline{\theta})x + O(x^2)$.

En rassemblant ces estimations, on obtient

$$Dg_i(\tilde{Y}_i) - Dg_i(\tilde{Y}'_i) = O(X_i(Y'_i - Y_i)),$$

$$\log \Gamma'_i / \Gamma_i = O(X_i(Y'_i - Y_i)).$$

Il suffit maintenant d'observer que, comme F est dilatante, on a

$$\sum_{L \leq i < M} |X_i| |Y'_i - Y_i| = O(X_L^2),$$

pour que la preuve du lemme 2 soit complète. \square

10.7. Le cas où F est contractant sur Λ

10.7.1. – On dispose alors d’une propriété (H’1) (cf. 3.2.4), plus forte que (H1) et plus simple à énoncer.

Soient p un point périodique de Λ et $q \in W_{loc}^s(p)$ un point de Λ homocline à p distinct de p . Notons $W^u(\underline{\theta}^0)$ (resp. $W^u(\underline{\theta}^1)$) la feuille instable qui contient p (resp. q).

Soit $(\phi_{\underline{\theta}})_{\underline{\theta} \in \Sigma^-}$ un système de cartes semi-locales de type I (cf. Annexe B) et

$$\tau : W^u(\underline{\theta}^0) \cap \Lambda \rightarrow W^u(\underline{\theta}^1) \cap \Lambda$$

l’application d’holonomie le long de $W_{loc}^s(\Lambda)$. Soit y_0 tel que

$$\phi_{\underline{\theta}^0}(0, y_0) = p.$$

Comme F est contractant sur Λ , l’application ψ définie par

$$\phi_{\underline{\theta}^1}(0, \psi(y)) = \tau \phi_{\underline{\theta}^0}(0, y)$$

est C^2 au sens de Whitney. On veut montrer que la condition ouverte

$$D^2(\psi(y_0)) \neq 0$$

est aussi dense.

On suppose donc $D^2\psi(y_0) = 0$ et on perturbe F en un difféomorphisme F' pour lequel la condition requise est satisfaite. On procède de façon similaire à 10.2.

Soit $\chi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- (i) on ait $\chi(x, y) \equiv 1$ au voisinage de $(0, y_0)$;
- (ii) le support de χ soit compact, contenu dans le domaine (ouvert) de $\phi_{\underline{\theta}^1}$;
- (iii) l’image $\phi_{\underline{\theta}^1}(\text{supp } \chi)$ ne rencontre aucune feuille $W^u(\underline{\theta})$, $\underline{\theta} \neq \underline{\theta}^1$, contenant un point de l’orbite de p ou de l’orbite de q .

Pour b assez petit, on définit alors

$$K(x, y) = (x, y + b(y - y_0)^2 \chi(x, y)),$$

$$(F')^{-1} = \begin{cases} F^{-1} & \text{hors de } \phi_{\underline{\theta}^1}(\text{supp } \chi) \\ F^{-1} \circ \phi_{\underline{\theta}^1} \circ K \circ (\phi_{\underline{\theta}^1})^{-1} & \text{dans } \phi_{\underline{\theta}^1}(\text{supp } \chi). \end{cases}$$

Pour b assez petit, K est un difféomorphisme arbitrairement proche de l’identité et F' est donc un difféomorphisme arbitrairement proche de F .

D’après la condition (iii) et la forme de K , le point p est encore périodique (de même période), pour F' , le point q est encore homocline à p pour F' , et les feuilles $W^u(\underline{\theta})$ qui rencontrent l’orbite de p ou q sont les mêmes pour F et F' ; de plus F et F' coïncident au voisinage de chacune de ces feuilles sauf pour $\underline{\theta} = \underline{\theta}^1$.

On peut donc trouver pour F' un système de cartes semi-locales de type I $(\phi'_{\underline{\theta}})_{\underline{\theta} \in \Sigma^-}$ tel qu’on ait $\phi'_{\underline{\theta}^0} = \phi_{\underline{\theta}^0}$ et

$$\phi'_{\underline{\theta}^1} = \phi_{\underline{\theta}^1} \circ K^{-1}.$$

Soit q' un point de Λ homocline à p dont l’orbite est distincte de celles de p et q . On peut supposer dans (iii) que $\phi_{\underline{\theta}^1}(\text{supp } \chi)$ ne rencontre aucune feuille $W^u(\underline{\theta})$ qui contient un point de l’orbite de q' . L’orbite de q' pour F est alors aussi une orbite de F' . De plus, pour $N \gg 1$

tel que $F^{-N}(q')$ soit très proche de p , l'orbite *positive* du point homocline $\tau(F^{-N}(q'))$ pour F est aussi une orbite positive pour F' ; si $y(N)$ est tel que

$$\phi_{\underline{\theta}^0}(0, y(N)) = F^{-N}(q'),$$

on aura

$$\psi'(y(N)) = \psi(y(N)) + b(y(N) - y_0)^2,$$

et donc $D^2\psi'(y_0) = 2b$.

