ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J.-A. SERRET

Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 3 (1866), p. 143-161
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1866_1_3__143_0>

MÉMOIRE SUR L'INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU PREMIER ORDRE,

PAR M. J.-A. SERRET,

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR AU COLLÉGE DE FRANCE
ET A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

§ I.

1. Tous les géomètres connaissent les belles recherches de Cauchy et de Jacobi sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre; les méthodes remarquables auxquelles ces illustres savants ont été conduits résolvent la question proposée de la manière la plus générale, et il semble qu'il n'y ait plus rien à ajouter à l'analyse qu'ils ont développée.

Cependant la méthode de Jacobi et celle de Cauchy laissent subsister une difficulté que mon savant confrère et ami M. Bertrand a signalée le premier (*voir* t. XLV des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, p. 617), et qui résulte de ce que le procédé de démonstration employé cesse d'être admissible lorsqu'une certaine quantité qui s'introduit dans les calculs devient infinie ou indéterminée. Or, ainsi que l'a fait remarquer M. Bertrand, cette circonstance se présente dans le cas le plus général, et non pas seulement dans quelques cas exceptionnels. Pénétré de la valeur de cette objection, M. Ossian Bonnet a cherché à s'affranchir des difficultés en question, et il a fait connaître une démonstration géométrique du théorème de Jacobi pour le cas où le nombre des variables indépendantes se réduit à deux (t. XLV des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, p. 581).

Mais le travail de M. Bonnet ne jette aucune lumière sur la portée véritable de l'objection formulée par M. Bertrand, laquelle subsiste dans son entier.

Dans les explications qui vont suivre, je prendrai de préférence, pour point de départ, la méthode au développement de laquelle Cauchy a consacré la première partie de son Mémoire (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II, p. 238), et je traiterai d'abord le cas simple de deux variables indépendantes.

2. Soit

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

l'équation proposée, dans laquelle z désigne une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y et où p et q représentent les dérivées partielles de z par rapport à x et à y respectivement. Pour achever de déterminer la fonction inconnue z, nous supposerons qu'elle soit assujettie à se réduire, pour $x = x_0$, à une fonction donnée mais arbitraire $f(y)$ de y; dans la même hypothèse, on aura

$$q = \frac{df(y)}{dy} = f'(y).$$

La méthode de Cauchy, fondée, comme celle d'Ampère, sur le changement de l'une des variables indépendantes, ramène le problème proposé au suivant :

Trouver quatre fonctions y, z, p, q des deux variables indépendantes x et y_0 qui satisfassent généralement aux deux équations

$$\left\{\begin{array}{l} dz = p\,dx + q\,dy, \\ F(x, y, z, p, q) = 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

et qui, pour $x = x_0$, se réduisent respectivement à y_0, z_0, p_0, q_0.

Nous faisons, pour abréger,

$$z_0 = f(y_0), \quad q_0 = f'(y_0), \tag{3}$$

et nous désignons par p_0 une quantité déterminée par l'équation

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0. \tag{4}$$

Ce changement de variables conduit, pour la détermination des quatre inconnues, à quatre équations simultanées aux dérivées partielles; mais, parce que ces équations ne renferment point la variable y_0, elles doivent être traitées comme des équations différentielles ordinaires, et si l'on désigne par

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + P\,dp + Q\,dq$$

la différentielle totale du premier membre de l'équation (1), on peut les comprendre dans la formule unique

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + Zp} = \frac{-dq}{Y + Zq}. \tag{5}$$

On doit remarquer que l'une de ces équations est une conséquence du système formé par les trois autres et par l'équation (1).

Au moyen des équations (5), on peut en général trouver des valeurs finies et déterminées de y, z, p, q, qui se réduisent respectivement à y_0, z_0, p_0, q_0 pour $x = x_0$; soient

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= f_1(x, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ z &= f_2(x, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ p &= f_3(x, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ q &= f_4(x, y_0, z_0, p_0, q_0), \end{aligned}\right.$$

ces valeurs. Si l'on élimine y_0, z_0, p_0, q_0 entre les deux premières équations de ce système et les équations (3) et (4), on obtiendra la valeur demandée de l'inconnue z.

Telle est, en résumé, la méthode donnée par Cauchy; mais l'analyse qui y conduit exige que les valeurs de y, z, p, q, tirées des équations (6), rendent identique l'équation

$$\frac{dz}{dy_0} - q\frac{dy}{dy_0} = 0.$$

Pour établir que cette circonstance a toujours lieu, Cauchy pose

$$\frac{dz}{dy_0} - q\frac{dy}{dy_0} = \mathrm{I},$$

et il obtient l'équation

$$\mathrm{P}\frac{d\mathrm{I}}{dx} + \mathrm{ZI} = 0,$$

dans laquelle nous supposons que y, z, p, q soient remplacées par leurs valeurs tirées des formules (6). En intégrant cette équation on trouve

$$\log\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0} = -\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{P}}\,dx,$$

d'où

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_0 e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{P}}dx},$$

I_0 désignant la valeur que prend I pour $x = x_0$; et comme on a évidemment

$$\mathrm{I}_0 = 0,$$

on en conclut généralement

$$\mathrm{I} = 0.$$

L'objection que nous avons à discuter consiste donc en ce que la conclusion de

Cauchy n'est plus admissible lorsque l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\, dx$ cesse d'avoir une valeur finie et déterminée. Cette circonstance pourra se présenter et se présentera effectivement, si l'on attribue une forme déterminée convenable à la fonction $f(y)$ qui exprime la valeur de z dans l'hypothèse $x = x_0$; mais je dis que :

Si l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\, dx$ cesse d'avoir une valeur finie et déterminée pour une certaine forme de la fonction $f(y)$, les formules (6) *deviennent illusoires et cessent de fournir la solution du problème proposé; celle-ci est donnée, dans ce cas, par l'intégrale complète de Lagrange qui accompagne l'intégrale générale.*

