ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

L. SAUVAGE

# Sur les propriétés des fonctions définies par un système d'équations différentielles linéaires et homogènes à une ou plusieurs variables indépendantes

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série*, tome 11 (1882), p. 33-78
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1882_2_11__33_0>

SUR LES

# PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS

DÉFINIES

PAR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES A UNE OU PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES,

PAR M. L. SAUVAGE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

## INTRODUCTION.

**1.** Le Mémoire que M. Fuchs a publié en 1866 sur les équations différentielles linéaires et homogènes d'ordre quelconque renferme les principes fondamentaux de la théorie de ces équations. Je me suis proposé d'étendre cette théorie à des systèmes d'équations différentielles à une ou plusieurs variables indépendantes.

Deux Chapitres sont consacrés aux propriétés fondamentales des solutions d'un système d'équations aux différentielles totales de la forme

$$(1)\quad dy_i = (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n)\,dx_1 + \ldots + (l_{i1}y_1 + l_{i2}y_2 + \ldots + l_{in}y_n)\,dx_p,$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$, dans les régions du plan où les coefficients $a, b, \ldots, l$ sont des fonctions analytiques des $p$ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Dans la troisième Partie, on s'occupe des équations différentielles linéaires et homogènes à une seule variable indépendante. Après l'application à ces systèmes des propriétés générales déjà connues par ce qui précède, on donne les formes que peuvent prendre les éléments d'un système fondamental de solutions dans le domaine d'un point singulier isolé [1].

2. Je ferai usage des définitions suivantes, tirées d'un Mémoire de M. Weierstrass [2].

Un *point* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ est l'ensemble des valeurs $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2, \ldots,$ $x_p = \xi_p$.

La valeur d'une fonction au *point* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ est la valeur que prend cette fonction pour $x_1 = \xi_1, \ldots, x_p = \xi_p$.

Le *domaine* $\delta$ *d'un point* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ est l'ensemble de tous les *points* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ tels que les modules des différences $x_i - \xi_i$ soient moindres que le nombre positif $\delta$.

Une fonction uniforme est dite *régulière au point* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$, si elle est développable en une série, convergente dans un domaine de ce point, de la forme

$$\Sigma A_{r_1 r_2 \ldots r_p} (x_1 - \xi_1)^{r_1} (x_2 - \xi_2)^{r_2} \ldots (x_p - \xi_p)^{r_p},$$

les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_p$ variant de zéro à l'infini par des valeurs entières, et $A_{r_1 r_2 \ldots r_p}$ représentant un coefficient constant.

Dans les définitions précédentes, on remplace, par convention, une différence $x_i - \xi_i$ par $\frac{1}{x_i}$ quand $\xi_i$ devient infini.

Si une fonction uniforme n'est pas *régulière au point* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$, on dit que ce point est *singulier*.

M. Weierstrass a indiqué, dans le Mémoire précédemment cité, la classification des *points singuliers* des fonctions analytiques uniformes.

---

(1) *Voir* la Thèse de M. Tannery, et le Mémoire de M. Fuchs au *Journal de Crelle*, t. 66, p. 121.

(2) *Journal de Crelle*, t. 89, p. 1.

# CHAPITRE I.

3. La définition des fonctions qui satisfont à un système d'équations aux différentielles totales à $p$ variables indépendantes repose sur le théorème suivant, donné par M. Bouquet [1].

Soit un système de $n$ équations aux différentielles totales à $p$ variables indépendantes

$$dy_i = X_{i1}\,dx_1 + \ldots + X_{ip}\,dx_p \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dans lesquelles les coefficients différentiels $X_{ik}$ sont des fonctions analytiques des $p+n$ quantités $x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_n$, satisfaisant identiquement, en vertu des équations proposées, aux conditions d'intégralité

$$\mathrm{D}x_h X_{ik} + \sum_{g=1}^{n} X_{gh}\,\mathrm{D}y_g X_{ik} = \mathrm{D}x_k X_{ih} + \sum_{g=1}^{n} X_{gk}\,\mathrm{D}y_g X_{ih},$$

les indices $h$ et $k$ variant de 1 à $p$, et l'indice $i$ de 1 à $n$; si les coefficients différentiels $X_{ik}$ sont holomorphes pour toutes les valeurs des différences $x_i - \xi_i$ dont les modules sont inférieurs ou égaux à $\rho_i$, et pour toutes les valeurs des différences $y_i - \eta_i$ dont les modules sont inférieurs ou égaux à $r_i$, on peut tirer des équations proposées, par un calcul de proche en proche, des séries convergentes pour toutes les valeurs des quantités $x_i - \xi_i$ dont les modules sont plus petits qu'un nombre $\rho'$ qu'on peut fixer; et les fonctions holomorphes représentées par ces séries satisferont aux équations proposées, et prendront les valeurs $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ lorsque les variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ prendront les valeurs $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$.

---

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. III, p. 265.

4. Appliquons ce théorème aux systèmes d'équations de la forme

$$(1)\qquad dy_i = (a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n)dx_1 + \ldots + (l_{i1}y_1 + \ldots + l_{in}y_n)dx_p,$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$, où les coefficients $a, b, \ldots. l$ sont des fonctions analytiques des variables indépendantes $x_1, x_3, \ldots, x_p$ satisfaisant identiquement, en vertu des équations proposées, aux conditions d'intégrabilité.

Si les coefficients $a, b, \ldots, l$ restent holomorphes pour toutes les valeurs des différences $x_i - \xi_i$ dont les modules sont inférieurs à $\rho$, les coefficients différentiels $X_{ik}$ seront holomorphes dans les mêmes conditions, et quels que soient les modules des différences $y_i - \eta_i$, les valeurs $\eta_i$ étant prises arbitrairement.

En employant les définitions de M. Weierstrass, nous énoncerons le théorème suivant :

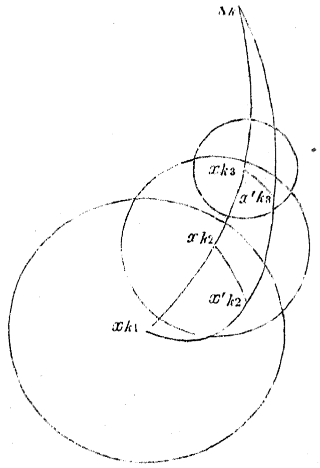
Si les coefficients $a_{ik}$ des équations (1) sont des fonctions *régulières au point* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$, il existe $n$ fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ satisfaisant aux équations proposées, *régulières en ce point* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$, et prenant en ce point des valeurs arbitrairement choisies $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$.

5. Définissons maintenant une solution du système (1). Imaginons que les variables indépendantes suivent, avec des marches déterminées, des chemins déterminés, de sorte que, en tous les *points* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ successivement, les fonctions $a, b, \ldots, l$ soient régulières. Il existe un domaine du *point de départ* $(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{p1})$ où les fonctions $a, b, \ldots, l$ sont représentées par des séries convergentes, procédant suivant les puissances entières, positives et croissantes des différences $x_1 - x_{11}, x_2 - x_{21}, \ldots, x_p - x_{p1}$. Faisons suivre aux variables indépendantes leurs chemins avec les marches assignées sans les faire sortir des cercles qui composent le domaine du point de départ. Soit $(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{p2})$ le *point* auquel on s'arrête. Il existe, dans le domaine considéré, $n$ fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, satisfaisant aux équations proposées. Elles ont au *point* $(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{p1})$ des valeurs arbitraires $\eta_{11}, \eta_{21}, \ldots, \eta'_{n1}$, et arrivent au *point* $(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{p2})$ avec des valeurs bien déterminées $\eta_{12}, \eta_{22}, \ldots, \eta_{n2}$. Le *point* $(x_{12}, \ldots, x_{p2})$ n'est pas un *point singulier* des coefficients $a, b, \ldots, l$. Il existe, pour ce point, un domaine composé de cercles, à l'intérieur

desquels les variables indépendantes, partant du *point* $(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{p2})$, peuvent suivre de nouveau une portion de leurs chemins d'après les marches assignées. Soit $(x_{13}, x_{23}, \ldots, x_{p3})$ le point auquel on s'arrête dans ce domaine. Les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, partant du *point* $(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{p2})$ avec les valeurs $\eta_{12}, \eta_{22}, \ldots, \eta_{n2}$, arriveront au *point* $(x_{13}, x_{23}, \ldots, x_{p3})$ avec des valeurs bien déterminées $\eta_{13}, \eta_{23}, \ldots, \eta_{n3}$. On traitera le *point* $(x_{13}, x_{23}, \ldots, x_{p3})$ comme les deux points précédents, et, en avançant ainsi de proche en proche, on arrivera, avec des valeurs toujours déterminées, et variant d'une manière continue, à un *point* $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$.

Cela posé, remarquons que les domaines successifs sont formés de cercles qui empiètent les uns sur les autres. Prenons arbitrairement un *point* $(x'_{12}, \ldots, x'_{p2})$ dans la région commune aux domaines des deux *points* $(x_{11}, \ldots, x_{p1})$, $(x_{12}, \ldots, x_{p2})$; puis prenons un *point* $(x'_{13}, \ldots, x'_{p2})$ dans la région commune aux domaines des deux *points* $(x_{12}, \ldots, x_{p2})$, $(x_{13}, \ldots, x_{p3})$, etc.

Fig. 1.




Joignons le *point* $(x_{11}, \ldots, x_{p1})$ au *point* $(x'_{12}, \ldots, x'_{p2})$ par un chemin arbitraire pris dans le domaine du *point* $(x_{11}, \ldots, x_{p1})$; joignons le *point* $(x'_{12}, \ldots, x'_{p2})$ au *point* $(x'_{13}. \ldots, x'_{p3})$ par un chemin arbitraire pris dans le domaine du *point* $(x_{12}, \ldots, x_{p2})$, etc. Continuons ainsi jusqu'à un *point* $(X_1, X_2, \ldots. X_p)$. Je dis qu'on peut substituer aux chemins primitifs les nouveaux chemins qui relient le *point* $(x_{11}, \ldots, x_{p1})$ au *point* $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$.

En effet, on peut évidemment substituer aux chemins nouveaux les chemins obtenus en allant du *point* $(x_{11}, \ldots, x_{p1})$ au *point* $(x'_{12}, \ldots, x'_{p2})$, du *point* $(x'_{12}, \ldots, x'_{p2})$ au *point* $(x_{12}, \ldots x_{p2})$, du *point* $(x_{12}, \ldots, x_{p2})$ au *point* $(x'_{12}, \ldots, x'_{p2})$, du *point* $(x'_{12}, \ldots, x'_{p2})$ au *point* $(x'_{13}, \ldots, x'_{p3})$, de ce point au *point* $(x_{13}, \ldots, x_{p3})$, de celui-ci au *point* $(x'_{13}, \ldots, x'_{p3})$, .... Or le chemin primitif qui va du *point* $(x_{11}, \ldots, x_{p1})$ au *point* $(x_{12}, \ldots, x_{p2})$ et le nouveau chemin qui relie ces deux mêmes points en passant par le *point* $(x'_{12}, \ldots, x'_{p2})$ conduisent aux mêmes valeurs des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ au *point* $(x_{12}, \ldots, x_{p2})$, car les trois *points* $(x_{11}, \ldots, x_{p1})$, $(x_{12}, \ldots, x_{p2})$, $(x'_{12}, \ldots, x'_{p2})$ sont dans le même domaine. Partant maintenant du *point* $(x_{12}, \ldots, x_{p2})$ commun à deux domaines, on arrivera au *point* $(x_{13}, \ldots, x_{p3})$ commun à deux autres domaines avec les mêmes valeurs des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$. On peut donc, en avançant de proche en proche, atteindre le *point* commun $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ aux deux chemins et, en ce point, les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ auront les mêmes valeurs pour ces deux chemins.

Il résulte de là que, connaissant les valeurs initiales des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ au *point* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, on peut obtenir des valeurs de ces fonctions qui soient les mêmes en un autre *point* $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$, en faisant varier, d'une manière continue, les variables indépendantes d'une infinité de manières différentes entre le *point* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et le *point* $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$.