10.7.2. – La propriété (H1) est conséquence de la propriété $D^2\psi(y_0) \neq 0$.

La propriété $D^2\psi(y_0) \neq 0$ entraîne en effet $D \log D(k^{\underline{\theta}^1} \circ (k^{\underline{\theta}^0})^{-1})(y) \neq 0$.

Soient V_0, V_1 des voisinages respectifs de $\underline{\theta}^0, \underline{\theta}^1$ dans Σ^- et V un voisinage de y_0 tels qu'on ait

$$|D \log D(k^{\underline{\theta}^1} \circ (k^{\underline{\theta}^0})^{-1})(y)| \geq c > 0$$

pour $y \in V, \underline{\hat{\theta}}^0 \in V_0, \underline{\hat{\theta}}^1 \in V_1$. Donnons-nous $0 < \eta \ll 1, 0 < \rho \ll 1, 1 \leq \xi \ll \rho^{-1}$, et $X \subset \Sigma(\rho)$ vérifiant

$$\#(\Sigma(\rho) \setminus X) \leq \eta\rho^{-d}.$$

Soient $\underline{b}, \underline{b}'$ des mots de $\Sigma(\rho)$ tels que la distance entre les intervalles $I(\underline{b}), I(\underline{b}')$ vérifie :

$$\max(\eta\xi^{-1}, \rho) \ll \text{dist}(I(\underline{b}), I(\underline{b}')) \ll \xi^{-1}.$$

Pour $\underline{\hat{\theta}}^0 \in V_0, \underline{\hat{\theta}}^1 \in V_1$, on a alors

$$\eta\xi^{-1} \ll \left| \log \frac{|I^{\underline{\hat{\theta}}^0}(\underline{b})|}{|I^{\underline{\hat{\theta}}^1}(\underline{b})|} - \log \frac{|I^{\underline{\hat{\theta}}^0}(\underline{b}')|}{|I^{\underline{\hat{\theta}}^1}(\underline{b}')|} \right| \ll \xi^{-1},$$

ce qui implique la propriété (H1) (les éléments $\underline{a}^0, \underline{a}^1$ de 3.2.4 étant choisis dans X de façon à être contenus dans V_0, V_1 respectivement). \square

Appendice A

Invariant de Birkhoff hyperbolique

Soit $f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ un germe de difféomorphisme préservant les aires, possédant en 0 un point fixe elliptique de nombre de rotation α irrationnel. La *forme normale de Birkhoff* présente f , après changement de variables préservant les aires, sous la forme (en notation complexe)

$$f(z) = \exp(2\pi i(\alpha + a|z|^2 + \mathcal{O}(|z|^4)))z,$$

où $a \in \mathbb{R}$ est l'*invariant de Birkhoff* de f . Comme ceci résulte d'un calcul purement formel, le même type de forme normale est possible pour les points fixes hyperboliques des difféomorphismes préservant les aires, qui présentent les mêmes résonances que dans le cas elliptique. La forme normale est alors

$$f(x, y) = (\lambda x(1 + axy + \mathcal{O}(\|(x, y)\|^4)), \lambda^{-1}y(1 - axy + \mathcal{O}(\|(x, y)\|^4)))$$

et il est naturel d'appeler encore a l'invariant de Birkhoff de f .

A.1. – Soient M une surface orientée, ω une forme d’aire de classe C^∞ , F un difféomorphisme de M , de classe C^∞ , qui préserve ω et Λ une partie compacte de M , invariante par F et hyperbolique.

Nous appellerons *carte locale* en $p \in \Lambda$ un difféomorphisme de classe C^∞ de $[-1, +1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ sur un voisinage de p dans M qui envoie $(0, 0)$ sur p et $dx \wedge dy$ sur ω . Un *système de cartes locales* est une famille $(\Phi_p)_{p \in \Lambda}$ où, pour tout $p \in \Lambda$, Φ_p est une carte locale en p qui dépend *continûment* de p dans la C^∞ -topologie. Deux tels systèmes $(\Phi_p), (\Phi'_p)$ sont dits équivalents s’il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $p \in \Lambda$ on a $\Phi_p = \Phi'_p$ sur $[-\varepsilon, +\varepsilon]^2$; une classe d’équivalence est un *germe de système de cartes locales*.

Le groupe $C(\Lambda, G)$ des applications continues de Λ dans le groupe G des germes de C^∞ -difféomorphismes préservant les aires et l’orientation de $(\mathbb{R}^2, (0, 0))$ agit transitivement par composition à droite sur l’espace des germes de système de cartes locales. On recherche des systèmes de cartes locales dans lesquels la représentation de F , c’est-à-dire la famille $(F_p)_{p \in \Lambda}$ définie par

$$F_p = \Phi_{F(p)}^{-1} \circ F \circ \Phi_p$$

soit la plus simple possible.