3. Considérons toujours z_0 comme une fonction indéterminée de y_0 et supposons que p_0 ait été remplacé partout par sa valeur tirée de l'équation (4). Alors il est facile de voir que les expressions (6) de y et de z contiendront l'une et l'autre q_0, ou qu'elles seront toutes deux indépendantes de cette dérivée. Ce dernier cas ne peut évidemment se présenter que si l'équation proposée (1) est linéaire par rapport aux dérivées p et q; il ne saurait offrir en conséquence aucune difficulté, et nous en ferons ici abstraction. Cela posé, si l'on désigne par

$$V = 0 \tag{7}$$

l'équation obtenue par l'élimination de q_0 entre les deux premières équations (6), les quatre équations qui composent ce système (6) pourront être remplacées par les quatre suivantes :

$$V = 0, \quad \frac{dV}{dy_0} + q_0 \frac{dV}{dz_0} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{dV}{dx} + p\frac{dV}{dz} = 0, \quad \frac{dV}{dy} + q\frac{dV}{dz} = 0. \tag{9}$$

Ce théorème est bien connu, et pour l'établir il suffit de prendre la différentielle totale de l'équation (7) où y et z sont fonctions de x et de y_0, z_0 de y_0 seule. Après avoir remplacé dans cette différentielle dz_0 par $q_0 dy_0$, dz par $pdx + qdy$, et dy par sa valeur tirée de la première équation (6), il faudra égaler à zéro les coefficients de dx et de dy_0, et l'on obtiendra deux équations qui devront être identiques en vertu des équations (6). L'une de ces deux équations contiendra nécessairement la dérivée $\frac{dq_0}{dy_0}$, et l'identité dont nous venons de parler ne pourra avoir lieu que si le coefficient de $\frac{dq_0}{dy_0}$ s'annule. L'équation où figure cette dérivée se décompose ainsi en deux autres, et l'on obtient de cette manière les trois équations qui, avec l'équation (7), constituent les deux systèmes (8) et (9).

Pour reconstruire l'équation proposée (1), il suffit évidemment d'éliminer y_0

et z_0 entre les équations (7) et (9); d'où il suit que la seule équation (7) satisfait à l'équation (1), si l'on y regarde y_0 et z_0 comme deux constantes arbitraires; puisque les valeurs de p et de q que l'on en tirera dans cette hypothèse seront les mêmes que celles obtenues dans l'hypothèse où y_0 et z_0 sont variables et assujetties à la deuxième équation (8). Cette solution particulière qui accompagne toujours une forme déterminée de l'intégrale générale est ce que Lagrange a nommé une *intégrale complète;* nous allons voir dans quel cas elle peut nous donner la solution du problème proposé.

4. Cherchons d'abord à exprimer la valeur générale de $\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\,dx$ en fonction des quantités de l'intégrale. Pour cela, je supposerai, en vue d'abréger, que l'on ait résolu l'équation (7) par rapport à z et que l'on en ait tiré la valeur $z = M$, M étant une fonction donnée de x, y, y_0, z_0 qui se réduit à z_0 pour $x = x_0$ et $y = y_0$. Les équations (8) et (9) seront plus simplement

$$z = M, \quad \frac{dM}{dy_0} + q_0 \frac{dM}{dz_0} = 0, \tag{10}$$

$$p = \frac{dM}{dx}, \quad q = \frac{dM}{dy}. \tag{11}$$

On peut obtenir la valeur de la différentielle totale dF du premier membre de l'équation (1), en ajoutant la différentielle de la première équation (10) et celles des équations (11), après les avoir multipliées par des facteurs convenables λ, μ, ν, propres à faire disparaître dy_0 et dz_0. On a donc

$$\left\{\begin{aligned} dF &= \left(\lambda \frac{dM}{dx} + \mu \frac{d^2M}{dx^2} + \nu \frac{d^2M}{dx\,dy}\right) dx \\ &+ \left(\lambda \frac{dM}{dy} + \mu \frac{d^2M}{dx\,dy} + \nu \frac{d^2M}{dy^2}\right) dy - \lambda dz - \mu dp - \nu dq, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

les facteurs λ, μ, ν devant satisfaire aux deux équations

$$\lambda \frac{dM}{dy_0} + \mu \frac{d^2M}{dx\,dy_0} + \nu \frac{d^2M}{dy\,dy_0} = 0,$$

$$\lambda \frac{dM}{dz_0} + \mu \frac{d^2M}{dx\,dz_0} + \nu \frac{d^2M}{dy\,dz_0} = 0,$$

et, par suite, la valeur de $-\frac{Z}{P}$ sera

$$-\frac{Z}{P} = -\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\dfrac{d^2M}{dx\,dy_0}\dfrac{d^2M}{dy\,dz_0} - \dfrac{d^2M}{dx\,dz_0}\dfrac{d^2M}{dy\,dy_0}}{\dfrac{dM}{dy_0}\dfrac{d^2M}{dy\,dz_0} - \dfrac{dM}{dz_0}\dfrac{d^2M}{dy\,dy_0}}.$$

Pour effectuer l'intégration de la différentielle $-\frac{Z}{P}dx$, il n'est pas nécessaire de remplacer, dans l'expression précédente, y par sa valeur tirée de la seconde équation (10); on évite effectivement cette élimination en procédant comme il suit : on peut écrire

$$-\frac{Z}{P}dx = \frac{\frac{d^2M}{dy\,dz_0}\left(\frac{dM}{dz_0}\frac{d^2M}{dx\,dy_0}-\frac{dM}{dy_0}\frac{d^2M}{dx\,dz_0}\right)dx+\frac{d^2M}{dx\,dz_0}\left(\frac{dM}{dy_0}\frac{d^2M}{dy\,dz_0}-\frac{dM}{dz_0}\frac{d^2M}{dy\,dz_0}\right)dx}{\frac{dM}{dz_0}\left(\frac{dM}{dy_0}\frac{d^2M}{dy\,dz_0}-\frac{dM}{dz_0}\frac{d^2M}{dy\,dy_0}\right)},$$

car les termes introduits dans le numérateur de cette expression se détruisent mutuellement. Cela posé, en différentiant la deuxième équation (10), savoir :

$$\frac{\left(\frac{dM}{dy_0}\right)}{\left(\frac{dM}{dz_0}\right)}+q_0=0,$$

dans l'hypothèse où y est fonction de x seule, on trouve

$$\left(\frac{dM}{dz_0}\frac{d^2M}{dx\,dy_0}-\frac{dM}{dy_0}\frac{d^2M}{dx\,dz_0}\right)dx=\left(\frac{dM}{dy_0}\frac{d^2M}{dy\,dz_0}-\frac{dM}{dz_0}\frac{d^2M}{dy\,dy_0}\right)dy;$$

au moyen de quoi l'expression précédente de $-\frac{Z}{P}dx$ peut s'écrire

$$(13)\qquad -\frac{Z}{P}dx=\frac{d\log\frac{dM}{dz_0}}{dx}dx+\frac{d\log\frac{dM}{dz_0}}{dy}dy=d\log\frac{dM}{dz_0}.$$