Étant donnés des chemins et des marches déterminés, on pourra donc déformer les chemins d'une manière continue, et, sur des chemins donnés, altérer les marches d'une manière continue pour arriver aux mêmes valeurs des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en un *point* $(X_1, \ldots, X_p)$, pourvu que les déformations de chemins et les altérations de marches restent comprises entre certaines limites.

Il est évident d'abord qu'on ne peut déformer les chemins qu'entre certaines limites; nous allons montrer qu'il en est de même pour les marches sur des chemins donnés, en formant un exemple, tel que deux combinaisons différentes de marches sur les mêmes chemins conduisent à des valeurs différentes d'une fonction.

Considérons la fonction très simple $z = \sqrt{x - y + 1}$, où $x$ et $y$ sont deux variables indépendantes. Elle est une intégrale de l'équation à différentielle totale

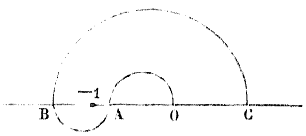
$$dz = \frac{1}{2(x-y+1)} z\,dx - \frac{1}{2(x-y+1)} z\,dy.$$

Posons $x - y = t$, de sorte qu'on aura $z = \sqrt{t+1}$. Prenons pour valeurs initiales $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, et faisons varier $x$ et $y$ sur des chemins définis de la manière suivante.

Pour le chemin de $y$, nous prenons, dans le plan des $y$, la partie de l'axe des valeurs réelles comprise entre 0 et 1.

Pour le chemin de $x$, nous prenons, dans le plan des $x$, trois demi-circonférences reliant le point $x = 0$ au point $x = 1$. La variable $x$, partant de l'origine, décrit la demi-circonférence OA (*fig.* 2), dont le

Fig. 2.




diamètre a une longueur $1 - \varepsilon$, comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1. Puis $x$ décrit la demi-circonférence AB dont le diamètre est plus grand que $\varepsilon$; enfin la troisième demi-circonférence sert à ramener $x$ du point B au point C, où l'on a $x = 1$. La demi-circonférence AB n'est pas dans la même région du plan que les deux autres demi-circonférences, de sorte que le chemin OABC entoure le point $x = -1$.

Cela posé, choisissons les marches suivantes :

1° $y$ reste nul, et $x$ décrit tout le chemin OABC;

2° $x$ reste égal à 1, et $y$ décrit tout son chemin.

Cherchons, dans ces conditions, la variation de $t$. D'abord on a $t = x$, et $t$ décrit, dans le plan des $t$, le même chemin que $x$ dans le plan des $x$. On arrive à la valeur $t = 1$. Ensuite on a $t = 1 - y$, et, quand $y$ varie de 0 à 1, $t$ varie de 1 à 0. Il résulte de là que finalement $t$ a décrit un chemin fermé allant de 0 à 0 et entourant le point $t = -1$. Le radical qui avait pour valeur primitive $z = 1$ aura donc pour valeur finale $z = -1$.

Choisissons, au contraire, les marches suivantes :

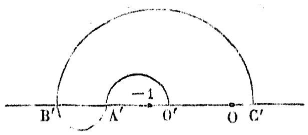
1° $y$ varie de o à $1-\varepsilon$, et $x$ reste nul ;

2° $y$ reste égal à $1-\varepsilon$, et $x$ décrit tout le chemin OABC ;

3° $x$ reste égal à 1, et $y$ varie de $1-\varepsilon$ à 1.

Dans le premier cas, on a $t=-y$, et $t$ varie de o à $-(1-\varepsilon)$. Dans le second cas, on a $t=x-(1-\varepsilon)$, et $t$ varie de $-(1-\varepsilon)$ à $\varepsilon$ sur un chemin superposable à celui que décrit $x$. Soit O′A′B′C′ le chemin

Fig. 3.




que décrit $t$; O étant l'origine dans le plan des $t$, on a en valeur absolue (*fig.* 3)

$$OO'=1-\varepsilon,\quad OA'=2(1-\varepsilon),\quad OC'=\varepsilon.$$

Le point $t=-1$ est entre O′ et A′, car on a

$$OO'<1<OA',$$

d'après le choix qu'on a fait de $\varepsilon$ entre o et $\frac{1}{2}$.

Dans le troisième cas, on a $t=1-y$, et $t$ varie de $\varepsilon$ à o. Il résulte de là que finalement $t$ a décrit un chemin fermé, allant de o en o, et n'entourant pas le point $t=-1$. Le radical, parti avec la valeur $z=1$, revient donc à cette valeur sans avoir changé de signe.

Ainsi, sans avoir changé autre chose que les marches des variables, on a changé la valeur de la fonction $z$ au point $x=1$, $y=1$.

6. Nous appellerons *solution* du système d'équations (1) un groupe de $n$ fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, définies d'après les règles précédentes.

Si nous considérons ensemble plusieurs solutions, nous admettrons toujours que les variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ont les mêmes marches sur les mêmes chemins pour toutes les solutions. Les solutions considérées ensemble ne différeront donc que par les valeurs initiales de leurs éléments.

Nous appellerons *système de solutions* l'ensemble de $n$ solutions des équations proposées.

Soit D le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & \dots & y_{n1} \\ y_{12} & y_{22} & \dots & y_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{1n} & y_{2n} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

d'un système de solutions représentées par les $n$ groupes de fonctions $y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni}$, $(i = 1, 2, \dots, n)$; nous dirons que le système est *fondamental* si le déterminant D n'est pas nul.

La considération des systèmes fondamentaux de solutions étant la base de la théorie, nous démontrerons d'abord qu'il existe des systèmes fondamentaux, en nous appuyant sur le théorème suivant :

7. *Le déterminant* D *d'un système quelconque de solutions satisfait à la relation*

$$d \log D = \Sigma (g_{11} + g_{22} + \dots + g_{nn})\, dx_k,$$

*où la lettre $g$ doit être remplacée successivement par les lettres $a, b, \dots, l$, lorsque l'indice $k$ prend les valeurs successives* $1, 2, \dots, p$.

On a

$$d \log D = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\partial \log D}{\partial x_k}\, dx_k.$$

Or,

$$\frac{\partial \log P}{\partial x_k} = \frac{1}{D} \frac{\partial P}{\partial x_k}.$$

Calculons $\dfrac{\partial D}{\partial x_k}$, nous aurons

$$\frac{\partial D}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{i=n} \begin{vmatrix} y_{11} & \dots & \dfrac{\partial y_{i1}}{\partial x_k} & \dots & y_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{1n} & \dots & \dfrac{\partial y_{in}}{\partial x_k} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Mais on a, en général,

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = g_{i1} y_1 + \dots + g_{in} y_n,$$

$g$ représentant successivement les lettres $a, b, \ldots, l$, lorsque l'indice $k$ varie de 1 à $p$. On a donc

$$\begin{vmatrix} y_{11} & \ldots & \dfrac{\partial y_{i1}}{\partial x_k} & \ldots & y_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n} & \ldots & \dfrac{\partial y_{in}}{\partial x_k} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{11} & \ldots & g_{i1} y_{11} + \ldots + g_{in} y_{n1} & \ldots, & y_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n} & \ldots & g_{i2} y_{1n} + \ldots + g_{in} y_{nn} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix} = g_{ii} \mathrm{D}.$$

On a, par suite,

$$\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial x_k} = (g_{11} + g_{22} + \ldots + g_{nn}) \mathrm{D},$$

d'où

$$\sum \frac{1}{\mathrm{D}}\, dx_k = \sum_{k=1}^{k=n} (g_{11} + \ldots + g_{nn})\, dx_k,$$

c'est-à-dire enfin

$$d \log \mathrm{D} = \Sigma (g_{11} + \ldots + g_{nn})\, dx_k.$$

Dans cette relation, le premier membre est une différentielle exacte; le second doit être de même une différentielle exacte. En intégrant, on pourra mettre le déterminant D sous la forme

$$\mathrm{D} = \mathrm{C}\, e^{\int \Sigma (g_{11} + \ldots + g_{nn})\, dx_k},$$

C étant une constante.

8. Il est maintenant aisé de démontrer qu'il existe une infinité de systèmes fondamentaux de solutions des équations (1). En effet, si l'on se donne des valeurs initiales des $n^2$ fonctions $y$, telles que le déterminant D ne soit pas nul, la constante C ne sera pas nulle, et le déterminant D restera différent de zéro, tant que les variables n'atteindront pas un système de valeurs constituant un *point singulier* des fonctions $a, b, \ldots, l$. Or, nous avons écarté les *points singuliers* dans la définition des fonctions $y$.

9. *Toute solution du système d'équations* (1) *peut s'obtenir par des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants des éléments d'un système fondamental quelconque de solutions.*

En effet, soit un système quelconque de solutions

$$y_{1i}\ y_{2i},\ \ldots,\ y_{ni}\quad (i=1,2,\ldots,n);$$

posons

$$Y_i = C_1 y_{i1} + C_2 y_{i2} + \ldots + C_n y_{in}\quad (i=1,2,\ldots,n),$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ étant des constantes arbitraires; il est facile de vérifier que les fonctions Y constituent une solution du système d'équations (1).

Toute solution du système d'équations (1) peut réciproquement se mettre sous la forme précédente, pourvu que le système de solutions d'où l'on part soit fondamental.

En effet, soit

$$y_{1,n+1},\ y_{2,n+1},\ \ldots,\ y_{n,n+1}$$

une solution quelconque du système d'équations (1). Cherchons à déterminer des fonctions $C_1, C_2, \ldots, C_n, \lambda_1$ telles que l'on ait

$$C_1 y_{i1} + C_2 y_{i2} + \ldots + C_n y_{in} + \lambda y_{i,n+1} = 0\quad (i=1,2,\ldots n).$$

On prendra $\lambda$ arbitrairement, et on aura à résoudre un système d'équations à $n$ inconnues $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Ce système est du premier degré; le déterminant des coefficients des inconnues est différent de zéro, puisque c'est le déterminant d'un système de solutions supposé fondamental. Les inconnues $C_1, C_2, \ldots, C_n$ prendront donc des valeurs déterminées.

Je dis que les rapports $\frac{C_i}{\lambda}$ se réduiront tous à des constantes. En effet, en différentiant totalement, on a

$$y_{i1}\, dC_1 + \ldots + y_{in}\, dC_n + y_{i,n+1}\, d\lambda + C_1\, dy_{i1} + \ldots + C_n\, dy_{in} + \lambda\, dy_{i,n+1} = 0.$$

Or, le système proposé permettant d'éliminer $dy_{ik}$, on a

$$\begin{aligned}
&C_1\, dy_{i1} + \ldots + C_n\, dy_{in} + \lambda\, dy_{i,n+1}\\
&= C_1 [(a_{i1} y_{11} + \ldots + a_{in} y_{n1})\, dx_1 + \ldots + (l_{i1} y_{11} + \ldots + l_{in} y_{n1})\, dx_p] + \ldots\\
&+ C_n [(a_{i1} y_{1n} + \ldots + a_{in} y_{nn})\, dx_1 + \ldots + (l_{i1} y_{1n} + \ldots + l_{in} y_{nn})\, dx_p]\\
&+ \lambda [(a_{i1} y_{1,n+1} + \ldots + a_{in}, y_{n,n+1})\, dx_1 + \ldots + (l_{i1} y_{1,n+1} + \ldots + l_{in} y_{n,n+1})\, dx_p]\\
&\qquad = a_{i1} (C_1 y_{11} + \ldots + C_n y_{1n} + \lambda y_{1,n+1})\, dx_1 + \ldots = 0.
\end{aligned}$$

Nous avons donc simultanément

$$y_{i1}\ C_1+\ldots+y_{in}\ C_n+y_{i,n+1}\ \lambda=0 \quad (i=1,2,\ldots,n),$$
$$y_{i1}\,dC_1+\ldots+y_{in}\,dC_n+y_{i,n+1}\,d\lambda=0 \quad (i=1,2,\ldots n).$$

Ces deux systèmes d'équations déterminent les mêmes valeurs proportionnelles des inconnues, en prenant pour inconnues d'une part $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$ et $\lambda$, et, d'autre part, $dC_1$, $dC_2$, ..., $d\lambda$; il faut donc que l'on ait

$$\frac{dC_1}{C_1}=\frac{dC_2}{C_2}=\ldots=\frac{dC_n}{C_n}=\frac{d\lambda}{\lambda},$$

ou encore

$$d\left(\frac{C_i}{\lambda}\right)=0,$$

ou enfin

$$\frac{C_i}{\lambda}=\text{const.}$$

Si donc on prend $\lambda$ égal à $-1$, on aura les relations

$$y_{i,n+1}=C_1y_{i1}+\ldots+C_ny_{in} \quad (i=1,2,\ldots,n),$$

linéaires et homogènes à coefficients constants, qu'il s'agissait d'obtenir.