A.2. – On dira qu’un système de cartes locales $(\Phi_p)_{p \in \Lambda}$ est de type I si pour tout $p \in \Lambda$ on a

$$\Phi_p([-1, +1] \times \{0\}) \subset W^s(p),$$

$$\Phi_p(\{0\} \times [-1, +1]) \subset W^u(p).$$

On peut toujours trouver un tel système. Notons G_1 le sous-groupe de G formé des germes qui préservent chacun des axes passant par l’origine. Alors $C(K, G_1)$ opère transitivement sur l’espace des germes de systèmes de type I.

À un système de type I, on associe le multiplicateur $p \mapsto \lambda(p) \in \mathbb{R}^*$ défini par

$$D_{(0,0)} F_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \lambda(p) \frac{\partial}{\partial x}.$$

De même, à $H \in G_1$ on associe $\mu(H) \in \mathbb{R}^*$:

$$D_{(0,0)} H \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \mu(H) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Le noyau de l’homomorphisme $H \mapsto \mu(H)$ de G_1 sur \mathbb{R}^* est noté G'_1 . Si deux systèmes de type I $(\Phi_p), (\tilde{\Phi}_p)$ se déduisent l’un de l’autre par l’action d’une famille $(H_p)_{p \in \Lambda}$:

$$\tilde{\Phi}_p = \Phi_p \circ H_p, \forall p \in \Lambda,$$

on aura

$$\tilde{\lambda}(p) = \mu(F(p))^{-1} \mu(p) \lambda(p).$$

On peut toujours choisir le système de type I de façon à avoir, pour tout $p \in \Lambda$

$$0 < |\lambda(p)| < 1.$$

A.3. – On dira qu'un système de cartes locales $(\Phi_p)_{p \in \Lambda}$ est de type II s'il est de type I et si de plus, pour tout $p \in \Lambda$, on a

$$\begin{aligned} F_p(x, 0) &= (\lambda(p)x, 0), \\ F_p(0, y) &= (0, (\lambda(p))^{-1}y), \end{aligned}$$

pour x, y assez petits (uniformément en p). Notons G_2 le sous-groupe normal de G'_1 formé des germes dont la restriction à chacun des axes passant par l'origine est l'identité. Le résultat suivant est élémentaire.

PROPOSITION. – Soit $(\Phi_p)_{p \in \Lambda}$ un système de type I. Il existe une famille continue $(H_p)_{p \in \Lambda} \in C(\Lambda, G'_1)$, uniquement déterminée modulo G_2 , telle que $(\Phi_p \circ H_p)_{p \in \Lambda}$ soit de type II.

Esquisse de preuve. – Représentons implicitement

$$(X, Y) = H_p(x, y)$$

par une fonction génératrice $S_p(x, Y)$ reliée à H_p par :

$$\begin{cases} y = \frac{\partial}{\partial x} S_p(x, Y) \\ X = \frac{\partial}{\partial Y} S_p(x, Y). \end{cases}$$

Dire que $H_p \in G'_1$ revient à dire qu'on a (en supposant S_p normalisé par $S_p(0, 0) = 0$)

$$S_p(x, Y) = xY(1 + O(|x| + |Y|)).$$

Si on prend

$$S_p(x, Y) = x(Y + s_p(Y)), \quad s_p(Y) = O(Y^2),$$

on aura

$$\begin{cases} y = Y + s_p(Y) \\ X = x(1 + s'_p(Y)) \end{cases}$$

et en particulier $X = x$ si $Y = 0$. De même, si $\tilde{S}_p(x, Y) = (x + \tilde{s}_p(x))Y$, on aura

$$\begin{cases} X = x + \tilde{s}_p(x) \\ y = Y(1 + s'_p(x)) \end{cases}$$

et donc $y = Y$ si $x = 0$. En appliquant le théorème de linéarisation fibrée des contractions sur chacun des axes, on peut donc choisir les applications linéarisantes fibrées dans G'_1 (c'est-à-dire préservant les aires!). L'unicité est immédiate. \square

A.4. – Soit $(\Phi_p)_{p \in \Lambda}$ un système de cartes locales de type II. Une fonction génératrice $\hat{S}_p(x, Y)$ pour F_p doit s'écrire

$$\hat{S}_p(x, Y) = \lambda(p)(xY + x^2Y^2s_p(x, Y))$$

ce qui donne

$$\begin{cases} X = \lambda(p)x(1 + 2xYs_p + xY^2\frac{\partial}{\partial Y}s_p) \\ y = \lambda(p)Y(1 + 2xYs_p + x^2Y\frac{\partial}{\partial x}s_p), \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} X = \lambda(p)x(1 + xyu_p(x, y)) \\ Y = \lambda(p)^{-1}y(1 - xyv_p(x, y)) \end{cases}$$

avec $u_p(0, 0) = v_p(0, 0) = 2\lambda(p)^{-1}s_p(0, 0)$.