Comme la quantité M doit se réduire à z_0 quand on fait $x=x_0$, $y=y_0$, il est clair que $\frac{dM}{dz_0}$ se réduira, dans la même hypothèse, à l'unité, et l'on aura, en intégrant l'équation (13),

$$(14)\qquad -\int_{x_0}^{x}\frac{Z}{P}dx=\log\frac{dM}{dz_0}.$$

Telle est l'expression générale de l'intégrale que nous avons à considérer.

5. D'après ce résultat, l'intégrale $\int_{x_0}^{x}\frac{Z}{P}dx$ ne peut devenir infinie que si l'on attribue à la fonction $f(y)$ une valeur telle, que la dérivée $\frac{dM}{dz_0}$ devienne nulle ou infinie, après la substitution de la valeur de y tirée de la deuxième équation (10); mais il est évident que cette dernière équation devient alors illusoire, c'est-à-dire

qu'on n'en saurait tirer pour y une valeur finie et déterminée se réduisant à y_0 pour $x = x_0$; puisque l'hypothèse $x = x_0$, $y = y_0$ doit, par les conditions du problème, réduire $\frac{dM}{dz_0}$ à l'unité.

Mais de ce que l'équation

$$\frac{dM}{dy_0} + q_0 \frac{dM}{dz_0} = 0$$

est impropre à fournir une valeur déterminée de y qui se réduise à y_0 pour $x = x_0$, on doit conclure généralement que l'hypothèse $x = x_0$ fait disparaître y de son premier membre, et comme d'ailleurs cette équation est satisfaite par la double hypothèse $x = x_0$, $y = y_0$, il s'ensuit qu'elle a lieu identiquement, quel que soit y, quand on suppose $x = x_0$. On voit enfin que si l'on fait $x = x_0$ dans l'équation

$$z - M = 0,$$

le premier membre ne contiendra pas y_0, puisque sa dérivée relative à y_0 est identiquement nulle; et parce que cette équation est satisfaite quand on pose $y = y_0$, $z = z_0 = f(y_0)$, elle donnera généralement

$$z = f(y).$$

Ainsi, en résumé, dans le cas que nous considérons, où les formules générales (10) deviennent illusoires, la solution du problème tel qu'il a été posé est donnée par l'intégrale complète qui accompagne l'intégrale générale, c'est-à-dire par la première équation (10).

6. Pour donner un exemple de l'analyse qui précède, je considérerai l'équation

$$(15) \qquad F = pqy - pz + aq = 0,$$

dans laquelle a désigne une constante donnée; on a ici

$$P = -\frac{aq}{p}, \quad Q = \frac{pz}{q}, \quad Pp + Qq = pqy, \quad X + Zp = -p^2, \quad Y + Zq = 0,$$

et

$$\frac{Z}{P} = \frac{p^2}{aq};$$

les équations (5) sont alors

$$\frac{-pdx}{aq} = \frac{qdy}{pz} = \frac{dz}{pqy} = \frac{dp}{p^2} = \frac{dq}{0},$$

et l'on en tire sans difficulté les formules suivantes :

$$(16)\qquad y = \frac{y_0(z_0 - q_0 y_0) - a(x - x_0)}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}}, \quad z = \frac{z_0(z_0 - q_0 y_0) + aq_0(x - x_0)}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}},$$

$$(17)\qquad p = \frac{aq_0}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}}, \quad q = q_0,$$

qui sont, pour ce cas particulier, les intégrales générales (6). On a ensuite

$$(18)\qquad -\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{P}}\,dx = \log \frac{z_0 - q_0 y_0}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}};$$

cette intégrale devient infinie quel que soit x, si l'on a

$$z_0 - q_0 y_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dz_0}{dy_0} = \frac{z_0}{y_0},$$

c'est-à-dire

$$z_0 = \alpha y_0,$$

α étant une constante arbitraire. Mais en employant cette valeur de z_0, nos formules deviennent illusoires, car elles donnent, pour y et pour z, les valeurs

$$y = -\sqrt{\frac{a}{2\alpha}(x - x_0)}, \quad z = \sqrt{\frac{a\alpha}{2}(x - x_0)},$$

qui sont indépendantes de y_0.

Si l'on élimine q_0 entre les équations (16) pour former l'équation $z = \mathrm{M}$, on trouve

$$(19)\qquad z = \frac{y}{y_0}\left[z_0 - \frac{a}{y_0}(x - x_0)\right] + \sqrt{\left(\frac{y^2}{y_0^2} - 1\right)(x - x_0)\left[-2a\frac{z_0}{y_0} + \frac{a^2}{y_0^2}(x - x_0)\right]} = \mathrm{M};$$

on vérifie aisément que l'équation

$$\frac{d\mathrm{M}}{dy_0} + q_0 \frac{d\mathrm{M}}{dz_0} = 0$$

donne la valeur de y fournie par la première équation (16), et qu'après la substitution de cette valeur on a

$$\frac{d\mathrm{M}}{dz_0} = \frac{z_0 - q_0 y_0}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}},$$

ce qui est conforme aux résultats généraux obtenus plus haut.