**10.** Supposons que l'on ait un système de solutions non fondamental, il existera entre ses éléments des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme

$$C_1y_{i1}+\ldots+C_ny_{in}=0 \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

On le démontrera par une méthode analogue à celle employée dans le paragraphe précédent.

**11.** Entre les éléments de $n+1$ solutions du système d'équations (1), il existe toujours un système de relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme

$$C_1y_{i1}+\ldots+C_ny_{in}=0 \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

C'est un autre énoncé du théorème du § 9.

**12.** Entre les éléments d'un système fondamental de solutions, il ne peut exister aucun système de relations de la forme

$$C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ou de la forme

$$C_1 y_{1i} + \ldots + C_n y_{ni} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En effet, le déterminant de ces équations homogènes du premier degré en $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ne peut être nul, et on ne peut satisfaire à ces équations qu'en prenant $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$.

Mais il faut bien remarquer qu'une de ces relations peut avoir lieu isolément. Par exemple, le système d'équations

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{x} y_1,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{2}{1+x^2} y_1 + \frac{2x}{1+x^2} y_2$$

admet le système fondamental de solutions

$$y_{11} = x, \quad y_{21} = 1,$$

$$y_{12} = -x, \quad y_{22} = x^2.$$

Or, la relation $y_{11} + y_{12} = 0$ a lieu identiquement, quoique le système de solutions soit fondamental.

**13.** Si l'on substitue aux éléments d'un système fondamental de solutions d'autres éléments déterminés par les relations linéaires à coefficients constants

$$Y_{hk} = C_{k1} y_{h1} + \ldots + C_{kn} y_{hn} \quad (h = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

on obtient un nouveau système fondamental, à condition que le déterminant des constantes de la substitution soit différent de zéro.

En effet, soit P le déterminant des fonctions Y, soit Q celui des fonctions $y$, soit R celui des constantes, on a identiquement

$$P = Q.R.$$

Or, Q et R sont, par hypothèse, différents de zéro, et par suite P est différent de zéro, et les fonctions Y forment un système fondamental.

**14.** Substituons à des éléments d'un système fondamental d'autres éléments déterminés par les relations à coefficients constants

$$Y_{hk} = C_{k1} y_{h1} + \ldots + C_{kg} y_{hg},$$

pour toutes les valeurs de $k$ de 1 à $g$, et pour toutes les valeurs de $h$ de 1 à $n$, nous aurons le tableau

$$\begin{array}{l} Y_{11}, \ \ldots, \ Y_{1g}, \ y_{1,g+1}, \ \ldots, \ y_{1n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_{n1}, \ \ldots, \ Y_{gg}, \ y_{n,g+1}, \ \ldots, \ y_{nn}. \end{array}$$

Les éléments de ce tableau forment encore un système fondamental de solutions, si le déterminant des constantes de la substitution est différent de zéro. En effet, le déterminant des constantes peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} C_{11} & \ldots & C_{1g} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\ C_{g1} & \ldots & C_{gg} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

et la question est ramenée à la précédente.

**15.** Si l'on connaît une solution du système d'équations (1), on peut ramener l'intégration de ce système à celle d'un autre système de même forme ayant une inconnue de moins.

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les éléments de la solution connue. Il peut en exister qui soient nuls. Admettons que les éléments $u_{s+1}, u_{s+2}, \ldots, u_n$ soient identiquement nuls, sans qu'il en soit de même pour les éléments $u_1, u_2, \ldots, u_s$.

Substituons aux fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_s$ d'autres fonctions $q_1, q_2, \ldots, q_s$ déterminées par les relations

$$y_h = u_h q_h \quad (h = 1, 2, \ldots, s).$$

Les $s$ premières équations du système (1) deviendront

$$u_h\,dq_h + q_h\,du_h = (a_{h1}\,u_1\,q_1 + \ldots + a_{hs}\,u_s\,q_s + a_{h,s+1}\,y_{s+1} + \ldots + a_{hn}\,y_n)\,dx_1$$
$$+ \ldots + (l_{h1}\,u_1\,q_1 + \ldots + l_{hs}\,u_s\,q_s + l_{h,s+1}\,y_{s+1} + \ldots + l_{hn}\,y_n)\,dx_p$$
$$(h = 1, 2, \ldots, s).$$

Remplaçons $du_h$ par $\frac{\partial u_h}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial u_h}{\partial x_p}dx_p$. Ces équations prendront la forme

$$dq_h = (\alpha_{h1}\,q_1 + \ldots + \alpha_{hs}\,q_s + \alpha_{h,s+1}\,y_{s+1} + \ldots + \alpha_{hn}\,y_n)\,dx_1 + \ldots$$
$$+ (\lambda_{h1}\,q_1 + \ldots + \lambda_{hs}\,q_s + \lambda_{h,s+1}\,y_{s+1} + \ldots + \lambda_{hn}\,y_n)\,dx_p.$$

Nous avons, en outre, les $n - s$ équations

$$dy_{s+k} = (a_{s+k,1}\,u_1\,q_1 + \ldots + a_{s+k,s}\,u_s\,q_s + a_{s+k,s+1}\,y_{s+1} + \ldots + a_{s+k,n}\,y_n)\,dx_1$$
$$+ \ldots + l_{s+k,1}\,u_1\,q_1 + \ldots + l_{s+k,s}\,u_s\,q_s + l_{s+k,s+1}\,y_{s+1} + \ldots + l_{s+k,n}\,y_n)\,dx_p$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n - s).$$

Si nous remplaçons $y_{s+k}$ par $q_{s+k}$, nous aurons un système d'équations de même forme que le système (1). Nous l'écrirons

$$(2)\qquad dq_i = (\alpha_{i1}\,q_1 + \ldots + \alpha_{in}\,q_n)\,dx_1 + \ldots + (\lambda_{i1}\,q_1 + \ldots + \lambda_{in}\,q_n)\,dx_p$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les conditions d'intégrabilité doivent être satisfaites.

Vérifions-le, par exemple, pour l'équation qui donne $dq_1$. Les coefficients différentiels de $dx_1$ et $dx_p$ sont deux coefficients quelconques. Prouvons que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial x_p}\left[\frac{1}{u_1}\left(a_{11}\,u_1\,q_1 + \ldots + a_{1s}\,u_s\,q_s + a_{1,s+1}\,y_{s+1} + \ldots + a_{1n}\,y_n - q_1\,\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{u_1}\left(l_{11}\,u_1\,q_1 + \ldots + l_{1s}\,u_s\,q_s + l_{1,s+1}\,y_{s+1} + \ldots + l_{1n}\,y_n - q_n\,\frac{\partial u_1}{\partial x_p}\right)\right].$$

En développant le calcul, nous aurons

$$u_1\,\frac{\partial}{\partial x_p}(a_{11}\,u_1\,q_1 + \ldots + a_{1n}\,y_n) - u_1\,\frac{\partial}{\partial x_p}\left(q_1\,\frac{\partial u_1}{\partial x_p}\right) - (l_{11}\,u_1\,q_1 + \ldots + l_{1n}\,y_n)\,\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$
$$- q_1\,\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial u_1}{\partial x_p} = u_1\,\frac{\partial}{\partial x_1}(l_{11}\,u_1\,q_1 + \ldots + l_{1n}\,y_n) - u_1\,\frac{\partial}{\partial x_1}\left(q_1\,\frac{\partial u_1}{\partial x_p}\right)$$
$$- (l_{11}\,u_1\,q_1 + \ldots + l_{1n}\,y_n)\,\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - q_1\,\frac{\partial u_1}{\partial x_p}\,\frac{\partial u_1}{\partial x_1};$$

Or, on a

$$u_h q_h = y_h \quad (h = 1, 2, \ldots, s),$$
$$q_{s+k} = y_{s+k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-s),$$

et, à cause de l'intégrabilité des équations du système (1), on a

$$\frac{\partial}{\partial x_p}(a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n) = \frac{\partial}{\partial x_1}(l_{11} y_1 + \ldots + l_{1n} y_n).$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} & u_1 \frac{\partial q_1}{\partial x_p}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_1 q_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_p} + u_1 \frac{\partial q_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_p} \\ = {} & u_1 \frac{\partial q_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_p} + u_1 q_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_p \partial x_1} + u_1 \frac{\partial q_1}{\partial x_p}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire une identité.

Remarquons maintenant que le système (2) admet la solution

$$q_h = 1 \quad (h = 1, 2, \ldots, s),$$
$$q_{s+k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-s).$$

Nous devrons donc avoir entre les coefficients l'ensemble des relations

$$\begin{gathered} \alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \ldots + \alpha_{is} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \ldots + \lambda_{is} = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered}$$

En tenant compte de ces conditions, le système (2) devient

$$\begin{gathered} dq_i = [\alpha_{i2}(q_2 - q_1) + \ldots + \alpha_{is}(q_s - q_1) + \alpha_{i,s+1} q_{s+1} + \ldots + \alpha_{in} q_n]\, dx_1 + \ldots \\ + [\lambda_{i2}(q_2 - q_1) + \ldots + \lambda_{is}(q_s - q_1) + \lambda_{i,s+1} q_{s+1} + \ldots + \lambda_{in} q_n]\, dx_p \\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered}$$

Posons maintenant

$$z_h = q_h - q_1 \quad (h = 2, 3, \ldots, s),$$
$$z_{s+k} = q_{s+k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-s),$$

et retranchons la première équation des $s-1$ suivantes. Nous obtiendrons un système de la forme

$$(3) \qquad dz_i = (A_{i2} z_2 + \ldots + A_{in} z_n)\, dx_1 + \ldots + (L_{i2} z_2 + \ldots + L_{in} z_n)\, dx_p$$
$$(i = 2, 3, \ldots, n),$$

auquel il faudra joindre l'équation

$$(4) \qquad dq_1 = (\alpha_{12} z_2 + \ldots + \alpha_{1n} z_n)\, dx_1 + \ldots + (\lambda_{12} z_2 + \ldots + \lambda_{1n} z_n)\, dx_p.$$

Supposons que nous ayons obtenu une solution quelconque $\zeta_2$, $\zeta_3$, ..., $\zeta_n$ du système (3). Nous pourrons tirer $q_1$ de l'équation (4) en effectuant des quadratures, puisque les conditions d'intégrabilité sont satisfaites.

Soit Q une solution de cette équation, nous aurons

$$\begin{aligned} q_h &= \zeta_h + \mathrm{Q} \quad (h = 2, 3, \ldots, s), \\ q_{s+k} &= \zeta_{s+k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-s). \end{aligned}$$

Nous en déduirons la solution du système (1)

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 \mathrm{Q}, \\ y_h &= u_h(\zeta_h + \mathrm{Q}) \quad (h = 2, 3, \ldots, s), \\ y_{s+k} &= \zeta_{s+k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-s). \end{aligned}$$

Nous sommes donc ramenés à la résolution du système (3), de même forme que le système (1), mais où le nombre des fonctions inconnues est diminué d'une unité.

**16.** Étant donné un système fondamental de solutions du système (3), le système de solutions correspondant des équations (1) est aussi fondamental.

En effet, soit $\Delta$ le déterminant des solutions

$$\zeta_{2i}, \zeta_{3i}, \ldots, \zeta_{ni} \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

du système d'équations (3). Supposons $\Delta$ différent de zéro, et par suite ce système de solutions fondamental.