La fonction continue $p \mapsto u_p(0, 0)$ est l'*invariant de Birkhoff* de F/Λ associé au système de type II $(\Phi_p)_{p \in \Lambda}$.

A.5. Invariance linéaire

Considérons $\tilde{F}_p = H_{F(p)}^{-1} \circ F_p \circ H_p$ avec

$$H_p(x, y) = (\mu(p)x, \mu(p)^{-1}y).$$

On aura

$$\begin{cases} \tilde{X} = \mu(F(p))^{-1}X = \mu(F(p))^{-1}\lambda(p)x(1 + xyu_p(x, y)) \\ \quad = \tilde{\lambda}(p)\tilde{x}(1 + \tilde{x}\tilde{y}\tilde{u}_p(\tilde{x}, \tilde{y})) \\ \tilde{Y} = \tilde{\lambda}(p)^{-1}\tilde{y}(1 + \tilde{x}\tilde{y}\tilde{v}_p(\tilde{x}, \tilde{y})) \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(p) &= \mu(F(p))^{-1}\lambda(p)\mu(p), \\ \tilde{u}_p(\tilde{x}, \tilde{y}) &= u_p(\mu(p)\tilde{x}, \mu(p)^{-1}\tilde{y}), \\ \tilde{v}_p(\tilde{x}, \tilde{y}) &= v_p(\mu(p)\tilde{x}, \mu(p)^{-1}\tilde{y}). \end{aligned}$$

En particulier, l'invariant de Birkhoff n'a pas changé.

A.6. L'invariant de Birkhoff comme cocycle

On considère encore $\tilde{F}_p = H_{F(p)}^{-1} \circ F_p \circ H_p$, mais $(H_p)_{p \in \Lambda}$ est maintenant une famille continue à valeurs dans G_2 . Comme en A.3 et A.4, on pourra écrire H_p sous la forme

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}(1 + \tilde{x}\tilde{y}a_p(\tilde{x}, \tilde{y})) \\ y &= \tilde{y}(1 - \tilde{x}\tilde{y}b_p(\tilde{x}, \tilde{y})), \end{aligned}$$

avec $a_p(0, 0) = b_p(0, 0)$. Quand on écrit \tilde{F}_p sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \lambda(p)\tilde{x}(1 + \tilde{x}\tilde{y}\tilde{u}_p(\tilde{x}, \tilde{y})), \\ \tilde{Y} &= \lambda(p)^{-1}\tilde{y}(1 - \tilde{x}\tilde{y}\tilde{v}_p(\tilde{x}, \tilde{y})), \end{aligned}$$

on aura

$$\tilde{u}_p(0, 0) = \tilde{v}_p(0, 0) = u_p(0, 0) + a_p(0, 0) - a_{F(p)}(0, 0),$$

c'est-à-dire que la différence entre les invariants de Birkhoff par rapport à $(\Phi_p)_{p \in \Lambda}$ et $(\Phi_p \circ H_p)_{p \in \Lambda}$ est le *cobord* de l'application continue $p \mapsto a_p(0, 0)$.

Appendice B

Forme normale fibrée dissipative

B.1. – Soient M une surface, F un difféomorphisme de M de classe C^∞ , Λ un fer à cheval de F , $\Sigma \subset \mathbf{A}^{\mathbb{Z}}$ le sous-décalage de type fini associé à une partition de Markov $(R_a)_{a \in \mathbf{A}}$ de Λ .

Nous appellerons *carte semi-locale* en $\underline{\theta} \in \Sigma^-$ un plongement de classe C^∞ d'un voisinage de $\{0\} \times [-1, +1]$ dans M qui envoie $\{0\} \times [-1, +1]$ sur $W^u(\underline{\theta})$. Un *système de cartes semi-locales* $(\phi_{\underline{\theta}})_{\underline{\theta} \in \Sigma^-}$ est une famille de cartes définies sur un même voisinage de $\{0\} \times [-1, +1]$, dépendant *continûment* de $\underline{\theta}$ dans la C^∞ -topologie, telle que $\phi_{\underline{\theta}}$ soit pour chaque $\underline{\theta} \in \Sigma^-$ une carte semi-locale en $\underline{\theta}$. Deux systèmes $(\phi_{\underline{\theta}}), (\phi'_{\underline{\theta}})$ sont dits équivalents s'il existe un voisinage de $\{0\} \times [-1, +1]$ sur lequel $\phi_{\underline{\theta}}$ et $\phi'_{\underline{\theta}}$ coïncident pour tout $\underline{\theta} \in \Sigma^-$; une classe d'équivalence est un *germe de système de cartes semi-locales*.