Enfin, si l'on prend $f(y) = \alpha y$, et, par conséquent, $z_0 = \alpha y_0$, α étant une constante arbitraire, l'équation (19) devient

$$(20)\qquad z = y\left[\alpha - \frac{a}{y_0^2}(x - x_0)\right] + \sqrt{\left(\frac{y^2}{y_0^2} - 1\right)(x - x_0)\left[-2a\alpha + \frac{a^2}{y_0^2}(x - x_0)\right]}.$$

Si l'on considère y_0 et α comme deux constantes arbitraires, l'équation (20) satisfera à l'équation aux dérivées partielles (15); d'ailleurs elle se réduit à $z = \alpha y$ pour $x = x_0$; elle donne donc la solution du problème proposé.

§ II.

7. Les résultats qui précèdent peuvent être étendus à toutes les équations aux dérivées partielles du premier ordre, quel que soit le nombre des variables indépendantes. C'est ce que je vais établir ici, en modifiant, pour la clarté de l'exposition, les notations dont j'ai précédemment fait usage.

Soit x une fonction des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et posons

$$dx = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n;$$

si $F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ désigne une fonction donnée des $2n+1$ variables $x, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$,

$$(1)\qquad F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

sera le type général des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

La fonction inconnue x n'est pas déterminée complétement par la condition de satisfaire à l'équation (1), mais elle le devient en général si on l'assujettit en outre à se réduire à une fonction donnée

$$\xi = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

des $n-1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ lorsqu'on attribue à x_n la valeur particulière ξ_n; alors si l'on pose

$$d\xi = \varpi_1\,dx_1 + \varpi_2\,dx_2 + \ldots + \varpi_{n-1}\,dx_{n-1},$$

on aura en même temps

$$p_1 = \varpi_1,\quad p_2 = \varpi_2, \ldots,\quad p_{n-1} = \varpi_{n-1}.$$

La méthode de Cauchy suppose le problème posé comme nous venons de le faire et elle le ramène au suivant :

Trouver $2n$ fonctions $x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, p_1, p_2, \dots, p_n$ des n variables indépendantes $x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ qui satisfassent généralement aux deux équations

$$(2)\qquad \begin{cases} dx = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \dots + p_n\,dx_n, \\ F(x, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \end{cases}$$

et qui, pour $x_n = \xi_n$, se réduisent respectivement à

$$\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_{n-1}, \varpi_n.$$

Les fonctions ξ et $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_{n-1}$ sont définies par les équations

$$(3)\qquad \xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}), \quad d\xi = \varpi_1\,d\xi_1 + \varpi_2\,d\xi_2 + \dots + \varpi_{n-1}\,d\xi_{n-1};$$

enfin ϖ_n est une quantité déterminée par l'équation

$$(4)\qquad F(\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_n) = 0.$$

Ce changement de variables conduit, pour la détermination des $2n$ inconnues, à $2n$ équations simultanées aux dérivées partielles ; mais ces équations ne renferment point les variables indépendantes $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$, et en conséquence elles doivent être traitées comme des équations différentielles ordinaires. On peut les comprendre dans la formule suivante :

$$(5)\qquad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{p_n} = \frac{dx}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_n p_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + X p_1} = \dots = \frac{-dp_n}{X_n + X p_n},$$

en désignant par

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \dots + X_n\,dx_n + X\,dx + P_1\,dp_1 + P_2\,dp_2 + \dots + P_n\,dp_n$$

la différentielle totale dF du premier membre de l'équation (1). Il faut remarquer que l'équation (1) peut suppléer l'une des équations comprises dans la formule (5).

Au moyen des équations (5) on peut en général trouver des valeurs finies et déterminées de $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x, p_1, p_2, \dots, p_n$ qui se réduisent respectivement à $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi, \varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_n$ pour $x_n = \xi_n$: soient

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \varphi(x_n, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi, \varpi_1, \dots, \varpi_n), & p_1 = \psi_1(x_n, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi, \varpi_1, \dots, \varpi_n), \\ x_1 = \varphi_1(x_n, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi, \varpi_1, \dots, \varpi_n), & \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & p_{n-1} = \psi_{n-1}(x_n, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi, \varpi_1, \dots, \varpi_n), \\ x_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_n, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi, \varpi_1, \dots, \varpi_n), & p_n = \psi_n(x_n, \xi, \dots, \xi_{n-1}, \xi, \varpi_1, \dots, \varpi_n), \end{cases}$$

ces valeurs. Si l'on élimine les variables $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi, \varpi_1, \dots, \varpi_n$ entre les n premières équations de ce système, en faisant usage des équations (3) et (4), on obtiendra la solution cherchée de l'équation (1).

Mais cette analyse exige que les valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x$, tirées des équations (6), vérifient les $n-1$ équations qu'on déduit de la suivante,

$$\frac{dx}{d\xi_i}=p_1\frac{dx_1}{d\xi_i}+p_2\frac{dx_2}{d\xi_i}+\ldots+p_{n-1}\frac{dx_{n-1}}{d\xi_i},$$

en donnant à i toutes les valeurs $1, 2, 3,\ldots, (n-1)$. Pour établir que cette circonstance a toujours lieu, il suffit de poser

$$\frac{dx}{d\xi_i}=p_1\frac{dx_1}{d\xi_i}+\ldots+p_{n-1}\frac{dx_{n-1}}{d\xi_i}+\mathrm{T}_i,$$

et l'on obtient facilement l'équation

$$\mathrm{P}_n\frac{d\mathrm{T}_i}{dx_n}+\mathrm{XT}_i=0,$$

qui donne, par l'intégration,

$$\log\frac{\mathrm{T}_i}{\Theta_i}=-\int_{\xi_n}^{x_n}\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}_n}dx_n \quad \text{d'où} \quad \mathrm{T}_i=\Theta_i e^{-\int_{\xi_n}^{x_n}\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}_n}dx_n},$$

Θ_i désignant la valeur que prend T_i pour $x_n=\xi_n$; et comme on a évidemment $\Theta_i=0$, on en conclut généralement $\mathrm{T}_i=0$.