L'équation (4) donne, pour chaque solution $\zeta_{2i}$, $\zeta_{3i}$, ..., $\zeta_{ni}$ des équations (3), une fonction $\mathrm{Q}_i$, et l'on peut former un système de solutions des équations (1). Les éléments de ce système forment le tableau

$$\begin{array}{llllll} u_1, & u_2, & \ldots, u_s, & 0, & \ldots, 0, \\ u_1 \mathrm{Q}_1, & u_2(\zeta_{22} + \mathrm{Q}_1), & \ldots, u_s(\zeta_{s2} + \mathrm{Q}_1), & \zeta_{s+1,2}, & \ldots, \zeta_{n2}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \\ u_1 \mathrm{Q}_{n-1}, & u_2(\zeta_{2n} + \mathrm{Q}_{n-1}), & \ldots, u_s(\zeta_{sn} + \mathrm{Q}_{n-1}), & \zeta_{s+1,n}, & \ldots, \zeta_{nn}. \end{array}$$

Je dis que ce système de solutions est fondamental. En effet, s'il ne l'était pas, on pourrait établir entre ses éléments des relations à coefficients constants de la forme

$$C_1 y_{i1} + C_2 y_{i2} + \ldots + C_n y_{in} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

On aurait d'abord

$$C_1 u_1 + C_2 u_1 Q_1 + \ldots + C_n u_1 Q_{n-1} = 0,$$

ou

$$C_1 + C_2 Q_1 + \ldots + C_n Q_{n-1} = 0.$$

On aurait ensuite

$$C_1 u_h + C_2 u_h (\zeta_{h2} + Q_1) + \ldots + C_n u_h (\zeta_{hn} + Q_{n-1}) = 0,$$

ou, en tenant compte de la relation précédente,

$$(a) \qquad C_2 \zeta_{h2} + \ldots + C_n \zeta_{hn} = 0 \quad (h = 2, 3, \ldots, s).$$

Enfin on aurait

$$(b) \qquad C_2 \zeta_{s+k,2} + \ldots + C_n \zeta_{s+k,n} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-s).$$

L'ensemble des relations $(a)$ et $(b)$ exprimerait que le système de solutions des équations (3) n'est pas fondamental, ce qui est contraire à l'hypothèse.

**17.** Nous avons maintenant une marche à suivre pour former un système fondamental de solutions des équations (1). Soit une solution $u_1, u_2, \ldots, u_n$ du système (1). Formons un premier système auxiliaire d'équations ne renfermant que $n-1$ inconnues. Soit une solution $v_2, v_3, \ldots, v_n$ de ce système. Au moyen de cette solution, passons à un deuxième système auxiliaire d'équations ne renfermant que $n-2$ inconnues.

Au moyen d'une solution de ce nouveau système, passons de même à un système ne renfermant que $n-3$ inconnues, et continuons ainsi jusqu'à ce que nous arrivions à un dernier système réduit à une seule équation renfermant une seule inconnue. Soit

$$dw = w(F_1 dx_1 + \ldots + F_p dx_p)$$

cette équation. Elle donne

$$w = Ce^{\int(F_1 dx_1 + \ldots + F_p dx_p)},$$

C étant une constante arbitraire, car la parenthèse doit être une différentielle exacte. Cette valeur de $w$, n'étant pas identiquement nulle, forme un système fondamental de solutions du dernier système auxiliaire. Elle fournira, après une intégration, une nouvelle solution de l'avant-dernier système auxiliaire. On aura alors deux solutions de ce système, et elles forment un système fondamental. Ce système fondamental permettra ensuite de former, après deux quadratures, deux solutions nouvelles du système auxiliaire précédent. Avec la solution déjà connue, on aura trois solutions de ce système d'équations, et ces trois solutions formeront un système fondamental. En remontant ainsi de proche en proche, on obtiendra finalement un système fondamental de solutions des équations (1).

Le nombre total des intégrations à effectuer dans la suite de ce calcul est

$$1 + 2 \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

18. Il existe une relation simple entre les expressions des déterminants des systèmes fondamentaux dans les systèmes d'équations (1) et (3). Soit D un déterminant relatif au système (1), soit $\Delta$ un déterminant relatif au système (3). En négligeant les facteurs constants, qui ne sont pas nuls, puisque D et $\Delta$ doivent être différents de zéro, on a

$$D = e^{\int \Sigma (g_{11} + \ldots + g_{nn}) dx_k},$$
$$\Delta = e^{\int \Sigma (G_{22} + \ldots + G_{nn}) dx_k}.$$

Or, on a, par définition,

$$G_{ii} = \gamma_{ii} - \gamma_{1i} = g_{ii} - \frac{1}{u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \gamma_{1i},$$

pour les valeurs 1, 2, ..., $s$ de l'indice $i$, et

$$G_{ii} = g_{ii}$$

pour les valeurs $s+1$, $s+2$, ..., $n$ de cet indice.

On a donc, par exemple,

$$A_{22} + \ldots + A_{nn} = (a_{22} + \ldots + a_{nn}) - (\alpha_{12} + \ldots + \alpha_{1s}) - \left(\frac{1}{u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{1}{u_s}\frac{\partial u_s}{\partial x_1}\right).$$

Mais on a

$$\alpha_{12} + \ldots + \alpha_{1s} = -\alpha_{11} = -a_{11} + \frac{1}{u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}.$$

On a donc

$$A_{22} + \ldots + A_{nn} = (a_{11} + \ldots + a_{nn}) - \left(\frac{1}{u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{1}{u_s}\frac{\partial u_s}{\partial x_1}\right).$$

On aura donc

$$\Sigma\,(G_{22} + \ldots + G_{nn})\,dx_k = \Sigma\,(g_{11} + \ldots + g_{nn})\,dx_k - \sum_{i=1}^{i=s}\frac{1}{u_i}du_i,$$

et, par suite,

$$\Delta = e^{\int \Sigma (g_{11} + \ldots + g_{nn})\,dx_k}\, e^{-\int \sum_{i=1}^{i=s} \frac{1}{u_i}du_i}$$

ou

$$\Delta = D\,e^{-\log(u_1 u_2 \ldots u_s)},$$

ou enfin

$$\Delta = \frac{D}{u_1 u_2 \ldots u_s}.$$

Comme première conséquence, imaginons qu'on donne d'abord le déterminant D, et qu'on dirige le calcul précédent de manière à obtenir le déterminant $\Delta$. On voit que $\Delta$ ne pourra être nul que si D est nul, ou que si le produit $u_1 u_2 \ldots u_s$ devient infini. Or, aucune de ces deux hypothèses ne peut se réaliser en un *point* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ qui n'est pas *singulier*. On peut donc dire qu'à un déterminant D d'un système fondamental de solutions du système (1) correspond un déterminant $\Delta$ d'un système fondamental de solutions du système (3), et cette propriété peut évidemment s'étendre aux systèmes d'équations auxiliaires successifs.

Comme autre conséquence, on peut mettre le déterminant D sous la forme d'un produit de fonctions. En effet, soient $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-2}$ les déterminants des systèmes fondamentaux de solutions des équations auxiliaires successives. On a

$$D = \Delta\ u_1 u_2 \ldots u_n,$$
$$D = \Delta_1\ v_2 v_3 \ldots v_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Delta_{n-2} = w.$$

En multipliant, membre à membre, on a

$$D = u_1 u_2 \ldots u_n v_2 v_3 \ldots v_n \ldots w.$$

Ces dernières formules supposent que tous les éléments des solutions successives sont différents de zéro; on les modifierait facilement dans le cas contraire.

---

## CHAPITRE II.

---

16. Conservons les hypothèses faites dans le Chapitre précédent; c'est-à-dire supposons que, dans les portions $T_1$, $T_2$, ..., $T_p$ du plan limitées par des contours simples, les variables indépendantes $x_1$ $x_2$, ..., $x_p$ aient des marches désignées sur des chemins désignés, de sorte qu'à aucun moment le *point* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ ne soit un point *singulier* des coefficients $a$, $b$, ..., $l$ des équations (1). Admettons, en outre, que les coefficients $a$, $b$, ..., $l$ soient uniformes dans les régions considérées, et par suite reprennent les mêmes valeurs, quand les variables indépendantes déterminent de nouveau le même *point* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.

Nous avons vu qu'une solution du système d'équations (1) se compose de $n$ fonctions $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$, *régulières* en tous les *points* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ que l'on considère.

Si les variables reviennent en même temps à leurs valeurs primitives, les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ auront pris des valeurs nouvelles, différentes ou non des anciennes. Nous nous proposons d'étudier les relations qui lient ces deux groupes de valeurs des intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

**17.** Représentons par $y_{ik}$ $(i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, n)$ un élément quelconque d'un système fondamental de solutions des équations (1), et considérons les éléments de ce système lorsque les variables, ayant d'abord des valeurs initiales $x_1, x_2, \ldots, x_p$, décrivent des chemins fermés et reviennent ensemble à leurs valeurs initiales. Ces éléments partiront des valeurs initiales $y_{ik}$, et prendront à la fin des valeurs nouvelles que nous représenterons par $Y_{ik}$. Si l'on considère les fonctions qui, dans le mouvement des variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$, partent d'abord des valeurs $Y_{ik}$, on sait qu'on peut les exprimer linéairement au moyen des fonctions $y_{ik}$.

Donc, *si les variables indépendantes reviennent ensemble à leurs valeurs initiales, les nouvelles valeurs $Y_{ik}$ des éléments d'un système fondamental de solutions sont liées aux anciennes $y_{ik}$ par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme*

$$(5) \qquad Y_{ik} = C_{k1} y_{i1} + \ldots + C_{kn} y_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Le déterminant des constantes est différent de zéro; car les fonctions $Y_{ik}$ forment un système fondamental, et il faut qu'on puisse exprimer les fonctions $y_{ik}$ au moyen des fonctions $Y_{ik}$.

**18.** Nous allons maintenant déterminer les formes les plus simples que l'on puisse donner aux relations (5). Nous montrerons d'abord qu'on peut déterminer des constantes $g_1, g_2, \ldots, g_n$, telles que les fonctions

$$u_i = g_1 y_{i1} + \ldots + g_n y_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

prennent, après un tour des variables, des valeurs nouvelles $U_1, U_2, \ldots, U_n$ liées aux premières valeurs par des relations de la forme

$$U_i = \omega u_i,$$

où $\omega$ représente une constante. Chaque élément de la solution $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des équations (1) se reproduira donc multiplié par une constante $\omega$, la même pour tous les éléments de la solution.

Il faut que l'on ait

$$\begin{aligned}U_i &= g_1 Y_{i1} + \ldots + g_n Y_{in}\\ &= (C_{11} g_1 + \ldots + C_{n1} g_n) y_{i1} + \ldots + (C_{1n} g_1 + \ldots + C_{nn} g_n) y_{in}.\end{aligned}$$

Identifions cette expression avec

$$U_i = \omega u_i = \omega g_1 y_{i1} + \ldots + \omega g_n y_{in},$$

nous aurons

$$\begin{aligned}&(C_{11} - \omega) g_1 + \ldots + C_{n1} g_n = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &C_{1n} g_1 + \ldots + (C_{nn} - \omega) g_n = 0.\end{aligned}$$

Pour que ces équations soient compatibles, il faut que $\omega$ vérifie l'équation

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} C_{11} - \omega & C_{21} & \ldots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} - \omega & \ldots & C_{n2} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ C_{1n} & C_{2n} & \ldots & C_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation donnera $n$ valeurs de $\omega$, distinctes ou non. Chacune des racines distinctes permettra de déterminer des valeurs proportionnelles de $g_1, g_2, \ldots, g_n$, et par suite de former des solutions dont les éléments se reproduisent multipliés par un facteur constant.

19. Nous donnerons à l'équation en $\omega$ le nom d'*équation fondamentale*. Les racines de cette équation ne dépendent pas du choix du système fondamental de solutions. Pour le démontrer, nous suivrons la marche donnée par M. Hamburger [1].

Représentons par $y_{ik}$ et $\eta_{ik}$ les éléments de deux systèmes fondamentaux de solutions, et soient $Y_{ik}$ et $H_{ik}$ les nouvelles valeurs de ces éléments. Nous devrons avoir les deux systèmes de relations à coefficients constants

$$\begin{aligned}&Y_{ik} = l_{k1} y_{i1} + \ldots + l_{kn} y_{in},\\ &H_{ik} = \lambda_{k1} \eta_{i1} + \ldots + \lambda_{kn} \eta_{in},\\ &(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n),\end{aligned}$$

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 76, p. 115.

et les équations fondamentales correspondantes seront

$$P(\omega) = \begin{vmatrix} l_{11} - \omega & \dots & l_{n1} \\ \dots\dots & \dots & \dots \\ l_{1n} & \dots & l_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Pi(\omega) = \begin{vmatrix} \lambda_{11} - \omega & \dots & \lambda_{n1} \\ \dots\dots & \dots & \dots \\ \lambda_{1n} & \dots & \lambda_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Les déterminants $P(0)$ et $\Pi(0)$ ne seront pas nuls, si l'on suppose que les systèmes de solutions sont fondamentaux.