On cherche des systèmes de cartes dans lesquels la représentation de F^{-1} , c'est-à-dire la famille $(F_{\underline{\theta}}^{-1})_{\underline{\theta} \in \Sigma^-}$ définie par

$$F_{\underline{\theta}}^{-1} = \phi_{\sigma^{-1}(\underline{\theta})}^{-1} \circ F^{-1} \circ \phi_{\underline{\theta}}$$

soit la plus simple possible.

On notera G le groupe des germes de C^∞ -difféomorphismes de \mathbb{R}^2 , définis au voisinage de $\{0\} \times [-1, +1]$ et préservant cet intervalle.

Le groupe $C(\Sigma^-, G)$ des applications continues de Σ^- dans G opère transitivement par composition à droite sur l'espace des germes de systèmes de cartes semi-locales.

B.2. – On dira qu'un système de cartes semi-locales est de type I si, pour chaque $\underline{\theta} \in \Sigma^-$, la restriction de $F_{\underline{\theta}}^{-1}$ à $\{0\} \times [-1, +1]$ est *affine*.

Notons G_1 le sous-groupe normal de G formé des germes dont la restriction à $\{0\} \times [-1, +1]$ est l'identité. Le résultat bien connu de linéarisation fibrée des contractions garantit qu'étant donné un germe de système $(\phi_{\underline{\theta}})_{\underline{\theta} \in \Sigma^-}$, il existe une famille $(H_{\underline{\theta}})_{\underline{\theta} \in \Sigma^-} \in C(\Sigma^-, G)$, uniquement déterminée modulo G_1 , telle que les $\phi'_{\underline{\theta}} = \phi_{\underline{\theta}} \circ H_{\underline{\theta}}$ forment un germe de système de type I et $H_{\underline{\theta}}$ restreint à $\{0\} \times [-1, +1]$ préserve l'orientation.

REMARQUE. – Le théorème de linéarisation fibrée des contractions, dans le cadre qui nous intéresse, est une reformulation de l'existence des géométries limites $(k^{\underline{\theta}})$.

Lorsque $(\phi_{\underline{\theta}})$ est un système de type I, on écrira :

$$(1) \quad D_{(0,y)} F_{\underline{\theta}}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = \lambda(\underline{\theta}) \frac{\partial}{\partial y},$$

$$(2) \quad D_{(0,y)} F_{\underline{\theta}}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \mu(\underline{\theta}, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(\underline{\theta}, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

B.3. – On dira qu'un système de cartes semi-locales est de type II s'il est de type I et si de plus la fonction $\mu(\underline{\theta}, y)$ ne dépend pas de $y \in [-1, +1]$.

Soit $(H_{\underline{\theta}})_{\underline{\theta} \in \Sigma^-}$ une famille dans $C(\Sigma^-, G_1)$; écrivons

$$(3) \quad D_{(0,y)} H_{\underline{\theta}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = a(\underline{\theta}, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(\underline{\theta}, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Soient $(\phi_{\underline{\theta}}), (\tilde{\phi}_{\underline{\theta}})$ des systèmes de type I reliés par $\tilde{\phi}_{\underline{\theta}} = \phi_{\underline{\theta}} \circ H_{\underline{\theta}}, \forall \underline{\theta} \in \Sigma^-$.

On a

$$(4) \quad \tilde{\mu}(\underline{\theta}, y) = a(\underline{\theta}, y) \mu(\underline{\theta}, y) a(\sigma^{-1} \underline{\theta}, F_{\underline{\theta}}^{-1}(y))^{-1}$$

d'où

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial y} \log |\tilde{\mu}|(\underline{\theta}, y) = \frac{\partial}{\partial y} \log |a|(\underline{\theta}, y) + \frac{\partial}{\partial y} \log |\mu|(\underline{\theta}, y) - \lambda(\underline{\theta}) \frac{\partial}{\partial y} \log |a|(\sigma^{-1} \underline{\theta}, F_{\underline{\theta}}^{-1}(y)).$$

On aura donc $\frac{\partial}{\partial y} \log |\tilde{\mu}| \equiv 0$ si et seulement si :

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial y} \log |a|(\underline{\theta}, y) = - \sum_{n \geq 0} \lambda^{(n)}(\underline{\theta}) \frac{\partial}{\partial y} \log |\mu|(\sigma^{-n} \underline{\theta}, F_{\underline{\theta}}^{-n}(y))$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda^{(n)}(\underline{\theta}) &= \lambda(\sigma^{-n+1}(\underline{\theta})) \dots \lambda(\sigma^{-1}(\underline{\theta})) \lambda(\underline{\theta}), \\ F_{\underline{\theta}}^{-n} &= F_{\sigma^{-n+1}(\underline{\theta})}^{-1} \circ \dots \circ F_{\underline{\theta}}^{-1}. \end{aligned}$$

La formule (6) définit une fonction de classe C^∞ par rapport à y qui dépend continûment de $\underline{\theta}$ dans la C^∞ topologie. Pour reconstituer complètement $a(\underline{\theta}, y)$, il suffit de connaître la fonction continue $\underline{\theta} \mapsto a(\underline{\theta}, 0)$ de Σ^- dans \mathbb{R}^* .