Toutefois la conclusion précédente n'est plus admissible, comme nous l'avons déjà dit au n° 2, lorsque l'intégrale $\int_{\xi_n}^{x_n}\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}_n}dx_n$ cesse d'avoir une valeur finie et déterminée, et cette circonstance se présentera en général, si l'on attribue une forme déterminée convenable à la fonction $f(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1})$ qui exprime la valeur de x dans l'hypothèse $x_n=\xi_n$; mais je dis que :

Si l'intégrale $\int_{\xi_n}^{x_n}\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}_n}dx_n$ cesse d'avoir une valeur finie et déterminée pour une certaine forme de la fonction $f(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1})$, les formules (6) *deviennent illusoires et cessent de fournir la solution du problème proposé; celle-ci est donnée, dans ce cas, par l'une des intégrales subsidiaires qui accompagnent chaque forme de l'intégrale générale.*

8. Considérons toujours la fonction $f(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1})$ comme indéterminée et supposons que l'on ait partout remplacé ϖ_n par sa valeur tirée de l'équation (4). Alors les expressions de $x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}, x$, fournies par les n premières équations (6), ne renfermeront plus que $n-1$ quantités ϖ, et il pourra se présenter deux cas. Ou bien l'on pourra tirer de $n-1$ de ces équations les valeurs de $\varpi_1, \varpi_2,\ldots, \varpi_{n-1}$ exprimées en fonction de $x, x_1, x_2,\ldots, x_n, \xi, \xi_1,\ldots, \xi_{n-1}$, et en les portant dans la $n^{ième}$, on aura une équation ne renfermant aucune des quantités ϖ. Ou bien les n premières équations (6) permettront seulement d'exprimer $n-\mu$ des quantités $\varpi_1, \varpi_2,\ldots, \varpi_{n-1}$ en fonction des $\mu-1$ autres, μ étant >1, et, dans

ce cas, les mêmes équations (6) fourniront en outre, par l'élimination, μ équations entre les seules variables $x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$. On voit facilement que le cas de $\mu = n$ ne peut se présenter que si l'équation proposée (1) est linéaire par rapport aux dérivées.

Examinons d'abord le premier cas, dans lequel les équations (6) ne peuvent donner qu'une équation unique

$$V(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = 0, \quad \text{ou} \quad V = 0, \tag{7}$$

entre les seules variables $x, x_1, \ldots, \xi, \xi_1, \ldots$ Dans ce cas, le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{d\varpi_1}, & \frac{d\varphi_2}{d\varpi_1}, & \frac{d\varphi_{n-1}}{d\varpi_1}, \\ \frac{d\varphi_1}{d\varpi_2}, & \frac{d\varphi_2}{d\varpi_2}, & \frac{d\varphi_{n-1}}{d\varpi_2}, \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots, \\ \frac{d\varphi_1}{d\varpi_{n-1}}, & \frac{d\varphi_2}{d\varpi_{n-1}}, & \frac{d\varphi_{n-1}}{d\varpi_{n-1}}, \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, et il en est de même des déterminants $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$ que l'on déduit de D en remplaçant successivement $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ par φ.

Si l'on prend la différentielle totale de l'équation (7), qu'on y remplace dx par $p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n$, $d\xi$ par $\varpi_1\,d\xi_1 + \varpi_2\,d\xi_2 + \ldots + \varpi_{n-1}\,d\xi_{n-1}$ et $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-1}$ par les valeurs tirées des équations (6), il faudra égaler à zéro les coefficients des différentielles restantes, et l'on aura ainsi

$$\left(\frac{dV}{dx_n} + p_n\frac{dV}{dx}\right) + \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dV}{dx_i} + p_i\frac{dV}{dx}\right)\frac{d\varphi_i}{dx_n} = 0,$$

avec $n - 1$ autres équations qui se déduisent de la suivante :

$$\frac{dV}{d\xi_j} + \varpi_j\frac{dV}{d\xi} + \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dV}{dx_i} + p_i\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{d\varphi_i}{d\xi_j} + \varpi_j\frac{d\varphi_i}{d\xi} + \frac{d\varphi_i}{d\varpi_1}\frac{d\varpi_1}{d\xi_j} + \ldots + \frac{d\varphi_i}{d\varpi_{n-1}}\frac{d\varpi_{n-1}}{d\xi_j}\right) = 0,$$

en donnant à j les valeurs $1, 2, \ldots, (n-1)$.

Comme cette dernière équation doit devenir identique en vertu des équations (6) et que celles-ci ne renferment pas les dérivées des fonctions $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{n-1}$, ces dérivées devront disparaître d'elles-mêmes; l'équation précédente se décomposera donc en n autres dont l'une sera

$$\frac{dV}{d\xi_j} + \varpi_j\frac{dV}{d\xi} + \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dV}{dx_i} + p_i\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{d\varphi_i}{d\xi_j} + \varpi_j\frac{d\varphi_i}{d\xi}\right) = 0,$$

et dont les $n-1$ autres s'obtiendront en donnant à j les valeurs $1, 2, \ldots, (n-1)$ dans la suivante

$$\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dV}{dx_i}+p_i\frac{dV}{dx}\right)\frac{d\varphi_i}{d\varpi_j}=0.$$

En outre, comme le déterminant D formé avec les dérivées $\frac{d\varphi_i}{d\varpi_j}$ est différent de zéro, on aura

$$\frac{dV}{dx_i}+p_i\frac{dV}{dx}=0, \tag{8}$$

pour les valeurs $1, 2, \ldots, (n-1)$ de i; enfin, à cause des formules précédentes, la même équation aura lieu également pour $i=n$, et l'on aura aussi

$$\frac{dV}{d\xi_j}+\varpi_j\frac{dV}{d\xi}=0, \tag{9}$$

pour toutes les valeurs $1, 2, \ldots, (n-1)$ de j.

Il résulte de là que les n équations (7) et (9) peuvent remplacer les n premières équations du système (6) et que les équations (8) sont elles-mêmes équivalentes aux n dernières équations (6).