Exprimons les éléments $\eta_{ik}$ en fonction des éléments $y_{ik}$. Les relations sont à coefficients constants et de la forme

$$\eta_{ik} = C_{k1} y_{i2} + \dots + C_{kn} y_{in},$$

et nous en tirons

$$H_{ik} = C_{k1} Y_{i1} + \dots + C_{kn} y_{in}.$$

Il résulte de là, en développant les deux expressions de $H_{ik}$,

$$H_{ik} = (C_{k1} l_{11} + \dots + C_{kn} l_{n1}) y_{i1} + \dots + (C_{k1} l_{1n} + \dots + C_{kn} l_{nn}) y_{in},$$
$$H_{ik} = (\lambda_{k1} C_{11} + \dots + \lambda_{kn} C_{n1}) y_{i1} + \dots + (\lambda_{k1} C_{1n} + \dots + \lambda_{kn} C_{nn}) y_{in}.$$

En identifiant les coefficients des mêmes éléments, on a

$$C_{k1} l_{1i} + \dots + C_{kn} l_{ni} = \lambda_{k1} C_{1i} + \dots + \lambda_{kn} C_{ni} = a_{k,i}.$$

Cela posé, appelons Q le déterminant

$$\begin{vmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{vmatrix},$$

et, puisque ce déterminant est différent de zéro, formons les produits $Q.P(\omega)$ et $\Pi(\omega).Q$, nous aurons identiquement

$$Q.P(\omega) = \Pi(\omega) Q = \begin{vmatrix} a_{11} - C_{11}\omega & \dots & a_{1n} - C_{1n}\omega \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{1n} - C_{n1}\omega & \dots & a_{nn} - C_{nn}\omega \end{vmatrix} = R(\omega),$$

c'est-à-dire que les équations $P(\omega) = 0$, $\Pi(\omega) = 0$ ont les mêmes coefficients et par suite les mêmes racines.

**20.** Nous venons de voir qu'on peut choisir un certain nombre de solutions telles que les relations entre les anciennes et les nouvelles valeurs prennent une forme simple. Supposons que l'équation en $\omega$ ait $n$ racines distinctes, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Il existera $n^2$ fonctions $u_{ik}$, telles que l'on ait

$$U_{ik} = \omega_k u_{ik}.$$

Ces fonctions $u_{ik}$ forment un système fondamental de solutions. On peut le démontrer directement, mais cela ressort de l'étude plus générale que nous allons faire.

**21.** Nous nous proposons de montrer qu'à toute racine $\omega$, d'un ordre de multiplicité $\mu$, de l'équation fondamentale, se rattache un groupe de $\mu$ solutions dont les éléments se comportent simplement dans le mouvement des variables indépendantes, et que, si l'équation en $\omega$ a $s$ racines distinctes, on peut former, au moyen de $s$ groupes, un système fondamental de solutions.

Nous démontrerons d'abord que si, pour une valeur de $\omega$, tous les déterminants mineurs de $P(\omega)$ sont nuls jusqu'à ceux du degré $\nu - 1$ exclusivement, il en est de même dans $\Pi(\omega)$.

Représentons les mineurs du degré $\nu$ de P, $\Pi$, Q, R par $p_{\gamma\delta}$, $\pi_{\gamma\delta}$, $q_{\gamma\delta}$, $r_{\gamma\delta}$, $\gamma$ et $\delta$ désignant deux combinaisons quelconques des nombres 1, 2, ..., $n$ pris $\nu$ à $\nu$. (Baltzer.)

Le nombre de ces combinaisons est $c = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{1.2\ldots\nu}$.

Les relations $R = Q.P(\omega) = \Pi(\omega).Q$ entraînent les relations

$$r_{\gamma\delta} = q_{\gamma 1} p_{\delta 1} + \ldots + q_{\gamma c} p_{\delta c} = \pi_{\gamma 1} q_{\delta 1} + \ldots + \pi_{\gamma c} q_{\delta c}$$

(Cauchy, *Journal de l'École Polytechnique*, XVII[e] Cahier).

Si tous les déterminants $p_{\gamma\delta}$ s'annulent, on aura $r_{\gamma\delta} = 0$ pour toutes les valeurs qu'on peut donner à $\gamma$ et à $\delta$, et, par suite, on obtiendra le système d'équations

$$\begin{gathered}\pi_{\gamma 1} q_{11} + \ldots + \pi_{\gamma c} q_{1c} = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \pi_{\gamma 1} q_{c1} + \ldots + \pi_{\gamma c} q_{cc} = 0.\end{gathered}$$

Mais le déterminant $\Sigma q_{11}, q_{22}, \ldots, q_{cc}$ est une puissance de Q (Franke, *Journal de Crelle,* Bd. **61**, p. 350), et n'est pas nul; tous les déterminants $\pi_{\gamma 1}, \ldots, \pi_{\gamma c}$ doivent être nuls séparément et pour toutes les valeurs qu'on peut donner à $\gamma$.

Tous les déterminants du degré $\nu - 1$ dans $\Pi(\omega)$ ne sont pas nuls, sans quoi on pourrait démontrer que ceux du degré $\nu - 1$ dans $P(\omega)$ sont tous nuls, ce que nous ne supposons pas.

**22.** Considérons maintenant les deux systèmes d'équations

$$\begin{gathered} l_{11} g_1 + \ldots + l_{n1} g_1 = \omega g_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_{1n} g_1 + \ldots + l_{nn} g_n = \omega g_n, \end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered} \lambda_{11} g_1 + \ldots + \lambda_{n1} g_1 = \omega g_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_{1n} g_1 + \ldots + \lambda_{nn} g_n = \omega g_n, \end{gathered}$$

et supposons que les conditions équivalentes $P(\omega) = 0$ et $\Pi(\omega) = 0$ soient satisfaites. Il y aura autant d'équations qui dépendront des autres dans le premier système que dans le second. Car la condition nécessaire et suffisante pour que $n - \nu + 1$ équations d'un système, et seulement ce nombre, dépendent des autres, est que tous les déterminants mineurs s'annulent jusqu'à ceux du degré $\nu$ inclusivement, condition satisfaite de la même manière dans les deux systèmes précédents.

Considérons alors le seul système en $l_{11}, l_{12}, \ldots, l_{nn}$, et supposons $P(\omega_1) = 0$. Le nombre des équations qui dépendent des autres est indépendant du système fondamental de solutions. Soit $\nu$ le nombre de ces équations.

On peut exprimer $g_1, g_2, \ldots, g_n$ en fonctions linéaires et homogènes de $\nu$ constantes arbitraires. Par suite, toutes les solutions

$$u_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui satisfont aux relations $U_{ik} = \omega_1 u_{ik}$ seront composées de fonctions linéaires et homogènes des éléments de $\nu$ d'entre elles, linéairement indépendantes. Soient $u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{i\nu}$ ces $\nu$ solutions; substituons-les aux solutions $y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{i\nu}$ du système fondamental primitif. Nous aurons le système

$$\begin{gathered} u_{ih} \quad (h = 1, 2, \ldots, \nu), \\ y_{ik} \quad (k = \nu + 1, \nu + 2, \ldots, n), \end{gathered}$$

qu'on peut supposer fondamental. En effet, pour former les $\nu$ solutions $u_{i1}, \ldots, u_{i\nu}$ linéairement indépendantes, on prendra arbitrairement les valeurs de $\nu$ désignées des quantités $g_1, g_2, \ldots, g_n$. On peut supposer que ces quantités sont $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$, et, les $\nu$ systèmes de valeurs de ces quantités $g_{1j}, g_{2j}, \ldots, g_{\nu j}$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ devant être tels que leur déterminant ne soit pas nul, on pourra substituer, quelles que soient les valeurs que l'on calcule pour $g_{\nu+1}, g_{\nu+2}, \ldots, g_n$, le système $u_{ih}, y_{ik}$ au système primitif, sans que le nouveau système cesse d'être fondamental.

On a maintenant les relations

$$(a) \quad \begin{cases} U_{i1} = \omega_1 u_{i1}, \\ U_{i\nu} = \omega_1 u_{i\nu}, \\ Y_{i,\nu+1} = l'_{\nu+1,1} u_{i1} + \ldots + l'_{\nu+1,\nu} u_{i\nu} + l'_{\nu+1,\nu+1} y_{i,\nu+1} + \ldots + l'_{\nu+1,n} y_{in}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_{in} = l'_{n1} u_{i1} + \ldots + l'_{n\nu} u_{i\nu} + l'_{n,\nu+1} y_{i,\nu+1} + \ldots + l'_{nn} y_{in}, \end{cases}$$

et l'équation fondamentale prend la forme

$$P(\omega) = (\omega - \omega_1)^\nu P'(\omega) = 0,$$

en posant

$$P'(\omega) = \begin{vmatrix} l'_{\nu+1,\nu+1} - \omega & \ldots & l'_{n,\nu+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ l'_{\nu+1,n} & \ldots & l'_{nn} - \omega \end{vmatrix}.$$

L'équation $(\omega - \omega_1)^\nu P'(\omega) = 0$ a les mêmes coefficients que l'équation fondamentale primitive.

Soit $\mu$ le degré de multiplicité de la racine $\omega_1$. Deux cas se présenteront. On pourra avoir $\mu = \nu$. Alors $u_{i1}, \ldots, u_{i\nu}$ seront toutes les solutions distinctes correspondant à la racine $\omega_1$; nous dirons qu'elles forment $\nu$ solutions simples, en appelant *solution simple* toute solution dont les éléments se reproduisent multipliés par un facteur constant.

On pourra avoir $\mu > \nu$; alors $\omega_1$ sera racine de $P'(\omega) = 0$. Représentons par $g'_{\nu+1}, g'_{\nu+2}, \ldots, g'_n$ les inconnues du système d'équations

$$\begin{aligned} g'_{\nu+1} l'_{\nu+1,\nu+1} + \ldots + g'_n l'_{n,\nu+1} &= g'_{\nu+1} \omega_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g'_{\nu+1} l'_{\nu+1,n} \quad + \ldots + g'_n l'_{n,n} \quad &= g'_n \omega_1. \end{aligned}$$

Considérons la solution des équations (1)

$$v_i = g'_{\nu+1} y_{i,\nu+1} + \ldots + g'_n y_{in}.$$

Elle est linéairement indépendante des solutions $u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{i\nu}$, puisque les solutions $u_{ih}, y_{ik}$ forment un système fondamental. Multiplions les dernières équations ($a$) par $g'_{\nu+1}, \ldots, g'_n$, ajoutons les résultats, nous aurons les relations

$$V_i = \omega_1 v_i + \varphi_i(u_{i1}, \ldots, u_{i\nu}),$$

où $\varphi_i$ est la caractéristique d'une fonction linéaire et homogène des éléments $u_{i1}, \ldots, u_{i\nu}$ des $\nu$ premières solutions; $\varphi_i$ satisfait, comme ces éléments eux-mêmes, à la relation

$$\Phi_i = \omega_1 \varphi_i.$$

S'il y a, dans le système d'équations en $g'_{\nu+1}, \ldots, g'_n$, $\nu'$ équations qui dépendent des autres, il existera $\nu'$ solutions $v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{i\nu'}$ linéairement indépendantes, et telles que l'on ait

$$V_{ik} = \omega_1 v_{ik} + \varphi_{ik}(u_{i1}, \ldots, u_{in}) \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu').$$

Toutes les solutions satisfaisant aux mêmes relations s'exprimeront de plus linéairement au moyen de fonctions homogènes de

$$u_{i1}, \ldots, u_{i\nu}, v_{i2}, \ldots, v_{i\nu'}.$$

Il ne peut y avoir entre $\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{i\nu'}$ aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants, sans quoi l'on pourrait former une fonction linéaire et homogène avec $v_{i1}, \ldots, v_{i\nu'}$ satisfaisant à la relation $U_{ik} = \omega_1 u_{ik}$, et le nombre des solutions distinctes correspondant à cette relation serait plus grand que $\nu$, ce qui est contraire à l'hypothèse. De là résulte que $\nu'$ est au plus égal à $\nu$, puisque, entre $\nu + 1$ fonction $\varphi_i$, il existe nécessairement une relation linéaire et homogène.