On notera G_2 (resp. G'_2) le sous-groupe de G_1 formé des germes H tels que la composante $a(y)$ de $D_{(0,y)} H \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ sur $\frac{\partial}{\partial x}$ ne dépende pas de y (resp. soit égale à 1). La discussion qui précède garantit qu'étant donné un système $(\phi_{\underline{\theta}})$ de type I, il existe une famille continue $(H_{\underline{\theta}})_{\underline{\theta} \in \Sigma^-}$ dans $C(\Sigma^-, G_1)$, uniquement déterminée modulo G_2 , telle que le système $\tilde{\phi}_{\underline{\theta}} = \phi_{\underline{\theta}} \circ H_{\underline{\theta}}$ soit de type II.

B.4. – On suppose dorénavant que F est dilatant sur Λ . On pourra alors trouver un germe de système de cartes semi-locales de type II vérifiant

$$(*) \quad |\lambda(\underline{\theta}) \mu(\underline{\theta})| < 1, \forall \underline{\theta} \in \Sigma^-.$$

On dira *dans ce cas* qu'un système de cartes semi-locales est de type III s'il est de type II et si de plus, pour tout $\underline{\theta} \in \Sigma^-$, l'application $y \mapsto B(\underline{\theta}, y)$ est *affine* (où B est définie par (2)).

Soient $(\phi_{\underline{\theta}})$ un système de type II, $(H_{\underline{\theta}})$ une famille continue dans $C(\Sigma^-, G'_2)$, $\tilde{\phi}_{\underline{\theta}} = \phi_{\underline{\theta}} \circ H_{\underline{\theta}}$.

Écrivons

$$\begin{aligned} D_{(0,y)} F_{\underline{\theta}}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) &= \mu(\underline{\theta}) \frac{\partial}{\partial x} + B(\underline{\theta}, y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ D_{(0,y)} \tilde{F}_{\underline{\theta}}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) &= \mu(\underline{\theta}) \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{B}(\underline{\theta}, y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ D_{(0,y)} H_{\underline{\theta}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} + b(\underline{\theta}, y) \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

de sorte qu'on a

$$(7) \quad \tilde{B}(\underline{\theta}, y) = B(\underline{\theta}, y) + \lambda(\underline{\theta})b(\underline{\theta}, y) - \mu(\underline{\theta})b(\sigma^{-1}(\underline{\theta}), F_{\underline{\theta}}^{-1}(y));$$

en dérivant 2 fois, on obtient

$$(8) \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{B}(\underline{\theta}, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} B(\underline{\theta}, y) + \lambda(\underline{\theta}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} b(\underline{\theta}, y) - \lambda^2(\underline{\theta}) \mu(\underline{\theta}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} b(\sigma^{-1}(\underline{\theta}), F_{\underline{\theta}}^{-1}(y));$$

on aura donc $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{B} \equiv 0$ si et seulement si

$$(9) \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} b(\underline{\theta}, y) = - \sum_{n \geq 0} \lambda^{-1}(\sigma^{-n}(\underline{\theta})) \lambda^{(n)}(\underline{\theta}) \mu^{(n)}(\underline{\theta}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} B(\sigma^{-n} \underline{\theta}, F_{\underline{\theta}}^{-n}(y)),$$

où $\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}, F_{\underline{\theta}}^{-n}$ ont le même sens que dans la formule (6). Désignons par G_3 le sous-groupe de G'_2 formé des germes H tels que l'application $y \mapsto b(\underline{\theta}, y)$ soit affine pour chaque $\underline{\theta} \in \Sigma^-$. La formule (9) définit pour chaque $\underline{\theta} \in \Sigma^-$ une application $\frac{\partial^2}{\partial y^2} b$ de classe C^∞ qui dépend continûment de $\underline{\theta}$ dans la C^∞ -topologie. On conclut qu'il existe une famille continue $(H_{\underline{\theta}})$ dans $C(\Sigma^-, G'_2)$, uniquement déterminée modulo G_3 , telle que le système $\tilde{\phi}_{\underline{\theta}} \circ H_{\underline{\theta}}$ soit de type III.