9. Il est facile maintenant d'exprimer l'intégrale $-\int_{\xi_n}^{x_n}\frac{X}{P_n}\,dx_n$, en fonction des dérivées de V. Pour cela, supposons qu'on ait résolu l'équation (7) par rapport à x et qu'on en ait tiré la valeur $x=M$, M étant une fonction donnée de x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}, \xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$; les équations (7) et (9) seront plus simplement

$$x=M,\quad \frac{dM}{d\xi_j}+\varpi_j\frac{dM}{d\xi}=0, \tag{10}$$

et l'on aura

$$p_i=\frac{dM}{dx_i}. \tag{11}$$

On peut obtenir la différentielle totale dF du premier membre de l'équation (1), en ajoutant la différentielle de la première équation (10) et celle des équations (11), après les avoir multipliées par des facteurs λ, λ_i propres à faire disparaître $d\xi$, $d\xi_1, \ldots, d\xi_{n-1}$. On a donc

$$dF=\sum_{j=1}^{j=n}\left[\lambda\frac{dM}{dx_j}+\sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i\frac{d^2M}{dx_i\,dx_j}\right]dx_j-\lambda\,dx-\sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i\,dp_i, \tag{12}$$

les facteurs λ, λ_i devant satisfaire à n équations dont l'une est

$$\lambda \frac{dM}{d\xi} + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \frac{d^2M}{dx_i\, d\xi} = 0, \tag{13}$$

et dont les $n-1$ autres se déduisent de la suivante :

$$\lambda \frac{dM}{d\xi_j} + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \frac{d^2M}{dx_i\, d\xi_j} = 0, \tag{14}$$

en donnant à j les valeurs $1, 2, 3, \ldots, (n-1)$. D'après cela on a par la formule (12)

$$-\frac{X}{P_n}\, dx_n = -\frac{\lambda}{\lambda_n}\, dx_n, \tag{15}$$

et il ne reste plus qu'à exprimer le rapport $\frac{\lambda}{\lambda_n}$ en fonction de x_n et des variables auxiliaires ξ, $\xi_1, \ldots$.

Si l'on ajoute les équations (13) et (14) après avoir multiplié la première par ϖ_j, on aura, à cause de la seconde équation (10),

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \left(\frac{d^2M}{dx_i\, d\xi_j} + \varpi_j \frac{d^2M}{dx_i\, d\xi} \right) = 0; \tag{16}$$

cette équation (16) tient lieu de $n-1$ équations distinctes, et il est évident que celles-ci sont satisfaites en posant

$$\lambda_1 = dx_1, \quad \lambda_2 = dx_2, \quad \ldots, \quad \lambda_{n-1} = dx_{n-1}, \quad \lambda_n = dx_n,$$

dx_1, $dx_2, \ldots$, dx_{n-1} étant les différentielles de x_1, $x_2, \ldots$, x_{n-1} considérées comme des fonctions de x_n définies par les $n-1$ équations (9). L'équation (15) devient alors

$$-\frac{X}{P_n}\, dx_n = -\lambda,$$

et l'équation (13) donne ensuite

$$-\lambda \frac{dM}{d\xi} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d^2M}{dx_i\, d\xi}\, dx_i,$$

par conséquent

$$-\frac{X}{P_n}\, dx_n = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d \log \frac{dM}{d\xi}}{dx_i}\, dx_i = d \log \frac{dM}{d\xi}:$$

enfin on aura par l'intégration

$$-\int_{\xi_n}^{x_n} \frac{X}{P_n}\, dx_n = \log \frac{dM}{d\xi},$$

car, M se réduisant à ξ pour $x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n$, $\frac{dM}{d\xi}$ doit se réduire à l'unité, dans la même hypothèse.

10. On voit que l'intégrale $-\int_{\xi_n}^{x_n} \frac{X}{P_n}\, dx_n$ ne peut cesser d'être finie et déterminée que si l'on attribue à la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ une forme telle, que la dérivée $\frac{dM}{d\xi}$ devienne nulle, infinie ou indéterminée après la substitution des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ tirées des équations (9). Mais alors il est évident que l'on ne saurait tirer de ces dernières équations des valeurs déterminées de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ se réduisant respectivement à $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ pour $x_n = \xi_n$, puisque l'hypothèse $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2, \ldots, x_n = \xi_n$ doit réduire $\frac{dM}{d\xi}$ à l'unité. Les formules générales deviennent donc nécessairement illusoires, et la solution du problème proposé ne peut être fournie que par l'une des intégrales subsidiaires qui accompagnent l'intégrale générale.

La seule équation $x = M$ satisfait évidemment à l'équation proposée (1), si l'on y regarde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ et par suite $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ comme des constantes arbitraires; elle constitue une *intégrale complète*. Dans l'intégrale générale les quantités $\xi, \xi_1, \ldots$ sont toutes variables, mais la différentielle de l'équation $x = M$ reste la même que dans le cas de $\xi_1, \xi_2, \ldots$ constantes. On voit facilement que l'intégrale complète peut reproduire non-seulement l'intégrale générale, mais plusieurs autres intégrales subsidiaires moins étendues que celles-ci et qui, de même que l'intégrale complète, ne sauraient être comprises dans l'intégrale générale. Il est évident, en effet, que si l'on considère $n - 1 - \mu$ des quantités ξ, par exemple $\xi_{\mu+1}, \xi_{\mu+2}, \ldots, \xi_{n-1}$, comme des fonctions arbitraires des μ autres, savoir $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$, on satisfera à l'équation proposée par un système de $\mu + 1$ équations dont l'une sera

$$x = M \tag{17}$$

et dont les μ autres se déduiront de la suivante

$$\left(\frac{dM}{d\xi_i} + \varpi_i \frac{dM}{d\xi}\right) + \sum_{j=\mu+1}^{j=n-1} \left(\frac{dM}{d\xi_j} + \varpi_j \frac{dM}{d\xi}\right) \frac{d\xi_j}{d\xi_i} = 0, \tag{18}$$

en donnant à i les valeurs $1, 2, \ldots, \mu$.