Deux nouveaux cas peuvent maintenant se présenter. Soit $\nu + \nu' = \mu$. On peut former $\mu$ solutions correspondant à la racine $\omega_1$ de la manière suivante.

Prenons d'abord les $2\nu'$ solutions

$$\begin{array}{l} v_{i1},\ \varphi_{i1}, \\ v_{i2},\ \varphi_{i2}, \\ \ldots\ldots, \\ v_{i\nu'},\ \varphi_{i\nu'}, \end{array}$$

qui sont associées deux à deux de manière à satisfaire aux relations

$$V_{ik} = \omega_1 v_{ik} + \varphi_{ik}, \quad \Phi_{ik} = \omega_1 \varphi_{ik},$$

puis prenons $\nu - \nu'$ autres solutions *simples*, dont les éléments soient des fonctions linéaires et homogènes de $u_{i1}, \ldots, u_{i\nu}$ n'ayant aucune relation linéaire et homogène entre elles, ou avec $\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{i\nu'}$.

Sans nuire à la généralité, on peut représenter les solutions $\varphi_{i1} \ldots, \varphi_{i\nu'}$ par $u_{i1}, \ldots, u_{i\nu'}$ et les $\nu - \nu'$ autres solutions simples par $u_{i,\nu'+1}, \ldots, u_{i\nu}$, et l'on obtient ainsi les $\nu + \nu'$ solutions

$$\begin{array}{l} u_{i1},\ \ldots,\ u_{i\nu'},\ u_{i\nu'+1},\ \ldots,\ u_{i\nu}, \\ v_{i1},\ \ldots,\ v_{i\nu'}. \end{array}$$

Nous dirons que les deux solutions $u_{ik}, v_{ik}$, qui sont associées pour satisfaire aux relations

$$V_{ik} = \omega_1 v_{ik} + u_{ik}, \quad U_{ik} = \omega_1 u_{ik}$$

forment un groupe binaire. Les $\nu + \nu'$ solutions se composent alors de $\nu'$ groupes binaires et de $\nu - \nu'$ solutions simples.

Soient $\nu + \nu' < \mu$. On peut substituer aux solutions $y_{i,\nu+1}, \ldots, y_{i,\nu+\nu}$ les solutions $v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{i\nu}$, et on aura, entre les éléments du nouveau système de solutions, qu'on peut supposer fondamental, les relations

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_{if} = \omega_1 u_{if} \quad (f = 1, 2, \ldots, \nu), \\ V_{ih} = \omega_1 v_{ih} + u_{ih} \quad (h = 1, 2, \ldots, \nu'), \\ Y_{ik} = l''_{k1} u_{i1} + \ldots + l''_{k\nu} u_{i\nu} + l''_{k,\nu+1} v_{i1} + \ldots + l''_{k,\nu+\nu'} v_{i\nu'} \\ \qquad + l''_{k,\nu+\nu'+1} y_{\nu+\nu'+1} + \ldots + l''_{kn} y_n \quad (k = \nu + \nu' + 1, \ldots, n). \end{array} \right.$$

L'équation fondamentale prend la forme

$$P(\omega) = (\omega - \omega_1)^{\nu+\nu'} P''(\omega) = 0,$$

en posant

$$P''_{(\omega)} = \begin{vmatrix} l''_{\nu+\nu'+1,\nu+\nu'+1} - \omega & \dots & l''_{n,\nu+\nu'+1} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \\ l''_{\nu+\nu'+1,n} & \dots & l''_{nn} - \omega \end{vmatrix}.$$

Puisqu'on a $\nu + \nu' < \mu$, $\omega_1$ est encore racine de $P''(\omega) = 0$, et on peut déterminer des quantités $g''_{\nu+\nu'+1}, \dots, g''_n$ par les relations

$$\begin{aligned} g''_{\nu+\nu'+1} l''_{\nu+\nu'+1,\nu+\nu'+1} + \dots + g''_n l''_{n,\nu+\nu'+1} &= g''_{\nu+\nu'+1}\omega_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots, \\ g''_{\nu+\nu'+1} l''_{\nu+\nu'+1,n} \quad + \dots + g''_n l''_{nn} \quad &= g''_n \omega_1. \end{aligned}$$

Si l'on multiplie les dernières équations $(b)$ par $g''_{\nu+\nu'+1}, \dots, g''_n$, on voit que la solution

$$w_i = g''_{\nu+\nu'+1} y_{i,\nu+\nu'+1} + \dots + g''_n y_{in}$$

satisfait aux relations

$$W_i = \omega_1 w_i + \Psi_i(u_{i1}, \dots, u_{i\nu}, v_{i1}, \dots, v_{i\nu'}),$$

en représentant par $\Psi_i$ une fonction linéaire et homogène à coefficients constants. La solution $w_i$ est linéairement indépendante des solutions $u_{if}$, $v_{ih}$.

S'il y a dans le système d'équations en $g''_{\nu+\nu'+1}, \dots, g''_n$, $\nu''$ équations qui dépendent des autres, il y aura $\nu''$ solutions $w_{i1}, \dots, w_{i\nu''}$ linéairement indépendantes et satisfaisant aux relations

$$W_{ik} = \omega_1 v_{ik} + \psi_{ik}(u_{i1}, \dots, u_{i\nu}, v_{i1}, \dots, v_{i\nu'}) \quad (k = 1, 2, \dots, \nu'').$$

Toute solution satisfaisant à des relations analogues pourra s'exprimer en fonction linéaire et homogène de $w_{i1}, \dots, w_{i\nu''}$, $v_{i1}, \dots, v_{i\nu'}$, $u_{i1}, \dots, u_{i\nu}$. Entre les fonctions $\Psi_{i1}, \dots, \Psi_{i\nu''}$, il ne peut exister aucune relation de la forme

$$a\psi_{i1} + \dots + t\psi_{i\nu''} = f(u_{i1}, \dots, u_{i\nu}),$$

où $f$ représente une fonction linéaire et homogène à coefficients constants, car il existerait une fonction linéaire et homogène de $w_{i1}, \dots, w_{i\nu''}$ qui, n'étant pas une expression linéaire des solutions $u_{if}$ et $v_{ih}$, jouirait des propriétés des éléments $v_{ih}$, ce qui est impossible à cause des hypothèses. De là résulte que $\nu''$ est au plus égal à $\nu'$, puisque, par l'élimination de $v_{i1}, \ldots, v_{i\nu'}$ des expressions $v_{ik}$, on pourrait former une relation

$$a\psi_{i1} + \ldots + t\psi_{i\nu''} = f(u_{i1}, \ldots, u_{i\nu}).$$

Soit $\nu + \nu' + \nu'' = \mu$. Représentons les fonctions $\psi_{i1}, \ldots, \psi_{i\nu''}$ par $v_{i1}, \ldots, v_{i\nu''}$, et prenons $\nu' - \nu''$ solutions $v_{ik}$ $(k = \nu' + 1, \ldots, \nu'')$, n'ayant aucune relation linéaire et homogène entre elles, ou avec $\psi_{i1}, \ldots, \psi_{i\nu''}$. Nous pourrons former $\mu$ solutions correspondant à la racine $\omega$, de la manière suivante.

Prenons d'abord les $3\nu''$ solutions

$$\begin{array}{ccc} w_{i1}, & v_{i1}, & u_{i1}, \\ \ldots & \ldots & \ldots, \\ w_{i\nu''}, & v_{i\nu''}, & u_{i\nu''}, \end{array}$$

qui sont associées trois par trois, de manière à satisfaire aux relations

$$W_{ik} = \omega_1 w_{ik} + v_{ik}, \quad V_{ik} = \omega_1 v_{ik} + u_{ik}, \quad U_{ik} = \omega_1 u_{ik}.$$

Prenons ensuite les $2(\nu' - \nu'')$ solutions

$$\begin{array}{cc} v_{i,\nu''+1}, & u_{i,\nu''+1}, \\ \ldots & \ldots, \\ v_{i\nu'}, & u_{i\nu'}, \end{array}$$

qui sont associées deux par deux, de manière à satisfaire aux relations

$$V_{ik} = \omega_1 v_{ik} + u_{ik}, \quad U_{ik} = \omega_1 u_{ik}.$$

Enfin prenons $\nu - \nu'$ solutions simples $u_{i\nu'+1}, \ldots, u_{i\nu}$. Nous dirons que les trois solutions $w_{ik}, v_{ik}, u_{ik}$, associées de manière à satisfaire aux relations

$$W_{ik} = \omega_1 w_{ik} + v_{ik}, \quad V_{ik} = \omega_1 v_{ik} + u_{ik}, \quad U_{ik} = \omega_1 u_{ik},$$

forment un groupe ternaire. Les $\nu + \nu' + \nu'' = \mu$ solutions se composent de $\nu''$ groupes ternaires, de $\nu' - \nu''$ groupes binaires, et de $\nu - \nu'$ solutions simples.

Le raisonnement s'appliquera tant que la somme des nombres $\nu$ n'atteindra pas $\mu$; on peut donc énoncer le théorème suivant :

*Soit $\omega_1$ une racine de l'équation fondamentale $P(\omega) = 0$. Soit $\mu$ son degré de multiplicité. Déduisons successivement, de la manière qu'on vient* *de voir, des systèmes d'équations linéaires et homogènes les uns des autres. Soit* $\nu$ *le nombre des équations qui dépendent des autres dans l'un de ce système. Quel que soit le système fondamental de solutions d'où l'on parte :*

1° *Le calcul donnera une suite de nombres* $\nu, \nu', \ldots, \nu^{(\lambda)}$, *dont la somme atteindra* $\mu$, *et chacun d'eux sera au plus égal au précédent ;*

2° *On pourra former* $\mu$ *solutions correspondant à la racine* $\omega_1$, *ces solutions s'associant entre elles de manière à former :*

$\nu^{(\lambda)}$ *groupes de* $\lambda+1$ *solutions,*
$\nu^{(\lambda-1)} - \nu^{\lambda}$ *groupes de* $\lambda$ *solutions,*
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ,
$\nu' - \nu''$ *groupes de* 2 *solutions,*

*et enfin*

$\nu - \nu'$ *solutions simples ;*

3° *Pour un groupe renfermant m solutions, on aura les relations*

$$Y_{i1} = \omega_1 y_{i1}, \quad Y_{i2} = \omega_1 y_{i2} + y_{i1}, \quad \ldots, \quad Y_{im} = \omega_1 y_{im} + y_{i,m-1}.$$

On voit bien que le nombre des solutions est $\mu$, car l'on a identiquement

$$(\lambda+1)\nu^{(\lambda)} + \lambda(\nu^{(\lambda-1)} - \nu^{(\lambda)}) + \ldots + 3(\nu'' - \nu''') + 2(\nu' - \nu'') + \nu - \nu' = \mu.$$

**23.** En épuisant le degré $\mu$ de la racine $\omega_1$, on pourra former un système fondamental de solutions

$$u_{ih} \quad (h = 1, 2, \ldots, \mu),$$
$$y_{ik} \quad (k = \mu+1, \mu+2, \ldots, n),$$

satisfaisant à des relations de la forme

$$U_{ih} = \omega_{h1} u_{i2} + \omega_{h2} u_{i2} + \ldots + \omega_{h,h-1} u_{i,h-1} + \omega_1 u_{ih},$$
$$Y_{ik} = G_{k1} u_{i1} + \ldots + G_{k\mu} u_{i\mu} + G_{k,\mu+1} y_{i,\mu+1} + \ldots + G_{kn} y_{in},$$

les quantités $\omega$ étant des constantes, qui peuvent être nulles à l'exception de $\omega_1$.