B.5. Directions stables

On suppose toujours que l'hypothèse de dissipation (*) est vérifiée; on se donne un système de cartes semi-locales de type III $(\phi_{\underline{\theta}})_{\underline{\theta} \in \Sigma^-}$ et on écrit

$$\begin{aligned} D_{(0,y)} F_{\underline{\theta}}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) &= \lambda(\underline{\theta}) \frac{\partial}{\partial y}, \\ D_{(0,y)} F_{\underline{\theta}}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) &= \mu(\underline{\theta}) \frac{\partial}{\partial x} + B(\underline{\theta}, y) \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

en notant $\beta(\underline{\theta}) = \frac{\partial}{\partial y} B(\underline{\theta}, y)$ le coefficient de l'application affine $y \mapsto B(\underline{\theta}, y)$.

En un point $(0, y)$ tel que $\phi_{\underline{\theta}}(0, y) \in \Lambda$, notons $\frac{\partial}{\partial x} + W(\underline{\theta}, y) \frac{\partial}{\partial y}$ la direction stable normalisée. On a donc

$$\begin{aligned} D_{(0,y)} F_{\underline{\theta}}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} + W(\underline{\theta}, y) \frac{\partial}{\partial y} \right) &= \mu(\underline{\theta}) \frac{\partial}{\partial x} + (B(\underline{\theta}, y) + \lambda(\underline{\theta}) W(\underline{\theta}, y)) \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \mu(\underline{\theta}) \left(\frac{\partial}{\partial x} + W(\sigma^{-1} \underline{\theta}, F_{\underline{\theta}}^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

soit

$$(10) \quad W(\sigma^{-1} \underline{\theta}, F_{\underline{\theta}}^{-1}(y)) = \mu^{-1}(\underline{\theta}) (\lambda(\underline{\theta}) W(\underline{\theta}, y) + B(\underline{\theta}, y)).$$

Notons $(\underline{\theta}(m), y(m))$, pour $m \geq 0$, le couple tel que

$$\begin{aligned} F^m(\phi_{\underline{\theta}}(0, y)) &\in W^u(\underline{\theta}(m)), \\ F^m(\phi_{\underline{\theta}}(0, y)) &= \phi_{\underline{\theta}(m)}(0, y(m)). \end{aligned}$$

On a alors

$$(11) \quad W(\underline{\theta}, y) = \sum_{m > 0} B(\underline{\theta}(m), y(m)) \lambda^{(m-1)}(\underline{\theta}(m-1)) (\mu^{(m)}(\underline{\theta}(m)))^{-1}.$$

Considérons maintenant, pour le même $\underline{\theta} \in \Sigma^-$, deux ordonnées y, \hat{y} telles que $\phi_{\underline{\theta}}(0, y)$ et $\phi_{\underline{\theta}}(0, \hat{y})$ appartiennent à Λ . Définissons $(\hat{\underline{\theta}}(m), \hat{y}(m))$ pour $m \geq 0$ relativement à $\underline{\theta}, \hat{y}$. Notons N le plus petit entier tel que $\underline{\theta}(N) \neq \hat{\underline{\theta}}(N)$ (en supposant $y \neq \hat{y}$).

On a donc :

$$(12) \quad C^{-1}|\lambda^{(N-1)}(\underline{\theta}(N-1))| < |y - \hat{y}| < C|\lambda^{(N-1)}(\underline{\theta}(N-1))|,$$

puis, pour $0 < m < N$

$$(13) \quad y(m) - \hat{y}(m) = (\lambda^{(m)}(\underline{\theta}(m)))^{-1}(y - \hat{y}),$$

$$(14) \quad B(\underline{\theta}(m), y(m)) - B(\underline{\theta}(m), \hat{y}(m)) = \beta(\underline{\theta}(m))\lambda^{(m)}(\underline{\theta}(m))^{-1}(y - \hat{y}).$$

On obtient donc, à partir de (11) :

$$(15) \quad \frac{W(\underline{\theta}, y) - W(\underline{\theta}, \hat{y})}{y - \hat{y}} = \sum_{m>0} \beta(\underline{\theta}(m))\lambda^{-1}(\underline{\theta}(m))(\mu^{(m)}(\underline{\theta}(m)))^{-1} + O((\mu^{(N)}(\underline{\theta}(N)))^{-1})$$

On posera

$$(16) \quad E(\underline{\theta}, y) = \sum_{m>0} \beta(\underline{\theta}(m))\lambda^{-1}(\underline{\theta}(m))(\mu^{(m)}(\underline{\theta}(m)))^{-1},$$

quantité qui représente la vitesse de variation de la direction stable dans le système de cartes de type III considéré.