Cela posé, si les équations (9) sont impropres à fournir des valeurs de x_1,

$x_2, \ldots, x_{n-1}$ qui se réduisent respectivement à $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ pour $x_n = \xi_n$, il est évident que l'hypothèse $x_n = \xi_n$ fera rentrer quelques-unes de ces équations dans le système des autres, et il en résultera une ou plusieurs équations identiques, puisque les équations (9) sont toutes vérifiées quand on pose $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \ldots, x_n = \xi_n$.

Il peut arriver que l'hypothèse $x_n = \xi_n$ transforme ainsi toutes les équations (9) en identités; dans ce cas, toutes les auxiliaires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ disparaissent de l'équation (17) quand on y fait $x_n = \xi_n$, puisque les dérivées de M par rapport à $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ sont alors nulles; et, comme cette équation est satisfaite quand on pose simultanément $x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n$ et $x = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$, elle donnera généralement $x = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ pour $x_n = \xi_n$. Ainsi, dans le cas que nous considérons, la solution du problème est fournie par l'intégrale complète qui accompagne l'intégrale générale, et dans laquelle subsistent $n-1$ constantes arbitraires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$.

Supposons en second lieu que les $n-1$ équations (9) se réduisent pour $x_n = \xi_n$ à μ équations distinctes qui correspondent aux valeurs $1, 2, \ldots, \mu$ de l'indice j. On peut admettre que l'on ait tiré de ces équations les valeurs de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$, et qu'on ait substitué ces valeurs dans l'équation $x = \mathrm{M}$. Je dis alors que l'hypothèse $x_n = \xi_n$ fera disparaître de M toutes les auxiliaires restantes $\xi_{\mu+1}, \xi_{\mu+2}, \ldots, \xi_{n-1}$. Soit, en effet, ξ_j l'une de ces auxiliaires : après la substitution dont nous venons de parler, toutes les équations (9) se transforment en identités, et la même chose a lieu à l'égard de la dérivée de M par rapport à ξ_j, car cette dérivée a pour expression

$$\left(\frac{d\mathrm{M}}{d\xi_j} + \varpi_j \frac{d\mathrm{M}}{d\xi}\right) + \sum_{i=1}^{i=\mu} \left(\frac{d\mathrm{M}}{d\xi_i} + \varpi_i \frac{d\mathrm{M}}{d\xi}\right)\frac{d\xi_i}{d\xi_j},$$

$\frac{d\xi_i}{d\xi_j}$ étant ici la dérivée partielle de ξ_i par rapport à ξ_j tirée des μ équations distinctes auxquelles se réduit le système (9) pour $x_n = \xi_n$. Toutes les auxiliaires ξ disparaissant de l'équation $x = \mathrm{M}$ quand on fait $x_n = \xi_n$, il s'ensuit que, dans cette hypothèse, cette équation se réduit à $x = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, puisqu'elle doit être vérifiée quand on pose $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \ldots, x_n = \xi_n$ et $x = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$.

Cela étant établi, considérons la solution de l'équation (1) qui est fournie par les équations (17) et (18), et qui renferme $n - 1 - \mu$ fonctions arbitraires de μ variables. Il est évident, d'après ce qui précède, que l'équation (17) se réduira, pour $x_n = \xi_n$, et en vertu des équations (18), à $x = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, car dans l'hypothèse $x_n = \xi_n$ le système des équations (18) équivaut évidemment aux μ équations distinctes auxquelles se réduit le système (9). La solution du problème proposé sera donc donnée dans ce cas par le système des équations (17) et (18).

11. Supposons maintenant que le déterminant D soit nul ; dans ce cas, on peut au moyen des n premières équations (6) former un certain nombre μ (supérieur à 1) d'équations indépendantes des dérivées $\varpi_1, \varpi_2, \ldots$ Nous supposerons ces équations résolues par rapport à $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\mu-1}$, et nous les représenterons par

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{l} \xi = \Phi_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_\mu, \xi_{\mu+1}, \ldots, \xi_{n-1}), \\ \xi_1 = \Phi\,(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_\mu, \xi_{\mu+1}, \ldots, \xi_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi_{\mu-1} = \Phi_{\mu-1}(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_\mu, \xi_{\mu+1}, \ldots, \xi_{n-1}); \end{array}\right.$$

si l'on différentie ces équations, que l'on remplace

$$\begin{array}{lll} dx & \text{par} & p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n, \\ d\xi & \text{par} & \varpi_1\,d\xi_1 + \varpi_2\,d\xi_2 + \ldots + \varpi_{n-1}\,d\xi_{n-1}, \end{array}$$

qu'on élimine ensuite $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{\mu-1}$, et que l'on remplace enfin dx_μ, $dx_{\mu+1}, \ldots, dx_{n-1}$ par les valeurs tirées des équations (6), on obtiendra une équation résultante qui ne renfermera plus que les n différentielles indépendantes $dx_n, d\xi_1, d\xi_2, \ldots, d\xi_{n-1}$; les coefficients de ces n différentielles doivent donc être nuls en vertu des équations (6). Mais comme ces équations ne renferment pas les dérivées des variables $\varpi_1, \varpi_2, \ldots$, celles-ci doivent disparaître d'elles-mêmes, et l'on obtient en conséquence $2n - \mu$ équations au lieu de n. Les $n - \mu$ premières se déduisent de la suivante :

$$(20)\qquad \frac{d\Phi}{d\xi_j} - \varpi_1\frac{d\Phi_1}{d\xi_j} - \varpi_2\frac{d\Phi_2}{d\xi_j} - \ldots - \varpi_{\mu-1}\frac{d\Phi_{\mu-1}}{d\xi_j} - \varpi_j = 0,$$

en donnant à j les valeurs $\mu, \mu+1, \ldots, n-1$; les n autres sont comprises dans

$$(21)\qquad \left(\frac{d\Phi}{dx_i} + p_i\frac{d\Phi}{dx}\right) - \varpi_1\left(\frac{d\Phi_1}{dx_i} + p_i\frac{d\Phi_1}{dx}\right) - \ldots - \varpi_{\mu-1}\left(\frac{d\Phi_{\mu-1}}{dx_i} + p_i\frac{d\Phi_{\mu-1}}{dx}\right) = 0,$$

en donnant à i les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$.