L'équation en $\omega$ prend la forme

$$P(\omega) = (\omega - \omega_1)^{\mu} P^{(\mu)}(\omega) = 0,$$

en posant

$$P^{(\mu)}(\omega) = \begin{vmatrix} G_{\mu+1,\mu+1} - \omega & \cdots & G_{n,\mu+1} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ G_{\mu+1,n} & \cdots & G_{nn} - \omega \end{vmatrix}.$$

L'équation $P^{(\mu)}(\omega) = 0$ a pour racines les racines $\omega_2, \omega_3, \ldots$ de l'équation $P(\omega) = 0$ distinctes de $\omega_1$, et chacune au même degré de multiplicité que $P(\omega) = 0$. Posons alors

$$u_{i,\mu+1} = m_1 u_{i1} + \ldots + m_n y_{in},$$

et déterminons $m_1, m_2, \ldots, m_n$ par les conditions

$$\begin{array}{llll}
(\omega_1 - \omega_2) m_1 + \omega_{21} m_2 + \ldots + G_{\mu+1,1} m_{\mu+1} & & + \ldots + G_{n1} m_n & = 0, \\
\quad (\omega_1 - \omega_2) m_2 + \ldots + G_{\mu+1,2} m_{\mu+1} & & + \ldots + G_{n2} m_n & = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
\qquad (G_{\mu+1,\mu+1} - \omega_2) m_{\mu+1} & & + \ldots + G_{n,\mu+1} m_n & = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & , \\
\qquad G_{\mu+1,n} m_{\mu+1} & & + \ldots + (G_{nn} - \omega_2) m_n & = 0.
\end{array}$$

Pour résoudre ce système, on déterminera d'abord les valeurs proportionnelles de $m_{\mu+1}, \ldots, m_n$, et l'on calculera ensuite et successivement $m_\mu, m_{\mu-1}, \ldots, m_1$.

Si $\rho$ des équations en $m_{\mu+1}, \ldots, m_n$ dépendent des autres, on pourra former $\rho$ solutions $u_{i,\mu+1}, \ldots, u_{i,\mu+\rho}$ linéairement indépendantes, satisfaisant aux relations

$$U_{i,\mu+k} = \omega_2 u_{i,\mu+k} \quad (k = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Au moyen de ces solutions, on pourra former un système fondamental de solutions

$$u_{ih} \quad (h = 1, 2, \ldots, \mu + \rho),$$
$$y_{ik} \quad (k = \mu + \rho + 1, \ldots, n),$$

dans lequel les solutions $u_{ih}$ seront particularisées.

En partant de ce système fondamental, et par des raisonnements analogues aux précédents, on pourra former des systèmes fondamentaux de plus en plus particuliers.

Donc, *soient* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ *toutes les racines distinctes de l'équation fondamentale, et* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *leurs degrés respectifs de multiplicité, on pourra former un système fondamental de solutions des équations* (1) *au moyen de s groupes de solutions, renfermant respectivement* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *solutions, chacun de ces s groupes correspondant à une racine distincte de l'équation fondamentale, et se décomposant en sous-groupes satisfaisant au premier théorème.*

**24.** Revenons à la théorie générale. Nous savons que les éléments d'un système fondamental de solutions des équations (1) à coefficients uniformes prennent des valeurs nouvelles, liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants, lorsque les variables décrivent des chemins fermés, et reviennent ensemble à leurs valeurs initiales. Cette propriété est caractéristique de ces éléments.

Soit, en effet, D le déterminant, supposé différent de zéro de $n^2$ fonctions $y_{ik}(i=1, 2, \ldots, n; k=1, 2, \ldots, n)$, de $p$ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$, *régulières en tous les points* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, sauf en des *points singuliers*, lorsque les variables indépendantes restent dans des régions respectives du plan à contours simples. Supposons que les variables décrivent des chemins fermés tels qu'à aucun moment le *point* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ ne soit un point *singulier*, et reviennent ensemble à leurs valeurs initiales. Si les $n^2$ fonctions prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants, telles que les relations (5), ces fonctions forment un système fondamental de solutions d'un système d'équations de la forme (1), dont les coefficients $a, b, \ldots, l$ sont uniformes, et n'ont pas d'autres points *singuliers* que les points *singuliers* des fonctions.

Nous démontrerons cette proposition en formant un système d'équations tel que (1) auquel satisfassent les $n$ solutions $y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{nk}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Nous aurons, en général, en représentant par $g_{i1}, g_{i2}, \ldots, g_{in}$ les coefficients de l'une quelconque des équations aux dérivées partielles, les relations

$$\frac{\partial y_{ik}}{\partial x_h} = g_{i1}y_{1k} + \ldots + g_{in}y_{nk} \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Nous tirons de ces relations

$$D . g_{ip} = \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & \frac{\partial y_{i1}}{\partial x_h} & \cdots & y_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1n} & \cdots & \frac{\partial y_{in}}{\partial x_h} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix},$$

ce qui permettra de calculer tous les coefficients $a, b, \ldots, l$ des équations (1), puisque D est supposé différent de zéro.

Les conditions d'intégrabilité seront identiquement satisfaites. En effet, supposons calculées les fonctions $a, b, \ldots, l$, nous aurons identiquement

$$\frac{\partial y_{ik}}{\partial x_h} = g_{i1} y_{1k} + \ldots + g_{in} y_{1n}.$$

Les fonctions $y_{ik}$ satisfont donc identiquement aux relations

$$dy_{ik} = (a_{i1} y_{1k} + \ldots + a_{in} y_{nk}) dx_1 + \ldots + (l_{i1} y_{1k} + \ldots + l_{in} y_{nk}) dx_p$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, n),$$

et, dans les seconds membres, les conditions d'intégrabilité doivent être satisfaites. L'une de ces conditions est

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(a_{11} y_{1k} + \ldots + a_{1n} y_{nk}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(b_{11} y_{1k} + \ldots + b_{1n} y_{nk})$$

ou

$$\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} - \frac{\partial b_{11}}{\partial x_1}\right) y_{1k} + \ldots + \left(\frac{\partial a_{1n}}{\partial x_2} - \frac{\partial b_{1n}}{d x_1}\right) y_{nk}$$
$$= b_{11} \frac{\partial y_{1k}}{\partial x_1} - a_{11} \frac{\partial y_{1k}}{\partial x_2} + \ldots + b_{1n} \frac{\partial y_{nk}}{\partial x_1} - a_{1n} \frac{\partial y_{nk}}{\partial x_2}.$$

Éliminons les dérivées partielles $\frac{\partial y_{ik}}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial y_{ik}}{\partial x_2}$, nous aurons une relation de la forme

$$A_1 y_{1k} + \ldots + A_n y_{nk} = 0,$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des fonctions exprimées au moyen des coefficients $a, b, \ldots, l$ et de leurs dérivées partielles. La relation précédente est vraie pour $k = 1, 2, \ldots, n$. On a donc

$$\begin{gathered}
A_1 y_{11} + \ldots + A_n y_{n1} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
A_1 y_{1n} + \ldots + A_n y_{nn} = 0.
\end{gathered}$$

Or le déterminant D est différent de zéro; on doit donc avoir $A_1 = 0, \ldots, A_n = 0$ identiquement, c'est-à-dire que les conditions d'intégrabilité sont satisfaites identiquement dans le système d'équations (1), que l'on a construit.

Les coefficients $a, b, \ldots, l$ sont exprimés par le rapport de deux déterminants. Le dénominateur du rapport est toujours D; le numérateur est le résultat obtenu en remplaçant dans D les éléments d'une colonne par les dérivées partielles des fonctions $y_{ik}$. Les éléments des deux déterminants prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme (5), quand les variables indépendantes ont décrit leurs chemins fermés. Les constantes sont les mêmes pour les éléments homologues des deux déterminants qui forment le rapport. Les deux termes du rapport sont donc multipliés par le même déterminant de constantes. Donc le rapport ne change pas, et par suite les coefficients $a, b, \ldots, l$ sont des fonctions uniformes.

Il résulte du calcul des coefficients $a, b, \ldots, l$ qu'ils ne peuvent avoir d'autres points singuliers que ceux des fonctions $y_{ik}$ elles-mêmes.

Enfin, le déterminant D étant différent de zéro, les fonctions $y_{ik}$ forment un système fondamental de solutions du système d'équations aux différentielles totales que l'on a obtenu.

25. Prenons pour exemple, comme le fait M. Tannery, dans le cas d'une seule variable indépendante, une équation algébrique $f(y_1, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$, rationnelle et entière, du degré $n$ en $y$. Cette équation définit $n$ fonctions $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}$ qui sont régulières en tous les *points* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ du plan, sauf en des *points* où deux des racines deviennent égales. Si les variables décrivent des chemins fermés, ces $n$ fonctions prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes

par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants. En effet, en un *point* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, l'une de ces fonctions doit rester la même, ou être remplacée par l'une des autres, quand les variables sont revenues ensemble au *point* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, après avoir décrit des chemins fermés. Cela résnlte de ce que l'équation algébrique ne peut fournir que $n$ fonctions $y$ différentes. Les fonctions $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}$ sont donc liées par les relations de la forme (5) les plus simples.

Les dérivées de ces fonctions par rapport à l'une quelconque des variables indépendantes seront des fonctions satisfaisant aux mêmes conditions que ces fonctions elles-mêmes. Représentons ces dérivées par $y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n}$.

Les dérivées des fonctions $y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n}$ par rapport à l'une quelconque des variables indépendantes sont encore des fonctions jouissant des mêmes propriétés que les fonctions $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}$.

On pourra répéter cette conclusion à chaque dérivation par rapport à l'une quelconque des variables indépendantes. Posons alors

$$\begin{aligned} y_1 &= y, \\ y_2 &= \frac{\partial y}{\partial x_\alpha}, \\ y_3 &= \frac{\partial^2 y}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n &= \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta \ldots \partial x_\varpi}, \end{aligned}$$

en laissant indéterminés les indices des dérivations successives. Déterminons $y$ par la relation algébrique rationnelle et entière

$$f(y, x_1, x_2 \ldots, x_p) = 0,$$

du degré $n$ en $y$. Les $n^2$ fonctions que l'on obtient ainsi satisfont à un système d'équations tel que (1), lorsque leur déterminant n'est pas nul.

**26.** Formons ce système dans le cas où le coefficient de $y^n$ dans $f(y, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$ est l'unité.

On a, par définition,

$$dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial x_p} dx_p \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Formons séparément chaque coefficient $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$.

Soit $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$ le résultat de l'élimination de $y_1$ entre les deux équations

$$f(y_1, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0.$$

On aura identiquement

$$\varphi = \mathrm{A} f + \mathrm{B} \frac{\partial f}{\partial y_1},$$

A et B étant deux polynômes entiers et rationnels en $y_1, x_1, x_2, \ldots, x_p$, de degrés respectifs au plus $n-2$ et $n-1$ par rapport à $y_1$. Nous avons donc identiquement

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_\alpha} = -\frac{\mathrm{B} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}}{\mathrm{B} \frac{\partial f}{\partial y_1}} = -\frac{\mathrm{B} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}}{\varphi}.$$

Au moyen de l'équation

$$f(y_1, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0,$$

on peut réduire les puissances supérieures de $y_1$ au plus à l'exposant $n-1$, et l'on aura

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_\alpha} = \frac{\mathrm{P}_1}{\varphi},$$

$\mathrm{P}_1$ étant un polynôme entier et rationnel en $y_1, x_1, x_2, \ldots, x_p$ contenant $y_1$ au plus au degré $n-1$.

On aura ensuite

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\mathrm{P}_1}{\varphi} = \frac{\mathrm{P}_2}{\varphi^2},$$

$\mathrm{P}_2$ étant un polynôme de même nature que $\mathrm{P}_1$.

On aura des résultats analogues pour les dérivées partielles successives de $y_1$, et l'on pourra poser

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{P_{ik}}{\varphi^i},$$

$P_{ik}$ étant un polynôme de même nature que $P_1$ et $P_2$.

Mais les définitions donnent les relations

$$y_2 = \frac{P_1}{\varphi}, \quad y_3 = \frac{P_2}{\varphi^2}, \quad \ldots, \quad y_n = \frac{P_{n-1}}{\varphi^{n-1}};$$

on a donc $n$ équations, entre lesquelles on peut éliminer $y_1^0, y_1^2, \ldots, y_1^{n-1}$, c'est-à-dire $n - 1$ quantités.