Soient $y' \neq y$ tel que $\phi_{\underline{\theta}}(0, y') \in \Lambda$, $(\underline{\theta}'(m), y'(m))$, pour $m \geq 0$ la suite relative à $\underline{\theta}, y'$, et soit M le plus petit entier tel que $\underline{\theta}(M) \neq \underline{\theta}'(M)$. La variation de $E(\underline{\theta}, y)$ est donnée par la formule suivante ; pour $0 \leq L < M$, on a :

$$(17) \quad E(\underline{\theta}, y) - E(\underline{\theta}, y') = \left[\mu^{(L)}(\underline{\theta}(L)) \right]^{-1} (E(\underline{\theta}(L), y(L)) - E(\underline{\theta}(L), y'(L))).$$

B.6. – Pour conclure, nous examinons comment $E(\underline{\theta}, y)$ change lorsque nous remplaçons un système de cartes de type III par un autre.

Un tel changement s'effectue par composition de 3 types de difféomorphismes :

B.6.1. *Changement d'orientation des feuilles.* – On a $\tilde{\phi}_{\underline{\theta}} = \phi_{\underline{\theta}} \circ H_{\underline{\theta}}$, avec

$$H_{\underline{\theta}}(x, y) = (x, \varepsilon(\underline{\theta})y),$$

$\varepsilon : \Sigma^- \rightarrow \{-1, +1\}$ étant continue. On vérifie immédiatement qu'on a

$$\tilde{E}(\underline{\theta}, \varepsilon(\underline{\theta})y) = E(\underline{\theta}, y).$$

B.6.2. *Dilatation transverse.* – On a $\tilde{\phi}_{\underline{\theta}} = \phi_{\underline{\theta}} \circ H_{\underline{\theta}}$, avec maintenant

$$H_{\underline{\theta}}(x, y) = (a(\underline{\theta})x, y),$$

$a : \Sigma^- \rightarrow \mathbb{R}^*$ étant continue. On vérifie immédiatement qu'on a

$$\tilde{E}(\underline{\theta}, y) = a(\underline{\theta})E(\underline{\theta}, y).$$

B.6.3. *Changement dans \mathbf{G}_3 .* – On a finalement $\tilde{\phi}_\theta = \phi_\theta \circ H_\theta$, avec

$$H_\theta(0, y) \equiv (0, y),$$

$$D_{(0,y)}H_\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} + b(\theta, y)\frac{\partial}{\partial y},$$

et $y \mapsto b(\theta, y)$ est pour chaque $\theta \in \Sigma^-$ une application affine dont la pente est notée $\beta^*(\theta)$.

On obtient dans ce cas

$$\tilde{E}(\theta, y) = E(\theta, y) - \beta^*(\theta).$$

RÉFÉRENCES

- [1] M. J. HALL, On the sum and product of continued fractions, *Ann. of Math.* **48** (1947), 966–993.
- [2] M. W. HIRSCH, C. C. PUGH, M. SHUB, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Math. **583**, Springer, 1977.
- [3] R. KAUFMAN, On Hausdorff dimension of projections, *Mathematika* **15** (1968), 153–155.
- [4] J. M. MARSTRAND, Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimensions, *Proc. London Math. Soc.* **4** (1954), 257–302.
- [5] C. G. MOREIRA, Stable intersections of Cantor sets and homoclinic bifurcations, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **13** (1996), 741–781.
- [6] C. G. MOREIRA, J.-C. YOCCOZ, Stable intersections of regular Cantor sets with large Hausdorff dimensions, *Ann. of Math.* **154** (2001), 45–96.
- [7] S. E. NEWHOUSE, Nondensity of axiom A(a) on S^2 , in *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, Amer. Math. Soc., 1970, 191–202.
- [8] J. PALIS, F. TAKENS, Hyperbolicity and the creation of homoclinic orbits, *Ann. of Math.* **125** (1987), 337–374.
- [9] J. PALIS, F. TAKENS, *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*, Cambridge Studies in Advanced Math. **35**, Cambridge Univ. Press, 1993.
- [10] J. PALIS, J.-C. YOCCOZ, Homoclinic tangencies for hyperbolic sets of large Hausdorff dimension, *Acta Math.* **172** (1994), 91–136.
- [11] E. R. PUJALS, M. SAMBARINO, Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms, *Ann. of Math.* **151** (2000), 961–1023.

- [12] D. SULLIVAN, Differentiable structures on fractal-like sets, determined by intrinsic scaling functions on dual Cantor sets, in *The mathematical heritage of Hermann Weyl (Durham, NC, 1987)*, Proc. Sympos. Pure Math. **48**, Amer. Math. Soc., 1988, 15–23.

(Manuscrit reçu le 19 décembre 2006 ;
accepté, après révision, le 3 juillet 2009.)

Carlos Gustavo MOREIRA
Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)
Estrada D. Castorina, 110
CEP 22460-320 Rio de Janeiro, RJ, Brasil
E-mail: gugu@impa.br

Jean-Christophe YOCCOZ
Collège de France
3, rue d'Ulm
75231 Paris Cedex 05, France
E-mail: jean-c.yoccoz@college-de-france.fr