Les $2n$ équations (19), (20), (21) peuvent évidemment remplacer les $2n$ équations (6). Si l'on pose

$$(22)\qquad V = \Phi - f(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{\mu-1}, \xi_\mu, \xi_{\mu+1}, \ldots, \xi_{n-1}),$$

l'équation $V = 0$ sera évidemment le résultat de l'élimination de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\mu-1}$ entre les équations (19), et l'on voit que l'équation (20) peut être représentée par $\frac{dV}{d\xi_j} = 0$, d'où il suit que l'intégrale cherchée de l'équation (1) sera le résultat de l'élimination des variables $\xi_\mu, \xi_{\mu+1}, \ldots, \xi_{n-1}$ entre les $n - \mu + 1$ équations

$$(23) \qquad V = 0, \quad \frac{dV}{d\xi_{\mu+1}} = 0, \quad \frac{dV}{d\xi_{\mu+2}} = 0, \ldots, \quad \frac{dV}{d\xi_{n-1}} = 0.$$

12. Si l'on pose

$$(24) \qquad -1 + \Omega\left(\frac{d\Phi}{dx} - \varpi_1 \frac{d\Phi_1}{dx} - \ldots - \varpi_{\mu-1} \frac{d\Phi_{\mu-1}}{dx}\right) = 0,$$

l'équation (21) devient

$$(25) \qquad p_i + \Omega\left(\frac{d\Phi}{dx_i} - \varpi_1 \frac{d\Phi_1}{dx_i} - \ldots - \varpi_{\mu-1} \frac{d\Phi_{\mu-1}}{dx_i}\right) = 0,$$

l'indice i devant toujours recevoir les valeurs $1, 2, \ldots, n$.

On reproduira la différentielle totale dF du premier membre de l'équation (1), en ajoutant les différentielles totales des $n+1$ équations (24) et (25), après les avoir multipliées par des facteurs propres à faire disparaître les différentielles des n variables $\varpi_1, \ldots, \varpi_{\mu-1}, \xi_\mu, \xi_{\mu+1}, \ldots, \xi_{n-1}$ et Ω; on trouvera de cette manière

$$P_n = \lambda_n,$$

et

$$X = \lambda\Omega\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2} - \varpi_1 \frac{d^2\Phi_1}{dx^2} - \ldots - \varpi_{\mu-1} \frac{d^2\Phi_{\mu-1}}{dx^2}\right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \Omega\left(\frac{d^2\Phi}{dx\,dx_i} - \varpi_1 \frac{d^2\Phi_1}{dx\,dx_i} - \ldots - \varpi_{\mu-1} \frac{d^2\Phi_{\mu-1}}{dx\,dx_i}\right);$$

à cause de l'équation (24), on peut écrire

$$(26) \qquad -\frac{X}{P_n}\lambda_n = \lambda \frac{d\log\Omega}{dx} + \lambda_1 \frac{d\log\Omega}{dx_1} + \ldots + \lambda_n \frac{d\log\Omega}{dx_n}.$$

Quant aux facteurs λ, λ_i, ils doivent satisfaire : 1° à l'équation

$$(27) \qquad \lambda \frac{d\Phi}{dx} + \lambda_1 \frac{d\Phi}{dx_1} + \ldots + \lambda_n \frac{d\Phi}{dx_n} = 0;$$

2° aux $\mu - 1$ équations qui se déduisent de la suivante :

$$(28) \qquad \lambda \frac{d\Phi_i}{dx} + \lambda_1 \frac{d\Phi_i}{dx_1} + \ldots + \lambda_n \frac{d\Phi_i}{dx_n} = 0,$$

en donnant à i les valeurs $1, 2, \ldots, \mu - 1$; 3° aux $n - \mu$ équations

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda \left(\frac{d^2\Phi}{dx\,d\xi_j} - \varpi_1 \frac{d^2\Phi_1}{dx\,d\xi_j} - \ldots - \varpi_{\mu-1} \frac{d^2\Phi_{\mu-1}}{dx\,d\xi_j} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \left(\frac{d^2\Phi}{dx_i\,d\xi_j} - \varpi_1 \frac{d^2\Phi_1}{dx_i\,d\xi_j} - \ldots - \varpi_{\mu-1} \frac{d^2\Phi_{\mu-1}}{dx_i\,d\xi_j} \right) = 0, \end{aligned} \right.$$

l'indice j devant recevoir les valeurs $\mu, \mu + 1, \ldots, (n - 1)$. Il est évident que les équations (27), (28), (29) sont satisfaites en posant

$$\lambda = dx, \quad \lambda_i = dx_i,$$

les différentielles dx, dx_i se rapportant au cas où l'on considère $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$ comme des fonctions de x_n déterminées par les équations (19) et (20).

L'équation (26) donne alors

$$-\frac{X}{P_n} dx_n = d \log \Omega;$$

d'ailleurs, il est évident, d'après l'équation (24) et les équations (19), que Ω se réduit à l'unité pour $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \ldots, x_n = \xi_n, x = \xi$; on aura donc

$$(30) \qquad -\int_{\xi_n}^{x_n} \frac{X}{P_n} dx_n = \log \Omega.$$

L'intégrale contenue dans le premier membre de cette formule (30) ne peut cesser d'avoir une valeur finie et déterminée que si Ω devient nulle, infinie ou indéterminée pour une certaine forme de la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Il est évident que, dans ce cas, les formules générales (6) deviennent illusoires, et l'on reconnaîtra facilement, en suivant la marche que nous avons tracée, que la solution du problème est donnée soit par l'équation unique $V = 0$, soit par l'une des intégrales plus étendues que l'on obtient en joignant à l'équation $V = 0$ celles qu'on en déduit par la différentiation relative à quelques-unes des auxiliaires ξ. Si ξ_μ, $\xi_{\mu+1}, \ldots, \xi_{\mu+\nu-1}$, par exemple, sont les auxiliaires dont il s'agit, on devra regarder les auxiliaires restantes $\xi_{\mu+\nu}, \xi_{\mu+\nu+1}, \ldots, \xi_{n-1}$ comme des fonctions arbitraires des premières.