Le résultat de l'élimination est de la forme

$$Q_0 \frac{\partial y_i}{\partial x_k} + Q_1 y_1 + \ldots + Q_n y_n = 0,$$

ce qui montre que $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$ est de la forme $g_1 y_1 + \ldots + g_n y_n$ des coefficients différentiels des équations (1).

On voit ici immédiatement que $g_i$ est une fonction uniforme, comme fonction rationnelle de $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

# CHAPITRE III.

**27.** Appliquons les résultats obtenus dans les deux Chapitres précédents aux systèmes d'équations à une seule variable indépendante.

Dans le cas général, nous avons fait varier les variables indépendantes de sorte que, pour aucun groupe de valeurs de ces variables, on n'obtienne un point singulier des coefficients $a, b, \ldots, l$. Cela nous a amené à désigner non seulement les chemins tracés par les variables, mais encore les marches suivies par les variables. Nous n'aurons plus maintenant qu'une seule variable indépendante; il suffira, quelle que soit la marche choisie pour elle, que cette variable suive un chemin ne contenant aucun point singulier.

Les systèmes d'équations qui nous occuperont maintenant peuvent se mettre sous la forme

$$(6) \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous supposerons que les coefficients $a_{ik}$ sont des fonctions uniformes dans une portion du plan limitée par un contour simple, ou même dans tout le plan, et continues en tous les points de cette région, sauf en des points singuliers isolés. La variation continue de $x$, d'un point $x_1$ à un point X, sur un chemin qui ne passe par aucun point singulier, détermine $n$ fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, uniformes dans toute région du plan qui ne contient aucun point singulier et continues en tous les points du chemin. Ces fonctions satisfont au système d'équations (6), et peuvent prendre au point $x$ des valeurs $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ arbitrairement choisies.

Les $n$ fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, qui sont égales à $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ pour $x = x_1$, forment une *solution*.

Le déterminant d'un *système fondamental de solutions* a pour expression

$$D = Ce^{\int (a_{11}+\ldots+a_{nn})dx},$$

C étant une constante différente de zéro.

Si l'on fait tourner la variable autour d'un point singulier, les éléments d'un système fondamental de solutions prendront des valeurs nouvelles liées aux anciennes par les relations (5), linéaires et homogènes à coefficients constants, et le déterminant de ces coefficients sera différent de zéro.

Il existera, parmi les systèmes fondamentaux, un système dont les éléments auront une variation simple, lorsque la variable fera le tour d'un point singulier.

Soient $n^2$ fonctions $y_{ik} (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ de $x$ continues, sauf en des points singuliers isolés, et uniformes dans toute région du plan à contour simple ne renfermant aucun point singulier; si, lorsque la variable fait le tour d'un point singulier, les nouvelles valeurs $Y_{ik}$ sont liées aux anciennes valeurs $y_{ik}$ par les relations (5), et si le déterminant de ces fonctions ne s'annule qu'aux points singuliers, ces $n^2$ fonctions forment un système fondamental de solutions d'un système d'équations différentielles tel que (6), à coefficients uniformes dans tout le plan.

23. On sait qu'on peut ramener à l'intégration d'un système d'équations de la forme (6) l'intégration de l'équation différentielle linéaire et homogène d'ordre $n$,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = Q_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + Q_n y.$$

Il suffit de poser

$$\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}} = y_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

et

$$y = y_n;$$

on obtient le système d'équations

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= Q_1 y_1 + \ldots + Q_n y_n, \\ \frac{dy_k}{dx} &= y_{k-1} \quad (k = 2, 3, \ldots, n). \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Réciproquement, le système (7) se ramène à l'équation différentielle par la substitution inverse.

Le déterminant d'un système de solutions du système d'équations (7) a la forme

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & \frac{dy_1}{dx} & \ldots & \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ y_n & \frac{dy_n}{dx} & \ldots & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

S'il est différent de zéro, les $n$ fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont linéairement indépendantes. On les appelle *intégrales de l'équation différentielle d'ordre n*, et l'ensemble de ces $n$ intégrales forme un *système fondamental d'intégrales* de cette équation différentielle.

On a

$$D = Ce^{\int Q_1 dx},$$

C étant une constante.

Soient $n$ fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linéairement indépendantes. Si les nouvelles valeurs de ces fonctions, quand la variable a fait le tour d'un point singulier, sont liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme

$$Y_i = C_{i1} y_1 + \ldots + C_{in} y_n,$$

ces fonctions forment un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle d'ordre $n$, linéaire et homogène, à coefficients uniformes.

**29.** Soit donné un système fondamental de solutions du système d'équations (6). Dans le voisinage d'un point singulier, les nouvelles valeurs $Y_{ik}$ sont liées aux anciennes $y_{ik}$ par les relations (5). Si les fonctions $y_{i1}, \ldots, y_{in}$ qui ont le premier indice commun ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants, ces $n$ fonctions forment un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle d'ordre $n$. S'il en est autrement, on peut ramener ces fonctions à être en moindre nombre, et celles qui resteront satisferont à une équation différentielle d'ordre moindre que $n$.

On voit ainsi que l'on peut obtenir séparément, par des équations différentielles linéaires et homogènes d'un ordre au plus égal à $n$, les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qui sont définies simultanément par le système (6). Ce résultat est bien connu.

**30.** Soient $y_1, y_2, \ldots, y_m$ $m$ fonctions de $x$ satisfaisant, pour un point situé à l'origine, aux conditions

$$\begin{aligned} Y_1 &= \omega y_1, \\ Y_2 &= \omega y_2 + y_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_m &= \omega y_m + y_{m-1}. \end{aligned}$$

Posons $\frac{\log x}{2\pi\sqrt{-1}} = u$, de sorte que $u$ augmente de 1 quand la variable $x$ fait le tour de l'origine. Soit $f(u)$ une fonction entière du degré $m-1$ formée arbitrairement avec $u$ et des coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ uniformes dans le domaine de l'origine. On pourra donner aux fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les formes

$$\begin{aligned}
y_m &= x^r f(u),\\
y_{m-1} &= x^r \omega \Delta f(u),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y_{m-k} &= x^r \omega^k \Delta_k f(u),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y_1 &= x^r \omega^{m-1} \Delta_{m-1} f(u),
\end{aligned}$$

avec

$$f(u) = A_0 + A_1 u + \ldots + A_{m-1} u^{m-1},$$

en définissant dans ces expressions $r$ par la relation $e^{2\pi r\sqrt{-1}} = \omega$, et en représentant par $\Delta_k f(u)$ la différence d'ordre $k$ de $f(u)$ par rapport à l'accroissement 1 de $u$. On voit que $\Delta_{m-1} f(u) = 1.2\ldots(m-1) A_{m-1}$ ne contient pas $u$, et que $y_1$ est la seule des fonctions $y$ qui ne contienne pas de logarithmes.

D'abord, les expressions précédentes satisfont aux relations imposées. En effet, on a

$$Y_{m-k} = x^r \omega^{k+1} \Delta_k f(u+1) = x^r \omega^{k+1} [\Delta_k f(u) + \Delta_{k+1} f(u)] = \omega y_{m-k} + y_{m-k-1}.$$

Ensuite, on peut toujours donner aux fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les formes précédentes. En effet, $y_1 x^{-r}$ est une fonction uniforme dans le domaine de l'origine, et on peut la représenter par $\omega^{m-1} \Delta_{m-1} f(u)$; on tire de là

$$y_1 = x^r \omega^{m-1} \Delta_{m-1} f(u).$$

On peut poser ensuite

$$y_2 = \omega^{m-2} x^r z,$$

d'où

$$Y_2 = \omega^{m-1} x^r Z.$$

Si l'on veut satisfaire à la relation $Y_2 = \omega y_2 + y_1$, on posera

$$Z = z + \Delta_{m-1} f(u).$$

En représentant par $[\varphi]'$ ce que devient une expression $\varphi$, et remarquant que l'on a

$$\Delta_{m-1} f(u) = \Delta_{m-2} f(u+1) - \Delta_{m-2} f(u) = [\Delta_{m-2} f(u)]' - \Delta_{m-2} f(u),$$

on voit qu'on a

$$[z - \Delta_{m-2} f(u)]' = z - \Delta_{m-2} f(u);$$

$z - \Delta_{m-2} f(u)$ est donc une fonction uniforme de $x$.

Dans le domaine de l'origine, on peut poser simplement

$$z = \Delta_{m-2} f(u),$$

en réunissant cette fonction uniforme au terme indépendant de $u$ dans $\Delta_{m-2} f(u)$.

On a ainsi

$$y_2 = \omega^{m-2} x^r \Delta_{m-2} f(u).$$

On remontera ainsi de proche en proche.

La suite des expressions précédentes montre que l'élément $y_m$, qui contient la plus haute puissance de $\log x$, renferme les $m$ fonctions uniformes de $x$ dans le domaine de l'origine, qui entrent dans le groupe des expressions $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Les relations entre les coefficients des puissances de $u$ dans les différents éléments du groupe sont mises en évidence par la forme des expressions précédentes. Leur nombre est

$$\frac{m(m+1)}{2} - m = \frac{m(m-1)}{2}.$$

**31.** Considérons les solutions du système d'équations (6), quand la variable fait le tour d'un point singulier situé à l'origine. L'équation fondamentale relative à ce point singulier peut avoir toutes ses racines distinctes. Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ces racines. Il existera un système fondamental de solutions dont les éléments pourront se mettre sous la forme

$$y_{ik} = x^{r_k} \varphi_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, n, \ k = 1, 2, \ldots, n),$$

en posant $\omega_k = e^{2\pi r_k \sqrt{-1}}$, et en représentant par $\varphi_{ik}$ une fonction uniforme dans le domaine de l'origine.

32. L'équation fondamentale peut avoir des racines multiples. On peut alors former un système fondamental, composé de groupes de solutions correspondant aux racines distinctes.

Considérons l'un de ces groupes correspondant à une racine $\omega$. On pourra décomposer ce groupe en sous-groupes dans chacun desquels on aura

$$\begin{aligned}
Y_{i1} &= \omega y_{i1},\\
Y_{i2} &= \omega y_{i2} + y_{i1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,\\
Y_{im} &= \omega y_{im} + y_{i,m-1}.
\end{aligned}$$

D'après un paragraphe précédent, on pourra donner aux solutions les formes

$$\begin{aligned}
y_{im} &= x^r f_i(u),\\
y_{i,m-1} &= x^r \omega \Delta f_i(u),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
y_{i,m-k} &= x^r \omega^k \Delta_k f_i(u),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
y_{i1} &= x^r \omega^{m-1} \Delta_{m-1} f_i(u).
\end{aligned}$$

33. Si le point singulier est au point $\infty$ sur la sphère, soit $\omega$ une racine de l'équation fondamentale, posons

$$r = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}\log\omega},$$

une solution prendra la forme

$$\begin{aligned}
y_1 &= x^{-r}\varphi_1,\\
y_2 &= x^{-r}\varphi_2,\\
&\dots\dots\dots\dots,\\
y_n &= x^{-r}\varphi_n,
\end{aligned}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant dans le domaine du point $\infty$ des fonctions uniformes et continues qui ne sont pas toutes nulles à la fois.

Si l'équation fondamentale admet des racines multiples, on modifiera facilement de même les formes données précédemment pour un point singulier à l'origine.

**34.** On remarquera que, si l'on connait une solution du système (6) de la forme

$$y_1 = x^r(\varphi_{\lambda 1} + \varphi_{\lambda 2} \log x + \ldots + \varphi_{\lambda\lambda} \log^{\lambda-1} x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y_n = x^r(\theta_{\lambda 1} + \theta_{\lambda 2} \log x + \ldots + \theta_{\lambda\lambda} \log^{\lambda-1} x),$$

les $n$ éléments $x^r \varphi_{\lambda\lambda}$, ..., $x^r \theta_{\lambda\lambda}$ forment aussi une solution du système (6). En effet, on le vérifie en remplaçant dans les équations (6) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par leurs expressions connues et en égalant à zéro le coefficient de $\log^{\lambda-1} x$.

On remarquera encore que les propriétés que nous venons d'étudier s'appliquent aux solutions des systèmes d'équations aux différentielles totales, lorsqu'une seule des variables indépendantes varie. Les fonctions $\varphi$ sont alors des doubles séries en $x$, dont les coefficients dépendent des valeurs fixes des autres variables indépendantes.